УДК 512.64+512.55

КЛІТКОВО-ДІАГОНАЛЬНО ПАРАЛЕЛЬНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ[1]

Джалюк Н.С.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
nataliya.dzhalyuk@gmail.com

Нехай R – комутативна область головних ідеалів, $M(n,R)$ – кільце $n \times n$-матриць над R, D^A – канонічна діагональна форма матриці $A \in M(n,R)$, тобто

$$D^A = UAV = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0), \quad \mu_r \neq 0,$$

де $\mu_i | \mu_{i+1}$, $i = 1,...,r-1$, U, $V \in GL(n,R)$. Діагональну матрицю $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, в якій $d_i | d_{i+1}$, $i = 1,...,n-1$, називають d-матрицею.

Нагадаємо, що матриці $B_1, B_2 \in M(n,R)$ називають асоційованими справа (зліва), якщо існує така матриця $V \in GL(n,R)$ ($U \in GL(n,R)$), що $B_2 = B_1 V$ ($B_2 = UB_1$).

Задача факторизації матриць над кільцями головних ідеалів сформульована З.І. Боревичем [1]. Він запропонував описувати факторизацій матриць над такими кільцями з точністю до асоційовності.

Факторизації $A = B_1 C_1$, $A = B_2 C_2$, $B_i, C_i \in M(n,R)$, $i = 1,2$, матриці $A \in M(n,R)$ називають асоційованими, якщо існує така матриця $V \in GL(n,R)$, що $B_2 = B_1 V$, $C_2 = V^{-1} C_1$.

У праці [1] З.І. Боревич зокрема вказав умови існування єдиного з точністю до асоційовності розкладу матриці на множники, які мають задані канонічні діагональні форми.

Усі, з точністю до асоційовності, факторизації матриці над комутативною областю головних ідеалів R, паралельні до факторизації її канонічної діагональної форми, описані в [2].

[1] *Дослідження виконано за фінансової підтримки гранту НАН України для молодих учених (Державний реєстраційний номер 0111U005741).*

Поняття клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць, паралельних до факторизацій визначників їх діагональних кліток та паралельних до факторизацій канонічних діагональних форм їх діагональних кліток, введені в [3]. Там же вказані критерії однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць над адекватними кільцями. Умови існування клітково-трикутних факторизації кліткових матриць над кільцями головних ідеалів, паралельних до факторизацій визначників їх діагональних кліток, встановлені у праці [4].

У цій праці описуються всі з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельні факторизації неособливих клітково-діагональних матриць над кільцем R .

Зрозуміло, що клітково-діагональна матриця $A \in M(n, R)$, тобто

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{Vmatrix},$$

яку записуватимемо у вигляді

$$A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k), \tag{1}$$

де $A_i \in M(n_i, R)$ – діагональні клітки матриці A , $i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, може мати розклад на множники, який не є клітково-діагональним. До того ж, така факторизація клітково-діагональної матриці може не бути асоційованою до жодної клітково-діагональної факторизації цієї матриці.

Приклад. Нехай $R = \mathbb{Z}$ та

$$A = \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right\Vert = \operatorname{diag}(A_1, A_2),$$

де

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}, \; A_2 = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Матриця A має факторизацію

$$A = BC = \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\Vert \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\Vert,$$

Ця факторизація не є асоційованою до жодної клітково-діагональної факторизації матриці A, оскільки лівий множник B не є асоційованим справа до матриці

$$\tilde{B} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\|,$$

бо матриці B і $\tilde{B}$ це дві різні форми Ерміта.

У праці [4] виділено класи клітково-діагональних матриць над R, які мають з точністю до асоційовності лише клітково-діагональні факторизацій. У цьому випадку опис факторизацій таких матриць зводиться до опису факторизацій їх діагональних кліток.

Лема. Клітково-діагональні матриці $A = \mathrm{diag}(A_1,...,A_k)$ та $B = \mathrm{diag}(B_1,...,B_k)$, де $A_i, B_i \in M(n_i, R)$, $i = 1,...,k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, асоційовані справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли їх відповідні діагональні клітки асоційовані справа (зліва).

