

## ABOUT FINITE AXIOMATIZABILITY OF CONGRUENCE-FAITHFULL ACTS

**Bilyak Y.T.**

Lviv Ivan Franko National University, jbilyak@ukr.net

Let  $S$  be semigroup with 0 and 1 and let  $M$  be unitary centred left  $S$ -act. Category of all such left acts we denote by  $S\text{-Act}$ .

An equivalence relation  $\rho$  on  $M$  is called left  $S$ -congruence on  $M$  if  $(x_1, x_2) \in \rho$  implies  $(sx_1, sx_2) \in \rho$ ,  $\forall s \in S, \forall x_1, x_2 \in M$ . Let  $\Delta$  denote identity congruence on  $S$ .

**Definition 1.** Left annihilator of  $m \in M$  is  $S$ -act congruence  $Ann(m) = \{(s, t) \in S \times S \mid sm = tm\}$ .

Respectively left annihilator of  $S$ -act  $M$  is  $S$ -act congruence  $Ann(M) = \{(s, t) \in S \times S \mid \forall m \in M, sm = tm\}$ .

**Definition 2.**  $S$ -act  $M$  is called faithful if  $Ann(M) = \Delta$ .

The first order language of left  $S$ -acts denote by  $L_S$ . Set of all sentence of language  $L_S$  that are true for class of acts  $\Psi$  is called theory of class and denoted by  $Th(\Psi)$ . Model of theory  $T$  is class of acts such that all sentence of this theory are true on it; denote by  $Mod(T)$  class of all such models. Class is called axiomatized if  $Mod(Th(\Psi)) = \Psi$ . Axiomatized class  $\Psi$  of acts is called finitely axiomatized if  $Th(\Psi)$  is finite. Next theorem is analog of result from [1] for acts.

**Theorem 1.** For monoid  $S$  next conditions are equivalent:

- 1) Class of congruence-faithfull unitary left  $S$ -acts is finitely axiomatized;
- 2) There exists finite set  $F \subseteq S \times S$  such that  $S$ -act  $M$  is faithful if  $\forall (a, b) \in F \exists x \in M : ax \neq bx$ ;
- 3) There exists  $T \subseteq (S \times S) \setminus \Delta$  - finite set that has nonempty intersection with any congruences on  $S$ ;
- 4)  $S$  contains such finite collection  $A$  of minimal congruences that any non-identity congruence on  $S$  contains at last one congruence from  $A$ .

1. Скорняков Л.А. Конечная аксиоматизируемость класса точных модулей.// Colloquium Mathematicum, (1979), P.365-366.

**ПРО СКІНЧЕННУ АКСІОМАТИЗОВНІСТЬ КОНГРУЕНЦ-  
ТОЧНИХ ПОЛІГОНІВ**

*Описано умови при яких клас точних  $S$ -полігонів є скінченно аксіоматизований.*

## ON SPECTRA OF ENERGY-DEPENDENT STURM-LIOUVILLE OPERATORS

**Pronska N.I.**

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, nataliya\_p@email.ua

The aim of the talk is to discuss spectral properties of the quadratic operator pencil

$$T(\lambda) := \lambda^2 - \lambda B - A \quad (1)$$

in the Hilbert space  $L_2(0,1)$ , where  $A$  denotes an operator acting by  $Ay := -y'' + q(x)y$  subject to the Dirichlet boundary conditions and  $B$  is the operator of multiplication by  $2p$ . Here  $p$  is real-valued functions from  $L_2(0,1)$  and  $q$  is real-valued distribution from  $W_2^{-1}(0,1)$ .

The *spectrum* of the operator pencil  $T$  is the set  $\sigma(T)$  of all  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that  $T(\lambda)$  is not boundedly invertible. A number  $\lambda \in \mathbb{C}$  is called an *eigenvalue* of  $T$  if  $T(\lambda)y = 0$  for some non-zero function  $y \in \text{dom}T$ , which is then the corresponding *eigenfunction*.

Vectors  $y_1, \dots, y_{m-1}$  are said to be associated with an eigenvector  $y_0$  corresponding to an eigenvalue  $\lambda$  if

$$\sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} T^{(i)}(\lambda) y_{j-i} = 0, \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

The maximal length of a chain composed of an eigenvector  $y_0$  and vectors associated with it is called the *algebraic multiplicity* of an eigenvector  $y_0$ . The *geometric multiplicity* of eigenvalue  $\lambda$  is the dimension of the null-space of the operator  $T(\lambda)$ . The eigenvalue is said to be *algebraically (geometrically) simple* if its algebraic (geometric) multiplicity equals to one.

Let us consider the functions  $y_1 := y$  and  $y_2 := \lambda y$ . By means of these functions we can recast the spectral problem of interest as that for the linear operator  $L := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix}$  defined on the proper domain.

*Proposition 1.* The spectrum of the operator pencil  $T$  coincides with that of the operator  $L$  accounting multiplicities.

Using this proposition we obtain the spectral properties of  $T$  from those of  $L$ .

We consider the operator  $L$  in the space  $\Pi := (D, [\cdot, \cdot])$ , where  $D = H_{1/2} \times H$ ,  $H$  is the space  $W_2^1$  and  $H_\alpha$  is the domain of the operator  $|A|^\alpha$  for any positive  $\alpha$ . Here  $[\cdot, \cdot]$  is an inner product defined as

$$[x, y] = (Ax_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

The space  $\Pi$  is a Pontryagin space [1,2], i.e., the space with indefinite inner product. The operator  $L$  is self-adjoint in  $\Pi$ . Thus using the spectral theory for self-adjoint operators in Pontryagin spaces we derive the spectral properties of  $L$  and thus those of the operator pencil of interest  $T$ .

*Theorem 1.* Let  $\kappa$  be the number of negative eigenvalues of the operator  $A$ . Then

- the spectrum of the operator pencil  $T$  is discrete;
- there are at most  $\kappa$  non-simple real eigenvalues, and their algebraic multiplicities do not exceed  $2\kappa + 1$ ;
- the non-real spectrum of the pencil  $T$  is symmetric with respect to the real axis and consists of at most  $\kappa$  pairs of eigenvalues  $\lambda$  and  $\bar{\lambda}$  of finite algebraic multiplicity, moreover, the root subspaces corresponding to  $\lambda$  and  $\bar{\lambda}$  are isomorphic.

If the operator  $A$  is positive, then the spectrum of the operator pencil  $T$  is real and simple.

1. *Bognar J.*, Indefinite inner product spaces – New York: Springer-Verlag, 1974. –223p.
2. *Langer H., Najman B., Tretter Ch.*, Про особливі розв'язки динамічної задачі термомпружності для нескінченного середовища // Comm. Math. Phys. – 2006. – 267, no. 1. – P.159–180 p.

#### **ПРО СПЕКТРИ ЕНЕРГОЗАЛЕЖНИХ ОПЕРАТОРІВ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ**

*Мета доповіді дослідити спектральні властивості операторів Штурма-Ліувілля з потенціалами, залежними від спектрального параметру. Використовуючи допоміжні функції, спектральну задачу, що розглядається, можна звести до спектральної задачі для деякого лінійного оператора, що є самоспряженим у спеціально визначеному просторі Понтрягіна. Використовуючи спектральну теорію для самоспряжених операторів у просторах Понтрягіна, ми отримаємо властивості спектру лінійного оператора  $i$ , відповідно, вихідної спектральної задачі.*

## VIBRATION OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH A SET OF CUTOUTS OF ARBITRARY CONFIGURATION

Shopa T.V.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics  
of National Academy of Sciences, department of modeling damping systems,  
[tetyana.sh@gmail.com](mailto:tetyana.sh@gmail.com)

The problem on the steady state vibrations of the orthotropic cylindrical shell is considered. The shell has  $N$  cutouts of the arbitrary shape and location. The contours of the cutouts are the curves  $L^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . The external boundaries of the shell are also of the arbitrary form, and its contours are the curves  $L^{(0)}$ ,  $L^{(N+1)}$ . One can imagine this object that in terms of middle surface covers the multi-connected domain  $\Omega$ , as the result of an arbitrary cutoff from the cylindrical shell that in terms of middle surface covers the singly connected domain  $\Pi$  of the canonical form. The curvilinear system of coordinates has been attached to this fictitiously extended domain classically. For the simplicity of the formulas it is taken that principle axes of the orthotropy coincide with the directions of the coordinate lines.

Such notations are used:  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  – normal and tangential vector to the certain direction;  $E_i$  – Young's moduli;  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$  – shear moduli of the material;  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  – Poisson coefficients;  $\rho$  – material density;  $k_1$ ,  $k_2$  – principle curvatures;  $R$ ,  $l$ ,  $2h$  – radius, length, and thickness of the shell respectively;  $q_i$ ,  $m_i$  – components of the external load;  $w$  – deflection;  $u_{in}$ ,  $u_{i\tau}$  – normal and tangential components of the displacements of the points in the middle surface;  $\gamma_{in}$ ,  $\gamma_{i\tau}$  – normal and tangential components of the rotation angles of the normal to the middle surface;  $Q_n$  – normal component of the shear force;  $M_n$ ,  $N_n$  – normal components and  $M_\tau$ ,  $N_\tau$  – tangential components of the moment and axial force.

Let us consider two different types of the harmonic in time boundary conditions with the frequency  $\omega$  on all the contours  $L^{(j)}$ ,  $j = \overline{0, N+1}$ :

a) Distributed components of the displacements are given

$$\begin{aligned} w^{(j)} &= w_0^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, & u_n^{(j)} &= u_{n0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, & \gamma_n^{(j)} &= \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, \\ u_\tau^{(j)} &= u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, & \gamma_\tau^{(j)} &= \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

b) Distributed components of the forces are given:

$$\begin{aligned} Q_n^{(j)} &= Q_{n0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, & M_n^{(j)} &= M_{n0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, & N_n^{(j)} &= N_{n0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, \\ N_\tau^{(j)} &= N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}, & M_\tau^{(j)} &= M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2)$$

The system of key equations that take into account all inertial components and shear displacements can be expressed as [1]:

$$[\mathbf{L}]\{U\} = -\{P\}, \quad (3)$$

$$\{U\} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\}, \quad \{P\} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\},$$

$$\mathbf{L}_{11} = B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{33} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - [k_1 B_1 (k_1 + v_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + v_{21} k_1)] - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{44} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - 2h^2 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{34} = -\mathbf{L}_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - 2h^2 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{35} = -\mathbf{L}_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{14} = \mathbf{L}_{41} = k_1 \Lambda_1, \quad \mathbf{L}_{25} = \mathbf{L}_{52} = k_2 \Lambda_2, \quad \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0, \quad \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{12} = (B_1 v_{12} + B_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{21} = (B_{12} + B_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{45} = (D_1 v_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{54} = (D_{12} + D_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{13} = (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 v_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{31} = -(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 v_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23} = (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 v_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{32} = -(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 v_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{ij} \nu_{ji})}, \quad D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3}, \quad B_{ij} = 2h G_{ij}, \quad B_i = \frac{2h E_i}{1 - \nu_{ij} \nu_{ji}}, \quad \Lambda_i = 2h G_{i3},$$

$$i, j = 1, 2; \quad i \neq j$$

Consequently, we get two boundary value problems: defined by the equations (1), (3), and (2), (3).

For solving of the above mentioned boundary value problems by the indirect method of the boundary elements the Green's functions that can be found on the base of the Fourier method and the sequential representation of the Dirac delta-function (as the limit of the sequence of the delta-like functions [2, 3]) are considered. Hence the solvable boundary value problem for finding the proper Green's functions consists of the equations (3) in the domain  $\Pi: 0 \leq \alpha_1 \leq l, 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi, \Omega \in \Pi$  where

$$\begin{aligned} q_s &= T_s^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) e^{i\omega t}, \quad s = \overline{1, 3}, \\ m_p &= T_{3+p}^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) e^{i\omega t}, \quad p = 1, 2, \\ \delta_{\varepsilon}(\xi, \xi^r) &= \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\xi - \xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

and the following homogeneous boundary conditions (equivalent to the conditions of simple support) on its boundary  $\partial\Pi$ :

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0 \quad (5)$$

The principal moment of the solution is that the integral equations are formulated on the external boundaries of the shell as well as on the internal boundaries (contours of cutouts) according to the procedure demonstrated in the paper [1]. Integral equations are solved numerically using collocation method.

## Conclusions

- 1) On the base of the found solutions making the proper combinations of the constructed integral equations and their cores the solution for the arbitrary mixed cases of the boundary conditions can be obtained. Arbitrary combinations of the magnitudes  $w(\alpha)$ ,  $u_n(\alpha)$ ,  $\gamma_n(\alpha)$ ,  $u_\tau(\alpha)$ ,  $\gamma_\tau(\alpha)$ ,  $Q_n(\alpha)$ ,  $M_n(\alpha)$ ,  $N_n(\alpha)$ ,  $M_\tau(\alpha)$ ,  $N_\tau(\alpha)$  on each contour can be considered. Moreover, within each contours (both internal and external) arbitrary mixed boundary conditions on each subsection are also allowed.
- 2) Within the problem statement it is not indispensably that the external boundary is fixed. The one among the internal contours can be considered somehow

- fixed or number of them simultaneously by putting the proper input magnitudes equal to zero.
- 3) The key equations take into consideration shear displacements and include all inertial components. This allows to investigate in the better quality different types of vibrations caused by different character of boundary excitation in case of anisotropic materials.
  - 4) In the framework of these solutions the cases of the contours with the corner points and the holes degenerates into the cracks can be analysed. Though on the stage of construction integral equations on the base of the potential theory the condition of the smoothness of the contours is required, but on the stage of getting the numerical solution by the collocation method the curves are discretised, and, consequently, this limitation loses its actuality.
  - 5) On the computational stage it is important to investigate the convergence and optimal values of the approximation parameters within each particular case for getting the efficient enough numerical results, because if the geometrical configurations of the contours and anisotropy of the material are sharp, the solutions will be more sensitive, and will need more care and accurate treatment.
  - 6) The demonstrated in the paper scheme indicates reasonable agreement with known results for the classical partial cases.
1. *Shopa T.* Vibration of the orthotropic cylindrical shell with the cutouts of the arbitrary configuration. Part 1. Construction of the solution // Physico-mathematical modeling and informational technologies. – 2011. – **14**. – P. 167-177.
  2. *Burak Ya.J., Rudavsky Yu.K., Sukhorolsky M.A.* Analytical mechanics of the locally loaded shells. – Lviv: Intelect-Zakhid, 2007. – 240 p.
  3. *Sukhorolsky M.* Sequences of functions, and series. – Lviv: Rastr-7, 2010. – 346 p.

### **КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ**

*В рамках уточненої моделі, яка враховує поперечні зсуви, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної циліндричної оболонки з довільною кількістю отворів довільної геометричної форми та розташування. Торці оболонки також вважаються довільної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на контурах отворів, а також на зовнішній границі оболонки. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів. Функцію Гріна знайдено на основі послідовнісного підходу до зображення дельта-функції Дірака та методу рядів Фур'є. Крайову задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано методом колокацій.*



## МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ У ДВОФАЗНОМУ ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРІ З $\chi^2$ -РОЗПОДІЛОМ ВКЛЮЧЕНЬ

Білушак Ю.І., Чернуха О.Ю.

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України м. Львів, вул.Дж.Дудаєва 15, e-mail , [bil@cmm.lviv.ua](mailto:bil@cmm.lviv.ua), [cher@cmm.lviv.ua](mailto:cher@cmm.lviv.ua)

Для запобігання поширення забруднення навколишнього середовища агресивними домішковими речовинами і мінімізації екологічного ризику катастрофічних ситуацій визначення дифузійних властивостей нових композитних матеріалів тощо, виникає необхідність досліджувати процеси дифузії домішкових речовин в гетерогенних тілах, зокрема, багатозфазних середовищах випадкової структури, коли певні елементи фаз мають розміри, співвідрізані з розмірами тіла. [1].

В даній роботі досліджено випадкове поле концентрації частинок домішкової речовини у двофазному шаруватому півпросторі з  $\chi^2$ -розподілом.

Розглянута дифузія домішкових частинок у двофазному багатозфазовому півпросторі, в якому розташування підшарів є невідомим. При цьому дифузійні властивості фаз можуть суттєво відрізнятися. Прийнято, що об'єм, який займає одна з фаз (матриця), є набагато більшим ніж інша (включення). Координати включень, а отже і підшарів матриці, невідомі, тобто структура тіла є випадково неоднорідною. Прийнято, що включення розташовані в області тіла за  $\chi^2$ -розподілом (рис. 1).

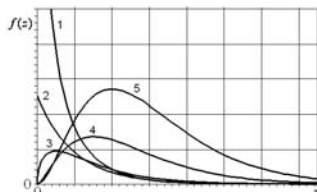


Рис. 1. Густина  $\chi^2$ -розподілу для різних значень ступенів вільностей  $n = 1; 2; 3; 5; 6$

Густина  $\chi^2$ -розподілу зі ступенями вільності  $n$  в загальному випадку є

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2^{-n/2} z^{n/2-1} e^{-z/2}, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\Gamma(n/2)$  - Гама-функція;  $n \in \mathbb{N}$ .

Зауважимо, що при зміні параметра  $n \in \overline{1,3}$  функція густини  $\chi^2$ -розподілу (1) зменшується в приповерхневій області тіла (криві 1-3 на рис. 1). При зростанні ступеня вільності  $n = 4, 5, \dots$  значення функції  $f(z)$  збільшується на всьому проміжку, причому її максимум зростає і зсувається в глиб тіла. Це означає, що, якщо при  $n = 1$  і  $n = 2$  включення в основному розташовуються біля поверхні півпростору (рис. 2a), то з ростом  $n$  область найбільш імовірного знаходження включень зсувається вглиб тіла, та спостерігається ущільнення підшарів (рис. 2b). Причому об'єм цієї області збільшується.

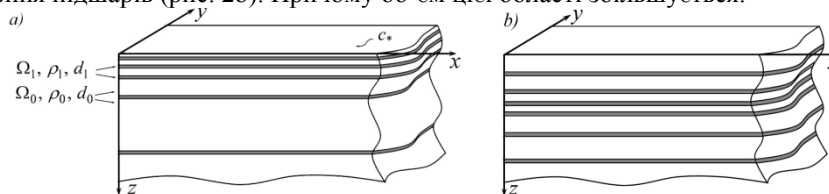


Рис. 2. Можливі реалізації структури багат шарового півпростору для  $\chi^2$ -розподілу включень при  $n = 2$  (рис. a) і  $n \geq 3$  (рис. b)

Процес дифузії домішкової речовини в таких тілах описується рівняннями дифузії, сформульованими для кожної з фаз  $\Omega_j$ ,  $j = 0, 1$  [2]:

$$\rho_j \frac{\partial c_j(z,t)}{\partial t} = d_j \frac{\partial^2 c_j(z,t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij}, \quad t \in [0, \tau] \quad (\tau < \infty), \quad j = 0, 1, \quad (2)$$

де  $c_j(z,t)$  – випадкова концентрація домішкових частинок в області  $\Omega_j$ ;  $\rho_j$ ,  $d_j$  – густина і кінетичний коефіцієнт переносу в  $\Omega_j$ ,  $n_j$  – кількість шарів фази  $j$ ,  $\Omega_{ij}$  –  $i$ -ий підшар фази  $j$ ,  $i = \overline{1, n_j}$ ,  $j = 0, 1$ .

В початковий момент домішкова речовина відсутня в тілі:

$$c_0(z,t)|_{t=0} = c_1(z,t)|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

а далі на границі півпростору підтримується її постійне значення

$$c_0(z,t)|_{z=0} = c_* \equiv const, \quad c_0(z,t)|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (4)$$

На міжфазних границях накладено умови неідеального контакту для функції концентрації [1]:

$$k_0 c_0(z,t)|_{z=z_l-0} = k_1 c_1(z,t)|_{z=z_l+0}, \quad \rho_0 d_0 \partial c_0 / \partial z|_{z=z_l-0} = \rho_1 d_1 \partial c_1 / \partial z|_{z=z_l+0}; \quad (5)$$

$$k_1 c_1 \Big|_{z=z_l+h_{l1}-0} = k_0 c_0 \Big|_{z=z_l+h_{l1}+0}, \quad \rho_1 d_1 \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_l+h_{l1}-0} = \rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_l+h_{l1}+0}, \quad (6)$$

де  $k_j$  – коефіцієнт концентраційної залежності хімічного потенціалу у фазі  $j$ ,  $h_{l1}$  – товщина включення  $\Omega_{l1}$ ,  $l = \overline{1, n_l}$ .

Розв'язок контактної-крайової задачі (2)-(6) шукаємо у вигляді ряду Неймана з використанням апарату теорії узагальнених функцій контактна задача зведена до рівняння масо перенесення в усьому тілі [2].

Розглянувши неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела, отриманій контактної-крайовій задачі поставлено у відповідність еквівалентне інтегродиференціальне рівняння:

$$c(z, t) = c_0(z, t) + \int_0^t \int_{0(V)} G(z, z', t, t') L_s(z', t') c(z', t') dz' dt', \quad (7)$$

тут  $c_0(z, t)$  – розв'язок однорідного рівняння дифузії  $L_0 c_0 = 0$ , коефіцієнти якого є характеристиками домінуючої фази,  $(V)$  – область тіла з об'ємом  $V$ ,  $G(z, z', t, t')$  – функція Гріна.

Рівняння (7) розв'язувалось методом послідовних наближень, випадкове поле концентрації  $c(z, t)$  побудовано у вигляді інтегрального ряду Неймана

$$c(z, t) = c_0(z, t) + \int_0^t \int_{0(V)} G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' + \dots \quad (8)$$

Показано, що ряд Неймана (8) є абсолютно і рівномірно збіжним для  $\rho_j$ ,  $d_j \leq K_j < \infty$  і  $\rho_0$ ,  $d_0 \neq 0$ .

Усереднення поля концентрації домішкової речовини проведено за ансамблем конфігурацій фаз з  $\chi^2$ -розподілом включень в області тіла.

Одержано розрахункову формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації домішкових частинок:

$$\begin{aligned} \langle c(z, t) \rangle_{conf} = & c_0(z, t) + n_1 \int_0^t \int_0^h G \left[ (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0}{\partial t'} - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} \right] \frac{\gamma(n/2, z'/2)}{\Gamma(n/2)(2)^{n/2}} dz' + \\ & + \int_h^\infty G \left[ (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0}{\partial t'} - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} \right] \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \left( \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{z'}{2}\right) - \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{(z'-h)}{2}\right) \right) dz' dt', \end{aligned}$$

де  $\gamma(\lambda, \alpha x) = \frac{1}{\alpha^\lambda} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt$  – неповна Гама-функція.

Числові розрахунки проводились в безрозмірних змінних  $\tau = d_0 t / z_0$ ,  $\xi = z / z_0$ ,  $z_0 = 1$  м. На рис. 3 проілюстровано розподіли усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації домішкової речовини у випадку  $\chi^2$ -розподілу включень в залежності від різних значень ступеня вільності  $\chi^2$ -розподілу  $n = 1; 2; 3; 4; 6; 10$  (криві 1-6) в моменти часу  $\tau = 2$  (рис.а),  $\tau = 10$  (рис.б).

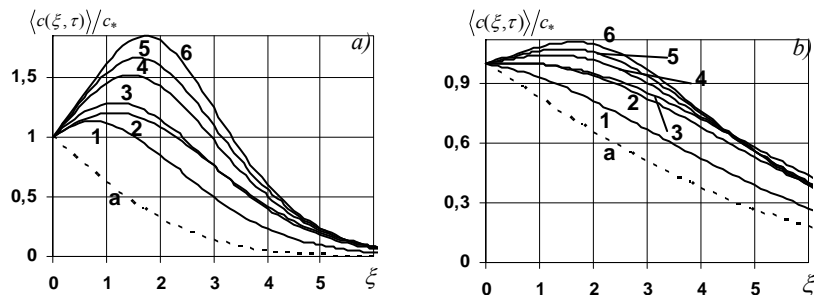


Рис. 3. Розподіли усередненої концентрації залежно від різних значень параметра  $n$  для  $\tau = 2$  (рис.а) і  $\tau = 10$  (рис.б)

Досліджено випадкові поля концентрації домішкової речовини, яка мігрує у двофазному багат шаровому півпросторі, включення якого розташовані за  $\chi^2$ -розподілом.

Зі збільшенням параметра  $n$ , який визначає розташування включень в тілі, максимум усередненої концентрації домішки зростає і зсувається в глиб тіла, що пояснюється тим, що інтервал наймовірнішого знаходження шаруватих включень також зсувається вглиб тіла. При цьому чим більше  $n$ , тим більших значень досягає максимум концентрації. Проте для великих часів (близьких до усталеного режиму) ця різниця нівелюється.

1. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наукова думка, 2009. – 302 с.
2. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Гончарук В.С., Білуцзяк Ю.І. Моделювання процесів дифузії домішкових частинок у півпросторі з експоненціальним розподілом включень // Моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 59. - С. 140-152.

**MODELING A RANDOM CONCENTRATION FIELD IN A TWO-PHASE STRATIFIED SEMISPACE WITH  $\chi^2$ -DISTRIBUTION OF INCLUSIONS**

*Admixture diffusion processes are studied in a two-phase semispace with randomly nonhomogeneous structure allowing for nonideal mass contact conditions on interphases. Layered inclusions are disposed over the  $\chi^2$ -distribution. Influence of material characteristics on behaviour of admixture averaged concentration is established.*

## НЕСТАЦІОНАРНИЙ НАГРІВ ОБ'ЄМНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА ЦИЛІНДРА ЗІ ЗМІННИМИ ТЕПЛОФІЗИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ПРИПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ

Бобик Б.Я

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, [labmtd@iapmm.lviv.ua](mailto:labmtd@iapmm.lviv.ua)

Сучасні елементи конструкцій часто мають неоднорідну структуру, зокрема приповерхневу, що зумовлено як цілеспрямованим формуванням спеціальних властивостей приповерхневих шарів, так і їх зміною під час виготовлення та експлуатації за інтенсивного фізико-механічного навантаження. Тому важливе значення має побудова розширених механічних і математичних моделей, які враховують як неоднорідність приповерхневих шарів тіла й залежність їх фізико-механічних властивостей від часу, так і вплив фізико-механічних процесів на розподіл температури, а опосередковано і на напружено-деформований стан в тілі.

У багатьох випадках нагрівання тіла внаслідок дії процесів різноманітної фізичної природи можна враховувати за допомогою об'ємних джерел тепла. Наприклад ними моделюється нагрів високочастотним електромагнітним полем, виділення тепла за хімічних реакцій, що відбуваються всередині тіла, перетворення частини енергії деформування в тепло під час циклічного механічного навантаження та ін. [1]. Тонкі приповерхневі шари моделюють оболонками, а їх вплив на фізико-механічну поведінку тіла часто враховують під час постави задачі за допомогою ускладнених нестационарних граничних умов, в які входять зведені теплофізичні параметри шару [2]. Залежність від часу властивостей шару задають змінними коефіцієнтами граничних умов [4].

Розглянемо довгий суцільний циліндр радіуса  $r_1$ , тонкий приповерхневий шар якого має неоднакові з основним матеріалом змінні з часом теплофізичні властивості. Циліндр обмінюється теплом з довкіллям сталої температури і нагрівається рівномірно розподіленими по об'єму джерелами тепла змінної інтенсивності. Запишемо в циліндричній системі координат рівняння нестационарної теплопровідності за наявності в циліндрі джерел тепла [2]

$$\Delta T(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} + W(\tau), \quad 0 \leq r < r_1, \quad (1)$$

де  $T$  – температура циліндра,  $W(\tau)$  – інтенсивність джерел тепла,  $\alpha$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\Delta$  – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Вплив приповерхневого шару на процес теплопровідності в циліндрі задаємо за допомогою узагальнених неklasичних граничних умов [2]

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + B(\tau) \cdot [T(r, \tau) - T_C] + H(\tau) \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad r = r_1. \quad (2)$$

Тут  $B(\tau)$  та  $H(\tau)$  – змінні з часом коефіцієнт тепловіддачі з поверхні циліндра та зведена теплоємність приповерхневого шару,  $T_C$  – температура середовища. Нестационарна гранична умова (2) неklasична, вона дозволяє враховувати кінетику процесу теплопровідності на поверхні тіла.

В початковий момент часу задаємо розподіл температури за товщиною циліндра, а на осі циліндра — умови обмеженості розв'язку і симетрії

$$T(r, \tau) = T_0(r), \quad \tau = 0, \quad (3)$$

$$T(r, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (4)$$

Застосовуючи розвинуту раніше методику розв'язування задач з неklasичними нестационарними умовами [3] для випадку змінних коефіцієнтів [4], розділимо граничну умову (2) на класичну і неklasичну частини, ввівши межову зв'язувальну функцію  $\Phi(\tau)$ . Це дає можливість записати структуру розв'язку неklasичної задачі у вигляді розвинення в ряд Фур'є за власними функціями класичної задачі з граничною умовою першого роду

$$T(r, \tau) = \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \Phi(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) \cdot J_0(\alpha \mu_n r). \quad (5)$$

де  $\mu_n$  – нулі функції Бесселя  $J_0(\mu)$ , а  $E_n(\tau)$  має вигляд:

$$E_n(\tau) = \frac{2}{J_1(\alpha \mu_n r_1)} \left\{ \frac{T_0}{\alpha \mu_n r_1} e^{-\mu_n^2 \tau} - \Phi(\tau) \cdot \frac{(\alpha \mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha \mu_n r_1)^3} + \frac{\mu_n^2}{\alpha \mu_n r_1} \int_0^{\tau} \Phi(t) e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt + \frac{1}{(\alpha r_1)^2 J_1(\alpha \mu_n r_1)} \int_0^{\tau} W(t) e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt \right\}$$

Записана структура розв'язку містить невідому функцію  $\Phi(\tau)$ , для якої отримуємо, після задоволення неklasичної частини граничної умови (2), інтегро-диференціальне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерри:

$$H(\tau) \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} + \left[ \frac{2}{r_1} + B(\tau) \right] \Phi(\tau) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T_0}{r_1} e^{-\mu_n^2 \tau} - \frac{(\alpha \mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha \mu_n r_1)^2} \cdot \frac{\Phi(\tau)}{r_1} + \frac{\mu_n^2}{r_1} \int_0^{\tau} \Phi(t) e^{-\mu_n^2 (\tau-t)} dt + \frac{\kappa \mu_n}{\alpha r_1^2 J_1(\alpha \mu_n r_1)} \int_0^{\tau} W(t) e^{-\mu_n^2 (\tau-t)} dt \right\} = B(\tau) T_C \quad (6)$$

Інтегро-диференціальне рівняння (6) розв'язуємо, апроксимуючи функцію  $\Phi(\tau)$  на рівних часових проміжках кубічними сплайнами. Коефіцієнти сплайнів визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, що записуються з умов спряження сплайнів та рівняння (6) записаного для кожного вузла розбиття.

За знайденою функцією  $\Phi(\tau)$  з (5) визначаємо температуру в циліндрі.

Температурні напруження можна обчислити за відомою температурою із співвідношень Дюгамеля-Неймана, наприклад після використання подання Папковича-Нойбера для розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях [2].

Температурне поле в циліндрі досліджено за різних законів зміни в часі як інтенсивності джерел тепла, так і зведених теплофізичних параметрів приповерхневого шару. Початкова температура циліндра вважалася сталою за його товщиною, температура середовища приймалась рівною нулеві.

