УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНИЙ НАГРІВ ОБ'ЄМНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА ЦИЛІНДРА ЗІ ЗМІННИМИ ТЕПЛОФІЗИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ПРИПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ

Бобик Б.Я

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, labmtd@iapmm.lviv.ua

Сучасні елементи конструкцій часто мають неоднорідну структуру, зокрема приповерхневу, що зумовлено як цілеспрямованим формуванням спеціальних властивостей приповерхневих шарів, так і їх зміною під час виготовлення та експлуатації за інтенсивного фізико-механічного навантаження. Тому важливе значеня має побудова розширених механічних і математичних моделей, які враховують як неоднорідність приповерхневих шарів тіла й залежність їх фізико-механічних властивостей від часу, так і вплив фізико-механічних процесів на розподіл температури, а опосередковано і на напружено-деформований стан в тілі.

У багатьох випадках нагрівання тіла внаслідок дії процесів різноманітної фізичної природи можна враховувати за допомогою об'ємних джерел тепла. Наприклад ними моделюється нагрів високочастотним електромагнітним полем, виділення тепла за хімічних реакцій, що відбуваються всередині тіла, перетворення частини енергії деформування в тепло під час циклічного механічного навантаження та ін. [1]. Тонкі приповерхневі шари моделюють оболонками, а їх вплив на фізико-механічну поведінку тіла часто враховують під час постави задачі за допомогою ускладнених нестаціонарних граничних умов, в які входять зведені теплофізичні параметри шару [2]. Залежність від часу властивостей шару задають змінними коефіцієнтами граничних умов [4].

Розглянемо довгий суцільний циліндр радіуса r_1, тонкий приповерхневий шар якого має неоднакові з основним матеріалом змінні з часом теплофізичні властивості. Циліндр обмінюється теплом з довкіллям сталої температури і нагрівається рівномірно розподіленими по об'єму джерелами тепла змінної інтенсивності. Запишемо в циліндричній системі координат рівняння нестаціонарної теплопровідності за наявності в циліндрі джерел тепла [2]

$$\Delta T(r,\tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} + W(\tau), \; 0 \le r < r_1, \qquad (1)$$

де T – температура циліндра, $W(\tau)$ – інтенсивність джерел тепла, α – коефіцієнт температуропровідності, Δ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Вплив приповерхневого шару на процес теплопровідності в циліндрі задаємо за допомогою узагальнених некласичних граничних умов [2]

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} + B(\tau)\cdot\left[T(r,\tau) - T_C\right] + H(\tau)\cdot\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0\ ,\ r = r_1\ . \qquad (2)$$

Тут $B(\tau)$ та $H(\tau)$ –змінні з часом коефіцієнт тепловіддачі з поверхні циліндра та зведена теплоємність приповерхневого шару, T_C – температура середовища. Нестаціонарна гранична умова (2) некласична, вона дозволяє враховувати кінетику процесу теплопровідності на поверхні тіла.

В початковий момент часу задаємо розподіл температури за товщиною циліндра, а на осі циліндра — умови обмеженості розв'язку і симетрії

$$T(r,\tau) = T_0(r)\ ,\ \tau = 0\ , \qquad (3)$$

$$T(r,\tau) < \infty\ ,\ \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} = 0\ ,\ r = 0\ . \qquad (4)$$

Застосовуючи розвинуту раніше методику розв'язування задач з некласичними нестаціонарними умовами [3] для випадку змінних коефіцієнтів [4], розділимо граничну умову (2) на класичну і некласичну частини, ввівши межову зв'язувальну функцію $\Phi(\tau)$. Це дає можливість записати структуру розв'язку некласичної задачі у вигляді розвинення в ряд Фур'є за власними функціями класичної задачі з граничною умовою першого роду

$$T(r,\tau) = \frac{r^2}{r_1^2}\cdot\Phi(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau)\cdot J_0(\alpha\mu_n r)\ . \qquad (5)$$

де μ_n – нулі функції Бесселя $J_0(\mu)$, а $E_n(\tau)$ має вигляд:

$$E_n(\tau) = \frac{2}{J_1(\alpha\mu_n r_1)}\left\{\frac{T_0}{\alpha\mu_n r_1}e^{-\mu_n^2\tau} - \Phi(\tau)\cdot\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_n^2}{\alpha\mu_n r_1}\int_0^{\tau}\Phi(t)e^{-\mu_n^2(\tau - t)}dt + \frac{1}{(\alpha r_1)^2 J_1(\alpha\mu_n r_1)}\int_0^{\tau} W(t)e^{-\mu_n^2(\tau - t)}dt\right\}$$

Записана структура розв'язку містить невідому функцію $\Phi(\tau)$, для якої отримуємо, після задоволення некласичної частини граничної умови (2), інтегро-диференційне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерри:

$$H(\tau)\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\tau}+\left[\frac{2}{r_1}+B(\tau)\right]\Phi(\tau)-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{T_0}{r_1}e^{-\mu_n^2\tau}-\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2-4}{(\alpha\mu_n r_1)^2}\cdot\frac{\Phi(\tau)}{r_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_n^2}{r_1}\int_0^\tau\Phi(t)e^{-\mu_n^2(\tau-t)}dt+\frac{\kappa\mu_n}{\alpha r_1^2 J_1(\alpha\mu_n r_1)}\int_0^\tau W(t)e^{-\mu_n^2(\tau-t)}dt\right\}=B(\tau)T_C \quad (6)$$

Інтегро-диференційне рівняння (6) розв’язуємо, апроксимуючи функцію $\Phi(\tau)$ на рівних часових проміжках кубічними сплайнами. Коефіцієнти сплайнів визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, що записуються з умов спряження сплайнів та рівняння (6) записаного для кожного вузла розбиття.