Нехай далі $A \in M(n, R)$ – неособлива клітково-діагональна матриця вигляду (1). Позначимо через D клітково-діагональну матрицю вигляду

$$D = \mathrm{diag}(D^{A_1},...,D^{A_k}), \tag{2}$$

де D^{A_i} – канонічні діагональні форми діагональних кліток A_i, $i = 1,...,k$, матриці A, тобто

$$D^{A_i} = U_i A_i V_i = \mathrm{diag}(\mu_{i1},\ldots,\mu_{in_i}), \tag{3}$$

$\mu_{ij} \mid \mu_{i,j+1}$, $j = 1,...,n_i - 1$, $U_i, V_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1,...,k$. Зрозуміло, що матриця A клітково-діагонально еквівалентна до D, тобто $D = UAV$, де $U = \mathrm{diag}(U_1,\ldots,U_k)$, $V = \mathrm{diag}(V_1,\ldots,V_k)$.

Нехай матриця D розкладена на клітково-діагональні множники, тобто

$$D = \Phi\Psi = \mathrm{diag}(\Phi_1,\ldots,\Phi_k)\mathrm{diag}(\Psi_1,\ldots,\Psi_k). \tag{4}$$

де

$$\Phi_i = \mathrm{diag}(\varphi_{i1},\ldots,\varphi_{in_i}),\ \Psi_i = \mathrm{diag}(\psi_{i1},\ldots,\psi_{in_i})$$

та Φ_i є d-матрицями, $i = 1,...,k$.

Означення. Клітково-діагональну факторизацію

$$A = BC = \mathrm{diag}(B_1,...,B_k)\mathrm{diag}(C_1,...,C_k),$$

де $B_i, C_i \in M(n_i, R)$, $i = 1,...,k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, клітково-діагональної матриці A таку, що $D^{B_i} = \Phi_i$ та матриці C_i еквівалентні до Ψ_i, $i = 1,...,k$, називаємо клітково-діагонально паралельною до факторизації (4) матриці D або коротко клітково-діагонально паралельною факторизацією матриці A.

Теорема. Нехай матриця D вигляду (2), що еквівалентна до неособливої клітково-діагональної матриці A, зображається у вигляді добутку (4). Тоді факторизації

$$A = BC = \mathrm{diag}(U_1^{-1}\Phi_1, ..., U_k^{-1}\Phi_k)\mathrm{diag}(\Psi_1 V_1^{-1}, ..., \Psi_k V_k^{-1}),$$

де U_i, V_i, $i = 1,...,k$, – всеможливі пари оборотних матриць над R, які задовольняють співвідношення (3), це всі з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельні факторизації матриці A.

1. *Боревич З. И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей. Тарту, 21-24 сен. 1976 г. – Тез. сообщ. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976.– С. 19.
2. *Петричкович В.М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, №4. – С. 96-100.
3. *Джалюк Н.С., Петричкович В.М.* Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв'язки // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. **8**. – С. 7-17.
4. *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. вісник НТШ. – 2007. – т. **4**. – С. 79-89.

THE BLOCK DIAGONAL PARALLEL FACTORIZATIONS OF MATRICES OVER PRINCIPAL IDEAL DOMAINS

The factorization $A = BC = \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_k)\mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_k)$ *of the block diagonal matrix* $A = \mathrm{diag}(A_1, ..., A_k)$ *such that the matrices* B_i *and* C_i *are equivalent to the matrices* Φ_i *and* Ψ_i, $i = 1,...,k$, *respectively, is called block diagonal factorizations parallel to the factorization* $D = \Phi\Psi = \mathrm{diag}(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)\mathrm{diag}(\Psi_1, \ldots, \Psi_k)$ *of the block diagonal matrix* $D = \mathrm{diag}(D^{A_1}, ..., D^{A_k})$, *where* D^{A_i} *are the canonical diagonal forms of the diagonal blocks* A_i, $i = 1,...,k$. *We describe all (up to the association) block diagonal parallel factorizations of nonsingular block diagonal matrices over commutative principal ideal domains.*