На рис. 1 наведено результати порівняльного аналізу зміни з часом безрозмірної поверхневої температури однорідного циліндра ( $H = 0$ ) для сталого зведеного параметра тепловіддачі з поверхні  $B = 2$  за різних законів за-

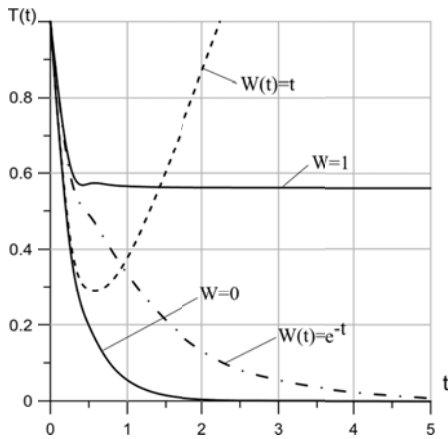


Рис. 1.

дання інтенсивності джерел тепла, а саме: відсутності джерел, сталої інтенсивності, лінійно зростаючої з часом, спадної за експоненціальним законом. Бачимо, що визначальний вплив на температуру поверхні має інтенсивність джерел тепла. Однак в окремих випадках можна так підібрати параметр  $B$ , що через деякий час наставатиме баланс між нагрівом циліндра та його охолодженням довкільям ( $W = 1, B = 2$ ).

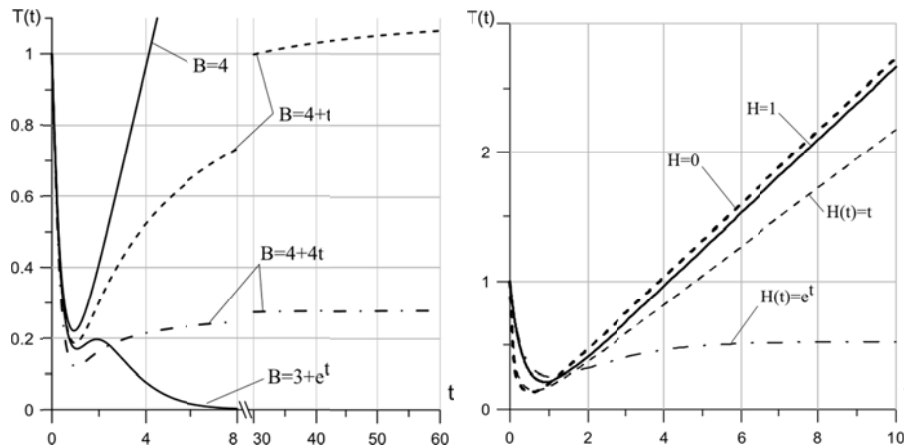
Зміну в часі температури поверхні циліндра, якщо зведений параметр теплоємності приповерхневого шару сталий ( $H = 1$ ), а інтенсивність джерел тепла лінійно зростає

( $W = \tau$ ), для різних лінійних законів зміни з часом параметра  $B(\tau)$  наведено на рис. 2. Проведений аналіз показує, що підбираючи лінійний закон зміни  $B(\tau) = 4 + 4\tau$  теж можна домогтися рівноваги між нагрівом і охолодженням



циліндра. За експоненційного закону  $B(\tau) = 3 + e^\tau$  температура циліндра швидко прямує до температури довкілля при невеликій ділянці зростання в кінці першої третини цього процесу.

На рис. 3 за сталого  $B = 4$  показано зміну температури поверхні циліндра з джерелами тепла сталої інтенсивності  $W = 1$ . Бачимо, що вплив параметра  $H(\tau)$  є протилежним до впливу  $B(\tau)$ : збільшення  $H(\tau)$  спричинює зниження температури за заданого закону зміни інтенсивності джерел тепла і сталого  $B$ . Крім того вплив цього параметра є слабшим ніж  $B(\tau)$ . Так балансу між нагріванням та охолодженням можна домогтися лише за експоненційного закону зміни  $H(\tau) = e^\tau$ , тоді як для  $B(\tau)$  цього можна досягнути за лінійного закону.



Отримані розв'язки можуть бути використані для розробки методів ідентифікації змінних з часом межових теплофізичних параметрів циліндричних тіл з тонкими приповерхневими шарами, які нагріваються об'ємними джерелами тепла.

1. *Веселовский В. Б., Берлов А. В.* Температурные поля многослойных элементов конструкций при воздействии полей различной физической природы // *Металлург. теплотехника.* – Днепропетровск. – 2009. – Вып. 1 (16). – С. 21-33.
2. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наукова думка, 1995. – 460 с.
3. *Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови // *Прикладні проблеми механіки і математики.* – 2007. – Вип. 5. – С. 186-194.

4. Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я. Термонапружений стан циліндра з тонким приповерхневим шаром, теплофізичні параметри якого змінюються з часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, №4. – С. 90-105.

**NONSTATIONARY HEATING WITH SPACED DISTRIBUTED HEAT SOURCES OF CYLINDER HAVING THIN SURFACE LAYER WITH TIME-DEPENDENT THERMAL PROPERTIES**

*A heat-transfer problem for cylinder with thin coating having time-dependent thermal properties and with inner time-dependent heat sources is investigated.*

## **ВІСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРУ З ЖОРСТКИМ НЕРІВНОМІРНО НАГРІТИМ СЕРДЕЧНИКОМ**

**Бобильов О.О. (мол.)**

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, alex.bobs@gmail.com

На тепловий режим вузлів та деталей значний вплив здійснює так званий термічний опір контакту, що обумовлений недосконалістю механічного з'єднання поверхонь, що контактують. Температурні деформації можуть привести до розшарування тіла та суттєвої зміни напружено-деформованого стану навіть при незначному нагріві. Особливо гостро стоїть питання дослідження впливу розшарування тіла на термічний опір, і, таким чином, на напружено-деформований стан, та умов, за яких відбувається розшарування.

Розглядається вісесиметрична контактна задача для багатошарового пружного циліндру скінченної довжини на нагрітому сердечнику за умов зовнішнього конвективного теплообміну. При постановці задачі припускаються відомими лише гранично можливі області контакту циліндра з сердечником, та шарів циліндра між собою, фактичні ділянки контакту визначаються в процесі розв'язання задачі. На поверхні можливого контакту задаються граничні умови неідеального термомеханічного контакту: контактний термічний опір залежить від величини контактного тиску або зазору між поверхнями. Тертя на контактуючих поверхнях відсутнє.

Для розв'язання задачі використовується варіаційний підхід. Отримано варіаційне формулювання задачі, що складається із зв'язаних варіаційної нерівності і варіаційного рівняння. Запропоновано ітераційний алгоритм розв'язання цієї системи, на кожному кроці якого необхідно окремо розв'язати незв'язані варіаційну нерівність і варіаційне рівняння.

Розв'язання варіаційних задач здійснюється шляхом переходу до відповідних екстремальних задач і застосуванням для їх дискретизації методу скінченних елементів. Використовувались трикутні скінченні елементи першого порядку. Для чисельного розв'язання отриманих в результаті дискретизації задач квадратичного програмування застосовувався метод спряжених градієнтів.

Отримано чисельні розв'язки ряду конкретних задач для двох-і трьох-шарових циліндрів скінченних розмірів. Досліджено вплив неідеальності термомеханічного контакту та характеру стискування і нагріву на напружено-

деформований стан і температурне поле пружного шаруватого тіла. Досліджено вплив нагріву на розшарування циліндру.

**THE CONTACT PROBLEM OF A THERMOELASTICITY FOR A  
MULTI-LAYER ELASTIC CYLINDER WITH A HARD NON-  
UNIFORMLY HEATED CORE**

*The problem of contact interaction of a finite multi-layer elastic cylinder with hard non-uniformly heated core is considered. The conditions of ideal unilateral mechanical contact and imperfect thermal contact are used. The variational formulation of the problem is obtained. The iterative numerical algorithm is proposed. Unrelated problems of the elasticity theory and the thermal conductivity theory are solved at the each iteration. The finite element method is used for discretization of the problems.*

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ У ТОНКИХ ВОЛОКНАХ

**Бойко З. В.**

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
zoza-7@mail.ru

У зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій, а також широким використанням в інженерній практиці тонкоплівкових та тонковолокнистих систем важливого значення набуває побудова та дослідження математичних моделей, які достатньо повно враховують властивості приповерхневих областей тіла та структуру матеріалу. До таких моделей належать, зокрема, нелокальні моделі механіки суцільного середовища [1, 2]. Одним із ефективних підходів до побудови нелокальних моделей є локально градієнтний підхід у термомеханіці [3, 4].

Метою цієї роботи є дослідження на прикладі модельної задачі для структурно неоднорідного суцільного циліндра поверхневого натягу у тонких волокнах.

Розглянемо необмежений структурно неоднорідний суцільний ізотропний деформівний круговий циліндр радіуса  $R_0$ , віднесений до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ , вісь  $0z$  якої співпадає з віссю циліндра. Вважаємо, що циліндр вільний від силового навантаження, а на його поверхні  $r = R_0$  задано постійне значення густини. За такої зовнішньої дії рівноважний стан тіла залежить лише від координати  $r$  і описується системою рівнянь [5]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ r \frac{d^2\sigma_{\varphi\varphi}}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{K - 2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right] \right\}, \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{K - 2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right], \\ \frac{d^2\Pi_{Mr}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Pi_{Mr}}{dr} - \left( \frac{K\gamma}{\alpha K - \beta^2} + \frac{1}{r^2} \right) \Pi_{Mr} &+ \frac{\beta}{3(\alpha K - \beta^2)} \frac{d\sigma}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$  – компоненти тензора напружень  $\hat{\sigma}$ ;  $\sigma = \hat{\sigma} \cdot \hat{I}$ ;  $\hat{I}$  – одиничний тензор;  $\Pi_{Mr}$  – компонента вектора збурення маси  $\vec{\Pi}_M$ ;  $K$ ,  $G$  – модулі пружності;  $\alpha, \beta, \gamma$  – характеристики матеріалу.

Граничні умови сформульованої задачі такі

$$\sigma_{rr}|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right|_{r=R_0} = \rho_a, \quad (2)$$

де  $\rho_a$  – задане поверхневе значення збурення густини, що враховує геометричну неоднорідність поверхні тіла [5].

Умови (2) необхідно доповнити умовами обмеженості розв'язку на осі циліндра

$$|\Pi_{Mr}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{rr}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{\varphi\varphi}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{zz}(r)| < \infty \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

а також умовою рівності нулю головного вектора зусиль у довільному поперечному перерізі циліндра

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \sigma_{zz} r dr d\varphi = 0. \quad (3)$$

Розв'язок задачі (1)-(3) має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K+4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[ \frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K+4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[ I_0(\xi r) - \frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{zz}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K+4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[ I_0(\xi r) - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \Pi_{Mr}(r) &= \frac{\rho_a}{\xi I_0(\xi R_0)} I_1(\xi r). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $I_1(\xi r)$ ,  $I_0(\xi r)$  – модифіковані функції Бесселя відповідно першого та нульового порядків;  $\xi = \sqrt{\frac{\gamma(K+4/3G)}{\alpha(K+4/3G)-\beta^2}}$ .

Аналіз формул (4) показує, що величина  $1/\xi$  є характерним розміром приповерхневої неоднорідності. Напруження  $\sigma_{rr}$  дорівнюють нулю на поверхні циліндра і монотонно зменшуються, досягаючи мінімальних значень на осі

циліндра  $r = 0$ . Напруження  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$  найбільші на поверхні  $r = R_0$ , де вони є розтягуючі.

Використаємо отриманий розв'язок для вивчення поверхневого натягу  $f_p$ , який є інтегральною характеристикою розтягуючих приповерхневих напружень

$$f_p = \frac{1}{R_0} \int_{r_a}^{R_0} \sigma_{\varphi\varphi} r dr,$$

де  $r_a$  – точка переходу розтягуючих напружень у стискаючі.

Визначення значення  $r_a$  зводиться до розв'язування такого рівняння

$$I_0(\xi r_a) - \frac{I_1(\xi r_a)}{\xi r_a} = \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0}.$$

Обмежимося наближенням  $\exp(\xi R_0) \gg \xi R_0 \gg 1$ . Якщо скористатись асимптотичними розкладами модифікованих функцій Бесселя та врахувати, що точка  $r_a$  близька до поверхні циліндра, то для  $r_a$  отримаємо

$$r_a = R_0 - \frac{1}{\xi} \ln(\xi R_0).$$

Тоді з урахуванням (4), для поверхневого натягу запишемо

$$f_p = \frac{2G\beta\rho_a}{\xi(K + 4/3G)} \left[ 1 - \frac{\ln(\xi R_0)}{\xi R_0} - \frac{5}{2\xi R_0} \right]. \quad (5)$$

Зі збільшенням радіуса циліндра  $R_0$  величина  $f_p$  прямує до значення поверхневого натягу у півпросторі

$$f_p^\infty = \frac{2G\beta\rho_a}{\xi(K + 4/3G)},$$

тобто поверхневому натягу властивий розмірний ефект. Така поведінка  $f_p$  є аналогічною до залежності максимальних напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}$  від радіуса. Однак напруження швидше досягають свого усталеного значення. Тому поверхневий натяг  $f_p$  не є однозначною характеристикою поверхневих напружень, а суттєво залежить від розміру області (точки  $x_a$ ), у якій приповерхневі напруження є розтягуючими. Це й ілюструють графіки на рис. 1, на якому показано залежність приведенного поверхневого натягу

$F = f_p / f_p^\infty$  (суцільна лінія) та приведених поверхневих напружень  $S = \sigma_{\text{фр}} / \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = 2G\beta r_a / (K + 4/3G)$  (штрихова лінія) від радіуса циліндра.

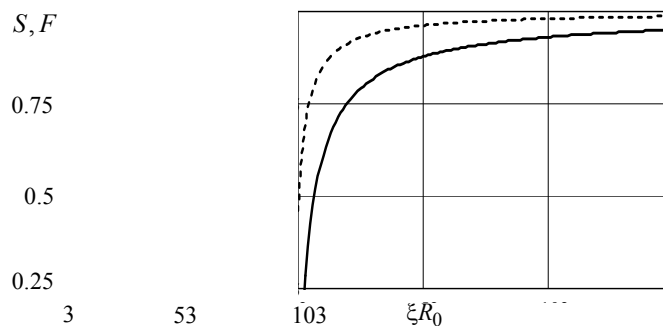


Рис. 1. Залежність поверхневих напружень та поверхневого натягу від радіуса циліндра

Зазначимо, що оскільки поверхневий натяг вимірюється експериментально, то його можна використати для визначення (оцінки) нових параметрів моделі. У даному випадку, приймаючи, що значення  $K$ ,  $G$ ,  $\xi$  є відомі, на його основі можна визначити коефіцієнт  $\beta$ .

1. *Eringen A. C.* Nonlocal Continuum Field Theories. – Springer, 2002. – 376 pp.
2. *Ghoniem N. M., Busso E. P., Kioussis N.* Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview // Philosophical Magazine. – 2003. – Vol. 83, Nos. 31-34. – P. 3475–3528.
3. *Бурак Я. И., Нагірний Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, №12. – С. 3-23.
4. *Нагірний Т. С.* Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням поверхневих явищ / Автореф. дис. д. ф.-м. н. – Львів, 1998. – 32 с.
5. *Нагірний Т. С., Червінка К. А., Бойко З. В.* До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 3. – С. 199-206.

#### SURFACE TENSION INVESTIGATION IN THIN FIBRES

*Within the local gradient approach in thermomechanics the boundary value problem for structurally heterogeneous continuous cylinder is formulated and solved. On this basis a surface tension in thin fibres is investigated. Comparison of size effects of a surface stress and surface tension is carried out. It is specified possibility to use of a surface tension for determination of model parameters.*



## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛООВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ШАРУ З ТОНКИМ ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЙНИМ ПОКРИВОМ

Бойчук Ю.В.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, yuronchuk@gmail.com

У доповіді розглядається система, що складається із плоского шару  $\mathbf{S} = (-\infty < x < \infty) \otimes (-h \leq y \leq h)$  товщиною  $h$  та тонкого теплоізоляційного покриття  $\mathbf{S}_{(1)} = (-\infty < x < \infty) \otimes (h \leq y \leq h + \delta)$  товщиною  $\delta \ll h$ , нанесеного на поверхню  $y = h$  шару (рис.1).

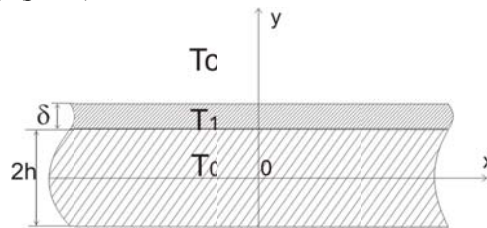


Рис. 1. Система «шар-покрив-зовнішнє середовище».

Поверхня  $y = -h$  шару  $\mathbf{S}$  перебуває в тепловому контакті з термостатом, що має температуру  $T_0$ . На поверхні контакту  $y = h$  між шаром та покриттям виконуються умови ідеального теплового контакту. Система «шар-покрив» обмінюється теплом із зовнішнім середовищем за конвективним та радіаційним механізмами.

Розглянута система моделює у певному наближенні теплообмін між розплавом металу в лотку, яким відводять цей розплав від плавильної печі, і докільям. Теплоізоляційний покрив враховує прошарок шлаку, який покриває розплав [1].

Побудована нелінійна математична модель, яка описує стаціонарний тепловий стан системи та її теплообмін із зовнішнім середовищем. Модель враховує кондуктивний теплообмін і перенесення енергії ІЧ-випромінюванням у шарі та покритті, конвективний теплообмін покриття із зовнішнім середовищем і теплове випромінювання системи в зовнішнє середовище через поверхню покриття. В рамках моделі сформульована задача

для визначення температури покриву і ІЧ-поток, який випромінює система, за заданої температури шару.

Враховуючи високу теплопровідність  $k$  шару у порівнянні із теплопровідністю  $k_1$  покриву, наближено прийняли, що температура  $T$  шару є однорідна за товщиною координатою і дорівнює температурі  $T_0$  термостату. Для урахування радіаційного теплообміну між шаром та покривом, беручи до уваги малу товщину покриву  $\delta$ , його замінили в математичній моделі матеріальною поверхнею, температура  $\bar{T}_1$  якої дорівнює

$$\text{середній температурі шару } \bar{T}_1 = \frac{1}{\delta} \int_h^{h+\delta} T_1(y) dy.$$

Це дозволило застосувати відоме  $P_1$ -наближення [2] до опису перенесення енергії випромінюванням в шарі й отримати аналітичне представлення для густини потоку  $q$  теплового випромінювання шару  $\mathbf{S}$ , що потрапляє в покрив  $\mathbf{S}_{(1)}$ .

У доповіді обговорюється можливість застосування отриманих результатів для визначення температури розплаву  $T_0$  на основі даних вимірювання теплового випромінювання з використанням техніки ІЧ-термометрії, та температури покриву  $\bar{T}_1$  з допомогою методів контактної термометрії.

1. Фетисов Г.П. Материаловедение и технология. – Москва: Высшая школа, 2001. – 640 с.
2. Оцил М.Н. Сложный теплообмен. – Москва: Мир, 1976. – 616 с.

#### **A MATHEMATICAL MODEL FOR THERMAL RADIATION OF A LAYER WITH THIN HEAT-INSULATING COATING**

*A non-linear mathematical model describing a stationary thermal state of a homogeneously heated layer with a thin heat-insulation coating and heat exchange of the layer with environment has been considered in the paper. In the scope of the model a problem for determination of the coating temperature and thermal radiation flux has been formulated. On the base of obtained solution of the problem the influence of the layer temperature, thermal conductivity of the coating, and radiative properties of the layer and coating on the coating temperature and thermal radiation flux in environment has been studied. Possibilities for application the obtained results for non-contact determination of the layer temperature with the use of the data of thermal radiation flux and the coating temperature measuring have been discussed.*

## ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ В ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЯХ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ

Бурик О.О.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, sashanettm@gmail.com

Запропоновано методику числового розв'язування нестационарної задачі теплопровідності в елементах будівельних конструкцій за умов пожежі.

В основу покладено підхід [1], якій ґрунтується на сумісному застосуванні в рамках однієї обчислювальної схеми методу скінченних елементів (для апроксимації шуканих значень температури за просторовими змінними) та різницевих алгоритмів (для апроксимації розв'язків за часом) за використання різних за величиною кроків числового інтегрування нестационарного нелінійного рівняння теплопровідності за часом.

Внаслідок проведення стандартної процедури скінчено-елементної дискретизації за просторовими змінними у варіанті методу зважених залишків задачу теплопровідності зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу області тіла.

Як приклад, досліджено процес поширення тепла у залізобетонних балках та колонах за умов пожежі. Виконано дослідження збіжності і достовірності отриманих розв'язків. Наведено порівняльний аналіз результатів комп'ютерного моделювання з експериментальними [2]. Досліджено вплив сталевого зміцнення (арматури) на перебіг процесів поширення тепла у залізобетонних балках.

1. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. У 5-и т. Т. 4: Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл / О.Р. Гачкевич, Б.Д. Дробенко. – Львів: СПОЛОМ, 2010. – 256 с.*
2. *Terro M.J. Numerical modeling of the behavior of concrete structures in fire // ACI Struct. J. – 1998. – 95, № 3/4. . – P. 183–193*

### **The temperature fields in concrete structures subjected to fire**

*The numerical approach for computer simulation of thermo-conductivity processes in reinforced concrete structures subjected to fire is considered. The comparative analysis of the numerical simulation result for reinforced concrete column under the fire with analogous numerical solution and corresponding experimental data is given.*

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ПОЛЯРИЗОВАНОГО СВІТЛА З НАПРУЖЕНИМ ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ШАРОМ

Васьо Н.О.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, vaso@ippmm.lviv.ua

Розглядається однорідний діелектричний шар, що займає область простору  $\mathbf{S} = (0 < x < h, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$ , де  $h$  — товщина шару,  $x$ ,  $y$  та  $z$  — декартові координати.

Шар розділяє два півпростори  $\mathbf{S}^{(1)} = (-\infty < x < 0, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$  та  $\mathbf{S}^{(2)} = (0 < x < h, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$ , які заповнені однорідним ізотропним діелектричним матеріалом з відносними діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$  відповідно.

Шар перебуває в однорідному напружено-деформованому стані, який визначається тензором деформації  $\hat{\mathbf{e}} = \{e_{ij}\}$ . Головні осі тензора  $\hat{\mathbf{e}}$  напрямлені вздовж координатних осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , тож матриця  $(e_{ij})$  компонент тензора  $\hat{\mathbf{e}}$  в базі цієї системи координат є діагональна:  $(e_{ij}) = \text{diag}(e_{11}, e_{22}, e_{33})$ .

У вихідному ненапруженому стані матеріал шару є оптично ізотропний і характеризується діелектричною проникністю  $\varepsilon$ .

Напружено-деформований стан шару створює оптичну анізотропію матеріалу, яка визначається тензором діелектричної проникності  $\varepsilon_{ij}$ . Зв'язок між діелектричними властивостями матеріалу та напружено-деформованим станом шару  $\mathbf{S}$  виражається в лінійному наближенні співвідношеннями [1]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}, \quad \Delta \varepsilon_{ij} = D_{ijkl} e_{kl} \quad (1)$$

Тут  $\Delta \varepsilon_{ij}$  — зміна діелектричної проникливості матеріалу шару, зумовлена деформацією,  $D_{ijkl}$  — компоненти тензора четвертого рангу, який враховує зміну діелектричної проникливості матеріалу із деформацією.

Для ізотропних матеріалів тензор  $\{D_{ijkl}\}$  має лише дві незалежні компоненти. Тож, у цьому випадку маємо

$$\Delta \varepsilon_{ij} = 2pe_{ij} + p_0 e_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

де  $p$  та  $p_0$  константи матеріалу.

З урахуванням цього та беручи до уваги діагональність тензора деформації  $\hat{\varepsilon}$ , отримуємо, що тензор діелектричної проникливості деформованого шару є діагональний:  $(\varepsilon_{ij}) = \text{diag}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$ , де

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon + (2p + p_0)e_{11} + p_0(e_{22} + e_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon + (2p + p_0)e_{22} + p_0(e_{11} + e_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon + (2p + p_0)e_{33} + p_0(e_{11} + e_{22}) \end{aligned} \quad (3)$$

На поверхню розділу середовищ  $x = 0$  з півпростору  $\mathbf{S}^{(1)}$  у напрямку осі  $Ox$  падає плоска монохроматична електромагнітна хвиля, напруженість електричного поля якої визначається як  $\mathbf{E}^{(i)}(x, t) = \dot{\mathbf{E}}^{(i)} e^{i(kx - \omega t)}$ , де  $\dot{\mathbf{E}}^{(i)} = (0, \dot{E}_y^{(i)}, \dot{E}_z^{(i)})$  — вектор комплексної амплітуди падаючої хвилі,  $\dot{E}_y^{(i)}$  та  $\dot{E}_z^{(i)}$  — комплексні скаляри, які визначають компоненти  $\dot{\mathbf{E}}^{(i)}$  на координатній осі  $y$  та  $z$ ,  $k$  — хвильове число,  $\omega$  — циклічна частота.

На поверхні  $x = 0$  хвиля  $\mathbf{E}^{(i)}(x, t)$  частково відбивається в півпростір  $\mathbf{S}^{(1)}$  та заломлюється у шар. На межі  $x = h$  заломлена хвиля відбивається та заломлюється у півпростір  $\mathbf{S}^{(2)}$ . Відбита поверхнею  $x = 0$  та заломлена у півпростір  $\mathbf{S}^{(2)}$  хвилі взаємодіють із деформованим шаром, тому їх параметри є залежні від компонент деформації  $e_{11}, e_{22}, e_{33}$ .

Виходячи із аналічного розв'язку сформульованої задачі взаємодії поляризованої електромагнітної хвилі з напружено-деформованим шаром  $\mathbf{S}$ , досліджено вплив компонент деформації на коефіцієнти відбивання та пропускання хвилі, а також зміну стану поляризації відбитої та заломленої в півпростір  $\mathbf{S}^{(2)}$  хвиль. Показано, що ці параметри, які можна вимірювати із застосуванням фотометричних [2] і поляризаційно-оптичних [3] методів, можна використовувати як інформативні для задач неруйнівного визначення напружено-деформованого стану діелектричних тіл.

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1982. – 425 с.
2. Гуревич М.М. Фотометрия. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1983. – 272 с.
3. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. – Москва: Мир, 1981. – 583 с.

**MATHEMATICAL MODEL OF INTERACTION POLARIZED LIGHT  
WITH HARD DIELECTRIC LAYER**

*A mathematical model for polarized light interaction with stress-strained dielectric layer has been considered. Influence of the strain components on the reflection and transmission coefficients and on polarization state of the light wave has been studied. Possibilities of obtained results application for non-destructive determination of stress-strained state of dielectric bodies with the use of the data of photometry and polarization-optical techniques have been.*

## **ЛІНІЙНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН-СМУГ ТА ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ**

**Горячко Т.В.**

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
[taras.horyachko@gmail.com](mailto:taras.horyachko@gmail.com)

Композитні пластини й оболонки є одними з найпоширеніших елементів сучасних технічних засобів різноманітного цільового призначення, котрі часто піддаються інтенсивним експлуатаційним навантаженням, зокрема циклічним. Тому знання їхніх власних частот є необхідним при проектуванні для запобігання резонансним явищам.

У пропонованій роботі розглянуті вільні лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення шарнірно закріплених вздовж видовжених сторін пластин-смуг і циліндричних панелей. Динамічний напружено-деформований стан описано співвідношеннями уточненої геометрично нелінійної теорії оболонок [1]. Чисельний розв'язок поставлених задач на власні значення отримано шляхом застосування методу Рітца при використанні ізопараметричних лінійних скінченних елементів. Відмічено достатньо добру збіжність чисельних результатів з відомими аналітичними розв'язками.

1. *Марчук М. В.* Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // *Машинознавство*. – 2005. – № 10. – С. 9–14.

### **LINEAR AND GEOMETRICALLY NONLINEAR FREE VIBRATIONS OF COMPOSITE STRIP-PLATES AND ELONGATED CYLINDRICAL PANELS**

*The problems on free linear and geometrically nonlinear vibrations of composite strip-plates and elongated cylindrical panels are formulated. By applying the Ritz method using iso-parametric linear finite elements their numerical solutions are obtained.*

## КЛІТКОВО-ДІАГОНАЛЬНО ПАРАЛЕЛЬНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ<sup>1</sup>

Джалюк Н.С.

ІІІММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
nataliya.dzhalyuk@gmail.com

Нехай  $R$  – комутативна область головних ідеалів,  $M(n, R)$  – кільце  $n \times n$ -матриць над  $R$ ,  $D^A$  – канонічна діагональна форма матриці  $A \in M(n, R)$ , тобто

$$D^A = UAV = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0), \quad \mu_r \neq 0,$$

де  $\mu_i | \mu_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $U, V \in GL(n, R)$ . Діагональну матрицю  $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , в якій  $d_i | d_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , називають  $d$ -матрицею.

Нагадаємо, що матриці  $B_1, B_2 \in M(n, R)$  називають асоційованими справа (зліва), якщо існує така матриця  $V \in GL(n, R)$  ( $U \in GL(n, R)$ ), що  $B_2 = B_1V$  ( $B_2 = UB_1$ ).

Задача факторизації матриць над кільцями головних ідеалів сформульована З.І. Боровичем [1]. Він запропонував описувати факторизації матриць над такими кільцями з точністю до асоційовності.

Факторизації  $A = B_1C_1$ ,  $A = B_2C_2$ ,  $B_i, C_i \in M(n, R)$ ,  $i = 1, 2$ , матриці  $A \in M(n, R)$  називають асоційованими, якщо існує така матриця  $V \in GL(n, R)$ , що  $B_2 = B_1V$ ,  $C_2 = V^{-1}C_1$ .

У праці [1] З.І. Борович зокрема вказав умови існування єдиного з точністю до асоційовності розкладу матриці на множники, які мають задані канонічні діагональні форми.

Усі, з точністю до асоційовності, факторизації матриці над комутативною областю головних ідеалів  $R$ , паралельні до факторизації її канонічної діагональної форми, описані в [2].

---

<sup>1</sup> Дослідження виконано за фінансової підтримки гранту НАН України для молодих учених (Державний реєстраційний номер 0111U005741).



Поняття клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць, паралельних до факторизацій визначників їх діагональних кліток та паралельних до факторизацій канонічних діагональних форм їх діагональних кліток, введені в [3]. Там же вказані критерії однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць над адекватними кільцями. Умови існування клітково-трикутних факторизацій кліткових матриць над кільцями головних ідеалів, паралельних до факторизацій визначників їх діагональних кліток, встановлені у праці [4].

У цій праці описуються всі з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельні факторизації неособливих клітково-діагональних матриць над кільцем  $R$ .

Зрозуміло, що клітково-діагональна матриця  $A \in M(n, R)$ , тобто

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{array} \right\|,$$

яку записуватимемо у вигляді

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k), \quad (1)$$

де  $A_i \in M(n_i, R)$  – діагональні клітки матриці  $A$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , може мати розклад на множники, який не є клітково-діагональним. До того ж, така факторизація клітково-діагональної матриці може не бути асоційованою до жодної клітково-діагональної факторизації цієї матриці.