За знайденою функцією $\Phi(\tau)$ з (5) визначаємо температуру в циліндрі. Температурні напруження можна обчислити за відомою температурою із співвідношень Дюгамеля-Неймана, наприклад після використання подання Папковича-Нойбера для розв’язків рівнянь рівноваги в переміщеннях [2].

Температурне поле в циліндрі досліджено за різних законів зміни в часі як інтенсивності джерел тепла, так і зведених теплофізичних параметрів приповерхневого шару. Початкова температура циліндра вважалася ста-лою за його товщиною, температура середовища приймалась рівною нулеві.

На рис. 1 наведено результати порівняльного аналізу зміни з часом безрозмірної поверхневої температури однорідного циліндра ($H=0$) для сталого зведеного параметра тепловіддачі з поверхні $B=2$ за різних законів задання інтенсивності джерел тепла, а саме: відсутності джерел, сталої інтенсивності, лінійно зростаючої з часом, спадної за експоненційним законом. Бачимо, що визначальний вплив на температуру поверхні має інтенсивність джерел тепла. Однак в окремих випадках можна так підібрати параметр B, що через деякий час наставатиме баланс між нагрівом циліндра та його охолодженням довкіллям ($W=1$, $B=2$).

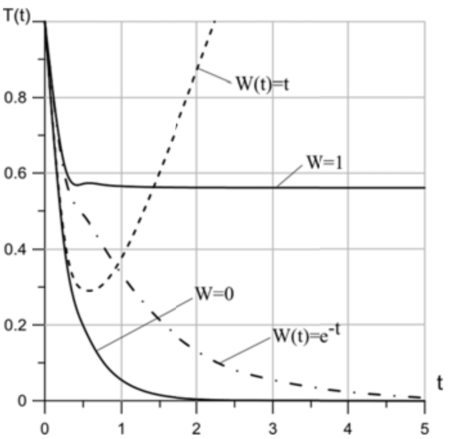
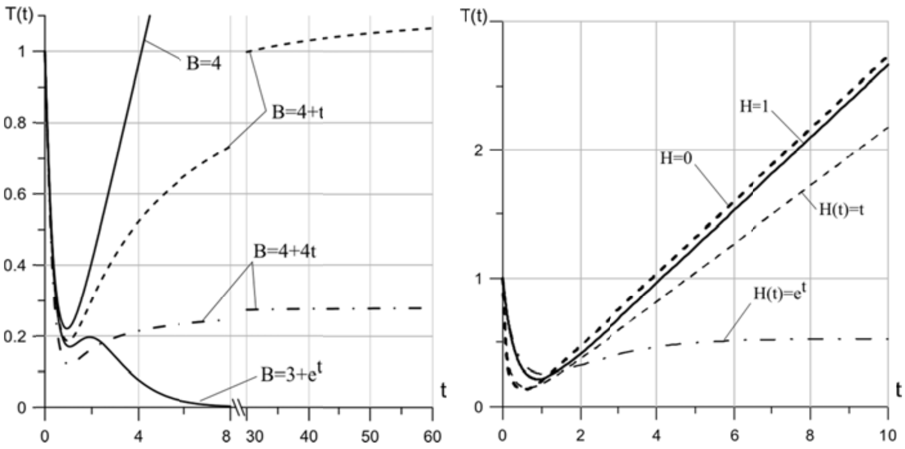


Рис. 1.

Зміну в часі температури поверхні циліндра, якщо зведений параметр теплоємності приповерхневого шару сталий ($H=1$), а інтенсивність джерел тепла лінійно зростає ($W=\tau$), для різних лінійних законів зміни з часом параметра $B(\tau)$ наведено на рис. 2. Проведений аналіз показує, що підбираючи лінійний закон зміни $B(\tau)=4+4\tau$ теж можна домогтися рівноваги між нагрівом і охолодженням циліндра. За експоненційного закону $B(\tau) = 3 + e^{\iota}$ температура циліндра швидко прямує до температури довкілля при невеликій ділянці зростання в кінці першої третини цього процесу.

На рис. 3 за сталого $B = 4$ показано зміну температури поверхні циліндра з джерелами тепла сталої інтенсивності $W = 1$. Бачимо, що вплив параметра $H(\tau)$ є протилежним до впливу $B(\tau)$: збільшення $H(\tau)$ спричинює зниження температури за заданого закону зміни інтенсивності джерел тепла і сталого B. Крім того вплив цього параметра є слабшим ніж $B(\tau)$. Так балансу між нагріванням та охолодженням можна домогтися лише за експоненційного закону зміни $H(\tau) = \mathrm{e}^{\tau}$, тоді як для $B(\tau)$ цього можна досягнути за лінійного закону.



Отримані розв'язки можуть бути використані для розробки методів ідентифікації змінних з часом межових теплофізичних параметрів циліндричних тіл з тонкими приповерхневими шарами, які нагріваються об'ємними джерелами тепла.

1. *Веселовский В. Б., Берлов А. В.* Температурные поля многослойных элементов конструкций при воздействии полей различной физической природы // Металлург. теплотехника. – Днепропетровск. – 2009. – Вып. 1 (16). – С. 21-33.
2. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наукова думка, 1995. – 460 с.
3. *Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 186-194.

4. *Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я.* Термонапружений стан циліндра з тонким приповерхневим шаром, теплофізичні параметри якого змінюються з часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, №4. – С. 90-105.

NONSTATIONARY HEATING WITH SPACED DISTRIBUTED HEAT SOURCES OF CYLINDER HAVING THIN SURFACE LAYER WITH TIME-DEPENDENT THERMAL PROPERTIES

A heat-transfer problem for cylinder with thin coating having time-dependent thermal properties and with inner time-dependent heat sources is investigated.