

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ У ТОНКИХ ВОЛОКНАХ

Бойко З. В.

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,
zoza-7@mail.ru

У зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій, а також широким використанням в інженерній практиці тонкоплівкових та тонковолокнистих систем важливого значення набуває побудова та дослідження математичних моделей, які достатньо повно враховують властивості приповерхневих областей тіла та структуру матеріалу. До таких моделей належать, зокрема, нелокальні моделі механіки суцільного середовища [1, 2]. Одним із ефективних підходів до побудови нелокальних моделей є локально градієнтний підхід у термомеханіці [3, 4].

Метою цієї роботи є дослідження на прикладі модельної задачі для структурно неоднорідного суцільного циліндра поверхневого натягу у тонких волокнах.

Розглянемо необмежений структурно неоднорідний суцільний ізотропний деформівний круговий циліндр радіуса R_0 , віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) , вісь $0z$ якої співпадає з віссю циліндра. Вважаємо, що циліндр вільний від силового навантаження, а на його поверхні $r = R_0$ задано постійне значення густини. За такої зовнішньої дії рівноважний стан тіла залежить лише від координати r і описується системою рівнянь [5]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ r \frac{d^2\sigma_{\varphi\varphi}}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{K - 2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right] \right\}, \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[\frac{K - 2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right], \\ \frac{d^2\Pi_{Mr}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Pi_{Mr}}{dr} - \left(\frac{K\gamma}{\alpha K - \beta^2} + \frac{1}{r^2} \right) \Pi_{Mr} &+ \frac{\beta}{3(\alpha K - \beta^2)} \frac{d\sigma}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} – компоненти тензора напружень $\hat{\sigma}$; $\sigma = \hat{\sigma} \cdot \hat{I}$; \hat{I} – одиничний тензор; Π_{Mr} – компонента вектора збурення маси $\vec{\Pi}_M$; K , G – модулі пружності; α, β, γ – характеристики матеріалу.

Граничні умови сформульованої задачі такі

$$\sigma_{rr}|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right|_{r=R_0} = \rho_a, \quad (2)$$

де ρ_a – задане поверхнєве значення збурення густини, що враховує геометричну неоднорідність поверхні тіла [5].

Умови (2) необхідно доповнити умовами обмеженості розв'язку на осі циліндра

$$|\Pi_{Mr}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{rr}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{\varphi\varphi}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{zz}(r)| < \infty \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

а також умовою рівності нулю головного вектора зусиль у довільному поперечному перерізі циліндра

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \sigma_{zz} r dr d\varphi = 0. \quad (3)$$

Розв'язок задачі (1)-(3) має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K+4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[\frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K+4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[I_0(\xi r) - \frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{zz}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K+4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[I_0(\xi r) - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \Pi_{Mr}(r) &= \frac{\rho_a}{\xi I_0(\xi R_0)} I_1(\xi r). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $I_1(\xi r)$, $I_0(\xi r)$ – модифіковані функції Бесселя відповідно першого та нульового порядків; $\xi = \sqrt{\frac{\gamma(K+4/3G)}{\alpha(K+4/3G)-\beta^2}}$.

Аналіз формул (4) показує, що величина $1/\xi$ є характерним розміром приповерхневої неоднорідності. Напруження σ_{rr} дорівнюють нулю на поверхні циліндра і монотонно зменшуються, досягаючи мінімальних значень на осі

циліндра $r = 0$. Напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} найбільші на поверхні $r = R_0$, де вони є розтягуючі.

Використаємо отриманий розв'язок для вивчення поверхневого натягу f_p , який є інтегральною характеристикою розтягуючих приповерхневих напружень

$$f_p = \frac{1}{R_0} \int_{r_a}^{R_0} \sigma_{\varphi\varphi} r dr,$$

де r_a – точка переходу розтягуючих напружень у стискаючі.

Визначення значення r_a зводиться до розв'язування такого рівняння

$$I_0(\xi r_a) - \frac{I_1(\xi r_a)}{\xi r_a} = \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0}.$$

Обмежимося наближенням $\exp(\xi R_0) \gg \xi R_0 \gg 1$. Якщо скористатись асимптотичними розкладами модифікованих функцій Бесселя та врахувати, що точка r_a близька до поверхні циліндра, то для r_a отримаємо

$$r_a = R_0 - \frac{1}{\xi} \ln(\xi R_0).$$

Тоді з урахуванням (4), для поверхневого натягу запишемо

$$f_p = \frac{2G\beta\rho_a}{\xi(K + 4/3G)} \left[1 - \frac{\ln(\xi R_0)}{\xi R_0} - \frac{5}{2\xi R_0} \right]. \quad (5)$$

Зі збільшенням радіуса циліндра R_0 величина f_p прямує до значення поверхневого натягу у півпросторі

$$f_p^\infty = \frac{2G\beta\rho_a}{\xi(K + 4/3G)},$$

тобто поверхневому натягу властивий розмірний ефект. Така поведінка f_p є аналогічною до залежності максимальних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ від радіуса. Однак напруження швидше досягають свого усталеного значення. Тому поверхневий натяг f_p не є однозначною характеристикою поверхневих напружень, а суттєво залежить від розміру області (точки x_a), у якій приповерхневі напруження є розтягуючими. Це й ілюструють графіки на рис. 1, на якому показано залежність приведенного поверхневого натягу

$F = f_p / f_p^\infty$ (суцільна лінія) та приведених поверхневих напружень $S = \sigma_{\text{фр}} / \sigma_0$, $\sigma_0 = 2G\beta r_a / (K + 4/3G)$ (штрихова лінія) від радіуса циліндра.

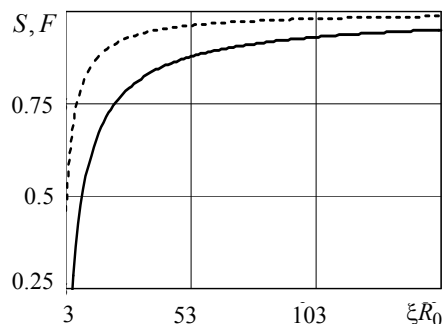


Рис. 1. Залежність поверхневих напружень та поверхневого натягу від радіуса циліндра

Зазначимо, що оскільки поверхневий натяг вимірюється експериментально, то його можна використати для визначення (оцінки) нових параметрів моделі. У даному випадку, приймаючи, що значення K , G , ξ є відомі, на його основі можна визначити коефіцієнт β .

1. *Eringen A. C.* Nonlocal Continuum Field Theories. – Springer, 2002. – 376 pp.
2. *Ghoniem N. M., Busso E. P., Kioussis N.* Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview // Philosophical Magazine. – 2003. – Vol. 83, Nos. 31-34. – P. 3475–3528.
3. *Бурак Я. И., Нагірний Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, №12. – С. 3-23.
4. *Нагірний Т. С.* Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням поверхневих явищ / Автореф. дис. д. ф.-м. н. – Львів, 1998. – 32 с.
5. *Нагірний Т. С., Червінка К. А., Бойко З. В.* До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 3. – С. 199-206.

SURFACE TENSION INVESTIGATION IN THIN FIBRES

Within the local gradient approach in thermomechanics the boundary value problem for structurally heterogeneous continuous cylinder is formulated and solved. On this basis a surface tension in thin fibres is investigated. Comparison of size effects of a surface stress and surface tension is carried out. It is specified possibility to use of a surface tension for determination of model parameters.