**Приклад.** Нехай  $R = \mathbb{Z}$  та

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right\| = \text{diag}(A_1, A_2),$$

де

$$A_1 = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right\|, \quad A_2 = \left\| \begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{array} \right\|.$$

Матриця  $A$  має факторизацію

$$A = BC = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\|,$$

Ця факторизація не є асоційованою до жодної клітково-діагональної факторизації матриці  $A$ , оскільки лівий множник  $B$  не є асоційованим справа до матриці

$$\tilde{B} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\|,$$

бо матриці  $B$  і  $\tilde{B}$  це дві різні форми Ерміта.

У праці [4] виділено класи клітково-діагональних матриць над  $R$ , які мають з точністю до асоційовності лише клітково-діагональні факторизації. У цьому випадку опис факторизацій таких матриць зводиться до опису факторизацій їх діагональних кліток.

**Лема.** Клітково-діагональні матриці  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$  та  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ , де  $A_i, B_i \in M(n_i, R)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , асоційовані справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли їх відповідні діагональні клітки асоційовані справа (зліва).

Нехай далі  $A \in M(n, R)$  – неособлива клітково-діагональна матриця вигляду (1). Позначимо через  $D$  клітково-діагональну матрицю вигляду

$$D = \text{diag}(D^{A_1}, \dots, D^{A_k}), \quad (2)$$

де  $D^{A_i}$  – канонічні діагональні форми діагональних кліток  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , матриці  $A$ , тобто

$$D^{A_i} = U_i A_i V_i = \text{diag}(\mu_{i1}, \dots, \mu_{in_i}), \quad (3)$$

$\mu_{ij} | \mu_{i,j+1}$ ,  $j = 1, \dots, n_i - 1$ ,  $U_i, V_i \in GL(n_i, R)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Зрозуміло, що матриця  $A$  клітково-діагонально еквівалентна до  $D$ , тобто  $D = UAV$ , де  $U = \text{diag}(U_1, \dots, U_k)$ ,  $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_k)$ .

Нехай матриця  $D$  розкладена на клітково-діагональні множники, тобто

$$D = \Phi \Psi = \text{diag}(\Phi_1, \dots, \Phi_k) \text{diag}(\Psi_1, \dots, \Psi_k). \quad (4)$$

де

$$\Phi_i = \text{diag}(\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in_i}), \quad \Psi_i = \text{diag}(\psi_{i1}, \dots, \psi_{in_i})$$

та  $\Phi_i \in d$ -матрицями,  $i = 1, \dots, k$ .

**Означення.** Клітково-діагональну факторизацію

$$A = BC = \text{diag}(B_1, \dots, B_k) \text{diag}(C_1, \dots, C_k),$$

де  $B_i, C_i \in M(n_i, R)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , клітково-діагональної матриці  $A$  таку, що  $D^{B_i} = \Phi_i$  та матриці  $C_i$  еквівалентні до  $\Psi_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , називаємо клітково-діагонально паралельною до факторизації (4) матриці  $D$  або коротко клітково-діагонально паралельною факторизацією матриці  $A$ .

**Теорема.** Нехай матриця  $D$  вигляду (2), що еквівалентна до неособливої клітково-діагональної матриці  $A$ , зображається у вигляді добутку (4). Тоді факторизації

$$A = BC = \text{diag}(U_1^{-1}\Phi_1, \dots, U_k^{-1}\Phi_k) \text{diag}(\Psi_1 V_1^{-1}, \dots, \Psi_k V_k^{-1}),$$

де  $U_i, V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , – всеможливі пари оборотних матриць над  $R$ , які задовольняють співвідношення (3), це всі з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельні факторизації матриці  $A$ .

1. *Боревич З.И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей. Тарту, 21-24 сен. 1976 г. – Тез. сообщ. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.
2. *Петричкович В.М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1997. – **40**, №4. – С. 96-100.
3. *Джалюк Н.С., Петричкович В.М.* Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв'язки // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2010. – Вип. **8**. – С. 7-17.
4. *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // *Мат. вісник НТШ.* – 2007. – т. **4**. – С. 79-89.

#### THE BLOCK DIAGONAL PARALLEL FACTORIZATIONS OF MATRICES OVER PRINCIPAL IDEAL DOMAINS

*The factorization  $A = BC = \text{diag}(B_1, \dots, B_k) \text{diag}(C_1, \dots, C_k)$  of the block diagonal matrix  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$  such that the matrices  $B_i$  and  $C_i$  are equivalent to the matrices  $\Phi_i$  and  $\Psi_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , respectively, is called block diagonal factorizations parallel to the factorization  $D = \Phi\Psi = \text{diag}(\Phi_1, \dots, \Phi_k) \text{diag}(\Psi_1, \dots, \Psi_k)$  of the block diagonal matrix  $D = \text{diag}(D^{A_1}, \dots, D^{A_k})$ , where  $D^{A_i}$  are the canonical diagonal forms of the diagonal blocks  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . We describe all (up to the association) block diagonal parallel factorizations of nonsingular block diagonal matrices over commutative principal ideal domains.*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ КОНВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ В ТІЛАХ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ ЗА ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Дмитрук В.А.

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України,  
Національний університет «Львівська політехніка»,  
[dmytruk15@gmail.com](mailto:dmytruk15@gmail.com)

У даній роботі метод побудови точних аналітичних розв'язків контактнo-крайових задач дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням конвективного механізму масопереносу в одній з фаз, розроблений для усталених процесів [1], розвинено для нестационарних процесів. Отримано аналітичні вирази для концентрації домішкової речовини та потоків маси через внутрішню поверхню контакту за змішаних граничних умов.

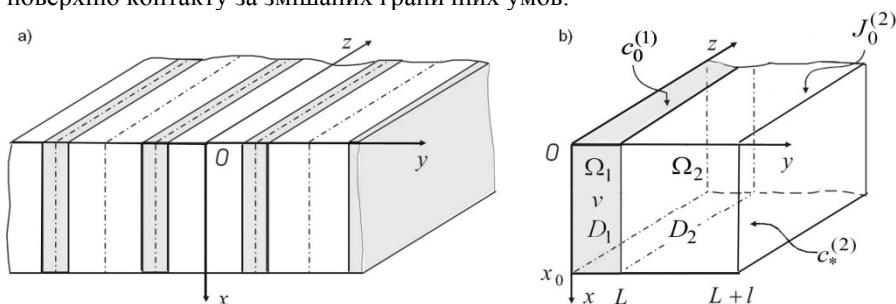


Рис.1. Горизонтально регулярна структура тіла (а) та виділений елемент такої структури (б)

Розглянемо шар товщини  $x_0$ , який складається з періодично розташованих областей двох типів. Поверхні, що обмежують ці області, перпендикулярні до поверхонь шару (рис.1а) (вісь  $Ox$  перпендикулярна до поверхонь тіла,  $Oy$  - до поверхонь складових областей). При цьому області з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  мають ширину  $2L$ , а з коефіцієнтом  $D_2$  -  $2l$ , крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  масоперенесення відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом з коефіцієнтом конвективного перенесення  $v$ , який приймається відомим і сталим. Така

структура має сімейство площин симетрії ( $y = \pm n(L+l)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), які ділять навпіл сусідні контактуючі області. Тому можемо виділити елемент тіла, на вертикальних границях якого потоки в напрямку осі  $Oy$ , дорівнюють нулю (рис. 1b).

В області  $\Omega_1 = [0; x_0] \times [0; L]$  концентрація домішкової речовини  $c_1(x, y, t)$  визначається з рівняння

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \left[ \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right] - v \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad x, y \in \Omega_1. \quad (1)$$

В області  $\Omega_2 = [0; x_0] \times [L; L+l]$  концентрація частинок домішки  $c_2(x, y, t)$  задовольняє рівняння дифузії

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \left[ \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right], \quad x, y \in \Omega_2. \quad (2)$$

На функції концентрації накладені такі крайові умови

$$c_1(x, y, t)|_{t=0} = c_2(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$c_1(x, y, t)|_{x=0} = c_0^{(1)} \equiv \text{const}, \quad \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\bar{J}_0^{(2)}}{D_2} = J_0^{(2)} \equiv \text{const}; \quad (4)$$

$$c_1(x, y, t)|_{x=x_0} = 0, \quad c_2(x, y, t)|_{x=x_0} = c_*^{(2)} \equiv \text{const}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L+l} = 0. \quad (6)$$

На границі  $y = L$  задано умови неідеального масового контакту

$$\mu_1 c_1(x, y, t)|_{y=L} = \mu_2 c_2(x, y, t)|_{y=L}, \quad D_1 \left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L} = D_2 \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L}, \quad (7)$$

де  $\mu_i$  - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  відповідно.

Розв'язок контактної-крайової задачі дифузії (1)-(7) шукаємо за допомогою інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ . Для того, щоб застосувати перетворення Фур'є необхідно знати величину відповідних функцій або їхніх похідних на границях області перетворення. Оскільки на поверхні контакту величини  $\partial c_i / \partial y$  є невідомими, доозначимо їх, враховуючи другу контактну умову (7). Вона означає, що на

границі контакту  $y = L$  масові потоки рівні між собою і, в свою чергу, дорівнюють деякій функції  $g(x, t)$ , тобто

$$D_1 \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial y} \Big|_{y=L} = g(x, t). \quad (8)$$

За змінною  $y$  в області  $\Omega_1$  застосуємо скінченне cos-перетворення Фур'є, а в області  $\Omega_2$  - cos-перетворення Фур'є зі зсувом [1]. За змінною  $x$  в області  $\Omega_1$  використаємо інтегральне перетворення для параболічних рівнянь другого порядку з конвективною складовою [2], а в області  $\Omega_2$  - таке скінченне інтегральне перетворення [2]

$$\bar{c}_2(m, j, t) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_2(x, j, t) \cos(x_m x) dx, \quad \tilde{c}_2(x, j, t) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_2(m, j, t) \cos(x_m x),$$

де  $x_m = (2m-1)\pi/2x_0$ .

В отриманих розв'язках залишається невідомою функція  $g(x, t)$ , яка означена співвідношенням (8). Для її знаходження використана перша контактна умова (7) стрибка функції концентрації на границі розділу фаз. В результаті одержуємо

$$g_n(t') = \frac{\frac{\eta_1}{\eta_2} D_1 c_0^{(1)} x_n e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \frac{D_2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} x_m B_{n,m} J_m^2 e^{-D_2 x_m^2 (t-t')}}{\frac{2}{x_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} S_m A_{n,m} B_{n,m} - \frac{1}{L} \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} \{1 - 2S_*\}},$$

де  $x_n = n\pi/x_0$ ,  $v_D = v/2D_1$ ,  $J_m^2 = J_0^{(2)} + (-1)^m x_m c_*^{(2)}$ ,  $S_* = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-D_1 y_k^2 (t-t')}$ ,

$$A_{n,m} = \frac{x_n - x_m + (-1)^{n-m} e^{v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n - x_m)^2} + \frac{x_n + x_m - (-1)^{n+m} e^{v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n + x_m)^2},$$

$$B_{n,m} = \frac{x_n - x_m - (-1)^{n-m} v_D e^{-v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n - x_m)^2} + \frac{x_n + x_m + (-1)^{n+m} v_D e^{-v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n + x_m)^2}.$$

Зауважимо, що  $\bar{g}_n(t') = \frac{1}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \bar{g}_m(t')$ , і для знаходження розв'язку задачі необхідно визначити лише одну з функцій  $\bar{g}_n(t')$  і  $\bar{g}_m(t')$ .

Після обернених перетворень функції концентрації домішкової речовини остаточно запишуться

$$c_1(x, y, t) = c_0^{(1)} e^{v_D x} \frac{\text{sh } v_D (x_0 - x)}{\text{sh}(v_D x_0)} + \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left[ -\frac{c_0^{(1)} x_n}{v_D^2 + x_n^2} e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{L} \int_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{g}_n(t') e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1 y_k^2 (t-t')} \right) \right\} dt' \right],$$

$$c_2(x, y, t) = c_*^2 - J_0^{(2)} x_0 \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) + \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(x_m x) e^{-D_2 x_m^2 t} \left\{ 1 - \frac{1}{l} \int_0^t \bar{g}_m(t') e^{D_2 x_m^2 t'} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos(y_j (y - L)) e^{-D_2 y_j^2 (t-t')} \right) dt' \right\}.$$

Таким чином, за розвиненим методом побудови точних розв'язків контактної-крайових задач конвективної дифузії в регулярних структурах отримано в нестационарному випадку вирази для концентрації мігруючих частинок за змішаних крайових умов.

1. Чернуха О.Ю., Дмитрук В.А. Математичне моделювання стаціонарних процесів дифузії в регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ // Матер. конф. молодих учених "Підстригачівські читання-2010" (25-26 травня 2010р., Львів) [Електрон. ресурс]. - Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-CD-26.pdf>. - 5с.
2. Мартыненко Н.А., Пустельников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. - Москва: Наука, 1985. - 304 с.

#### MATHEMATICAL MODELLING NON-STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION IN SOLIDS OF PERIODICAL STRUCTURE UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS

*For constructing analytical solutions of contact initial-boundary value problems of non-stationary convection-diffusion processes in two-phase regular structures under mixed conditions the method based on application of suitable integral transformations separately in contacting regions is proposed and justified.*

## ВИКОРИСТАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ В УПРАВЛІННІ ПІДПРИЄМСТВАМИ МАЛОГО БІЗНЕСУ

Добуляк Л. П., Цегелик Г. Г.

Львівський національний університет імені Івана Франка  
[lucanlesia@gmail.com](mailto:lucanlesia@gmail.com)

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких треба одночасно оптимізувати декілька критеріїв. Це так звані задачі багатокритеріальної оптимізації [1]. Розв'язання таких задач особливо є важливим у малому бізнесі в процесі планування діяльності малих підприємств в умовах конкурентного середовища. Як звичайно, кожне мале підприємство зацікавлене в максимальному прибутку. Однак, не тільки максимізація прибутку може бути основною метою підприємницької діяльності. Наприклад, для того, щоб діяльність підприємства не була збитковою, дуже важливим є зосередження уваги на випуску продукції, яка користується найбільшим попитом у споживачів. В зв'язку з цим нами побудовано математичну модель задачі планування виробництва з двома критеріями, які повинні одночасно забезпечити максимальний прибуток і максимальний випуск продукції з найбільшим попитом.

Припустимо, що фірма, використовуючи наявні ресурси, має можливість виробляти продукцію декількох видів. Відомо, скільки одиниць кожного ресурсу використовується для виробництва одиниці кожного виду продукції, запас кожного ресурсу, прибуток від реалізації одиниці виробленої продукції кожного виду, а також попит на продукції кожного виду. Задача полягає в наступному: треба так скласти план випуску продукції, щоб максимально використати наявні ресурси і в той же час одночасно забезпечити максимальний прибуток і максимальний випуск продукції з найбільшим попитом. Складемо математичну модель задачі.

Нехай:  $n$  - кількість видів продукції, яку може виробляти фірма;  $m$  - кількість різних ресурсів, що використовується у виробництві продукції;  $a_{ij}$  - кількість одиниць  $i$ -го ресурсу, що використовується для виробництва одиниці  $j$ -ої продукції;  $b_i$  - кількість одиниць  $i$ -го ресурсу, яку можна використати у виробництві продукції;  $c_j$  - прибуток від реалізації одиниці



виробленої продукції  $j$ -го виду;  $p_j$  - величина попиту на продукції  $j$ -го виду;  $x_j$  - план виробництва продукції  $j$ -го виду (шукані величини).

За наведених позначень математична модель матиме вигляд:

$$L_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$L_2 = \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max;$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для розв'язання цієї задачі з двома цільовими функціями і лінійними обмеженнями можна, наприклад, використати метод ідеальної точки [2].

Оскільки умови задачі утворюють опуклу множину  $M$  в  $n$ -вимірному евклідовому просторі, то, використовуючи симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування, можна окремо знайти максимальні значення цільових функцій  $L_1$  і  $L_2$  на множині допустимих планів (альтернатив)  $M$ .

Нехай

$$\max_{x \in M} L_1 = a_1, \quad \max_{x \in M} L_2 = a_2,$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тоді точка  $a = (a_1, a_2)$  приймається за ідеальну і згідно методу ідеальної точки знаходиться компромісна альтернатива як розв'язок  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  такої скаляризованої задачі

$$\min_{x \in M} \left( \left| \sum_{j=1}^n c_j x_j - a_1 \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^n p_j x_j - a_2 \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наведемо приклад такої задачі та її розв'язування.

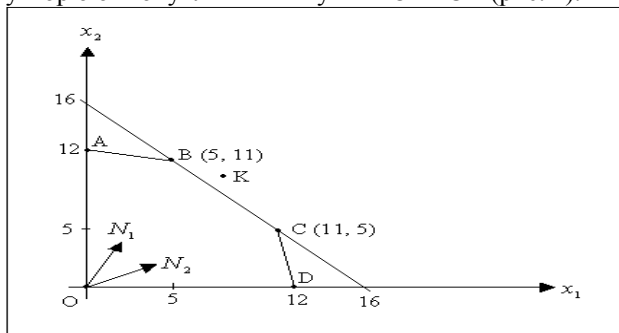
*Приклад.* Методом ідеальної точки розв'язати таку двокритеріальну задачу:

$$f_1 = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$f_2 = 0,8x_1 + 0,5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 16, \\ 5x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 + 5x_2 \leq 60; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

*Розв'язування.* Множина точок, які задовольняють умови задачі, утворюють опуклий п'ятикутник OABCD (рис. 1).



**Рис. 1.** Множина допустимих розв'язків

Оскільки

$\max f_1 = 54$  в точці  $B(5, 11)$ ,  $\max f_2 = 11,3$  в точці  $C(11, 5)$ ,

то ідеальною є точка  $a = (54; 11,3)$ . Отримаємо таку скаляризовану задачу:

$$f = (2x_1 + 4x_2 - 54)^2 + (0,8x_1 + 0,5x_2 - 11,3)^2 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 16, \\ 5x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 + 5x_2 \leq 60; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Цільова функція  $f$  являє собою концентричні еліпси з центром в точці, координати якої задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 54 = 0, \\ 0,8x_1 + 0,5x_2 - 11,3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо

$$x_1 = \frac{91}{11}, \quad x_2 = \frac{103}{11}.$$

Отже, точка  $K\left(\frac{91}{11}, \frac{103}{11}\right)$  є точкою безумовного мінімуму цільової

функції  $f$ , вона є центром еліпсів.

Як видно з рис. 1, цільова функція на допустимій множині точок досягає мінімуму в точці відрізка ВС. Тому для знаходження компромісного максимуму функцій  $f_1$  і  $f_2$  досить розв'язати таку задачу квадратичного програмування:

$$f = (2x_1 + 4x_2 - 54)^2 + (0,8x_1 + 0,5x_2 - 11,3)^2 \rightarrow \min, \quad x_1 + x_2 = 16.$$

Розв'яжемо цю задачу методом множників Лагранжа. Для цього складемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (2x_1 + 4x_2 - 54)^2 + (0,8x_1 + 0,5x_2 - 11,3)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 16).$$

Оскільки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(2x_1 + 4x_2 - 54) + 1,6(0,8x_1 + 0,5x_2 - 11,3) + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8(2x_1 + 4x_2 - 54) + (0,8x_1 + 0,5x_2 - 11,3) + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 16,$$

то для відшукування розв'язку одержуємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 9,28x_1 + 16,8x_2 - 234,08 + \lambda = 0, \\ 16,8x_1 + 32,5x_2 - 443,3 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Виключивши  $\lambda$ , одержуємо систему

$$\begin{cases} 7,52x_1 + 15,7x_2 - 209,22 = 0, \\ x_1 + x_2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є  $x_1 \approx 5,1$ ;  $x_2 \approx 10,9$ . В цій точці  $f_1 = 53,8$ ;  $f_2 = 9,53$ .

Таким чином, фірмі для одночасного досягнення максимального прибутку і максимального випуску продукції з найбільшим попитом доцільно виробляти 5,1 одиниць продукції першого виду і 10,9 одиниць продукції другого виду.

Запропонована оптимізаційна модель дає змогу підприємству-виробнику скласти план випуску продукції так, щоб одночасно забезпечити максимальний прибуток та максимальний випуск продукції з найбільшим попитом чи найвищою якістю, що покращить шанси підприємства на виживання серед конкурентів.

1. Кігель В. Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці – К.: ЦУЛ, 2003. – 202 с.

2. *Волошин О. Ф.* Моделі та методи прийняття рішень, 2-ге вид., перероб. та доповн. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. – 336 с.

## **USING MULTICRITERIAL OPTIMIZATION MODELS IN SMALL BUSINESS MANAGMANT**

*The article presents a mathematical model of the production planning of the two criteria that must simultaneously ensure maximum profit and maximum output with the greatest demand. To solve this problem using the method recommended ideal point.*

## **КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПОЛЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ЗІ ЗМІННОЮ ГРАНИЦЕЮ**

**Зеленська Т.С.**

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, tanyazese@yandex.ru

Розглянуті основні варіанти постановки крайових задач про рух пружних хвиль в канатах змінної довжини, що застосовуються до динамічних процесів в механізмах шахтних установок. Проблема поздовжніх пружних коливань канатів присвячено велику кількість досліджень. Однак загальною характерною рисою цих досліджень є той факт, що в них розглядалися переважно канати постійної довжини, а фактична зміна довжини канату враховувалась тільки опосередковано. Ці обставини суттєво змінюють характер відображень хвиль від рухомого кінця, з'являються не тільки відображені хвилі, а й залишкові, і таким чином змінюється розподіл динамічної напруги в досліджуваному середовищі. Щоб усунути подібну неточність у вихідній постановці задачі ми проводили розрахунки за допомогою модифікованого методу продовження та відображення для областей зі змінною границею. Зміна границі області інтегрування здійснюється з дозвуковою швидкістю. Застосування цього методу показало, що характер руху хвиль у середовищах змінної довжини має специфічні особливості і суттєво відрізняється від характеру руху хвиль у середовищах з нерухомими границями. Постановка та розв'язок крайових задач, що враховують математично точно зміну границь області інтегрування рівняння динамічного стану канатів, дозволить отримати більш близьку до реальної картини розповсюдження хвиль, а також поширення динамічного поля напруг в канатах, і відповідно зробити точний розрахунок параметрів міцності канатів. В результаті чого, ми знайшли розв'язки першої крайової задачі для інтервалу, одна границя якого змінювалась по заданому закону, а інша знаходилась в стані нерухомості.

Розглядається модель шахтної вертикальної установки: канат намотується на барабан; до нижнього кінця прикріплений вантаж, який відповідно переміщується вертикально. Вважаємо, що тертя канату на барабані однакове в кожній точці, і не має опору канату в точці контакту канату з барабаном. До початку намотки канату на барабан, вантаж вже був підвішений до канату і в канаті встановилось певне статичне переміщення та напруга. Приймаємо, що пружні переміщення точки контакту канату з барабаном рівні нулеві. На цьому вигині ці переміщення будуть зменшуватись по абсолютній величині до нуля. Довжина цього вигину

залежить від коефіцієнту тертя, і відповідно становиться достатньо малою для великих значень коефіцієнтів тертя. Обираємо обмежений варіант фізичної моделі, в якій довжина вигину прирівнюється до нуля.

Розв'язок поставлених крайових задач дозволяє побудувати більш коректну концепцію поширення пружних хвиль та розподілу динамічного поля напруг в канатах змінної довжини. Виявляється, що характер відображення від рухомого та нерухомого кінців суттєво відрізняються один від одного. В результаті чого, стрибки напруг, які виникають вздовж канату з рухомим кінцем через присутність в крайових умовах функції Хевісайда, розповсюджуються інакше, ніж в канаті з незмінною довжиною.

1. *Остапенко В.А.* Вторая краевая задача для области с подвижной границей. // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. Мат. –Д., 1997. –Вып.3. –С. 3-21.
2. *Остапенко В.А.* Первая краевая задача для области с подвижной границей. // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике. –Д., 1989. –С. 4-14.
3. *Пановко Ю.Г.* Введение в теорию механических колебаний. –М.: Мир. 1991. –255 с.

### **INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DYNAMIC FIELD OF DISPLACEMENTS FOR AREAS WITH MOBILE BOUNDARY**

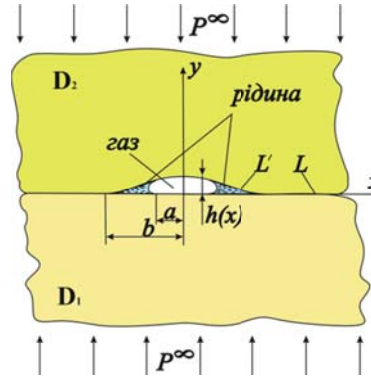
*Initial boundary value problems are considered for rods that change length over time. A special method allows one to obtain exact solution of such problems is developed. This method is a generalization of a method of reflections for rods and strings of constant length. The character of wave reflections from the moving edge essentially differs from the reflection from the stationary edge.*

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ З РІДИННИМИ МІСТКАМИ В МІЖКОНТАКТНОМУ ЗАГОРІ

Козачок О.П.<sup>1</sup>, Слободян Б.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ЛНУ ім. І.Франка, [OlegKozachok@ukr.net](mailto:OlegKozachok@ukr.net),  
<sup>2</sup>ІППММ ім. Я.С. Підстригача, [labmtd@iapmm.lviv.ua](mailto:labmtd@iapmm.lviv.ua)

Розглянемо два пружні півпростори, один з яких має плоску межу. Межа іншого – плоска скрізь, за винятком нескінченної смуги ширини  $2c$ , де вона має тунельну симетричну поверхневу виїмку, форма якої описується функцією  $r(x) = A(1 - x^2/c^2)^{5/2}$ . Виїмка є мілкою ( $A \ll c$ ) і пологою ( $r'(x) \ll 1$ ). Тіла притискаються один до одного зовнішнім тиском на нескінченності  $\sigma_{yy} = -P^\infty$  та контактують без тертя. Вважаємо, що півпростори перебувають в умовах плоскої деформації. Тому розглянемо взаємодію двох півплощин  $D_1$  і  $D_2$  (рис.



1), утворених перетином тіл площиною, перпендикулярною до твірної виїмки. Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх безпосередній механічний контакт неповний і між ними утворюється зазор завдовжки  $2b$ . На краях міжконтактного зазору зосереджена рідина, яка утворює два симетричні рідинні містки. Вважаємо, що вона нестислива та повністю змочує поверхні тіл. Об'єм рідини  $V_0$  незмінний. У середній частині зазору завдовжки  $2a$  між рідинними містками перебуває газ під сталим тиском  $P_1$  ( $P_1 = const$ ). У процесі навантаження змінюється форма зазору, тобто його довжина  $2b$ , висота  $h(x)$  та довжина  $2a$  ділянки з газом.

З формули Лапласа [1] випливає такий взаємозв'язок між тиском рідини  $P_2$ , тиском газу  $P_1$ , поверхневим натягом  $\sigma$  і висотою меніска  $h(a)$  в точках його контакту з границею тіл:

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{h(a)}. \quad (1)$$

Крайові умови контактної задачі мають вигляд

– на ділянках контакту  $L$ :

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad (2)$$

$$v^+ = v^- - r(x), |x| \in [b, c], v^+ = v^-, |x| > c; \quad (3)$$

– на ділянці міжконтактного зазору  $L'$ :

на ділянці дії газу  $|x| < a$ :

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -P_1, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad (4)$$

на ділянці капілярів  $a < |x| < b$ :

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -P_2, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0; \quad (5)$$

– на нескінченості:

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \sigma_{xx} = 0, \tau_{xy} = 0, \quad (6)$$

де  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $v$  – складова вектора переміщення уздовж осі  $Oy$ ; індексами “+”, “-” позначено граничні значення функції при прямуванні точки до осі  $Ox$  у верхній і нижній півплощині ( $y \rightarrow \pm 0$ ).

Оскільки рідина нестислива і не може виходити з зазору, то рівняння збереження кількості рідини буде мати вигляд:

$$\int_a^b h(x) dx - \frac{(h(a))^2}{8} \pi = const = \frac{1}{2} V_0. \quad (7)$$

Тут  $V_0$  – об’єм рідини, що припадає на одиницю довжини зазору в напрямі твірної виїмки.

Подавши розв’язок задачі через висоту зазору  $h(x)$  [2] та задовольнивши контактні-крайові умови (2)-(6), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) відносно функції  $h(x)$ :

$$\frac{2}{\pi} \int_L \frac{h'(t)}{t-x} dt = \frac{10A}{c^5} \left( -x^4 + \frac{3}{2} x^2 c^2 - \frac{3}{8} c^4 \right) + K (P^\infty - P(x)), x \in (-b; b). \quad (8)$$



Тут  $K = (\kappa_1 + 1)/(2G_1) + (\kappa_2 + 1)/(2G_2)$ ,  $G_k = E_k / (2(1 + \nu_k))$ ,  $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$ ,

$$P(x) = \begin{cases} P_1, & |x| < a \\ P_1 - \frac{2\sigma}{h(a)}, & a < |x| < b \end{cases}, \quad E_k, \nu_k - \text{модуль Юнга та коефіцієнт}$$

Пуассона відповідно.

Функція  $h(x)$  повинна задовольняти умови  $h'(-b) = h'(b) = 0$ ,  $h(-b) = h(b) = 0$ .

Розв'язавши СІР (8) з урахуванням цих умов, знаходимо висоту міжконтактного зазору  $h(x)$ :

$$h(x) = \frac{K\sigma}{2\pi h(a)} \left[ (x+a)\Gamma(b, x, -a) - (x-a)\Gamma(b, x, a) \right] - \frac{5A}{c^5} \left( \frac{3b^2}{10} - \frac{c^2}{2} + \frac{x^2}{5} \right) (b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (9)$$

$$\text{де } \Gamma(b, x, t) = \ln \frac{b^2 - tx + \sqrt{(b^2 - x^2)(b^2 - t^2)}}{b^2 - tx - \sqrt{(b^2 - x^2)(b^2 - t^2)}} \text{ і}$$

$$h(a) = -\frac{1}{2} \frac{5A}{c^5} \left( \frac{3b^2}{10} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{5} \right) (b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{5A}{c^5} \left( \frac{3b^2}{10} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{5} \right) \right)^2 (b^2 - a^2)^3 + \frac{2Ka\sigma}{\pi} \ln \frac{b}{a}}. \quad (10)$$

З рівняння збереження кількості рідини (7), врахувавши в ньому залежності (9), (10), та з умови існування обмеженого розв'язку СІР (8) отримаємо систему двох трансцендентних рівнянь для визначення півдовжини ділянки з газом  $a$  та півдовжини зазору  $b$ :

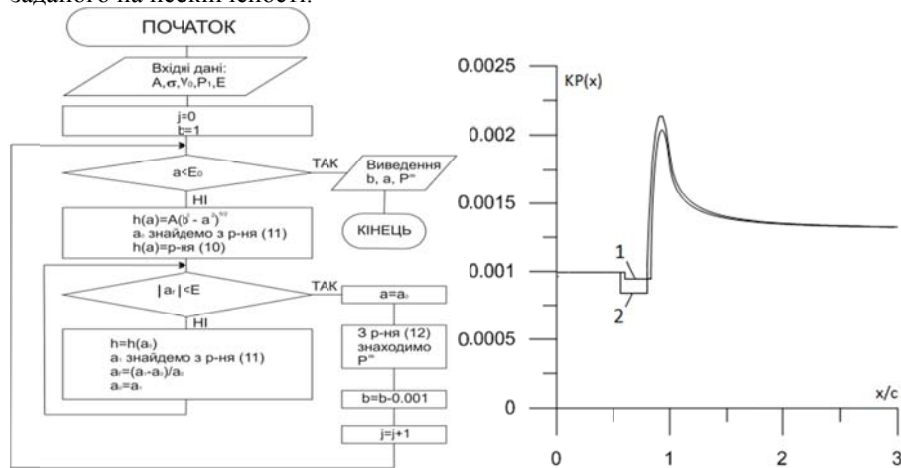
$$\frac{2K\sigma}{\pi h(a)} a^2 \ln \left( \frac{b}{a} \right) + \left( \arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right) \left[ \frac{K\sigma}{\pi h(a)} a \sqrt{b^2 - a^2} + \frac{3}{8} \frac{A}{c^3} b^4 \right] + \frac{A}{c^3} \frac{a (b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{A}{c^3} \frac{3b^2 a \sqrt{b^2 - a^2}}{8} + \frac{(h(a))^2}{8} \pi + \frac{1}{2} V_0 = 0 \quad (11)$$

$$\left( KP^\infty - KP_1 \right) \pi - \frac{2K\sigma}{h(a)} \left( 2 \arcsin \frac{a}{b} - \pi \right) - \frac{15A\pi}{4c} \left( \frac{b^2}{c^2} - 1 \right)^2 = 0 \quad (12)$$

Для розв'язання цієї системи рівнянь застосовано алгоритм, який

базується на методі послдовних наближень. Блок-схема алгоритму зображена на рис. 2.

На рис. 3 зображено розподіл контактної тиску за даних:  $V_0/V = 0,1$ ,  $KP_1 = 0,001$ ,  $KP^\infty = 0.0013$  при різних поверхневих натягах рідини: крива 1 –  $K\sigma/c = 1 \cdot 10^{-8}$ , крива 2 –  $K\sigma/c = 5 \cdot 10^{-8}$ . Бачимо, що зі збільшенням поверхневого натягу рідини збільшується контактний тиск. Дві горизонтальні ділянки на графіках відображають розподіл контактної тиску вздовж зазору: перша – на середній його частині, що заповнена газом, друга – на двох крайніх, які заповнені рідиною. Поза зазором контактний тиск зростає до певного максимального значення, а потім спадає до тиску, заданого на нескінченності.



1. Арцыбашев С.А. Курс фізики. Часть 1. Механика и теплота – Москва: Гос. уч.-пед. изд-во М-ва просвещения РСФСР, 1951. – 672 с.
2. Мартиняк Р.М. Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 4. – С. 144–149.

#### APPLICATION OF METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS TO INVESTIGATION OF ELASTIC INTERACTION OF BODIES WITH LIQUID BRIDGES IN INTERCONTACT GAP

Contact interaction of two elastic half-spaces with gap filled by a gas in its middle part and liquid bridges near gap edges is investigated. The problem is reduced to a singular integral equation for the gap height. Using the iterative procedure, which is based on the method of successive approximations, the contact parameters of the system are analyzed.

## КЛАСИФІКАЦІЯ ТОТОЖНОСТЕЙ ТИПУ (3;2) НА КВАЗІГРУПАХ

Г. Крайнічук

Вінницький соціально-економічний інститут, e-mail:kraynichuk@ukr.net

Будемо говорити, що загальне функційне рівняння має тип  $(m;n)$ , якщо воно має дві предметних змінних з появами  $m$  і  $n$  відповідно.

Коваль Р. у своїй дисертації [1] класифікувала загальні функційні рівняння типу  $(3;2)$ . Всього таких рівнянь з точністю до парастрофної рівносильності [2] точно три:

$$F_1(x;F_2(x;y))=F_3(x;y), \quad F_1(F_2(x;x);y)=F_3(x;y), \quad F_1(F_2(x;x);x)=F_3(y;y)$$

У 1983 році тотожності, які визначають такі функційні рівняння, вивчав Білоусов В.Д. при додаткових умовах (див. означення 5) в [3]. Він розглядав лише функційні рівняння без квадратів і довів, що всі вони парастрофно рівносильні першому рівнянню з наведених, припускаючи, що всі функційні змінні попарно парастрофні. У цій же праці [3] класифіковано тотожності типу  $(3;2)$  без квадратів на квазігрупах і доведено, що всього їх є сім, п'ять з яких добре відомі.

Інших два функційних рівняння, які отримала Р. Коваль мають квадрат, тобто терм виду  $F(x;x)$ . Розглянемо їх за тих самих умов, тобто ті рівняння на квазігрупах, в яких всі функційні змінні попарно парастрофні, інакше кажучи парастрофні тотожності.

**Теорема 1.** Будь-яка парастрофна тотожність виду

$$(x \cdot x) \cdot x = y \cdot y, \text{ де } \sigma, \nu, \tau \in S_3,$$

на квазігрупах визначає:

1) клас лівих луп з тотожністю  $x^2 \cdot x = e$ , якщо виконується принаймні одна з умов:

- 1.1.  $\tau \in \{\ell; r\ell\}, \nu = \varepsilon, \sigma \in \{\varepsilon; s\}$ ;
- 1.2.  $\tau \in \{r; lr\}, \nu = s, \sigma \in \{\varepsilon; s\}$ ;
- 1.3.  $\tau \in \{\varepsilon; s\}, \nu = \sigma = \ell$ ;
- 1.4.  $(\tau, \nu) \in \{\{r; lr\}, \{\ell; r\ell\}\}, \sigma \in \{\ell; r\}$ ;
- 1.5.  $(\tau, \nu) \in \{\{r; \ell\}, \{lr; r\ell\}\}, \sigma \in \{lr; r\ell\}$ ;

2) клас лівих луп з тотожністю  $x \cdot x^2 = e$ , якщо виконується принаймні одна з умов:

- 2.1.  $\tau \in \{\ell; r\ell\}, \nu = s, \sigma \in \{\varepsilon; s\}$ ;
- 2.2.  $\tau \in \{r; lr\}, \nu = \varepsilon, \sigma \in \{\varepsilon; s\}$ ;
- 2.3.  $\tau \in \{\varepsilon; s\}, \nu = \sigma = r$ ;
- 2.4.  $(\tau, \nu) \in \{\{r; \ell\}, \{lr; r\ell\}\}, \sigma \in \{\ell; r\}$ ;
- 2.5.  $(\tau, \nu) \in \{\{r; lr\}, \{\ell; r\ell\}\}, \sigma \in \{lr; r\ell\}$ ;

3) клас одноелементних квазігруп, в інших випадках.

Зауважимо, що тотожності  $x^2 \cdot x = e$  та  $x \cdot x^2 = e$  нерівносильні. Справді, в квазігрупі  $(Z_5; \circ)$ , де  $x \circ y := 2x + y$  перша тотожність хибна, а друга – істинна.

1. Коваль Р.Ф., Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях// дисер. на здобуття наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук. – Вінниця, 2005.
2. Сохацький Ф.М., Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах// Укр. матем. журн. – 2004. – Т.56, №4. – С. 1259-1266.
3. Belousov V.D. Parastrophic-orthogonal quasigroups // Quasigroups and Related Systems 13. – 2005. – P. 25-72.

### CLASSIFICATION OF IDENTITIES OF THE TYPE (3;2) ON QUASIGROUPS

*R. Koval proved that there exist exactly three classes of generalized functional equations of the type (3;2) on quasigroups up to parastrophic equivalency. Parastrophic identities (i.e. functional equations having pairwise parastrophic functional variables) belonging to one of these classes were classified by V.D. Belousov. Classification of parastrophic identities from another class is given here.*

## ПРО ВЗАЄМОДІЮ БЕРЕГІВ ТРІЩИНИ У ПЛАСТИНІ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПІД ЧАС ЗГИНУ ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ СИЛОЮ

Маковійчук М.В.

Івано-Франківський сектор ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
makoviy@ua.fm

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки  $2h$ , що підкріплена пружною основою Вінклера і містить наскрізну прямолінійну тріщину завдовжки  $2l$ . Нехай на лінії тріщини на відстані  $a$  від її центру перпендикулярно до пластини прикладено зосереджену силу  $P$ . Решта поверхонь пластини вільна від навантаження. Дослідимо вплив пружної основи та контактної взаємодії берегів тріщини на напружений стан та граничну рівновагу пластини.

Сформулюємо крайову задачу для рівнянь плоского напруженого стану та згину пластини на пружній основі із взаємопов'язаними умовами контакту на лінії розрізу [1]:

$$D\Delta\Delta w + kw = 0, \quad \Delta\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 / L. \quad (1)$$

$$[u_y] = h |[\theta_y]| \geq 0, \quad M_y = h N_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L. \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0; \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0; \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут  $\varphi$  – функція напружень,  $w$  – прогин пластини;  $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$ ,  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу;  $k$  – коефіцієнт жорсткості основи;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $L = (-l, l)$  – відрізок, що містить тріщину;  $[u_y]$  – розкриття тріщини в серединній поверхні пластини,  $[\theta_y]$  – стрибок кута повороту нормалі на берегах розрізу;  $N_{ij}$  – мембранні сили,  $M_{ij}$  – моменти,  $Q_i^*$  – узагальнені поперечні сили.

Для побудови розв'язку сформульованої задачі використано метод сингулярних інтегральних рівнянь. Інтегральні вирази сил та моментів через похідні від стрибків переміщення і кута повороту мають вигляд:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{\xi - x} [u_y]'(\xi) d\xi,$$

$$M_y(x, 0) = M_y^0(x, 0) - \frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l K_0(\xi - x) [\theta_y]'(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Тут  $M_y^0(x, 0) = \frac{P}{2\pi} \left( \nu \operatorname{kei}''(\gamma |x - a|) + \frac{\gamma}{|x - a|} \operatorname{kei}'(\gamma |x - a|) \right)$  відповідає основному напруженому станові,  $K_0(z) = \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left( \frac{2}{\gamma |z|} \operatorname{kei}'(\gamma |z|) - \operatorname{ker}(\gamma |z|) \right) - 2(1-\nu^2)\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma |z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma |z|) dz$  – ядро,  $\gamma = (k/D)^{1/4}$ ,  $z = \xi - x$ ,  $\operatorname{ker}(\dots)$ ,  $\operatorname{kei}(\dots)$  – функції Кельвіна.

Підставляючи інтегральні подання (4) у крайові умови (2) та виключаючи  $[u_y]$ , дістали інтегральне рівняння задачі на визначення знакосталого за припущенням стрибка повороту нормалі. У випадку неврахування контакту берегів, розв'язували перше рівняння (1) з класичною крайовою умовою  $M_y = 0$  на розрізі та з умовами (3) на безмежності.

Числові розв'язки задач з урахуванням та без урахування контакту отримано методом квадратур. За знайденими стрибками переміщень та кутів повороту нормалі підраховано коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефекту та розподіл контактної реакції по довжині тріщини. Із енергетичного критерію руйнування при комбінованому розтязі-згині встановлено граничне навантаження, при якому розпочинається поширення тріщини. Для фіксованих значень безрозмірної координати точки прикладання зосередженої сили побудовано графічні залежності отриманих результатів від параметра жорсткості основи. Встановлено межу області коректності постановки задачі, коли закриття тріщини відбувається по всій довжині.

1. Шацький І.П., Маковійчук М.В. Контактна взаємодія берегів тріщини під час згину пластини на пружній основі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 3. – С. 59–62.

#### **ABOUT INTERACTION OF EDGES OF CRACK IN A PLATE ON ELASTIC FOUNDATION DURING BENDING BY CONCENTRATED FORCE**

*The problem of bending of cracked plate on elastic foundation by concentrated force in two-dimensional statement has been considered. Crack closure is described using the model of contact along a line in facial surfaces. The influence of cracks edges contact, rigidity of elastic foundation and distance between loading force and crack on the strain-stress state of plate has been investigated.*

## ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ РІЗНИХ ТИПІВ СПЕКТРІВ НЕТЕРОВИХ КІЛЕЦЬ

Малоїд-Глєбова М.О.

ЛНУ ім. Івана Франка, martamaloid@gmail.com

Надалі всюди  $R$  - асоціативне нетерове кільце,  $M$  - унітарний правий модуль,  $R - sp$  сім'я всіх первинних скрутів категорії  $R - \text{mod}$ ,  $\text{Spec}(R)$  - множина всіх первинних ідеалів  $R$ . Для первинного підмодуля  $P$  з  $M$  позначимо  $\mathcal{C}(P) = \{c \in M \mid \forall r \notin P, cr \notin M\}$ . Розглянемо фільтр  $\mathfrak{D}_P$  таких правих ідеалів  $D$  кільця  $R$ , що  $r^{-1}D$  перетинає  $\mathcal{C}(P)$  для всіх елементів  $r \in R$ .  $T_P(M) = \{m \in M \mid m^{-1}0 \in \mathfrak{D}_P\}$  -  $P$ -двосторонній первинний ідеал, що називається  $P$ -періодичним підмодулем правого  $R$ -модуля  $M$ .

*Твердження 1.* Нехай  $N$  підмодуль  $M$ , що містить первинний підмодуль  $P \subseteq M$ .  $N$  буде первинним підмодулем тоді і лише тоді, коли  $N/P$  буде первинним в  $M/P$ .

*Лема 2.* Якщо  $P$ -двосторонній первинний ідеал  $R$ ,  $M$ -модуль над цим кільцем то виконується таке:

1.  $T_P(M) \subseteq P$ ;
2. Якщо  $\bar{P} = P/T_P(M)$ , то  $\mathcal{C}(\bar{P}) = (\mathcal{C}(P) + T_P(M))/T_P(M)$

*Теорема 3* Нехай  $R$  інваріантне справа нетерове кільце. Тоді простір  $R - sp$  з топологією скінченного порядку гомеоморфний простору  $\text{Spec}(R)$  з топологією Зариського.:

Теорема 3 узагальнює один результат з роботи [1], встановлений там для комутативних регулярних кілець.

1. Golan Jonatan S. "Torsion Theories" // Longman Scientific and Technical, 1986. – 589 p.;
2. Goldman O. Rings and Modules of Quotients // Journal of Algebra, 1969 p. 10-47;
3. J. Lambek and G. Michler, The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring, J. of Algebra 25 (1974) 364-389.

**ABOUT CORRESPONDANCE BETWEEN DIFFERENT TYPES OF  
SPECTRUM FOR NOETHERIAN RINGS**

*There are shown some properties of prime submodules of module over noetherian ring. Also there is shown correspondence between finitary order topology and Zarisky topology for noetherian ring.*



## ПРО РІВНОМІРНУ РЕЗОЛЬВЕНТНУ ЗБІЖНІСТЬ СИНГУЛЯРНИХ ГАМІЛЬТОНІАНІВ НА ГЕОМЕТРИЧНИХ ГРАФАХ

Манько С.С.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
Національної академії наук України, [stepan.manko@gmail.com](mailto:stepan.manko@gmail.com)

Протягом кількох останніх десятиліть значно зріс інтерес до спектральної теорії диференціальних операторів на геометричних графах. Оператори на графах застосовують у теорії оптичних кристалів, акустиці, теорії хвилеводів, у квантовому хаосі та багатьох інших галузях природознавства. Це передусім пов'язано зі значним розвитком нанотехнологій та мікроелектроніки, що дозволило виготовляти надтонкі мережеподібні конструкції, для яких природно виникають фізичні моделі на графах. У квантовій фізиці ці моделі дістали назву квантових графів. Одній із таких моделей присвячена доповідь.

У праці [1] розглянуто сім'ю гамільтоніанів зі сингулярними потенціалами на геометричному графі. Сингулярні потенціали залежать від малого параметра. В цій роботі вивчено граничну поведінку спектрів та власних підпросторів сім'ї збурених операторів, коли параметр регуляризації прямує до нуля. Побудовано оператор, спектральні характеристики (спектри і власні підпростори) якого є границями спектральних характеристик сім'ї збурених операторів. Отриманий оператор назвали граничним, хоча в цій праці не досліджено питання про збіжність сім'ї збурених операторів в жодній топології.

Продовження цих досліджень висвітлені в праці [2]. Тут розв'язали задачу розсіювання на аналогічному сингулярному потенціалі, що зосереджений у вершині геометричного графа, й показали, що такий потенціал майже завжди асимптотично непроникний. Крім того, коефіцієнти розсіювання на такому потенціалі прямують до відповідних розв'язків задачі розсіювання для граничного гамільтоніана, отриманого в [1]. Це ще раз підтверджує, що граничний оператор є хорошою з фізичного погляду апроксимацією сім'ї збурених операторів.

Доповідь стосується результатів праці [3], де доведено, що граничний оператор, отриманий в [1,2], є границею в рівномірній резольвентній топології сім'ї збурених гамільтоніанів. Це результат "оправдовує" вибір граничного оператора не лише з фізичного, але й математичного погляду.

Результати робіт [1,2,3] є узагальненням аналогічних результатів [4,5,6] для прямої, яку можна розглядати як геометричний граф з двома ребрами та

однією вершиною. У цьому випадку сім'я сингулярних потенціалів апроксимує першу похідну дельта-функції Дірака. Вперше, як нам відомо, такий підхід до вивчення одновимірного оператора Шредінгера з потенціалом, який є першою похідною дельта-функції Дірака, застосували у роботі [7].

1. Манько С.С. Про оператор Шредінгера зі сингулярним потенціалом на геометричному графі // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, №3. – С. 61-71.
2. Man'ko S.S. On  $\delta'$ -like potential scattering on star graphs // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – **43**, №44. – ID 445304.
3. Man'ko S.S. On norm resolvent convergence of singular graph Hamiltonians – *in preparation*.
4. Головатий Ю.Д., Манько С.С. Точні моделі для операторів Шредінгера з  $\delta'$ -подібними потенціалами // Укр. матем. вісник. –2009. – **6**, №5. – С. 173-207.
5. Манько С.С. Про оператори Шредінгера та Штурма-Ліувілля з  $\delta'$ -потенціалами // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. –2009. – №71. – С. 142-155.
6. Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with  $\delta'$ -like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – **43**, №4. – ID 155204.
7. Šeba P. Some remarks on the  $\delta'$ -interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – **24**, №1. – P. 111-120.

### ON NORM RESOLVENT CONVERGENCE OF SINGULAR HAMILTONIANS ON METRIC GRAPHS

*We deal with Hamiltonians on noncompact star metric graphs with singular potentials depending on a small parameter. In [1,2] it was introduced approximations (limit operators) for such singular Hamiltonians. Limit operators were determined by the proximity of energy levels, pure states and scattering quantities for singular and limit Hamiltonians. The present talk concerns norm resolvent convergence of these Hamiltonians to the limit ones.*

## ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ В ПОЛЯРНО – СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВИХ СЕРЕДОВИЩ

**Мастикаш Л.В., Махоркін І.М.**

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, e-mail: [maslyuba2010@gmail.com](mailto:maslyuba2010@gmail.com)

Нехай пружне ізотропне сферичне тіло радіуса  $r = R_2$  з центральною сферичною порожниною радіуса  $r = R_1$ , фізико-механічні властивості якого, за винятком коефіцієнта Пуассона, залежать від температури, піддано дії відомого температурного поля  $t(r, \tau)$  та зовнішньому і внутрішньому тиску величини  $p_2, p_1$  відповідно.

У такому випадку для визначення напружено-деформованого стану тіла, обумовленого температурним полем  $t(r, \tau)$ , маємо рівняння рівноваги в переміщеннях, співвідношення Дюгамеля-Неймана і крайові умови, які в безрозмірній формі відповідно мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}) \right] + \frac{1}{G^*(t^*)} \frac{\partial G^*}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{\bar{u}}{\rho} - \Phi^* \right] = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho}, \quad (1)$$

$$\sigma_r = G^*(t^*) \left[ (1-\nu) \frac{d\bar{u}}{d\rho} + 2\nu \frac{\bar{u}}{\rho} - (1-\nu) \Phi^* \right], \sigma_\varphi = G^*(t^*) \left[ \nu \frac{d\bar{u}}{d\rho} + \frac{\bar{u}}{\rho} - (1-\nu) \Phi^* \right], \quad (2)$$

$$\sigma_r|_{\rho=R_1} = p_1^*, \sigma_r|_{\rho=R_2} = p_2^*, \quad (3)$$

де  $\bar{u} = \frac{u}{R\alpha_i^{(0)} t_0}$ ,  $\sigma_i = \frac{(1-2\nu)\sigma_{ii}}{2G_0\alpha_i^{(0)} t_0}$ ,  $\Phi^* = \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^{t^*} \alpha_i^*(\zeta) d\zeta$ ,  $\alpha_i^*(t^*) = \frac{\alpha_i(t)}{\alpha_i^{(0)}}$ ,  $t^* = \frac{t}{t_0}$ ,

$G^*(t^*) = \frac{\mu(t)}{G_0}$ ;  $G_0$ ,  $\alpha_i^{(0)}$ ,  $t_0$  – опорний модуль зсуву і опорний температурний

коефіцієнт лінійного розширення та опорна температура.

Для розв'язання крайової задачі (1)-(3) залежність  $G^*(t^*)$  в області її визначення із заданою точністю проапроксимуємо виразом вигляду

$$G^*(t^*) = G_1^* + \sum_{i=1}^n (G_{i+1}^* - G_i^*) S_+(t^* - t_i^*), \quad t_1^* < t_2^* < \dots < t_n^*, \quad (4)$$

де  $S_+(\zeta - \zeta_i) = \{1, \zeta > \zeta_i; 0, \zeta \leq \zeta_i\}$  – асиметрична функція Хевісайда.

Тоді оскільки  $t^*(\rho, \tau)$  для кожного конкретного випадку визначено, а  $\tau$  в рівнянні (1) відіграє роль параметра, то в кожен фіксований момент часу  $\tau \in [0, \infty]$  воно набуває наступного вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}) \right] + \sum_{j=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+j+1}^* - G_{q_\tau+j}^*}{G_{q_\tau+j+1}^*} \sigma \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \delta_+(t^* - t_{q_\tau+j}^*) = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho}, \quad (5)$$

де  $\sigma = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{2\nu \bar{u}}{1-\nu \rho} - \Phi^*$ ,  $\delta_+(\zeta) = \frac{\partial S_+(\zeta)}{\partial \zeta}$ , а  $m_\tau$  і  $q_\tau$  визначаються із співвідношення

$$\begin{aligned} t_{q_\tau}^* &\leq \min t^* < t_{q_\tau+1}^* < \dots < t_{q_\tau+m_\tau}^* < \max t^* < t_{q_\tau+m_\tau+1}^*, \\ \min t^* &= \min_{\rho \in [1, \rho_2]} t^*(\rho, \tau), \max t^* = \max_{\rho \in [1, \rho_2]} t^*(\rho, \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Враховуючи, що  $t^*(\rho, \tau)$  строго монотонна функція на  $\rho \in [1, \rho_2]$ , внаслідок чого в кожний фіксований момент часу справедливі співвідношення [1]

$$S_+(t^* - t_i^*) = S_+ \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho_i} (\rho - \rho_i) \right], \delta_+(t^* - t_i^*) = \left| \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right|_{\rho_i} \delta_+ \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho_i} (\rho - \rho_i) \right],$$

рівняння (5) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}) \right] + \sum_{j=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+j+1}^* - G_{q_\tau+j}^*}{G_{q_\tau+j+1}^*} \sigma \Big|_{\rho_{q_\tau+j}} \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho_{q_\tau+j}} \times \\ \times \delta_+ \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho_{q_\tau+j}} (\rho - \rho_{q_\tau+j}) \right] = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\rho_{q_\tau+j}$  - корінь рівняння

$$t^*(\rho, \tau) - t_{q_\tau+j}^* = 0 \quad (8)$$

в момент часу  $\tau$ .

Інтегруючи рівняння (7), отримуємо

$$\bar{u}(\rho, \tau) = \frac{C\rho}{3} + \frac{1}{\rho^2} [H(\rho, \tau) + D] - \sum_{j=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+j+1}^* - G_{q_\tau+j}^*}{G_{q_\tau+j+1}^*} \frac{\rho^3 - \rho_{q_\tau+j}^3}{3\rho^2} \times$$

$$\times \sigma|_{\rho_{q_\tau+j}} S_+ \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho_{q_\tau+j}} (\rho - \rho_{q_\tau+j}). \quad (9)$$

Тут  $H(\rho, \tau) = \int_0^\rho \xi^2 \Phi^*(\xi, \tau) d\xi$ ,  $C$ ,  $D$  – сталі інтегрування,

$$\sigma|_{\rho_{q_\tau+j}} = CK_1^{(q_\tau+j)} + DK_2^{(q_\tau+j)} + K_3^{(q_\tau+j)}, \quad \text{а} \quad K_1^{(q_\tau+j)}, K_2^{(q_\tau+j)}, K_3^{(q_\tau+j)}$$

визначаються за рекурентними співвідношеннями виду:

$$K_1^{(q_\tau+j)} = \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \left[ \frac{1+\nu}{1-2\nu} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{G_{q_\tau+i+1}^* - G_{q_\tau+i}^*}{G_{q_\tau+i+1}^*} \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} + \frac{2\rho_{q_\tau+i}^3}{\rho_{q_\tau+j}^3} \right) K_1^{(q_\tau+i)} \right].$$

Підставивши (9) у (2), отримуємо вирази для визначення обумовлених температурним полем  $t^*(\rho, \tau)$  безрозмірних температурних напружень

$$\sigma_r = \frac{2(1-2\nu)}{3} G^* \left\{ \frac{(1+\nu)C}{2(1-2\nu)} - \frac{3}{\rho^3} [H(\rho, \tau) + D] - \sum_{i=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+i+1}^* - G_{q_\tau+i}^*}{2G_{q_\tau+i+1}^*} \sigma|_{\rho_{q_\tau+i}} \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} + \frac{2\rho_{q_\tau+i}^3}{\rho^3} \right) S_+ \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho_{q_\tau+i}} (\rho - \rho_{q_\tau+i}) \right\}, \quad (10)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = (1-2\nu) G^* \left\{ \frac{(1+\nu)C}{3(1-2\nu)} + \frac{1}{\rho^3} [H(\rho, \tau) + D] - \Phi^*(\rho, \tau) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+i+1}^* - G_{q_\tau+i}^*}{3G_{q_\tau+i+1}^*} \sigma|_{\rho_{q_\tau+i}} \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} - \frac{\rho_{q_\tau+i}^3}{\rho^3} \right) S_+ \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho_{q_\tau+i}} (\rho - \rho_{q_\tau+i}) \right\}.$$

Сталі інтегрування  $C$ ,  $D$  визначаються із граничних умов (3) за формулами

$$C = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad D = \frac{b_1 a_{11} - b_2 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad (11)$$

де  $a_{ij}$  та  $b_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) визначаються за виразами типу

$$a_{11} = \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} - \sum_{i=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+i+1}^* - G_{q_\tau+i}^*}{3G_{q_\tau+i+1}^*} K_1^{(q_\tau+i)} \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} + 2\rho_{q_\tau+i}^3 \right) S_+ \left[ -\operatorname{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho_{q_\tau+i}},$$

$$b_1 = \frac{3p_1^*}{2(1-2\nu)G_1} + \sum_{i=1}^{m_\tau} \frac{G_{q_\tau+i+1}^* - G_{q_\tau+i}^*}{3G_{q_\tau+i+1}^*} K_1^{(q_\tau+i)} \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} + 2\rho_{q_\tau+i}^3 \right) S_+ \left[ -\operatorname{sign} \left( \frac{\partial t^*}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho_{q_\tau+i}}.$$

Таким чином, дослідження термопружного стану термочутливого тіла за центральносиметричної термосилової дії зведено до:

- апроксимації температурних залежностей фізико-механічних характеристик кусково-постійними функціями температури (4);
- числового знаходження коренів рівняння (8), за значеннями яких величини напружень обчислюються згідно формул (10).

*Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект Ф41.2/001)*

1 Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. –288 с.

#### **USING OF THE GENERALIZED FUNCTIONS IN THE POLAR-SYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE MEDIA**

*The way to analytic-numerical determination of the thermostressed state of isotropic medium which is under centrally symmetric thermomechanical loading is approbated. The approach is based on the use of elements of algebra of generalized functions and approximation of thermal dependences of physical and mechanical properties of material by piecewise-constant functions of temperature*

## СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ ЗМІННОГО В ЧАСІ НАВАНТАЖЕННЯ

Махоркін М.І.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України м.Львів, вул. Наукова, 3-б, 79060,  
[mahorkin@ukr.net](mailto:mahorkin@ukr.net).

Оболонкові структури різної конфігурації широко використовуються в авіа- та ракетобудуванні, хімічному машинобудуванні, атомній енергетиці промислового будівництві тощо. Надійність конструкцій та систем, в які вони входять великою мірою залежить від наявності в оболонках гострокінцевих концентраторів напружень типу тріщин. Саме тому значне зацікавлення викликає теоретичне вивчення напружень та деформацій в околі такого роду дефектів чому присвячені численні наукові праці та дослідження. Серед них слід відзначити вивчення оболонок з тріщинами під дією змінного в часі навантаження оскільки визначальні співвідношення ускладнюються порівняно із дослідженнями для статичного навантаження. Такі навантаження часто виникають при експлуатації трубопроводів, у авіатехніці тощо.

Розглянемо замкнену безмежну циліндричну оболонку з наскрізним поздовжнім розрізом, довжина якого –  $2l$  (рис. 1). Оберемо початок системи координат посередині розрізу та вважатимемо, що оболонка перебуває під дією поверхневого навантаження, яке змінюється за експоненціальним законом.

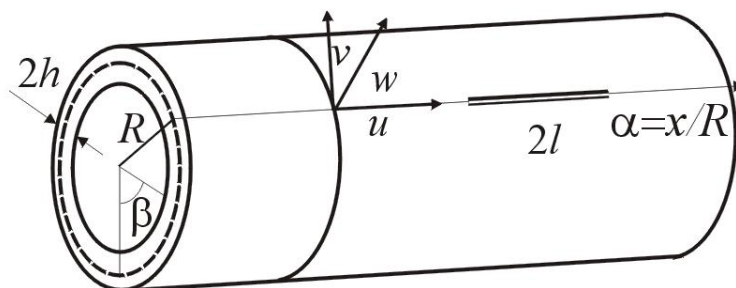


Рис. 1

За вказаних умов поле деформацій вздовж розрізу згідно з [1, 2] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [v(\alpha, \tau)] \delta(\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [u(\alpha, \tau)] \delta(\alpha), \\ \kappa_{\beta\beta}^0 &= \kappa_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-1} \{ [\theta_\beta(\alpha, \tau)] \delta(\beta) - R^{-2} [w(\alpha, \tau)] \partial_\beta \delta(\beta) \}, \\ \kappa_{\alpha\beta}^0 &= \kappa_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-2} \partial_\alpha [w(\alpha, \tau)] \delta(\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 = \kappa_{\alpha\alpha}^0 = 0,\end{aligned}\quad (1)$$

де  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\kappa_{ij}^*$  ( $i, j = \alpha, \beta$ ) – частина, що не залежить від часу;  $[u(\alpha)]$ ,  $[v(\alpha)]$ ,  $[w(\alpha)]$ ,  $[\theta_\beta(\alpha)]$  – стрибки переміщень та кутів повороту (див. [1]);  $\tau$  – час;  $\gamma$  – деякий сталий коефіцієнт розмірності [ $c^{-1}$ ];  $\partial_j^n = \frac{\partial^n}{\partial j^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Система рівнянь рівноваги згідно з [1, 3] матиме вигляд

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_\tau^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

де  $L_{km}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) – оператори аналогічні поданим у [1, 2];  $g_1 = u$ ;  $g_2 = v$ ;  $g_3 = w$ ;  $q_i^{0*}$  – праві частини рівнянь, котрі обчислюють за поданнями [1] з урахуванням вигляду поля деформацій (1);  $c_\tau^2 = E\rho^{-1}(1-\nu^2)^2$ .

Використовуючи операторний метод подамо розв'язок системи диференціальних рівнянь (2) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}u(\alpha, \tau) &= u^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 (L_{ju}^* \varphi_j + P_{ju}^* \psi_j) e^{\gamma\tau}, \\ v(\alpha, \tau) &= v^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 (L_{jv}^* \varphi_j + P_{jv}^* \psi_j) e^{\gamma\tau}, \\ w(\alpha, \tau) &= w^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 (L_{jw}^* \varphi_j + P_{jw}^* \psi_j) e^{\gamma\tau}.\end{aligned}\quad (3)$$

Тут  $L_{kl}^* = L_{kl} + L_{kl}^{**}$ ,  $P_{kl}^* = P_{kl} + P_{kl}^{**}$  ( $l = u, v, w$ ), де  $L_{kl}$ ,  $P_{kl}$  – оператори тотожні поданим у [1] для випадку статичного навантаження, а  $L_{kl}^{**}$ ,  $P_{kl}^{**}$  – оператори які враховують динамічне навантаження і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}L_{2u}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ 4\nu \partial_\alpha^3 - 2\nu(1-\nu)^{-2} (\partial_\alpha^5 + \partial_\alpha \partial_\beta^4 + 2\partial_\alpha^3 \partial_\beta^2 - \partial_\alpha \partial_\beta^3) + \right. \\ &\quad \left. + c_1^{-2} (\nu \partial_\alpha^3 - \partial_\alpha \partial_\beta^2) \right] - \gamma_1^4 2\nu c_1^{-2} (1-\nu)^{-1} \partial_\alpha, \\ L_{3u}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ \partial_\beta^3 - \partial_\beta^5 - 2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^3 - \partial_\alpha^4 \partial_\beta + c_1^{-2} (\partial_\beta^3 - \partial_\beta - \nu \partial_\alpha^2 \partial_\beta) \right] - \gamma_1^4 c_1^{-2} \partial_\beta, \\ P_{u2}^{**} &= -\gamma_1^2 (1-\nu) \left[ 2\nu^2 \partial_\alpha^3 + (1+3\nu) \partial_\alpha \partial_\beta^2 \right], \quad P_{u3}^{**} = -2\gamma_1^2 (1+3\nu) \partial_\alpha^2 \partial_\beta,\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
L_{2\nu}^{**} &= -\gamma_1^2 2\nu(1-\nu)^{-1} \left[ \partial_\beta^5 + \partial_\beta^3 + 2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^3 + \partial_\alpha^4 \partial_\beta + (2-\nu) \partial_\alpha^2 \partial_\beta - \right. \\
&\quad \left. - 0,5c_1^{-2}(1-\nu) \left( \partial_\beta^3 + (2+\nu) \partial_\alpha^2 \partial_\beta \right) \right] - \gamma_1^4 2c_1^{-2}(1-\nu)^{-1} \partial_\beta, \\
L_{3\nu}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ c_1^{-2} \left( \partial_\alpha^3 - \partial_\alpha - \nu \partial_\alpha \partial_\beta^2 \right) - \partial_\alpha^2 - \partial_\alpha \partial_\beta^4 - 2\partial_\alpha^3 \partial_\beta^2 \right] - \gamma_1^4 c_1^{-2} \partial_\alpha, \\
P_{2\nu}^{**} &= -\gamma_1^2 (1-\nu) \left[ \partial_\alpha^2 \partial_\beta - 2(1-\nu)^{-1} \partial_\beta - (1+\nu)(1-\nu)^{-1} \partial_\beta^3 - \right. \\
&\quad \left. - c_1^2 2(1-\nu) \partial_\alpha^4 \partial_\beta \right] - \gamma_1^4 2(1-\nu)^{-1} \partial_\beta, \\
P_{3\nu}^{**} &= \gamma_1^4 4 \left[ \partial_\alpha^3 - \partial_\alpha - 2(1+\nu) \partial_\alpha \partial_\beta^2 - c_1^2 \left( \partial_\alpha^5 + \nu \partial_\alpha^3 \partial_\beta^2 \right) \right] - 4\gamma_1^4 \partial_\alpha, \\
L_{2w}^{**} &= \gamma_1^4 2c_1^{-2}(1-\nu)^{-1} - \gamma_1^2 \left[ 2(2-\nu)(1-\nu)^{-1} \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 + c_1^{-2} \left( \partial_\beta^2 + (3+2\nu) \partial_\alpha^2 \right) \right], \\
L_{3w}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ \partial_\alpha \partial_\beta^2 + (2-\nu) \partial_\alpha^3 \partial_\beta - c_1^{-2} (1+\nu) \partial_\alpha \partial_\beta \right], \\
P_{2w}^{**} &= \gamma_1^2 (1-\nu)^{-1} \left[ 2\partial_\beta^2 + (3-\nu) \left( \partial_\beta^4 + \nu \partial_\alpha^4 + (1+\nu) \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 \right) \right] - \gamma_1^4 2(1-\nu) \left( \partial_\beta^2 + \nu \partial_\alpha^2 \right) \\
P_{3w}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ 4\partial_\alpha \partial_\beta^2 + 2(3-\nu) \left( \partial_\alpha \partial_\beta^3 + \partial_\alpha^3 \partial_\beta \right) \right] - 4\gamma_1^4 \partial_\alpha \partial_\beta, \quad \gamma_1 = R^2 \gamma^2 c_\tau^{-2}.
\end{aligned}$$

Функції  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  визначають з рівнянь:

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^*, \quad D\varphi_3 = \varepsilon_{12}^*, \quad D\psi_2 = R\kappa_{22}^*, \quad D\psi_3 = R\kappa_{12}^*, \quad (4)$$

де оператор  $D$  має вигляд  $D = D^0 + D^* + D^{**}$ .

Тут  $D^0$  і  $D^*$  – оператори, вигляд яких збігається із поданим у [1] для випадку статичного навантаження, а  $D^{**}$  – оператор, що враховує динамічність навантаження –

$$\begin{aligned}
D^{**} &= 2\gamma_1^4 (1-\nu)^{-1} c_1^{-2} \left\{ (8-2\nu^2) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 + c_1^2 \left[ \left( \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 \right)^2 - \partial_\beta^2 - 2(1-\nu) \partial_\alpha^2 \right] \right\} + \\
&+ \gamma_1^2 \left\{ c_1^{-2} \left[ \left( \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 \right)^2 - \partial_\beta^2 - (3+2\nu) \partial_\alpha^2 \right] + 2(1-\nu)^{-1} \left[ 0,5(\nu-3) \left( \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 \right)^3 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 0,5(3+\nu) \partial_\beta^4 + 2(1-\nu) \left( \partial_\alpha^4 - \partial_\beta^2 \right) - (2-\nu^2) \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 \right] - \right. \\
&\quad \left. - 2c_1^2 \left[ 2(1-\nu) \partial_\alpha^6 + (1-\nu^2) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 \right] \right\} + 2\gamma_1^6 (1-\nu)^{-1} c_1^{-2}
\end{aligned}$$

Відтак, використавши перетворення Фур'є, з'ясуємо, що функції  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  описуються виразами поданими в [2], якщо в них формально замінити

$[u]$ ,  $[v]$ ,  $[w]$ ,  $[\theta_\beta]$  на  $[u^*]$ ,  $[v^*]$ ,  $[w^*]$ ,  $[\theta_\beta^*]$ . Функція  $\Phi_n(\alpha, \beta)$ , котра входить у ці вирази, обчислюється за такою ж формулою, як і в [1] де слід прийняти  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а  $y_i (i = \overline{1, 8})$  – корені такого рівняння:

$$y^8 + A_1 y^6 + A_2 y^4 + A_3 y^2 + A_0 = 0, \quad (5)$$

$$A_6 = 4n^2 + \gamma_1^2 (3 - \nu)(1 - \nu),$$

$$A_4 = 6n^4 + (1 - \nu^2)c_1^{-2} + 2\gamma_1^4(1 - \nu)^{-1} + \gamma_1^2 [c_1^{-2} + n^2 3(3 - \nu)(1 - \nu)^{-1} - 2n^2(4 - \nu^2)],$$

$$A_2 = n^4(n^2 - 1)^2 + \gamma_1^4 [c_1^{-2}(3 - \nu)(1 - \nu)^{-1} + 4n^2(1 - \nu)] + \gamma_1^2 [c_1^{-2}(3 + 2\nu) + n^2 2c_1^{-2} + 3n^4(3 - \nu)(1 - \nu)^{-1}],$$

$$A_0 = n^4(n^2 - 1)^2 + \gamma_1^4(1 - \nu)^{-1}(n^2(3 - \nu)c_1^{-2} + 2n^4 + 2c_1^{-2}) + 2\gamma_1^6 c_1^{-2}(1 - \nu)^{-1} + \gamma_1^2 c_1^{-2}(n^2 + n^4).$$

Виконавши дії та перетворення аналогічні до описаних у [1], отримаємо, систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від стрибка функцій переміщень та кутів повороту. Відзначимо, що загальний вигляд отриманих рівнянь аналогічний до виведених у [1], а їх ядра можна подати у вигляді

$$K_{ij} = K_{ij}^0 + K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$$

де  $K_{ij}^0$  – сингулярна частина, тотожна поданій у [1];  $K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$  – регулярна частина, у якій складова  $K_{ij}^{**}$  враховує динамічність навантаження, їхній вигляд не подаємо через громіздкість.

1. Кушнір Р.М., Николишин М. М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
2. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. Думка, 1985. – 221 с.
3. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.

#### SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR CYLINDRICAL SHELL WITH A LONGITUDINAL CRACK UNDER TIME-VARYING LOADING

*An elastic cylindrical isotropic shell with a longitudinal crack under surface loading, in time according to exponential law, has been considered. A system of singular integral equations has been constructed. The solutions of these equations enable the study of the stress state near the crack tips.*

## ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ЗВ'ЯЗАНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРО ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

**Меркотан Г.В., Шамровський О.Д.**

Запорізька державна інженерна академія, merkatan@ukr.net

Отримані взаємозв'язані рівняння термопружності для тонкої однорідної пластини при наявності тепловіддачі з її поверхонь  $z = \pm h$  з урахуванням швидкості поширення теплового потоку:

$$\Delta \ddot{u} + (c^2 - 1)grad \operatorname{div} \ddot{u} - 2\alpha_t(c^2 - 1)grad t = \frac{1}{c_2^2} \ddot{u} \quad (1),$$

$$\Delta t - \mu(\ell t - t_c) - \frac{1}{\kappa} \ell \left[ \frac{\partial t}{\partial \tau} + \gamma_0 \operatorname{div} \dot{u} \right] = 0$$

де  $t$  – температура,  $u$  – переміщення,  $\tau_r$  – час релаксації теплового потоку,  $\alpha_t$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення ізотропного тіла,  $\lambda_t$  – коефіцієнт теплопровідності ізотропного тіла,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $G$  – модуль здвигу,  $E$  – ізотермічний модуль Юнга.

$$c^2 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{1-\nu}, \quad \gamma_0 = \frac{\alpha_t E T}{c_v(1-\nu)(1+\varepsilon)}, \quad \kappa = \frac{\lambda_t}{c_v(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha_t^2 E T}{c_v(1-2\nu)1-\nu}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$

при  $\ell = 1$  система диференціальних рівнянь (1) описують задачу класичної теплопровідності [1].

Перейдемо до безрозмірних змінних:

$$u(v) = \frac{\lambda_t}{c_1 c_v} \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{u}(\bar{v}), \quad x(y) = \frac{\lambda_t}{c_1 c_v} \bar{x}(\bar{y}), \quad t = \frac{1}{2\alpha_t a_s^2} \bar{T} + t_c, \quad \tau = \frac{\lambda_t}{c_1^2 c_v} \bar{\tau}$$

Отримаємо розв'язок системи (1) для напівнескінченної пластини, для якої граничні умови ( $x=0$ ) задані як періодичні функції по змінній  $y$ .

$$u = U(x, t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ky, \quad v = V(x, t) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin ky, \quad t = P(x, t) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos ky.$$

Після алгебраїчних перетворень в безрозмірних змінних система рівнянь (1) в координатній формі буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 (E_x - P) &= \partial_t^2 E_x + a_s^2 k^2 E_x - (1 - a_s^2) k \partial_x^2 V \\ a_s^2 \partial_x^2 V &= \partial_t^2 V + (1 - a_s^2) k E_x - k P + k^2 V \\ \partial_x^2 [-\bar{\varepsilon} E_x + (\bar{\varepsilon} + \bar{M}^2) P] &= \partial_t^2 P + \bar{\varepsilon} (-a_s^2 k^2 + M^2 \partial_t) E_x + \\ + \bar{M}^2 [k^2 + B_1 + (1 + \varepsilon + B_q) \partial_t] P &+ \bar{\varepsilon} [(1 - a_s^2) k \partial_x^2 + M^2 k \partial_t + k \partial_t^2] V \end{aligned} \quad (2),$$

де

$B_1$  – коефіцієнт Біо,  $c_q$  – швидкість поширення теплового потоку.

Приведемо (2) до системи хвильових рівнянь. Застосуємо ортогональні перетворення до системи (2), переписаної в матричному вигляді.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} + \bar{M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_s^2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a_k E_x \\ b_k P \\ c_k V \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_s^2 k^2 & 0 & -k(1 - a_s^2) \partial_x^2 \\ \bar{\varepsilon}(-k^2 a_s^2 + M^2 \partial_t) & \bar{M}^2[k^2 + B_1 + (1 + \bar{\varepsilon} + B_q) \partial_t] & \bar{\varepsilon}[k(1 - a_s^2) \partial_x^2 + kM^2 \partial_t + k \partial_t^2] \\ k(1 - a_s^2) & -ka_s^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

Найдемо власні числа матриці А коефіцієнтів правої частини (2), які будуть завжди дійсні і є швидкостями поширення фронтів термопружних хвиль:

$$a_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ a_s^2 \bar{\varepsilon} + \bar{M}^2 + 1 \pm \sqrt{(a_s^2 \bar{\varepsilon} - \bar{M}^2 + 1) + 4a_s^2 \bar{\varepsilon} \bar{M}^2} \right], \quad a_3^2 = a_s^2.$$

Звернемо увагу на знайдені швидкості поширення фронтів термопружних хвиль, які природно відрізняються від пружних хвиль, бо залежать вже від інших параметрів. Швидкості фронтів пружних поздовжньої, поперечної і зсувної хвиль є функції від постійних Ляме і щільності:

$$c_1 = f(\lambda, \mu, \rho), \quad c_2 = f(\mu, \rho), \quad a_s = f(\lambda, \mu)$$

Швидкості поширення знайдених тут швидкостей поширення фронтів термопружних хвиль, тобто хвиль, що залежать від температури також, є функції таких аргументів:

$$a_1 = f(\varepsilon, M, \bar{\varepsilon}, \bar{M}), \quad a_2 = f(\varepsilon, M, \bar{\varepsilon}, \bar{M}), \quad a_3 = a_s = f(\lambda, \mu)$$

До розгляду введемо вектор Y і матрицю U, стовбцями якої є власні вектори матриці А.

$$Y = \begin{pmatrix} f \\ g \\ V \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 1 - a_1^2 \\ \alpha_2 = 1 - a_2^2 \end{matrix}$$

Вектори X і Y зв'язані співвідношенням:

$$X = UY$$

Перепишемо систему (2) в матричному вигляді:

$$\partial_x^2 AX = \partial_t^2 X + BX$$

А також виконаємо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 AU Y &= \partial_t^2 UY + BU Y \\ \partial_x^2 U^{-1} AU Y &= \partial_t^2 U^{-1} UY + U^{-1} BU Y \\ \partial_x^2 \Lambda Y &= \partial_t^2 Y + DY \end{aligned}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{111} + d_{112} \partial_t & d_{121} + d_{122} \partial_t & d_{131} \partial_x^2 + d_{132} \partial_t + d_{133} \partial_t^2 \\ d_{211} + d_{212} \partial_t & d_{221} + d_{222} \partial_t & d_{231} \partial_x^2 + d_{232} \partial_t + 2 \partial_t^2 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Доданки елементів матриці D знаходяться по формулі  $D = U^{-1}BU$ .

В розгорнутому вигляді отримане матричне рівняння буде:

$$\begin{aligned} a_1^2 \partial_x^2 f - \partial_t^2 f &= d_{111} f + d_{112} \partial_t f + d_{121} g + d_{122} \partial_t g + d_{131} \partial_x^2 V + d_{132} \partial_t V + d_{133} \partial_t^2 V \\ a_2^2 \partial_x^2 g - \partial_t^2 g &= d_{211} f + d_{212} \partial_t f + d_{221} g + d_{222} \partial_t g + d_{231} \partial_x^2 V + d_{232} \partial_t V + d_{233} \partial_t^2 V \\ a_3^2 \partial_x^2 V - \partial_t^2 V &= d_{31} f + d_{32} g + d_{33} V \end{aligned} \quad (3)$$

До отриманих хвильових рівнянь (3) застосуємо метод асимптотико-групового аналізу [2]. Розв'язок системи (3) будемо шукати у вигляді:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i, \quad V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

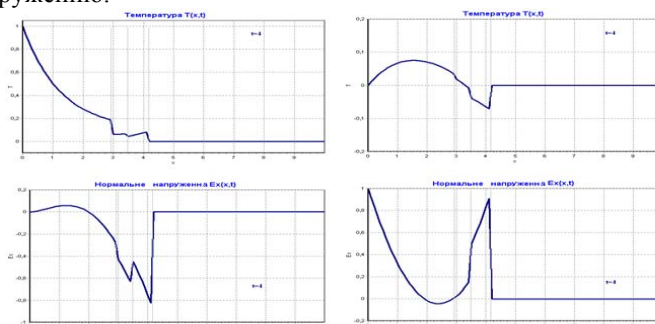
Згідно з методом АГА члени цих рядів задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$\begin{aligned} a_1^2 \partial_x^2 f_i - \partial_t^2 f_i &= d_{111} f_{i-2} + d_{112} \partial_t f_{i-1} + d_{121} g_{i-2} + d_{122} \partial_t g_{i-1} + d_{131} \partial_x^2 V_{i-1} + \\ &\quad + d_{132} \partial_t V_{i-2} + d_{133} \partial_t^2 V_{i-1} \\ a_2^2 \partial_x^2 g_i - \partial_t^2 g_i &= d_{211} f_{i-2} + d_{212} \partial_t f_{i-1} + d_{221} g_{i-2} + d_{222} \partial_t g_{i-1} + d_{231} \partial_x^2 V_{i-1} + \\ &\quad + d_{232} \partial_t V_{i-2} + d_{233} \partial_t^2 V_{i-1} \\ a_3^2 \partial_x^2 V_i - \partial_t^2 V_i &= d_{31} f_{i-1} + d_{32} g_{i-1} + d_{33} V_{i-2} \end{aligned}$$

Можна показати, що розв'язок отриманої системи безкінечних рекурентних рівнянь представляється у вигляді рядів по степеням  $x^{i-j}(a_m t - x)^{j+i-1}$ , ( $m = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ). Тому розв'язок рекурентних рівнянь будемо шукати у вигляді сум від добутку деяких функцій від  $x$  на базисні величини  $(a_1 t - x)$ ,  $(a_2 t - x)$ ,  $(a_3 t - x)$ .

Всі коефіцієнти сум знаходяться підстановкою в вихідні рівняння окрім коефіцієнтів  $F_{ii}^1$ ,  $G_{ii}^2$ ,  $V_{ii}^3$ ,  $a_k, b_k, c_k$ , які знаходяться із граничних умов. Для їх визначення отримали систему шести алгебраїчних рівнянь і прирівняли коефіцієнти (при  $i=j$ ,  $x=0$ ) при однакових степенях  $t$ .

Отримані аналітичні розв'язки запрограмовані на ПК, що дозволило побудувати графіки поширення температури і деформації для різних граничних умов: при миттєво прикладеним на границі  $x=0$  температурі і/або напруженню.



Мал.1 – Поширення температурної хвилі і нормального напруження при миттєво прикладеній на границі постійній температурі (зліва) або напруженню (справа).

**Висновки.** Отримана нова система диференціальних рівнянь, що описує динамічну зв'язану задачу термопружності для тонкої однорідної ізотропної пластини.

Вперше застосований метод асимптотико-групового аналізу для розв'язання задач термопружності.

Знайдена аналітична залежність всіх швидкостей поширення термопружних хвиль від теплофізичних параметрів. Проводився також

розрахунок і складалася таблиця знайдених конкретних термопружних швидкостей для деяких матеріалів.

Отримані аналітичні і на їх основі графічні розв'язки дозволяють виділити фронти термопружних нестационарних хвиль, простежити їх поширення у часі, а також виділити якісно новий ефект – затухання.

1. Подстригач Я.С. Коляно Я.С. – Обобщенная термомеханика – Київ: Наукова думка, 1976, 312 с.
2. Шамровский А.Д. – Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. Монографія – Запоріжжя: ЗДІА, 1997, 169 с.
3. Швец Р.Н. Взаимосвязанная задача термоупругости для тонкой пластинки // Прикл. механіка – 1965г. – в.3, Т.1, с.107 – 115.

#### **DYNAMIC TASK OF SPREADING THERMOELASTIC WAVES IN HOMOGENEOUS PLATE**

*In the work it's obtained tied system of differential equations of generalized thermoelasticity for plate. These equations are reduced to a system of wave equations by the methods of linear algebra, and then to a recurrent infinite system by the method of asymptotic group analysis. The solving of the equations lets to allocate fronts of the waves and to find their speeds. It's considered mutual influence of deformation and temperature fields which is interesting in dynamic tasks and this is confirmed in results.*

## РОЗДІЛЯЮЧІ ПОЛІНОМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

**Митрофанов М.А.**

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С.Підстригача НАН  
України

У теорії апроксимації неперервних функції аналітичними на сепарабельних дійсних банахових просторах перший ґрунтовний результат було отримано у 1954 році Я. Курцвейлом у праці [1]. Автором, у цьому випадку, доведено що достатньою умовою для апроксимації є існування розділяючого полінома на просторі. У подальших дослідженнях питання про апроксимацію позбулися умови існування розділяючого полінома досі не вдалося. Тому природнім є питання про те, які які властивості мають розділяючі поліноми, та які саме простори допускають розділяючі поліноми.

З теорії розділяючих поліномів на банахових просторах суттєві результати отримано у 1989 році М. Фабіаном, Д. Преїссом, Дж. Вайтфіелдом та В. Зізлером у статті [2] та дано ґрунтовний огляд у 1997 році Р. Гонзало, Х. Хараміло у статті [3].

У доповіді будуть оглянуті найцікавіші результати попередників та доведені нові властивості розділяючих поліномів.

1. *Kurzweil J.* On approximation in real Banach spaces // *Studia Math.* – 1954. – 14, – P. 214-231.
2. *Fabian M., Preiss D., Whitfield J. H. M. and Zizler V.* Separating polynomials on Banach spaces // *Quart. J. Math. Oxford Ser.* – 1989. – 40, №2. – P. 409-422.
3. *Gonzalo R., Jaramillo J.A.* Separating polynomials on Banach spaces // *Extracta mathematicae* – 1997. – 12, №2. – P. 145-164.

### SEPARATING POLYNOMIALS AND THEIR PROPERTIES

*Some properties of separating polynomials are investigated.*

## ПРО ДОБУТОК ТЕЙТА-ШАФАРЕВИЧА В ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД $n$ -ВИМІРНИМИ ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нестерук В.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1,  
Львів, 79000,  
volodymyr-nesteruk@rambler.ru

Нехай  $E$  – еліптична крива, яка визначена над локальним полем  $K$ . І.Р. Шафаревич [5] і Дж. Тейт [6] означили добуток

$$H^1(K, E) \times E_K \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (1)$$

де  $H^1(K, E)$  – групи головних однорідних просторів еліптичної кривої  $E$  над полем  $K$ ,  $E_K$  – групи  $K$ -раціональних точок  $E$ . Крім того вони довели двосторонню невідродженість цього добутку з точністю до  $p$ -компонент груп, які входять до (1), де  $p$  – характеристика поля лишків поля  $K$ . Добуток (1) називається *добутком Тейта-Шафаревича*.

О.М. Введенський [4] обчислив у явному вигляді добуток Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над локальним полем для циклічних розширень простого степеня основного поля та довів двобічну невідродженість добутку (1) в еліптичних кривих над локальним полем. В.І. Андрійчук [1, 2, 3] довів невідродженість зліва добутку Тейта-Шафаревича для еліптичних кривих над псевдолокальними полями, коли характеристика поля лишків дорівнює 0, 3 та відмінна від 2 і 3.

Мета цієї роботи – доведення невідродженості добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих для випадку, коли поле  $K$  є  $n$ -вимірне псевдолокальне поле, тобто поле, для якого задана послідовність повних дискретно нормованих полів  $K = K_n, K_{n-1}, \dots, K_0$ , де кожне наступне поле є полем лишків попереднього і поле  $K_0$  псевдоскінченне.

*Теорема.* Добуток Тейта-Шафаревича (1) невідроджений для еліптичних кривих  $E$  над  $n$ -вимірним псевдолокальним полем  $K$ .

1. Андрійчук В. Виділення класу загальних локальних полів з характеристикою нуль поля лишків, для яких добуток Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих невідроджений зліва // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1979. – **10**, №8. – С. 595-596.
2. Андрійчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями // Мат. сб. – 1979. – **110(152)**, №1(9). – С. 88-101.



3. Андрійчук В. Про добуток Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальними полями характеристики 3 // Укр. Мат. Журн. – 1992. – 44, №9. – С. 1157-1165.
4. Введенский О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – 37, №1. – С. 20-88.
5. Шафаревич И.Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий // ДАН СССР. – 1959. – 124, №1. – С. 42-43.
6. Tate J. WC-group over p-adic fields // Sem. Bourbaki. – 1956. – №156.

**ON THE TATE-SHAFAREVICH PAIRING IN THE ELLIPTIC CURVES  
OVER  $n$ -DIMENSIONAL PSEUDOLocal FIELDS**

*A proof of nondegeneracy of the Tate-Shafarevich pairing on elliptic curves over  $n$ -dimensional pseudolocal field is given.*

## СТРУКТУРА ГРАТКИ КВАЗІФІЛЬТРІВ У МУЛЬТИПЛІКАТИВНОМУ МОНОЇДІ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Олійник Р.М.

Львівський національний аграрний університет, forvard-or@ukr.net

У 1983 році Дж. Людеман [5] увів до розгляду основні поняття, пов'язані зі скрутами у категорії  $S$ -полігонів, за аналогією з існуючою теорією скрутів у категорії  $R$ -модулів. Сьогодні теорія скрутів для  $S$ -полігонів стрімко розвивається, про що свідчать хоча б публікації [6–8] та монографія [4].

Нехай  $S$  – моноїд з нулем. Будемо розглядати  $\sigma$ -квазіфільтри конгруенцій в моноїді  $S$  які є аналогами  $S$ -фільтрів ідеалів кільця  $R$ , які розглядалися у статті [1]. У роботах [7; 8] досліджували квазіфільтри правих конгруенцій, які тісно пов'язані зі скрутами.

*Означення.* Квазіфільтром моноїда  $S$  називається підмножина  $E$  з  $Con(S)$ , яка задовольняє умови:

- 1) якщо  $\rho \in E$  і  $\rho \subseteq \tau \in Con(S)$ , тоді  $\tau \in E$ ;
- 2) з умови  $\rho \in E$  випливає  $(\rho : s) \in E$  для всіх  $s \in S$ .
- 3) якщо  $\rho \in E$  і  $\tau \in Con(S)$  таке, що  $(\rho : s), (\rho : t)$  належать до  $E$  для всіх  $(s : t) \in \rho$ , тоді  $\tau \in E$ , тоді  $E$  називається квазіфільтром.

Нехай задано фіксовану ліву конгруенцію  $\sigma$  на  $S$ . Тоді позначимо множину:

$$E_\sigma = \{\tau \mid \tau \in Con(S), \tau \vee \sigma = 1_S\}.$$

Ця множина є квазіфільтром. Називаємо його спеціальним квазіфільтром або скорочено  $\sigma$ -квазіфільтром. Говоритимемо, що  $\sigma$ -квазіфільтр тривіальний, якщо він містить  $\Delta$  або складається тільки з  $1_S$ .

*Лема 1.* Для довільної конгруенції  $\sigma$  множина  $E_\sigma$  є квазіфільтром.

Через  $(N, \cdot)$  позначатимемо моноїд натуральних чисел з операцією множення.

*Лема 2.* Нехай  $I$  – лівий головний ідеал моноїда  $(N, \cdot)$ . Множина  $\bar{\tau} = \{(a, b) \mid a - b \in I \wedge a = b\}$  породжує конгруенцію на моноїді  $(N, \cdot)$ .

Визначимо множину:

$\rho_{(1,k)} = \{(a, b) \mid s(1, k), \dots, s(1, k^n), \dots, s(k, 1), s(k^n, 1), \dots\}$ , де  $k$  – довільне натуральне число,  $s, n \in N$ .

*Лема 3.* Множина  $\rho_{(1,k)}$  породжує нерісову конгруенцію на моноїді  $(N, \cdot)$ .

*Теорема 2.* Нехай  $\sigma = \rho_{rN}$  – рісова конгруенція, де  $r$  – довільне натуральне число. Для довільного  $\sigma$ -квазіфільтр

$$E_\sigma = \{N \times N, \tau_{(1,r)}, \dots, \tau_{(1,r^n)}, \dots\}, \text{ де } n \in N.$$

*Теорема 3.* Нехай  $\sigma = \tau_{(1,r)}$  – нерісова конгруенція, де  $r$  – довільне натуральне число. Для довільного  $\sigma$ -квазіфільтра

$$E_\sigma = \{N \times N, \tau_{rN}, \dots, \tau_{r^n N}, \dots\}, \text{ де } n \in N.$$

Доведення попередніх результатів можна знайти в [2].

Позначимо через  $\bigvee_{\alpha \in A} E_\alpha$  та  $\bigwedge_{\alpha \in A} E_\alpha$  об'єднання та перетин довільної сім'ї  $\sigma$ -квазіфільтрів, відповідно.

Наступна теорема є аналогом теореми Куроша про опис скрутів у категорії абелевих груп. Вона дає опис всіх квазіфільтрів конгруенцій над мультиплікативним моноїдом натуральних чисел.

*Теорема 4.* Довільний нетривіальний квазіфільтр  $E$  на мультиплікативному моноїді натуральних чисел можна побудувати за формулою:

$$E = \bigwedge_{\alpha \in A} \bigvee_{\beta \in B} E_\alpha,$$

де  $E_\alpha$  – фіксований  $\sigma$ -квазіфільтр, породжений конгруенцією  $\alpha$ .

Зрозуміло, що множини  $A$  та  $B$  є підмножинами в множині всіх конгруенцій на мультиплікативному моноїді натуральних чисел.

1. Горбачук О. Л. Про S-кручення в модулях // Вісник Львівського державного університету ім. Ів. Франка.– 1977. – Вип. 2. – С. 32–34.
2. Олійник Р. М. Про спеціальні квазі-фільтри в мультиплікативному моноїді натуральних чисел //– Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6.– С. 80–87.
3. Howie J.M. An Introduction to Semigroup Theory – London, 1976. – 272 p.
4. Kilp M. Monoids, Acts and Categories. – Berlin, 2000. – 529 p.
5. Luedeman J. K. Torsion theories and semigroup of quotients // – Lecture Notes in Mathematics 998, Springer-Verlag. – Berlin; New York, 1983. – P. 350–373.
6. Wiegandt R. Radicals and Torsion Theory for Acts // Semigroup Forum. – 2006. – Vol. 72. – P. 312-328.
7. Zang R. Z. Torsion theories and quasi-filters of right congruences Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1(3). – P. 273–280.
8. Zang R. Z. Hereditary torsion classes of S-systems // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253–270.

### ON THE LATTICE OF QUASI-FILTERS ON THE MULTIPLICATIVE MONOID TO THE NATURAL NUMBERS

*We investigate the concept of  $\sigma$ -quasi-filters of congruences of monoid to the natural numbers. We described all non trivial quasi-filters of congruences of the multiplicative monoid to the natural numbers over  $\sigma$ -quasi-filters.*

## АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Оліярник Н.Р.<sup>1</sup>, Пастернак Я.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
[nazaroliyarnyk13@gmail.com](mailto:nazaroliyarnyk13@gmail.com)

<sup>2</sup>Луцький національний технічний університет, [pasternak@ukrpost.ua](mailto:pasternak@ukrpost.ua)

Відомо, що впровадження в однорідний матеріал всілякого роду неоднорідностей (включень різної жорсткості, накладок тощо) може значно змінити його короточасну міцність, експлуатаційний ресурс, а подеколи й фізико-механічні властивості. При цьому слід зважати як на поодинокі включення, так і на системи регулярно розташованих неоднорідностей. Останні, як правило, розглядають при моделюванні композитних матеріалів та шаруватих гірських порід. З огляду на це виникає необхідність визначення напружено-деформованого стану тіл із системами тонких неоднорідностей.

Періодичні системи тріщин в ізотропному матеріалі розглянуто у монографіях [1, 2] та численній кількості статей. Значно менше робіт стосується лінійно періодичних систем тріщин та тонких включень в анізотропному середовищі. Тому метою цієї роботи є побудова загального підходу для дослідження антиплатоскої деформації анізотропних тіл із періодичними системами тонких пружних включень довільної геометрії та жорсткості.

Розглянемо антиплатоску деформацію пружного безмежного тіла із системою тонких пружних включень однакової жорсткості. На спільній межі тіла та включень виконуються умови ідеального механічного контакту.

Відповідно до принципу спряження континуумів різної вимірності [2] кожне включення моделюємо лінією  $\Gamma_s$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ) розривів полів напружень  $\Sigma t^s$  та переміщень  $\Delta w^s$ , що виникатимуть на берегах  $\Gamma_s^\pm$  включення. Тоді на основі формули Сомільяни інтегральні рівняння задачі для тіла з лініями стрибків набудуть вигляду

$$\frac{1}{2} \Sigma w^s(\mathbf{y}) = w^*(\mathbf{y}) + \sum_s \left[ \text{RPV} \int_{\Gamma_s^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \Delta t^s(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \sigma_{3j}^* + \sum_s \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_s^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \right], \quad (2)$$

де  $\mathbf{y} \in \Gamma_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) – точка колокації;  $w$ ,  $t$  – ненульові компоненти векторів переміщень  $(0; 0; w)$  та напружень  $(0; 0; t)$ ;  $\Delta t = t^+ - t^-$ ,  $\Sigma w = w^+ + w^-$ ;  $t^\pm = \sigma_{3j}^\pm n_j^\pm$  ( $n_j^\pm$  – компоненти вектора нормалей  $\mathbf{n}^\pm$  до поверхонь  $\Gamma_s^\pm$ ); знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma_s^+$  та  $\Gamma_s^-$ , утворених розрізом  $\Gamma_s$ ;  $\sigma_{3j}^*$ ,  $w^*(\mathbf{y})$  – задані на безмежності навантаження та відповідне йому поле переміщень. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь відповідно до залежностей формалізму Stroh [3] мають такий вигляд:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ A^2 \ln Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right], \quad T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ (n_2 - n_1 p) \frac{AB}{Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right]. \quad (3)$$

Тут  $Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = x_1 + px_2 - (y_1 + py_2)$ . Ядра  $D_j$  та  $S_j$  описані в [4]. Комплексні сталі  $p$ ,  $A$  та  $B$  визначаються за заданими пружними сталими матеріалу на основі формалізму Stroh [3].

Враховуючи лінійну періодичність системи ідентичних одне одному тонких включень, унаслідок трансляційної симетрії можна стверджувати, що стрибки напружень  $\Sigma t^s$  та переміщень  $\Delta w^s$  є однаковими для кожного включення. Тоді рівняння (1), (2) запишуться у вигляді

$$\frac{1}{2} \Sigma w^0(\mathbf{y}) = w^*(\mathbf{y}) + \text{RPV} \int_{\Gamma_s^+} W^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \Delta t^s(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \sigma_{3j}^* + \sum_s \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_s^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \right], \quad (5)$$

де ядра  $\mathbf{K}^p = [W^p, T^p, D_j^p, S_j^p]$  мають такий загальний вигляд:

$$\mathbf{K}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}), \quad (6)$$

а  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x_1}, \omega_{x_2})$  – вектор періоду.

У (5), відповідно до (2) та (6), необхідно обчислити суми

$$S_1^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \ln(u + s\omega), \quad S_2^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + s\omega} = \frac{dS_1^p}{du}, \quad S_3^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u + s\omega]^2} = -\frac{dS_2^p}{du}, \quad (7)$$

де  $u = Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ,  $\omega = Z(\boldsymbol{\omega})$ . Враховуючи правила обчислення таких сум та диференціювання функцій отримаємо

$$S_1^p = \ln \sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right), \quad S_2^p = \frac{\pi}{\omega} \text{ctg}\left(\frac{u\pi}{\omega}\right), \quad S_3^p = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \text{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{\omega}\right), \quad (8)$$

Таким чином, для розв'язування задач із лінійно періодичними системами включень в ядрах (2) інтегральних рівнянь (5) необхідно зробити такі заміни:

$$\ln Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow S_1^p, \quad [Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{-1} \rightarrow S_2^p, \quad [Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{-2} \rightarrow S_3^p \quad (9)$$

Для розв'язування сформульованої задачі до інтегральних рівнянь (4), (5) необхідно долучити ті чи інші співвідношення моделі тонкого включення

$$\Sigma w(\mathbf{y}) = F^w(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t), \quad \Delta t(\mathbf{y}) = F^t(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t), \quad (10)$$

метод побудови яких можна знайти у роботі [4].

Систему крайових інтегральних рівнянь (5) розв'язуватимемо модифікованим методом граничних елементів [5]. Для цього криву  $\Gamma_0$  апроксимуємо за допомогою  $n$  тривузлових граничних елементів. Крайові функції  $\Sigma t^0$  та  $\Delta w^0$  апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями.

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо у формі поліномів Лагранжа [5]. Для елементів, що моделюють приторцеві ділянки включення використаємо описані в [4, 6]

спеціальні функції, які враховують кореневу особливість напружень у вершині неоднорідності і дають можливість визначити узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) з високою точністю. Останні обчислюємо за формулами

$$K_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} L \Delta w(s), \quad K_{32} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t(s), \quad (11)$$

де  $L = -2\sqrt{-1}B^2$  – дійсне число, що відповідає тензору Барнет – Лоте  $\mathbf{L}$  [3] у випадку плоскої анізотропії.

На основі запропонованих залежностей побудованого в роботі підходу здійснено розрахунки для анізотропного середовища із лінійно періодичною системою тонких неоднорідностей. Розглянуто випадки тіла з одним, двома та трьома стовпчиками компланарних включень. Виявлено зменшення значень узагальнених КІН при зближенні включень між собою (внаслідок ефекту екранування). Досліджено вплив зміни параметрів міри анізотропії матеріалу на значення КІН.

У разі ізотропного середовища усі отримані результати добре узгоджуються з даними, поданими у [2] та аналітичним розв'язком [1], що підтверджує їхню достовірність, а також засвідчує високу ефективність та точність запропонованого підходу.

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

2. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.

3. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.

4. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – 35. – No. 4. – P. 678–690.

5. Portela A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems / Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P. // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – 33. – P. 1269–1287.

6. Pasternak Ia.M. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure / Ia.M. Pasternak, H.T. Sulym // Proc. Int. Conf. “Integral Equations – 2010”, 25–27 August 2010 (Lviv). – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104–108.

#### **ANTIPLANE SHEAR OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH SINGLY PERIODIC SYSTEMS OF THIN INCLUSIONS**

*This paper presents the boundary element approach for the analysis of antiplane shear of anisotropic elastic medium with a singly periodic system of thin inhomogeneities. The proposed approach is used to study an anisotropic medium containing one, two or three columns of parallel singly periodic thin inclusions.*

*The influence of inclusion interaction and anisotropy of the medium on the generalized stress intensity factors is studied. For the case of an isotropic medium the numerical data of the proposed approach agrees with the particular analytical solutions.*



## ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ ТА НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., Бедрій В. Я., Слободян М. С.

Львівський національний університет імені Івана Франка, kafmech@franko.lviv.ua

В роботі досліджена задача про двосторонній згин безмежної ізотропної пластини завтовшки  $2h$  з наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки  $2l$  та квадратним отвором із стороною  $2a$ . Припускається, що під дією розподілених згинальних моментів  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$  на безмежності береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини  $h_1$  [1] поблизу верхньої основи пластини (рис. 1).

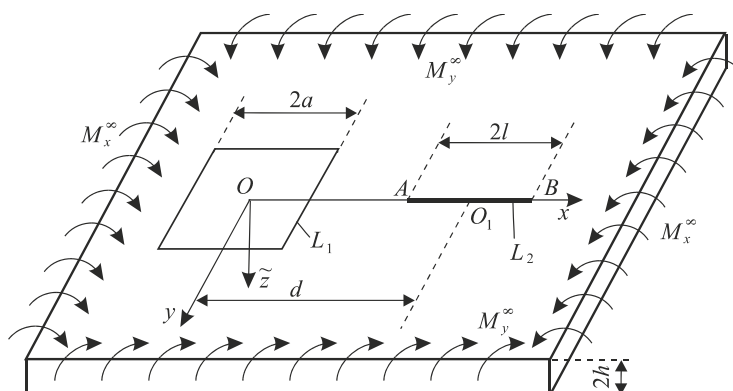


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подається у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини (класична теорія) та плоскої задачі. Задача розв'язана за таких крайових умов

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= 0, \quad \sigma_{\rho\theta} = 0, \quad M_\rho = 0, \quad P_\rho = 0, \quad x \in L_1, \\ M_y &= \beta N, \quad \partial_x [u_y] + \alpha \partial_{xy}^2 [w] = 0, \quad x \in L_2, \\ P^\pm &= 0, \quad M_y^\pm = M_y, \quad \sigma_{yy}^\pm = -N/(2h), \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L_2, \\ \alpha &= 0,5(1 + (1 - \gamma)^2)h, \quad \beta = (1 - \gamma/3)h, \quad \gamma = h_1/h, \quad [f] = f^+ - f^-, \end{aligned}$$

де  $N$  – контактне зусилля між берегами тріщини;  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\rho\theta}$  – компоненти тензора напружень,  $u_y$  – компонента вектора переміщення у плоскій задачі,  $w$  – прогин пластини в задачі згину,  $M_y$ ,  $M_\rho$  – згинальний момент,  $P$ ,  $P_\rho$  – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила.

Для розв'язування задачі введемо комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  [2] плоскої задачі і класичної теорії згину пластин  $\Phi_3(z)$  і  $\Psi_3(z)$  [3]. За допомогою комплексних потенціалів та методів теорії функцій комплексної змінної на основі крайових умов отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \rho(x) = c'_0, \operatorname{Im} g(x) = 0, \operatorname{Re}(\rho(x) + \beta h g(x)) = \tilde{a}_2, \\ \operatorname{Re}(g_2(x) + \tilde{\beta} G_1(x)) = 0, x \in L_2; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \{ K_i(u, t) g_i(u) du + M_i(u, t) \overline{g_i(u)} d\bar{u} \} = 0, t \in L_1,$$

$$\tilde{D} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \{ \tilde{K}_i(u, t) G_i(u) du + \tilde{M}_i(u, t) \overline{G_i(u)} d\bar{u} \} = i c, t \in L_1;$$

де 
$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_{L_2} \frac{g_2(u) du}{u-x} + \int_{L_1} \{ K(u, x) g_1(u) du + M(u, x) \overline{g_1(u)} d\bar{u} \},$$

$$\rho(x) = \tilde{a}_1 \int_{L_2} \frac{G_2(u) du}{u-x} + \int_{L_1} \{ K_3(u, x) G_1(u) du + M_3(u, x) \overline{G_1(u)} d\bar{u} \},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{hE}{1-\nu}, \tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}, m = -D(1-\nu), D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2)),$$

$$\tilde{a}_1 = m \tilde{\kappa} / \pi, \tilde{a}_2 = m \tilde{\Gamma} (\tilde{\kappa} - 1) - m \tilde{\Gamma}', \tilde{D} = (\tilde{\kappa} - 1) \tilde{\Gamma},$$

$$\tilde{\Gamma} = -(M_x^\infty + M_y^\infty) / (4D(1+\nu)), \tilde{\Gamma}' = -(M_y^\infty - M_x^\infty) / (2m),$$

$K(u, x)$ ,  $M(u, x)$ ,  $K_3(u, x)$ ,  $M_3(u, x)$ ,  $K_i(u, x)$ ,  $M_i(u, x)$ ,  $\tilde{K}_i(u, x)$ ,  $\tilde{M}_i(u, x)$  – відомі функції,  $c'_0$ ,  $c$  – невідомі дійсні сталі,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,  $g_i(t)$ ,  $G_i(t)$  – невідомі функції.

Систему інтегральних рівнянь доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{L_2} G_2(u) du = 0, \int_{L_2} g_2(x) dx = 0, \operatorname{Im} \int_{L_2} u G_2(u) du = 0, \operatorname{Im} \int_{L_1} \bar{u} G_1(u) du = 0,$$

де перші дві умови виражають собою відповідно однозначність кутів повороту та однозначність переміщень у плоскій задачі при обході контуру

тріщини, а дві останні - однозначність прогину відповідно при обході контуру тріщини і квадратного отвору.

Контактне зусилля  $N$  між берегами тріщини та коефіцієнти інтенсивності моментів  $K_i$  та зусиль  $k_i$  [4] можна обчислити за формулами

$$N = -h \operatorname{Re} g(x), \quad K_1 + iK_2 = \pm D(3 + \nu) \lim_{x \rightarrow \pm l} \{f(x)G_2(x)\},$$

$$k_1 + ik_2 = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} \{f(x)g_2(x)\}, \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)}/l.$$

Система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана чисельно з використанням відповідних квадратурних формул [4] при  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma = h_1/h = 0.13$ .

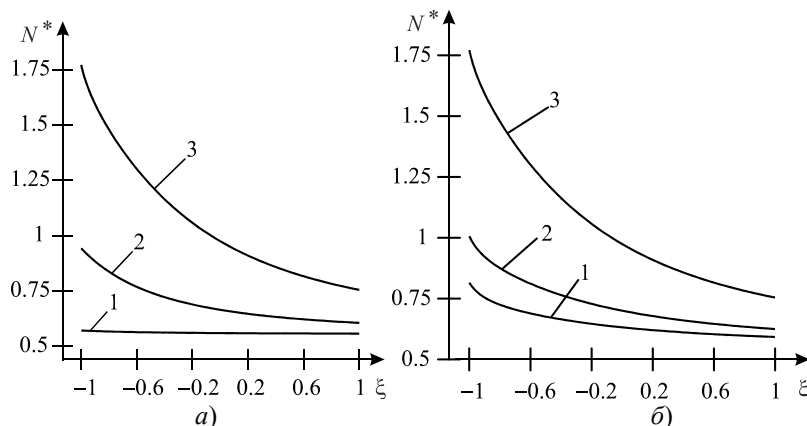


Рис. 2. Зведене контактне зусилля між берегами тріщини

На рис. 2 зображена графічна залежність зведеного контактного зусилля  $N^* = hN/M_y^\infty$  між берегами тріщини від безрозмірної координати  $\xi = x_1/l$ . Рисунок 2 а) побудовано при  $\lambda = d/l = 2.1$ ,  $\tilde{a} = a/l = 1$ ; крива 1 побудована при  $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 0$ , крива 2 –  $\rho = 1$ , крива 3 –  $\rho = 5$ . Як бачимо з рис. 2 а) при збільшенні відношення моментів  $M_x^\infty/M_y^\infty$  контактне зусилля між берегами тріщини зростає. Рис. 2 б) побудовано при  $\lambda = d/l = 2.1$ ,  $\rho = 1$ ; крива 1 побудована при  $\tilde{a} = 0.1$ , крива 2 –  $\tilde{a} = 0.5$ , крива 3 –  $\tilde{a} = 1$ . Як бачимо з рис. 2 б) при збільшенні розмірів отвору  $\tilde{a}$  контактне зусилля між берегами тріщини зростає. З рис. 2 а) та 2 б) бачимо, що контактне зусилля є більшим у ближній вершині тріщини по відношенні до квадратного отвору, у порівнянні з дальньою вершиною.

На рис. 3 зображена графічна залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КИМ)  $K_1^* = K_1/(M_y^\infty \sqrt{l})$  у точці А (суцільні лінії)

та у точці  $B$  (штрихові лінії). Рис. 3 *a*) побудований при  $\tilde{a} = 1$  від параметра  $\lambda = d/l$ , причому криві 1 побудовані при  $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 0$ , криві 2 –  $\rho = 1$ , криві 3 –  $\rho = 3$ . З цього рис. видно, що при збільшенні відношення моментів  $M_x^\infty / M_y^\infty$  КІМ зростають, а при віддаленні тріщини від квадратного отвору КІМ у вершинах  $A$  та  $B$  тріщини прямують до однієї величини, яка відповідає випадку однієї ізольованої тріщини. На рис. 3 *б*) зображена графічна залежність КІМ  $K_1^*$  від  $\tilde{a} = a/l$  при  $\rho = 1$ . Криві 1 побудовані при  $\lambda = d/l = 2,1$ , криві 2 –  $\lambda = 3$ , криві 3 –  $\lambda = 5$ . З цього рис. видно, що при збільшенні розмірів квадратного отвору КІМ у вершинах тріщини зростає.

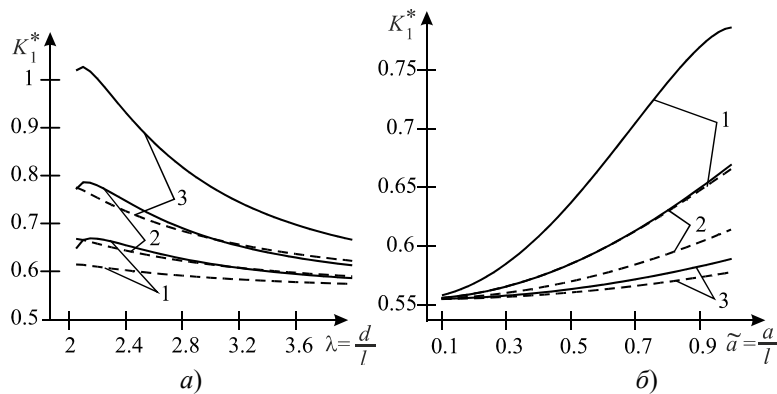


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності моментів

1. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". - 2007. - Вип. 20 (2). - с. 123-127.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с.
3. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. - Минск: Изд-во Беларус. ун-та. - 1975. - 256 с.
4. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. - Киев: Наук. думка. - 1988. - 324 с.

#### BILATERAL BENDING ISOTROPIC PLATES WITH A SQUARE HOLE AND PERVASIVE RECTILINEAR CRACK WIDTH IN VIEW OF THE CONTACT AREA ITS BANKS

*The problem of distributed bending moments at infinity isotropic plate with a square hole and crack, banks which come in smooth contact near one of the foundations of the plate. Using the method of complex variable theory, solving the problem came down to building the solution of singular integral equations which is solved numerically. The numerical analysis of the problem.*

## ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТЕРМОЕЛЕКТРО- ПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Пастернак Я.М.

Луцький національний технічний університет, [pasternak@ukrpost.ua](mailto:pasternak@ukrpost.ua)

У сучасних високотехнологічних пристроях часто використовують п'єзоелектричні матеріали, що відіграють роль сенсорів, прецизійних позиціонувальних елементів, перетворювачів механічної енергії в електричну і навпаки тощо. Найбільші значення п'єзоелектричних сталей мають сегнетоелектрики, які, в свою чергу, є також піроелектриками, тобто матеріалами, нагрівання яких зумовлює їхню поляризацію. Явище піроефекту знайшло своє широке використання, зокрема, у сенсорах інфрачервоного випромінювання. Також ці ефекти активно використовують при створенні сучасних смарт-матеріалів. Наявність структурних неоднорідностей таких матеріалів зумовлює високу концентрацію напружень, температурних і електричних полів поблизу них. При цьому піроефект відіграє істотну роль.

При застосуванні методів інтегральних рівнянь, зокрема, методу граничних елементів (МГЕ) до аналізу піроелектричних тіл досі не розв'язано низки важливих проблемних питань. Зокрема, не побудовано інтегральних рівнянь, що дали би можливість досліджувати не тільки теплоізолювані тріщини, але й тріщини із заданою температурою їхніх берегів. Також при аналізі п'єзоелектричних тіл із тріщинами у більшості випадків слід зважати на електричну проникність середовища, що заповнює просвіт, оскільки для проникних і непроникних тріщин коефіцієнти інтенсивності напружень є різними [1]. Тому у цій роботі, виходячи із теорем про голоморфність функцій [2] та розширеного формалізму Стро [3], опрацьовано методику побудови інтегральних рівнянь термоелектропружності анізотропних тіл. Крім цього, розширюються змістові складові моделі тонких п'єзоелектричних включень [1], що дають можливість описувати, зокрема, й проникні, непроникні та напівпроникні тріщини тонкими неоднорідностями із заданими належним чином властивостями їхнього матеріалу.

Відповідно до [3] у нерухомій прямокутній системі координат  $Ox_1x_2x_3$  рівняння рівноваги, балансу тепла та конститутивні співвідношення плоскої деформації лінійно термоелектропружного тіла і плоскої стаціонарної теплопровідності можна записати у такому уніфікованому вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = 0, \quad h_{i,i} = 0; \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,m} - \tilde{\beta}_{ij} \theta, \quad h_i = -k_{ij} \theta_{,j} \quad (2)$$

при

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j; \\ \tilde{\beta}_{ij} &= \beta_{ij}, \quad \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j; \quad \tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \\ \tilde{C}_{4jkm} &= e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm} \quad (i, k = 1, 2, 3; j, m = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $h_i$  – компоненти вектора густини теплового потоку;  $D_i$  – електричне зміщення;  $u_i$  – переміщення точок тіла;  $\phi$  – електричний потенціал;  $\theta$  – зміна температури порівняно з відліковою;  $C_{ijkm}$  – пружні сталі;  $k_{ij}$  – коефіцієнти теплопровідності;  $\beta_{ij} = C_{ijkm} \alpha_{km} + e_{mij} \lambda_m$  – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень);  $\alpha_{ij}$  – коефіцієнти теплового розширення;  $e_{ijk}$  – п'єзоелектричні сталі;  $\kappa_{ij}$  – діелектричні сталі матеріалу;  $\chi_i = -e_{ikm} \alpha_{km} + \kappa_{ij} \lambda_j$  – піроелектричні коефіцієнти;  $\lambda_i$  – піроелектричні модулі. Тензори з компонентами  $C_{ijkm}$ ,  $k_{ij}$ ,  $\kappa_{ij}$  та  $\beta_{ij}$  вважаються симетричними. У формулах прийняте правило Айнштейна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в індексних позначеннях відповідає диференціюванню за зазначеною після коми координатою, тобто,  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ .

Загальний розв'язок рівнянь (1), (2) відповідно до методів розширеного формалізму Стро має вигляд [3]

$$\theta = 2 \operatorname{Re} \{g'(z_t)\}, \quad \vartheta = 2k_t \operatorname{Im} \{g'(z_t)\}, \quad h_1 = -\vartheta_2, \quad h_2 = \vartheta_1;$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{A} \mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c} g(z_t) \}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{B} \mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d} g(z_t) \}; \quad (4)$$

$$z_t = x_1 + p_t x_2; \quad z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2; \quad \mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3), F_4(z_4)]^T,$$

де  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  – функція напружень, для якої  $\tilde{\sigma}_{i1} = -\tilde{\varphi}_{i,2}$ ,  $\tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\varphi}_{i,1}$ ;  $g(z_t)$ ,  $F_\alpha(z_\alpha)$  – певні аналітичні функції своїх аргументів; комплексна стала  $p_t$  є коренем (із додатною уявною частиною) характеристичного рівняння теплопровідності, а матриці  $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_\alpha]$  та  $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_\alpha]$ , сталі  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 4$ ) та вектори  $\mathbf{c}$  і  $\mathbf{d}$  визначаються із задачі на власні значення формалізму Стро [3].

Окрім відомих умов ортогональності Стро [3] для матриць  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$ , отримано такий важливий для побудови інтегральних рівнянь термоелектропружності зв'язок:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{c}\} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{d}\} = \mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{p_t \mathbf{c}\} + \mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{p_t \mathbf{d}\}, \quad \mathbf{P} = \langle p^* \rangle. \quad (5)$$

Використання теорем про голоморфність функцій [2] та співвідношень (4), (5) дає можливість побудувати інтегральні рівняння, які повинні задовольняти граничні значення стрибків температури, теплових потоків, переміщень, електричного потенціалу, напружень, електричних зміщень та комплексних потенціалів на розімкнутих (чи замкнутих) дугах  $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma g(Z_t(\mathbf{y})) = & -\frac{1}{4\pi k_t} \int_{\Gamma} f^*(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} (n_2 - p_t n_1) \ln(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma f(Z^*(\mathbf{y})) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle \ln(Z^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \mathbf{A}^T \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{n_2 - n_1 p^*}{Z^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right\rangle \mathbf{B}^T \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle \ln(Z^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{A}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}(n_2 - n_1 p_t)\} \right) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle \ln(Z^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{B}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}(n_2 - n_1 p_t)\} \right) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{2\pi i k_t} \int_{\Gamma} \langle f^*(Z^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{d}\} + \mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{c}\} \right) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$ ,  $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$ ;  $\langle F(Z^*) \rangle = \operatorname{diag}[F_1(Z_1), F_2(Z_2), F_3(Z_3), F_4(Z_4)]$ ;  $Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + p_\alpha x_2$ ;  $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j$  – компоненти розширеного вектора напружень;  $n_j^\pm$  – компоненти векторів нормалей  $\mathbf{n}^\pm$  до поверхонь  $\Gamma^\pm$ ;  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ ;  $d\Gamma$  – дійсний диференціал дуг  $\Gamma$ ;  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ .

Підставляючи (6) та (7) у формули (4) отримаємо дуальні рівняння стаціонарної теплопровідності та термопружності. При дослідженні середовищ із заданим на безмежності навантаженням до правих частин рівнянь (6), (7) слід додати члени, що відповідають однорідному розв'язку

для безмежного бездефектного середовища. При цьому з'ясовано, що у безмежних термоелектропружних анізотропних середовищах, на відміну від суто термopужних, однорідний тепловий потік може зумовити виникнення поля напружень та електричних зміщень. Для трансверсально ізотропних піроелектриків цього не буде лише у разі, коли тепло тече уздовж напрямку поляризації.

Для аналізу тонких неоднорідностей та напівпроникних тріщин отримано модель тонкого піроелектричного включення у формі

$$\begin{aligned} \Delta h_n(\mathbf{y}) &= \frac{k_{11}^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta\theta(\mathbf{y}) + \Delta\theta^*(\mathbf{y})], \quad \Sigma\theta(\mathbf{y}) = 2\theta^0 - \int_{y_0}^y \frac{H(s) - H^*(s)}{h(s)k_{22}^i(s)} ds; \\ \Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) &= -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{y})[\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y})]}{h(\mathbf{y})} - \mathbf{v}(\mathbf{y})\Sigma\theta(\mathbf{y}), \\ \Sigma\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) &= 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{y_0}^y \frac{\mathbf{W}(s)[\tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s)]}{h(s)} ds + \int_{y_0}^y \mathbf{w}(s)\Sigma\theta(s) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  – пружні, п'єзоелектричні та піроелектричні сталі включення;  $\theta^0$  – середнє значення зміни температури лівого торця включення;  $\tilde{\mathbf{u}}^0$  – середні значення переміщень та електричного потенціалу на лівому торці  $y_0$  включення. Модель (8) для ізотермічного випадку еквівалентна до моделі, розробленої в [1].

Отримані інтегральні рівняння та модель тонкого включення впроваджено в МГЕ. Алгоритм успішно апробовано на тестових задачах, що мають аналітичний розв'язок. Побудовано розв'язки низки нових задач для безмежних та скінченних піроелектричних тіл.

1. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Engng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – **35**, No. 4. – P. 678–690.
2. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
3. *Qin Q.H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.

#### INTEGRAL EQUATIONS FOR THERMOELECTROELASTICITY OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH CRACKS AND THIN INCLUSIONS

*This paper develops boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of anisotropic solids with cracks and thin inclusions. A model of a thin pyroelectric inhomogeneity is obtained. Derived equations are introduced into the boundary element method, which allows numerical solution of complicated problems.*



## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОРЕЛЯЦІЇ ДВОХ СТАЦІОНАРНИХ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУРИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

Пелех П.Р.

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України м. Львів, вул.Дж.Дудаєва 15,  
e-mail: [ppavlo@gmail.com](mailto:ppavlo@gmail.com)

Застосування техніки діаграм Фейнмана при дослідженні температурних полів у багатофазних тілах випадково неоднорідної структури дозволило отримати рівняння Дайсона [1] для теплопровідності та нелокальне інтегродиференціальне рівняння для усередненого поля концентрації [2, 3]. Проте використання діаграм Фейнмана дає можливість глибшого вивчення стохастичних полів, наприклад, математичного опису кореляції випадкових полів температури, стаціонарному випадку якого присвячена дана робота.

Нехай в  $N$ -фазному тілі з випадково розташованими неоднорідностями протікають процеси теплопровідності. Тіло складається з  $N$  твердих різних за густиною фаз. Матеріал тіла розглядаємо як середовище, фізичні характеристики якого є випадковими функціями координат простору. Вважаємо, що коефіцієнт теплопровідності є сталим в області кожної з фаз. Розподіл випадкового температурного поля  $T(\vec{r})$  в такому тілі у стаціонарному випадку описує рівняння теплопровідності

$$L(\vec{r})T(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}(\lambda(\vec{r})\vec{\nabla}T(\vec{r})) = f(\vec{r}), \quad (1)$$

де  $\lambda(\vec{r})$  - випадковий коефіцієнт теплопровідності,  $f(\vec{r})$  - густина джерел тепла (детермінована функція),  $\vec{r}$  - радіус-вектор біжучої точки.

Стаціонарне поле температури можна подати у вигляді ряду Неймана [2]

$$T(\vec{r}) = T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') L_s(\vec{r}') T_0(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \iint_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') L_s(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}'') L_s(\vec{r}'') T_0(\vec{r}'') d\vec{r}' d\vec{r}'' + \dots, \quad (2)$$

де  $T_0(\vec{r})$  - розв'язок однорідної задачі,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  - функція Гріна,  $L_s(\vec{r})$  - випадковий оператор вигляду

$$L_s(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{\lambda} - \lambda_j) \eta_{ij}(\vec{r}) \Delta + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\vec{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ij}}) \vec{\nabla} ,$$

$\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\vec{r})}$  – усереднений коефіцієнт теплопровідності,  $\eta_{ij}(\vec{r})$  - випадкова функція структури [1, 3],  $j$  - номер фази,  $i$  - номер включення (в рамках однієї фази),  $i = \overline{1, n_j}$ ,  $n_j$  - кількість включень сорту  $j$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Розглянемо кореляцію двох полів температури в точках  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$

$$\langle T(\vec{r}_1) T(\vec{r}_2) \rangle \equiv \mathcal{M}(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \tag{3}$$

Для того, щоб знайти  $\mathcal{M}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  потрібно перемножити два ряди вигляду (2) і після цього виконати усереднення. Аналітично це дуже громіздка задача. Тому скористаємося діаграмною технікою.

Введемо діаграмні позначення для ще неусереднених величин, які входять в (3): для  $\vec{r} = \vec{r}_1$

$$T(\vec{r}_1) \sim \text{wavy}, \quad L_s(\vec{r}_1) \sim \frac{\times}{\vec{r}_1}, \quad T_0(\vec{r}_1) \sim \text{zigzag}, \quad G(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) \sim \frac{\text{---}}{\vec{r}_1 \vec{r}'_1}.$$

В точці  $\vec{r} = \vec{r}_2$

$$T(\vec{r}_2) \sim \text{wavy}, \quad L_s(\vec{r}_2) \sim \frac{\times}{\vec{r}_2}, \quad G(\vec{r}_2, \vec{r}'_2) \sim \frac{\text{---}}{\vec{r}_2 \vec{r}'_2}, \quad T_0(\vec{r}_2) \sim \text{zigzag}.$$

При усередненні цих величин отримаємо елементи:

$$\langle \text{wavy} \rangle \sim \text{---}, \quad \left\langle \frac{\times}{\vec{r}'} \frac{\times}{\vec{r}''} \right\rangle \sim \frac{\bullet \text{---} \bullet}{\vec{r}' \vec{r}''}.$$

Розклад (2) можна зобразити нескінченною сумою діаграм вигляду

$$\text{wavy} = \text{zigzag} + \text{---} \times \text{zigzag} + \text{---} \times \times \text{zigzag} + \text{---} \times \times \times \text{zigzag} + \dots \tag{4}$$

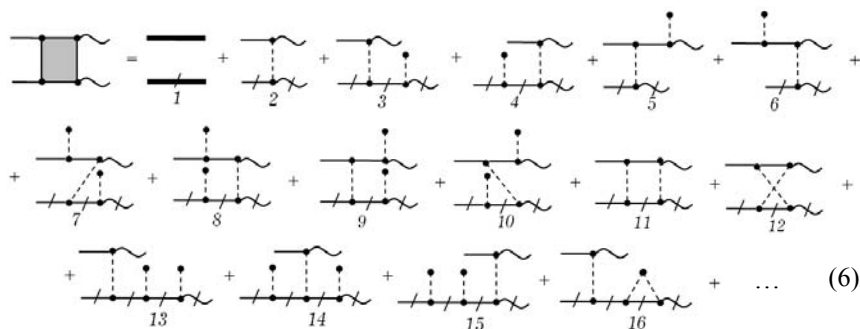
Аналогічний розклад для  $T(\vec{r}_2)$  відрізняється від  $T(\vec{r}_1)$  тільки змінною. Щоб розрізнити ці ряди, будемо перекреслювати відповідні лінії в ряді для  $T(\vec{r}_2)$ :

$$\text{wavy} = \text{zigzag} + \text{---} \times \text{zigzag} + \text{---} \times \times \text{zigzag} + \text{---} \times \times \times \text{zigzag} + \dots \tag{5}$$

Тепер перемножимо розклади (4) і (5) та усереднимо. При проведенні процедури множення окремих елементів з (4) і (5) помістимо зверху елементи, які належать (4), а внизу – (5). Якщо ввести графічне позначення для  $\langle T(\vec{r}_1) T(\vec{r}_2) \rangle$  таким чином

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \text{wavy} \end{array} \right\rangle = \text{---} \square \text{---}.$$

то результат перемноження та усереднення рядів (4) і (5) можна подати так



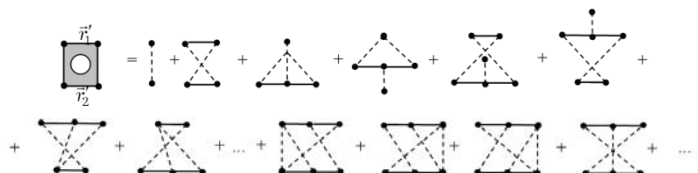
Розглянемо спочатку сильно зв'язані діаграми. Кожна з них починається двома лініями  $G$  і закінчується двома кривими лініями  $T_0$ , тобто має вигляд



або в аналітичній формі

$$\mathcal{M}^{(c.зв.)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \iint_{(V)} G(\vec{r}_1, \vec{r}_1') G(\vec{r}_2, \vec{r}_2') \mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2') T_0(\vec{r}_1') T_0(\vec{r}_2) d\vec{r}_1' d\vec{r}_2'.$$

Функція  $\mathcal{K}$  називається ядром оператора інтенсивності. Діаграмне представлення  $\mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2')$  має вигляд



В аналітичній формі ядро оператора інтенсивності  $\mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2')$  запишеться так

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2') &= \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2') + \iint_{(V)} G(\vec{r}_1', \vec{r}_1'') G(\vec{r}_2', \vec{r}_2'') \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2') \psi_2(\vec{r}_1'', \vec{r}_2'') d\vec{r}_1'' d\vec{r}_2'' + \\ &+ \iint_{(V)} \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2'') G(\vec{r}_2', \vec{r}_2'') G(\vec{r}_2'', \vec{r}_2''') \psi_2(\vec{r}_2', \vec{r}_2''') d\vec{r}_2'' d\vec{r}_2''' + \\ &+ \iint_{(V)} G(\vec{r}_1', \vec{r}_1'') G(\vec{r}_1'', \vec{r}_1''') \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_1''') \psi_2(\vec{r}_1'', \vec{r}_2') d\vec{r}_1'' d\vec{r}_1''' + \\ &+ \iiint_{(V)} G(\vec{r}_1', \vec{r}_1'') G(\vec{r}_2', \vec{r}_2'') G(\vec{r}_2'', \vec{r}_2''') \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2') \psi_2(\vec{r}_1'', \vec{r}_2'') (L_s(\vec{r}_2''')) d\vec{r}_1'' d\vec{r}_2'' d\vec{r}_2''' + \end{aligned}$$

$$+ \int \int \int_{(V)} G(\vec{r}'_1, \vec{r}_1) G(\vec{r}'_2, \vec{r}_2) G(\vec{r}'_3, \vec{r}_3) \langle L_s(\vec{r}_s) \rangle \Psi_2(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2) \Psi_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 d\vec{r}'_3 + \dots \quad (7)$$

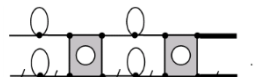
Тут  $\Psi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k)$  - кумулянтна функція:

$$\Psi_k(\vec{r}', \vec{r}'', \dots, \vec{r}^{(k)}) \sim \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vec{r}' \quad \vec{r}'' \quad \dots \quad \vec{r}^{(k)} \end{array}$$

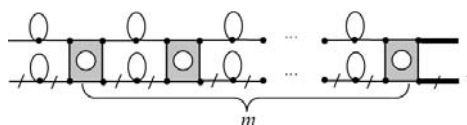
Враховуючи вираз (7) для ядра оператора інтенсивності  $\mathcal{H}$ , сума всіх сильно зв'язаних діаграм набуде вигляду



Розглянемо слабо зв'язані діаграми, які містять два сильно зв'язані елементи з ядра оператора інтенсивності  $\mathcal{H}$ . Сума таких діаграм дорівнює



Аналогічно подамо суму діаграм, які містять  $m$  сильно зв'язаних елементів:



Звідси випливає, що ряд (6) можна подати у вигляді

$$\text{[Diagram of a shaded square with a wavy line]} = \text{[Diagram of a horizontal line]} + \text{[Diagram of a shaded square with a circle above it]} + \text{[Diagram of two shaded squares with circles above them]} + \dots$$

Тоді співвідношення (7) можна подати так

$$\text{[Diagram of a shaded square with a wavy line]} = \text{[Diagram of a horizontal line]} + \text{[Diagram of a shaded square with a circle above it]} \times \left[ \text{[Diagram of a horizontal line]} + \text{[Diagram of a shaded square with a circle above it]} + \text{[Diagram of two shaded squares with circles above them]} + \dots \right]$$

Підсумовуючи вираз в дужках, з використанням співвідношення (7) отримаємо аналог рівняння Дайсона для кореляції температурного поля:

$$\text{[Diagram of a shaded square with a wavy line]} = \text{[Diagram of a horizontal line]} + \text{[Diagram of a shaded square with a circle above it]} \times \text{[Diagram of a shaded square with a wavy line]} \quad (8)$$

Рівняння (8) також є аналогом рівняння Бете-Солпітера для функції когерентності [1].

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II Случайные поля. – М.: Наука, 1978. – 436 с.

2. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Пелех П.Р. Нелокальне рівняння теплопровідності для багатофазних стохастично неоднорідних тіл // - Доповіді НАН України, - 2007. - №7 - С.49-54
3. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Пелех П.Р. Математичне моделювання процесів теплопровідності у випадково неоднорідних тілах з використанням діаграм Фейнмана // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2008. – Вип. 51, №1. - С. 140-152.

**MATHEMATICAL MODELLING A CORRELATION OF TWO STEADY-  
STATE TEMPERATURE FIELDS IN RANDOMLY NONHOMOGENEOUS  
BODIES**

*The Feynman diagram technique is developed for modelling a correlation of two temperature fields in bodies with stochastically nonhomogeneous structure for the steady-state regime. The equation for correlation random fields of temperature, that is analog of the Bete-Solpeter equation for coherence function, is built.*

## УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ОБ'ЄКТАМИ ТОПОЛОГІЧНОЇ АЛГЕБРИ

**Пирч Н.М.**

Українська академія друкарства, pnazar@ukr.net

Нехай  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  – деяка сигнатура. Топологічний простір  $A$  називається топологічною  $E$ -алгеброю, якщо цей простір не є порожнім і означено неперервні відображення  $\{e_{n,A} : E_n \times A^n \rightarrow A : n \in \mathbb{N}\}$  (див. [1]).

Скажемо, що підпростір  $Y$  топологічного простору  $X$  є  $E$ -ретрактом простору  $X$ , якщо довільне неперервне відображення  $f : Y \rightarrow W$  з топологічного простору  $Y$  у топологічну  $E$ -алгебру  $W$  допускає неперервне продовження на  $X$ .

Для топологічного простору  $X$  позначимо через  $F(X, E)$  вільну топологічну  $E$ -алгебру над простором  $X$ . Скажемо, що підпростір  $Y$  тихоновського простору  $X$  є  $E$ -вкладеним у топологічний простір  $X$ , якщо мінімальна топологічна  $E$ -підалгебра  $F(X|Y, E)$  вільної топологічної  $E$ -алгебри  $F(X, E)$ , що містить  $Y$  є природньо топологічно ізоморфною вільній топологічній  $E$ -алгебрі  $F(Y, E)$ .

*Теорема 1.* Якщо підпростір  $Y$  тихоновського простору  $X$  є  $E$ -ретрактом, цього простору, то підпростір  $Y$  є  $E$ -вкладеним у цей простір.

*Теорема 2.* Якщо існує топологічна  $E$ -алгебра, носій якої є незв'язним топологічним простором, то кожен  $E$ -ретракт зв'язного топологічного простору є зв'язним топологічним простором.

Скажемо, що простір  $X$  є  $E$ -ретральним, якщо  $X$  є ретрактом деякої топологічної  $E$ -алгебри.

*Теорема 3.* Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору  $X$  та його підпростору  $Y$

1) підпростір  $Y$  є  $E$ -ретрактом простору  $X$ ;

- 2) довільне неперервне відображення  $f: Y \rightarrow T$  з топологічного простору  $Y$  у  $E$ -ретральний простір  $T$  допускає неперервне продовження на  $X$ ;
- 3) існує неперервний гомоморфізм  $h_1: F(X, E) \rightarrow F(Y, E)$  такий, що  $h_1(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 4) існує неперервне відображення  $h_2: F(X, E) \rightarrow F(Y, E)$  таке, що  $h_2(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 5) існує неперервне відображення  $h_3: X \rightarrow F(Y, E)$  таке, що  $h_3(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 6) підпростір  $Y \in E$ -вкладеним у простір  $X$  та існує неперервний гомоморфізм  $h_4: F(X, E) \rightarrow F(X|Y, E)$  такий, що  $h_4(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 7) підпростір  $Y \in E$ -вкладеним у простір  $X$  та існує неперервне відображення  $h_5: F(X, E) \rightarrow F(X|Y, E)$  таке, що  $h_5(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 8) підпростір  $Y \in E$ -вкладеним у простір  $X$  та існує неперервне відображення  $h_6: X \rightarrow F(X|Y, E)$  таке, що  $h_6(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 9) підпростір  $Y \in E$ -ретрактом вільної топологічної алгебри  $F(X, E)$ ;
- 10) підпростір  $Y \in E$ -ретрактом вільної топологічної алгебри  $\underbrace{F(F \dots F(F(X, E), E) \dots E), E)}_n$  для деякого  $n$ ;
- 11) підпростір  $Y \in E$ -ретрактом вільної топологічної алгебри  $\underbrace{F(F \dots F(F(X, E), E) \dots E), E)}_n$  для всіх  $n$ ;
- 12) довільне неперервне відображення  $f: Y \rightarrow F$  з топологічного простору  $Y$  у вільну топологічну  $E$ -алгебру  $F$  допускає неперервне продовження на  $X$ ;
- 13) існує неперервне відображення  $h_7: X \rightarrow \underbrace{F(F \dots F(F(Y, E), E) \dots E), E)}_n$  для деякого  $n$  таке, що  $h_7(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 14) підпростір  $Y \in E$ -ретрактом вільної топологічної алгебри  $F(X, E_1)$  для деякої сигнатури  $E_1$  такої, що  $E_1 \subseteq E$ ;
- 15) підпростір  $Y \in E$ -ретрактом вільної топологічної алгебри  $F(X, E_1)$  для довільної сигнатури  $E_1$  такої, що  $E_1 \subseteq E$ ;
- 16) для довільної сигнатури  $E_1$  такої, що  $E_1 \subseteq E$  існує неперервний гомоморфізм  $t_1: F(X, E_1) \rightarrow F(Y, E)$  такий, що  $t_1(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;

- 17) для деякої сигнатури  $E_1$  такої, що  $E_1 \subseteq E$  існує неперервний гомоморфізм  $t_2 : F(X, E_1) \rightarrow F(Y, E)$  такий, що  $t_2(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 18) для довільної сигнатури  $E_1$  такої, що  $E_1 \subseteq E$  існує неперервне відображення  $t_3 : F(X, E_1) \rightarrow F(Y, E)$  таке, що  $t_3(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 19) для деякої сигнатури  $E_1$  такої, що  $E_1 \subseteq E$  існує неперервне відображення  $t_4 : F(X, E_1) \rightarrow F(Y, E)$  таке, що  $t_4(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ .

*Теорема 4.* Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору  $X$ :

- 1) простір  $X$  є  $E$ -ретральним;
- 2) простір  $X$  є  $E$ -ретрактом своєї вільної топологічної  $E$ -алгебри  $F(X, E)$ ;
- 3) для кожного простору  $Y$ , що містить  $X$  як  $E$ -ретракт, існує ретракція  $r : Y \rightarrow X$ .

*Наслідок 1.* Нехай  $Y$  –  $E$ -ретральний підпростір тихоновського простору  $X$  і  $Z$  – непорожній тихоновський простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:

- 1) підпростір  $Y$  є  $E$ -ретрактом простору  $X$ ;
- 2) підпростір  $Y$  є ретрактом простору  $X$ ;
- 3) підпростір  $Y \times Z$  є  $E$ -ретрактом простору  $X \times Z$ ;
- 4) підпростір  $Y \times Z$  є ретрактом простору  $X \times Z$ .

*Наслідок 2.* Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору  $X$  та його  $E$ -ретрального підпростору  $Y$ :

- 1) підпростір  $Y$  є  $E$ -ретрактом простору  $X$ ;
- 2) підпростір  $Y^n$  є  $E$ -ретрактом простору  $X^n$  для довільного натурального  $n$ ;
- 3) підпростір  $Y^n$  є  $E$ -ретрактом простору  $X^n$  для деякого натурального  $n$ .

*Теорема 5.* Нехай  $X$  – топологічний простір,  $K$  – його підпростір,  $p : X \rightarrow Y$  – неперервне відображення таке, що звуження  $p|_K : K \rightarrow p(K)$  є гомеоморфізмом. Якщо підпростір  $p(K)$  є  $E$ -ретрактом простору  $Y$ , то підпростір  $K$  є  $E$ -ретрактом простору  $X$ .

Скажемо, що пара топологічних просторів  $(Y, Z)$  є  $E$ -узгодженою, якщо природне відображення  $m : F(Y, E) \times Z \rightarrow F(Y \times Z, E)$ , яке елементу  $(\omega(x_1, x_2, \dots, x_n), z) \in F(Y, E) \times Z$  ставить у відповідність елемент  $\omega((x_1, z), (x_2, z), \dots, (x_n, z)) \in F(Y \times Z, E)$ , є неперервним.



*Теорема 6.* Якщо підпростір  $Y \in E$ -ретрактом тихоновського простору  $X$  і пара  $(Y, Z) \in E$  узгодженою, то підпростір  $Y \times Z \in E$ -ретрактом тихоновського простору  $X \times Z$ .

Нехай  $Y$  – підпростір топологічного простору  $X$ ,  $\sim_Y$  – деяке відношення еквівалентності задане на  $Y$ . Ми можемо продовжити це відношення до відношення еквівалентності  $\sim_X$ , заданого на  $X$ , покладаючи  $x \sim_X y$  тоді і тільки тоді, коли  $x = y$  або  $x, y \in Y$  і  $x \sim_Y y$ .

*Теорема 7.* Нехай підпростір  $Y \in E$ -ретрактом топологічного простору  $X$ . Нехай також  $\sim_Y$  – деяке відношення еквівалентності задане на  $Y$ ,  $\sim_X$  – його продовження на  $X$ ,  $p: X \rightarrow X/\sim_X$  – фактор-відображення. Тоді звуження  $p|_Y$  буде факторним відображенням, а підпростір  $p(Y)$  буде  $E$ -ретрактом фактор-простору  $X/\sim_X$ .

Для топологічного простору  $X$  розглянемо наступні вільні об'єкти:  $A(X)$  – вільна абелева топологічна група,  $R(X)$  – вільне топологічне кільце,  $cR(X)$  – вільний абелевий топологічне кільце,  $M_K(X)$  – вільний топологічний модуль над комутативним кільцем  $K$ .

*Теорема 8.* Наступні умови є еквівалентними для топологічного простору  $X$  та його підпростору  $Y$ :

- 1) існує неперервний гомоморфізм  $h_1: A(X) \rightarrow A(Y)$  вільних абелевих топологічних груп такий, що  $h_1(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 2) існує неперервний гомоморфізм  $h_2: R(X) \rightarrow R(Y)$  вільних топологічних кілець такий, що  $h_2(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 3) існує неперервний гомоморфізм  $h_3: cR(X) \rightarrow cR(Y)$  вільних абелевих топологічних кілець такий, що  $h_3(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ ;
- 4) для довільного топологічного комутативного кільця  $K$  з одиницею існує неперервний гомоморфізм  $h_K: M_K(X) \rightarrow M_K(Y)$  такий, що  $h_K(x) = x$  для всіх  $x \in Y$ .

Скажемо, що тихоновський простір  $X$  є абсолютним  $E$ -ретрактом, якщо  $X \in E$ -ретрактом довільного тихоновського простору  $Y$ , що містить  $X$  як замкнений підпростір.

*Теорема 9.* Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору  $X$  та сигнатури  $E$  :

- 1) простір  $X$  є абсолютним ретрактом;
- 2) простір  $X$  є  $E$ -ретральним та є абсолютним  $E$ -ретрактом.

1. Choban M.M. Algebraic equivalence of topological spaces // Bul. A.S. a Rep. Mol. – 2001.– **1(35)**. – p. 12-36.

#### **GENERALIZED RETRACTS CONCERNED TO THE OBJECTS OF TOPOLOGICAL ALGEBRA**

*We consider properties and introduce the methods for constructing examples of the generalized retracts, concerned with the extensions of the continuous mappings into topological algebras*

## ЛОКАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЗАЛІЗНИЧНИХ СТАНЦІЙ

Поліщук Д. О.

Відокремлений підрозділ Інформаційно-обчислювальний центр Державного  
територіально-галузевого об'єднання «Львівська залізниця»,  
iocpsdmytro@railway.lviv.ua

**Вступ.** Залізнична станція – це виробничо-технологічний підрозділ залізниці з організації перевезень пасажирів, вантажу, вантажобагажу і пошти, взаємодії та координації виробничого процесу з підприємствами і суміжними службами залізничного транспорту [1].

Для кожної станції розробляється окремий технологічний процес, який, враховуючи наявну інфраструктуру, містить перелік всіх функцій і засобів їх реалізації. Зокрема, у технологічному процесі визначаються послідовність і тривалість операцій з пропуску транзитних поїздів, обробки рухомих складів і вагонів, розформування, маневрової роботи [2] тощо. Основними завданнями кожної станції є оперативне та якісне виконання операцій із поїздами згідно із встановленими нормативами, дотримання графіку руху поїздів та забезпечення безпеки перевезень.

Оцінювання якості функціонування станції ґрунтується на постійному аналізі дотримання графіку руху поїздів. Це дає можливість здійснювати опосередкований, але достатньо інформативний та оперативний контроль за роботою станції, мінімізуючи при цьому вплив суб'єктивного фактора. Важливість такого аналізу пояснюється тим, що затримка прибуття чи відправлення поїзда неодноразово була причиною залізничних аварій і катастроф [3].

**Формулювання проблеми.** Затримка поїзда на станції може бути спричинена такими обставинами, як незадовільний стан станції або неефективна організація її роботи, незадовільний стан поїзда, неможливість відправлення поїзда у зв'язку з тим, що наступний у напрямку руху міжстанційний перегін займають інші поїзди, форс-мажорні обставини тощо. Серед перерахованих причин лише перша стосується безпосередньо організації роботи станції. З проходженням поїзда по лінії вплив наведених обставин може послідовно накопичуватись та компенсовуватись. Частина з них має випадковий характер виникнення, інші можуть бути регулярними. Основною метою даної роботи є виявлення і локалізація саме регулярних негативних факторів, які зумовлюють відхилення від встановленого графіка руху поїздів.

**Підхід до локального оцінювання.** Розглянемо обслуговування поїзда  $P_j$  на станції  $S$  і вважатимемо, що цей поїзд проходить наступний міжстан-

ційний перегін  $D$ . Нехай  $t_j^{S,g}$  – час обслуговування поїзда згідно з графіком,  $t_j^{S,\min}$  – мінімально допустимий час (який не створює ризиків для подальшого руху) обслуговування поїзда на станції,  $t_j^{S,r}$  – реальний час обслуговування поїзда,  $t_j^{D,g}$  – час, за який поїзд проходить наступний міжстанційний перегін згідно з графіком,  $t_j^{D,\min}$  – мінімально допустимий час (час з максимальною встановленою швидкістю, який не створює загроз для руху) проходження поїзда,  $t_j^{D,r}$  – реальний час, за який поїзд проходить міжстанційний перегін.

Зрозуміло, що оцінка одного конкретного поїзда не є визначальним показником якості роботи станції, оскільки причиною затримки може бути не лише незадовільний стан станції або низька ефективність організації її роботи, але й сторонні фактори, зокрема затримка поїзда на попередніх станціях чи міжстанційних перегонах, невідповідний стан рухомого складу, збої у графіку руху тощо. Тобто об'єктивну оцінку якості функціонування станції слід здійснювати на підставі аналізу руху сукупності поїздів, які проходять через неї за достатньо тривалий період часу  $T^K$  (тиждень, місяць, квартал, рік). Позначимо через  $T^0$  період часу, який враховує циклічність руху та дорівнює одній добі. Нехай  $T_k$  – доба із порядковим номером  $k$  і  $T^K = \bigcup_{k=1}^K T_k$ .

Будемо вважати, що оцінка  $e(P_j, S, T_k)$  якості обслуговування поїзда  $P_j$  на станції  $S$  за період  $T_k$  дорівнює:

5, якщо  $t_j^{S,r} = t_j^{S,\min}$ , тобто час стоянки максимально компенсує попередні затримки руху; тут і надалі компенсація затримок доцільна та виправдана лише в тому випадку, коли вона не створює незручностей, не погіршує якості обслуговування або не сприяє виникненню загроз для пасажирів та вантажів;

$4 + (t_j^{S,r} - t_j^{S,g}) / (t_j^{S,\min} - t_j^{S,g})$ , якщо  $t_j^{S,r} \in (t_j^{S,\min}, t_j^{S,g}]$ , тобто час стоянки частково компенсує попередні затримки руху;

$3 + (t_j^{S,g} + t_j^{D,g} - t_j^{D,\min} - t_j^{S,r}) / (t_j^{D,g} - t_j^{D,\min})$ , якщо  $t_j^{S,r} \in (t_j^{S,g}, t_j^{S,g} + (t_j^{D,g} - t_j^{D,\min}))$ , тобто затримку поїзда на станції можна компенсувати на наступному перегоні за рахунок безпечного збільшення швидкості;

2, якщо  $t_j^{S,r} < t_j^{S,g} + (t_j^{D,g} - t_j^{D,\min})$ , тобто затримку на станції неможливо компенсувати на наступному перегоні.

Оцінку роботи станції  $S$  за результатами обслуговування сукупності поїздів  $\{P_j\}_{j=1}^M$  протягом періоду часу  $T_k$  визначаємо за співвідношенням:

$$E_P(S, T_k) = \sum_{j=1}^M \rho_{P_j} e(P_j, S, T_k) / \sum_{j=1}^M \rho_{P_j},$$

де  $\rho_{P_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) – вагові коефіцієнти, що визначають пріоритетність поїзда. Обчисливши  $E_P(S, T_k)$  для кожного  $k = 1, 2, \dots, K$ , одержимо послідовність оцінок. Аналіз цієї послідовності дає можливість виявляти циклічні зміни якості обслуговування поїздів на окремій станції. Доцільно проводити оцінювання для поїздів окремих категорій (вантажних наскрізних або дільничих, пасажирських швидкісних або приміських тощо).

Оцінку роботи станції  $S$  за результатами обслуговування поїзда  $P_j$  протягом періоду часу  $T^K$  визначаємо за співвідношенням:

$$E(P_j, S, T^K) = \sum_{k=1}^K e(P_j, S, T_k) / K,$$

при цьому з послідовним збільшенням  $T^K$  оцінки  $E(P_j, S, T^K)$  дають можливість відстежувати тренд та динаміку зміни якості обслуговування поїзда  $P_j$  на станції  $S$ .

Оцінку роботи станції  $S$  за результатами обслуговування сукупності поїздів  $\{P_j\}_{j=1}^M$  протягом часового інтервалу  $T^K$  визначаємо за співвідношенням:

$$E_P(S, T^K) = \sum_{k=1}^K E_P(S, T_k) / K,$$

при цьому з послідовним збільшенням  $T^K$  значення цієї оцінки дають можливість відстежувати тренд та динаміку зміни якості обслуговування поїздів на станції  $S$ . Причинами того, що узагальнена оцінка  $E(P_j, S, T^K)$  обслуговування поїзда  $P_j$  на станції  $S$  за період  $T^K$  є значно нижчою, ніж  $E_P(S, T^K)$ , можуть бути недоліки в організації графіка руху цього поїзда або його стан.

Після проведення оцінювання якості функціонування деякого набору станцій  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), першочергового дослідження потребує станція із

найнижчою оцінкою. Причину одержання такої оцінки можна визначити, зокрема, порівнюючи нормативний ( $T_{on}^j$ ) та реальний ( $t_{on}^j$ ) час виконання окремих операцій над  $j$ -м поїздом. Відмінності між реальним часом виконання операції та нормативним, встановленим у технологічному процесі, можуть бути наслідком незадовільного стану елементів станційної інфраструктури, незадовільної роботи окремих працівників станції або ж невідповідної організації роботи станції стосовно реальних обсягів перевезень. Якщо ж проблем у стані інфраструктури після оцінювання [4, 5] не виявлено, то керівництву необхідно приймати рішення про підвищення кваліфікації персоналу станції або перегляд способів організації її роботи.

**Висновки.** У роботі запропоновано підхід до локального оцінювання якості функціонування залізничної станції, який ґрунтується на аналізі виконання графіка руху поїздів. Одержані оцінки дозволяють визначити недоліки у наявному графіку руху та зробити висновок про необхідність детальнішого оцінювання роботи деякої станції, зокрема дослідження її технологічного процесу. Попри це зрозуміло, що негативні висновки щодо окремо взятої станції можуть бути наслідком численних сторонніх факторів, таких як затримка поїздів на попередніх станціях чи міжстанційних перегонах, невідповідним станом рухомого складу тощо. Тобто вирішення цієї проблеми вимагає не лише локального, але й комплексного підходу, коли на певній лінії руху поїздів враховується взаємодія різних елементів залізничної транспортної системи України.

1. Анисимов П. С., Архангельский В. Е., Белов Г. И. и др. Железнодорожный транспорт. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 1038 с.
2. Кудрявцев В. А., Ковалев В. И., Кузнецов А. П. и др. Основы эксплуатационной работы железных дорог. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 352 с.
3. Сонько С. П., Віннік Н. В., Годубкіна О. М. та ін. Надзвичайні ситуації та цивільний захист населення. – Львів: Магнолія, 2009. – 232 с.
4. Поліщук Д.О. Модель локального оцінювання станційного господарства Укрзалізниці. – Режим доступу: <http://iapmm.lviv.ua/cpmm2011/materials/06/18.polischuk.191.pdf>.
5. Поліщук Д.О. Модель локального оцінювання стану колійного господарства Укрзалізниці. – Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-P-25.pdf>.

## LOCAL EVALUATION OF RAILWAY STATIONS FUNCTIONING QUALITY

*The approach to railway stations functioning quality evaluation based on train analysis of traffic schedule was suggested. The methods for evaluation of station work according to results of trains complex service and peculiar period of time were described.*

## МЕТОДИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Прокопишин І.І.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, ihor84@gmail.com

Розглянуто задачу про односторонній контакт кількох нелінійно пружних тіл скінченних розмірів. На основі праць [1, 2] здійснено варіаційні формулювання цієї задачі у вигляді проблеми мінімізації неквадратичного функціонала сумарної енергії деформації тіл на опуклій замкнутій множині кінематично допустимих переміщень та у вигляді нелінійної варіаційної нерівності на цій множині. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку отриманих варіаційних задач.

Застосовано метод штрафу для зведення нелінійної варіаційної нерівності на опуклій замкнутій множині до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння у вихідному гільбертовому просторі. Показано існування і єдиність розв'язку варіаційного рівняння зі штрафом та доведено сильну збіжність цього розв'язку до розв'язку вихідної варіаційної нерівності при прямуванні параметра штрафу до нуля.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом, що відповідає задачам про контакт нелінійно пружних тіл, запропоновано два класи стаціонарних і нестаціонарних ітераційних методів [3, 4], які реалізують декомпозицію по підобластях, тобто які зводять розв'язування задачі у всій області до розв'язування послідовності задач в окремих тілах. При побудові ітераційних методів першого класу використано лише перші диференціали Гато енергії нелінійної деформації кожного з тіл, а в методах другого класу застосовано ще й другі диференціали Гато цієї енергії.

На кожному ітераційному кроці отриманих методів декомпозиції області (МДО) необхідно паралельно розв'язувати деякі лінійні варіаційні рівняння для окремих тіл, що відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна на зонах можливого контакту та з додатковими об'ємними силами у тілах.

Доведено теореми про збіжність запропонованих методів.

Перевагами розроблених МДО є простота алгоритмів та регуляризація вихідної контактної задачі завдяки застосуванню варіаційного формулювання зі штрафом. Ці методи містять лише один ітераційний цикл, у якому ітерація по підобластях (тілах) поєднується з ітерацією для врахування нелінійних контактних умов та з ітерацією для врахування нелінійності співвідношень між деформаціями і напруженнями.

1. *Кравчук А.С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // ПММ. – 1978. – **42**, № 3. – С. 467-473.
2. *Кузьменко В.И.* О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // ПММ. – 1979. – **43**, № 5. – С. 893-901.
3. *Прокopiшин І.І.* Методи декомпозиції області для задач одностороннього контакту нелінійно пружних тіл // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Вип. 15. – 13 с. (подано).
4. *Prokopyshyn I.I., Dyuk I.I., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elastic bodies // Proceedings of DD20, the 20th International Conference on Domain Decomposition Methods, University of California at San Diego, February 2011. – 8 с. (подано).

#### **DOMAIN DECOMPOSITION METHODS FOR CONTACT PROBLEMS OF NONLINEAR ELASTICITY**

*We have proposed on continuous level two classes of domain decomposition methods for solution of unilateral multibody contact problems in nonlinear elasticity, which are based on the penalty method for nonlinear variational inequalities and some stationary or nonstationary iterative methods for nonlinear variational equations. We have shown the existence of a unique solution of the penalty variational equation and have proved the convergence theorems for domain decomposition methods and the penalty method.*



## ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН НЕРІВНОМІРНО НАГРІТОГО БЕЗМЕЖНОГО ТРЬОХСКЛАДОВОГО ТІЛА ЗА ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

Процюк Б.В., Горун О.П.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача, dept19@iapmm.lviv.ua, oleggorun@gmail.com

В різноманітних галузях промисловості широко використовують кусково-однорідні елементи конструкцій, зокрема, які складаються з двох масивних частин з плоскими межами поділу, з'єднаних проміжковим шаром. Актуальним питанням є аналітичне дослідження їхнього термопружного стану під впливом імпульсної теплової дії.

Під час розв'язування задач теплопровідності для відповідних тіл часто використовують умови неідеального теплового контакту. У найбільш загальному вигляді їх отримано у [1], виходячи із задачі теплопровідності для тришарових ідеальноконтактуючих тіл за припущення малої товщини проміжкового шару.

У даній роботі з використанням підходу, який базується на застосуванні узагальнених функцій та функцій Гріна пропонується аналітичний розв'язок квазістатичної задачі термопружності для безмежного трьохскладового тіла без обмежень на товщину проміжкового шару. При цьому вважається, що початкові температури складових різні, а на одній з поверхонь поділу зосереджені джерела тепла, інтенсивність яких має імпульсний характер зміни.

Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності, віднесenu до циліндричної системи координат для області, яку займають два півбезмежних тіла, з'єднаних проміжковим шаром. Циліндричні поверхні є теплоізольованими. Коефіцієнти теплопровідності  $\lambda_i^{(i)}$  та об'ємної теплоємності  $c_{Vi}$  ( $i=1,2,3$ ) є сталими в межах кожної області. Нехай на поверхні поділу  $z_1 = 0$  діє періодичне джерело тепла імпульсного характеру зміни інтенсивності. Вважаємо, що початкова температура проміжкового шару стала, а початкові температури півпросторів змінюються експоненціально. На поверхнях поділу  $z_1 = 0$  і  $z_2 = h$  виконуються умови ідеального теплового контакту.

У цьому випадку для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = c_V(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} - w_t(z, \tau) \quad (-\infty \leq z \leq \infty), \quad (1)$$

граничну та початкову умови

$$t(z, \tau) \Big|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (2)$$

$$t(z, \tau) \Big|_{\tau=0} = t_{01}(z) + \sum_{k=1}^2 [t_{0,k+1}(z) - t_{0,k}(z)] S(z - z_k), \quad (3)$$

$$t_{01}(z) = T_{01} e^{k_1 z}, \quad t_{02}(z) = T_{02}, \quad t_{03}(z) = T_{03} e^{-k_3(z-h)}, \quad (4)$$

де

$$\lambda_t(z) = \lambda_t^{(1)} + \sum_{k=1}^2 (\lambda_t^{(k+1)} - \lambda_t^{(k)}) S(z - z_k),$$

$$c_V(z) = c_{V1} + \sum_{k=1}^2 (c_{V,k+1} - c_{V,k}) S(z - z_k), \quad S(z) - \text{функція Хевісайда, } \delta(z) -$$

дельта-функція Дірака,  $\tilde{w}_t(\tau) = q_0 \sum_{i=0}^{m-1} [S(\tau - b_i) - S(\tau - b_i - \tau_1)]$ ,  $q_0$  -

потужність джерела тепла  $[q_0] = \left[ \frac{Bm}{M^2} \right]$ ,  $b_i = i(\tau_1 + \tau_2)$ ,  $\tau_1$  - тривалість

імпульсу,  $\tau_2$  - тривалість паузи,  $m$  - кількість імпульсів; індексу  $i=1$  відповідають величини, які належать півпростору  $-\infty \leq z \leq 0$ ,  $i=2$  - проміжковому шару ( $0 \leq z \leq h$ ),  $i=3$  - півпростору  $h \leq z \leq +\infty$ .

За допомогою функцій Гріна розв'язок задачі теплопровідності (1)-(3) подається у вигляді:

$$t_i(z, \tau) = \tilde{t}_i(z, \tau) + \tilde{g}_i(z, \tau),$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_i(z, \tau) = & \int_{-\infty}^0 c_{V1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) T_{01} e^{k_1 \zeta} d\zeta + \int_0^h c_{V2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) T_{02} d\zeta + \\ & + \int_h^{\infty} c_{V3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) T_{03} e^{-k_3(\zeta-h)} d\zeta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{g}_i(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} q_0 G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') \sum_{i=0}^{m-1} [S(\tau - b_i) - S(\tau - b_i - \tau_1)] \delta(\zeta) d\zeta d\tau', \quad (6)$$

де  $G_{ij}(z, \zeta, \tau)$  - елементи матриці Гріна [2].

Після підстановки у (5) та (6) виразів для елементів матриці Гріна та обчислення інтегралів, було знайдено явний вигляд функцій  $\tilde{t}_i(z, \tau)$  [3] та  $\tilde{q}_i(z, \tau)$ .

Із знайденого розв'язку отримано низку часткових випадків для одно- та двоскладових безмежних тіл [4,5,6]. Окремо проаналізовано розв'язок для двоскладового простору з кусково-сталю початковою температурою.

Оскільки температурне поле змінюється вздовж однієї координати, то у розглядуваному вільному від силових навантажень тілі з гладко закріпленими циліндричними поверхнями будуть лише нормальні напруження в напрямках, паралельних до поверхні поділу. У цьому випадку такими напруженнями будуть [7]

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z, \tau) = -\frac{E(z)}{1-\nu(z)} \alpha_i(z) t(z, \tau),$$

де  $\nu(z)$ ,  $E(z)$ ,  $\alpha_i(z)$  - кусково-неперервні функції, які співпадають в межах  $i$ -ої складової відповідно з коефіцієнтами Пуассона  $\nu_i$ , модулями пружності  $E_i$ , коефіцієнтами лінійного розширення  $\alpha_{i_i}$ .

На основі отриманих розв'язків досліджено вплив фізико-механічних характеристик та товщини проміжкового шару на розподіл нестационарних температурних полів та спричинених ними напружень.

1. *Подстригач Я.С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. 1963.-6. № 10. С.59-64.
2. *Процюк Б.В., Верба І.І.* Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 1999. – Вип. 1. – С. 200-205.
3. *Горун О.П.* Одновимірне температурне поле двох півпросторів, з'єднаних проміжковим шаром за різних початкових температур// Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача. Тези доповідей. – Львів: ІППММ, 2011. – С. 65-66.
4. *А.И. Пехович, В.М. Жидких,* «Расчеты теплового режима твердых тел» 1976.
5. *Г.Карслоу, Д.Егер.* Теплопроводность твердых тел.- М.: "Наука", 1964. 488 с.
6. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. -М.: Высшая школа, 1967.- 600 с.
7. *Кушнір Р.М., Процюк Б.В., Синюта В.М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну/Фіз.-хім.механіка матеріалів, 2002.-№6.- с.31-38.

**THE THERMOELASTIC STATE OF A NON UNIFORMLY HEATED  
INFINITE THREELAYER BODY UNDER AN IMPULSIVE ACTION OF A  
HEAT FLOW**

*With using of the Green's functions for a threelayer space the analytical solution of the quasi-static problems of thermoelasticity for a non uniformly heated infinite threelayer body, at a separation surface of which, the heat sources are concentrated, the intensity of which has an impulse character of change, is obtained.*

## ПРО ФОРМУ СМІТА НАЙБІЛЬШОГО СПІЛЬНОГО ЛІВОГО ДІЛЬНИКА МАТРИЦЬ

Романів А.М.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, вул. Наукова 3-б, 79060  
romaniv\_a@ukr.net

Нехай  $R$  – комутативна область головних ідеалів з  $1 \neq 0$ ,  $M_n(R)$  – кільце  $n \times n$  матриць над  $R$ . Нехай  $A, B$  – неособливі  $n \times n$  матриці над  $R$ . Для матриць  $A$  та  $B$  існують такі оборотні матриці  $P_A, P_B$  та  $Q_A, Q_B$ , що

$$P_A A Q_A = E, \text{ де } E = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n-1.$$

$$P_B B Q_B = \Delta, \text{ де } \Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \delta_i \mid \delta_{i+1}, i = 1, \dots, n-1.$$

Матриці  $E$  та  $\Delta$  називаються канонічними діагональними формами або ж формами Сміта, а матриці  $P_A, P_B$  та  $Q_A, Q_B$  – лівими та правими перетворювальними матрицями матриць  $A$  та  $B$ , відповідно.

Позначимо через  $\mathbf{P}_A$  та  $\mathbf{P}_B$  множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриць  $A$  та  $B$ , відповідно.

Якщо  $A = BC$ , то кажуть, що матриця  $B$  є лівим дільником матриці  $A$ . Якщо  $A = DA_1$  та  $B = DB_1$ , то матрицю  $D$  називають спільним лівим дільником матриць  $A$  та  $B$ . Окрім цього, якщо матриця  $D$  ділиться на кожний спільний лівий дільник матриць  $A$  та  $B$ , то матрицю  $D$  називають найбільшим спільним лівим дільником матриць  $A$  та  $B$ .

У 1933р. С.С. MacDuffee [1] запропонував метод знаходження найбільшого спільного лівого дільника матриць  $A$  та  $B$ , який ґрунтується на результатах Е. Cahen [2] та А. Chatelet [3]. У 1949р. В.М. Stewart [4] показав, що найбільший спільний лівий дільник матриць  $A$  та  $B$  визначений однозначно з точністю до правої асоційованості.

*Теорема.* Нехай

$$A \sim \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n-1;$$

$$B \sim \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \delta), P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n, \text{ де } P_A \in \mathbf{P}_A, P_B \in \mathbf{P}_B.$$

Тоді форма Сміта найбільшого спільного лівого дільника матриць  $A$  та  $B$  має вигляд

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{(\varepsilon_n, \delta)}{\tau} \end{pmatrix}, \text{ де } \tau = \frac{k}{(k, s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{n, n-1})}, k = \frac{(\varepsilon_n, \delta)}{(\varepsilon_{n-1}, \delta)}.$$

1. *MacDuffe C.C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – 39. – P. 570-573.
2. *Cahen E.* Théorie des Nombres. 1914. – I.
3. *Chatelet A.* Groupes Abéliens Finis. 1924.
4. *Stewart B.M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – 55. – 6. – P. 587-591.

#### ON SMITH NORMAL FORM OF GREATEST COMMON LEFT DIVISOR OF MATRICES

*By some restrictions the Smith normal form of greatest common left divisor of matrices is established.*

## ЩОДО РОЗРАХУНКУ ДОВГОТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ ТОНКОСТІННИХ ТРУБ ЗА УМОВ СКРУЧЕННЯ

Русінов О.О.

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України, flc@ukr.net

Розв'язано задачу розрахунку часу до руйнування тонкостінних труб за умов усталеної повзучості під дією крутного моменту з розтягом. Розв'язок побудовано на основі концепції еквівалентних напружень. У якості еквівалентного напруження використовується змішаний критерій довготривалого руйнування. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунку часу довготривалого руйнування з експериментальними даними.

**1.Постановка задачі.** Задача розрахунку довготривалої міцності вирішується в роботі у рамках підходу, який базується на концепції еквівалентних напружень як деякої скалярної характеристики початкового напруженого стану труби. Еквівалентне напруження  $\sigma_{eqv}$  встановлює відповідність між руйнуванням труби за довільним напруженим станом та руйнуванням циліндричного взірця за умов одновісного розтягу:

$$t_R = \frac{1}{B(\sigma_t)^m} \Rightarrow t_R = \frac{1}{B(\sigma_{eqv})^m}, \quad (1)$$

де  $t_R$ ,  $\sigma_t$  - час та напруження руйнування суцільних циліндричних зразків за умов одновісного розтягу;  $B$ ,  $m$  – матеріальні константи, що визначаються з стандартних дослідів на довготривалу міцність за умов одновісного розтягу суцільних циліндричних зразків.

У якості еквівалентного напруження  $\sigma_{eqv}$  в роботі використовується узагальнений змішаний критерій довготривалої міцності у вигляді [1]

$$\sigma_{eqv} = \begin{cases} \alpha\sigma_{\max} + (1-\alpha)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\chi s_i, & \sigma_1 > \sigma_2 > 0; \sigma_3 = 0; \\ 2\beta\tau_{\max} + (1-\beta)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^\chi \tau_{oct}, & \sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0, \end{cases} \quad (2)$$

що враховує знаки головних напружень та вид напруженого стану за допомогою параметра Надаї-Лоде  $\left(\chi = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1\right)$ . За однакових знаків головних напружень величини  $\sigma_{eqv}$  пов'язує максимальне нормальне

напруження  $\sigma_{\max} = \sigma_1$  та інтенсивність дотичних напружень  $s_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$ , а за різних знаків головних напружень – подвійне максимальне дотичне напруження  $2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2$  та октаедричне дотичне напруження  $\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$ , де під  $\sigma_2$  розуміється будь-яке відмінне від 0 друге головне напруження. Коефіцієнти  $\alpha$  та  $\beta$  у (2) є матеріальні константи, що враховують вплив виду напруженого стану на величину  $\sigma_{eqv}$  та визначаються з експерименту.

Підставляємо перше співвідношення з (2) в (1) для часу до руйнування тонкостінної труби  $t_R$  у функції головних напружень за однакових знаків головних напружень отримуємо рівняння

$$t_R = \frac{1}{B \left[ \frac{\sqrt{3}\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)(\sqrt{3})^{1-\chi} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{3}} \right]^m}, \quad (7)$$

а підставляючи друге співвідношення з (2) в (1) для часу до руйнування тонкостінної труби  $t_R$  за різних знаків головних напружень – рівняння

$$t_R = \frac{1}{B \left[ \beta(\sigma_1 - \sigma_2) + (1-\beta) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{1+\chi} \left( \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \right) \right]^m}, \quad (8)$$

які фактично задають момент виникнення локального руйнування. У тонкостінних трубах, внаслідок обмеженості стадії розповсюдження фронту руйнування, цей момент утотожнюється в подальшому з часом повного руйнування.

**2. Довготривала міцність труб під дією кручення з розтягом.** Для прямолінійного елемента тонкостінної циліндричної труби, що навантажена крутним моментом  $M_T$  з осьювою силою  $N$  для головних напружень маємо:

$$\sigma_1 = \frac{l}{2} \left[ \frac{N}{\pi D_m h} + \sqrt{\left( \frac{N}{\pi D_m h} \right)^2 + 4 \left( \frac{2M_T}{\pi D_m^2 h} \right)^2} \right]; \quad \sigma_2 = 0; \quad (9)$$

$$\sigma_3 = \frac{l}{2} \left[ \frac{N}{\pi D_m h} - \sqrt{\left( \frac{N}{\pi D_m h} \right)^2 + 4 \left( \frac{2M_T}{\pi D_m^2 h} \right)^2} \right],$$



звідки зрозуміло, що в данному випадку знаки головних напружень різні. Тут,  $D_m$  та  $h$  - середній діаметр та товщина стінки труби відповідно ( $D_m=2r$ ).

Покладемо (9) в (8), для часу до руйнування тонкостінної циліндричної труби  $t_R$  під дією крутного моменту  $M_T$  з осовою силою  $N$  отримуємо

$$t_R = \frac{l}{B \left[ \left( \sqrt{4+v^2} \right) \beta + \sqrt{(3+v^2)}(1-\beta) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{1+\chi} \right]^m \cdot \left( \frac{2M_T}{\pi D_m^2 h} \right)^m} \quad (10)$$

де прийнято  $v = \frac{D_m N}{2M_T}$  - безрозмірний силовий параметр, що визначає співвідношення між крутною та розтягуючою складовими навантаження.

Матеріальна константа  $\beta$  в (10) визначається з співвідношення [2]

$$\beta = \frac{\sqrt{3} \frac{\bar{\tau}_t}{\sigma_t} - \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)^{1-\chi}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)^{1-\chi}}, \quad (11)$$

де  $\sigma_t$ ,  $\tau_t$  - експериментально знайдені осереднені (з врахуванням статистичних властивостей матеріала) границі довготривалої міцності відповідно за одновісного розтягу циліндричного взірця та тонкостінної труби за умов чистого скручення для одного й того ж самого часу до руйнування.

Результати розрахунків (штрихові лінії), що виконані згідно рівняння (10) з використанням значень коефіцієнта  $\beta$ , розрахованого відповідно (11), співставлені на рис.1 з експериментальними даними (точки) для тонкостінних

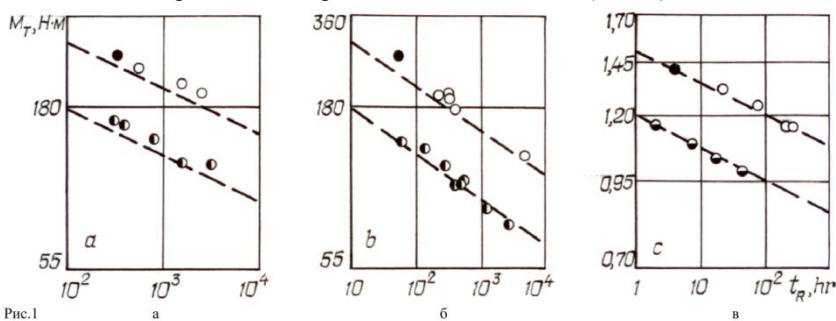


Рис.1 трубчастих зразків зі сталі 15X1M1Φ (а) за температури 570 °С та  $v = 0$  (○), 2,0 (●), сталі 1X18H12T (б) за 610 °С та  $v = 0$  (○), 2,0 (●), сталі X16H15M3B (в) за 675 °С та  $v = 0$  (○), 1,3 (⊖) під дією скручення з розтягом.

В таблиці наведені значення матеріальних констант,  $\beta$ ,  $B$  та  $m$ , які використовувались у розрахунках.

Таблиця 1. Значення матеріальних констант  $\beta$ ,  $B$  и  $m$

Матеріал	$\theta$ , °C	$\nu$	$B$ , МПа <sup>n</sup> ·год <sup>-1</sup>	$m$	$\beta$	Джерела [...]
Сталь 15Х1М1Ф	570	0	$1,41 \cdot 10^{-19}$	7,00	0,73	[3]
		2,0				
Сталь 1Х18Н12Т	610	0	$1,72 \cdot 10^{-21}$	8,27	0,65	[3]
		2,0				
Сталь Х16Н15М3В	675	0	$5,24 \cdot 10^{-174}$	7,94	0,70	[4]
		1,3				

Отримано задовільне узгодження результатів розрахунку часу довготривалого руйнування з експериментальними даними.

1. Голуб В.П., Крижановский В.И., Русинов А.А. Смешанный критерий длительного разрушения в условиях ползучести при плоском напряженном состоянии // Прикл. механика. – 2003. – **39**, №5. – С.94-106
2. Русинов А.А. К обоснованию сметанного критерия длительного разрушения при плоском напряженном состоянии // Прикл. механика. – 2009. – **45**, №3, сс. 135.
3. Трунин И.И. Оценка сопротивления длительному разрушению и некоторые особенности деформирования при сложном напряженном состоянии // ПМТФ.- 1963.- №1.- С. 110-114р
4. Кисилевский В.Н., Лукашев В.К., Полевой Д.В., Самсонов Б.В., Лосев Н.П. Влияние реакторных излучений на длительную прочность стали Х16Н15М3В в зависимости от вида напряженного состояния // Пробл. прочности.- 1974.- №9, С. 39-42.

#### TO THE CALCULATION OF LONG-TERM FRACTURE OF THIN-WALLED TUBES UNDER TORSION.

*The problem of the long-term fracture determination of thin-walled tubes under torsion with tension has been considered. The approach is based on the equivalent stresses concept. The equivalent stress is given in a form of mixed long-term fracture criteria. A satisfactory agreement of the calculations with experimental data has been obtained.*

## ПРО ОЦІНКУ МІРИ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У НЕЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Савка І. Я.

ІППММ ім. Я. С. Підстригала НАН України, s-i@ukr.net

Умови існування розв'язків нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними в області, що є декартовим добутком часового відрізка та багатовимірного просторового тора, у відповідних шкалах просторів (соболевських та ін.) пов'язані з дослідженням проблеми малих знаменників за допомогою метричного підходу [1]. При цьому вводяться певні виняткові множини та оцінюються їхні міри.

Нехай  $I$  – відрізок дійсної осі,  $\text{mes } A$  – міра Лебега вимірної множини  $A$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $C^1(I; \mathbb{R})$  – простір неперервно диференційованих на відріжку  $I$  дійснозначних функцій.

Множину  $\{\tau \in I : |g(\tau)| < \varepsilon\}$ , де  $\varepsilon > 0$ , називають  $\varepsilon$ -винятковою для заданої функції  $g$  на відріжку  $I$ . В роботі встановлено оцінку зверху для міри Лебега такої виняткової множини.

*Теорема 1.* Нехай  $f(\tau, z) = \mu_1(\tau) + z\mu_2(\tau)$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in C^1(I; \mathbb{R})$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $W[\mu](\tau)$  – вронскіан системи функцій  $\{\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)\}$ . Якщо  $W[\mu](\tau) \neq 0$  та  $\mu_2(\tau) \neq 0$  для всіх  $\tau \in I$ , то для довільного  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , виконується оцінка

$$\text{mes}\{\tau \in I : |f(\tau, z)| < c(1 + |z|)\varepsilon\} \leq 6\varepsilon,$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \min \left\{ \left( \|\mu_1\|_{C^1(I; \mathbb{R})} + \|\mu_2\|_{C^1(I; \mathbb{R})} \right)^{-1} \times \min_{\tau \in I} |W[\mu](\tau)|; \min_{\tau \in I} |\mu_2(\tau)| \right\}.$$

1. Пташник Б. Й., Льків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

### ABOUT ESTIMATE FOR THE MEASURE OF THE EXCEPTIONAL SET IN NONLOCAL PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

*We obtain an upper estimate for the measure Lebesgue of the exceptional set.*

## ТРАНСФОРМАЦІЯ МІЖФАЗНОЇ ТЕПЛОПРОНИКНОЇ ТРІЩИНИ ПІД ДІЄЮ ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Середницька Х.І.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН  
України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна, labmtd@iapmm.lviv.ua

Відомо [1-3], що термомеханічна поведінка біматеріалу з міжфазною тріщиною істотно залежить від термічних властивостей його компонент. В даному повідомленні досліджено часткове закриття міжфазної тріщини за комплексного впливу поверхневих плівок та теплопровідного заповнювача тріщини.

Розглядаємо біматеріальне плоске тіло, компоненти якого наділені однаковими механічними характеристиками ( $G_1 = G_2 = G$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ) та різними термічними характеристиками ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ). На міжфазній лінії біматеріалу знаходиться тріщина довжиною  $2a$ , яка розкривається під дією розтягувальних зусиль  $p$ . Вважаємо, що порожнина тріщини заповнена теплопровідною речовиною з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_c$ , а поверхні тріщини покриті тонкими плівками з максимальним сумарним термоопором  $r(x) = r_0 \sqrt{1 - (x/a)^2}$ . Біматеріал на безмежності піддається дії теплового потоку  $q$ . В результаті між поверхнями тріщини відбувається передача тепла за законом:

$$q_y^- = q_y^+, T^- - T^+ = \left( h(x)/\lambda_c + r_0 \sqrt{1 - (x/a)^2} \right) \cdot q_y^+,$$

де  $q_y^+$ ,  $q_y^-$  – граничні значення нормальної компоненти вектора теплового потоку;  $T^+$ ,  $T^-$  – граничні значення температури;  $h(x)$  – розкриття тріщини.

У праці [4,5] показано, що у випадку, коли тепловий потік скерований до матеріалу з меншою термічною дистортивністю  $\eta$  ( $\eta = \alpha(1 + \nu)/\lambda$ ), при перевищенні потоком певного граничного значення відбуватиметься контакт берегів тріщини на її центральній частині. Тут розв'яжемо задачу термопружності з урахуванням цього явища часткового закриття тріщини.

Вважаючи, що береги тріщини контактують на деякому відрізьку  $[-b, b]$ , запишемо гранично-контактні умови цієї задачі:

на контактуючій ділянці тріщини  $y = 0, |x| \leq b$ :

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, q_y^+ = q_y^-, T^- - T^+ = q_y^+ \cdot r(x);$$

на розкритій ділянці тріщини  $y = 0, b < |x| < a$ :

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = 0, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, q_y^+ = q_y^-, T^- - T^+ = q_y^+ \cdot R(x);$$

на міжфазній лінії поза тріщиною  $y = 0, |x| \geq a$ :

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, u^+ = u^-, v^+ = v^-, q_y^+ = q_y^-, T^+ = T^-;$$

на нескінченності:

$$\sigma_y = p, \sigma_x = 2G\eta_n q y / [\lambda_n(1-\nu)], q_y = q, q_x = 0.$$

Тут  $R(x) = h(x)/\lambda_c + r_0 \sqrt{1-(x/a)^2}$ ;  $\eta_n = \alpha_n(1+\nu)/\lambda_n$  ( $n=1,2$ );  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $q_x$ ,  $q_y$ , – компоненти вектора теплового потоку.

Сформульовану задачу зводимо до розв'язування нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь [4] відносно стрибка температури  $\gamma(x) = T^-(x) - T^+(x)$  між берегами тріщини та розкриття тріщини  $h(x)$ :

$$\frac{\gamma(x)}{h(x)/\lambda_c + r_0 \sqrt{1-(x/a)^2}} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, |x| < a,$$

$$\gamma(\pm a) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{h'(t)}{t+x} dt = -\frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) - \frac{Kp}{2}, b < |x| < a,$$

$$h(\pm a) = 0, h(\pm b) = 0 \quad (2)$$

де  $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ;  $K = 4(1-\nu)/G$ ;  $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$ .

Зауважимо, що в отримані рівняння крім шуканих функцій входить ще й невідомий параметр  $b$ , для визначення якого використовуємо умову плавного змикання берегів тріщини на кінцях ділянки їхнього контакту:

$$h'(\pm b) = 0. \quad (3)$$

Розв'язок системи (1), (2) шукаємо, використовуючи метод послідовних наближень. На кожній ітерації розв'язуємо систему двох лінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, застосовуючи метод колокацій. За початкове наближення вибираємо випадок, коли тріщина

цілком розкрита лише під дією розтягувальних зусиль  $p$  (без урахування термічних деформацій).

Введемо безрозмірні величини:

$\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{b} = b/a$ ,  $\bar{h} = h/a$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma\lambda\eta^-$ ,  $\bar{q} = qa\eta^-$ ,  $\bar{p} = pK$ ,  $\bar{\lambda}_c = \lambda_c/\lambda$ ,  $\bar{r}_0 = r_0\lambda/a$  і числові розрахунки проведемо для розтягувальних зусиль  $\bar{p} = 0.01$  та теплового потоку  $\bar{q} = -0.0098$ .

На рис. 1 зображено розподіл розкриття тріщини  $\bar{h}(\bar{x})$  для різних значень теплопровідності її заповнювача  $\bar{\lambda}_c$ , коли максимальний поверхневий термоопір є фіксованим ( $\bar{r}_0 = 3$ ). Бачимо, що збільшення теплопровідності заповнювача призводить до збільшення розкриття тріщини і до зменшення ділянки контакту її берегів. Рис. 2 ілюструє зменшення розкриття тріщини і збільшення ділянки контакту її берегів при збільшенні поверхневого термоопору тріщини за фіксованої теплопровідності її заповнювача ( $\bar{\lambda}_c = 0.01$ ).

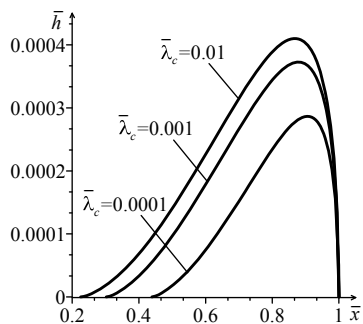


Рис. 1

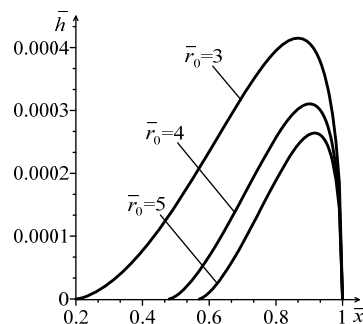


Рис. 2

Зауважимо, що у разі відсутності поверхневого термоопору на берегах тріщини, заповненої теплопровідним середовищем, скерований до компонента з меншою термічною дистортивністю тепловий потік зумовлює локальне зменшення розкриття міжфазної тріщини, проте не зумовлює частковий контакт її берегів [3].

1. Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П., Гончар Х. И. Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке // Теорет. и прикладная механика. 2002. – Вып.36. С.83-90.
2. Мартыняк Р. М., Гончар Х. И., Нагалка С. П. Моделирование термомеханического закрытия початково раскрытой межфазной трещины, наделяющей термоопором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, №5. – С. 59–66.

3. Мартыняк Р.М., Гончар Х.И. Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 58-62.
4. Мартыняк Р. М., Гончар Х.И. Моделювання термопружної поведінки біматеріалу з теплопроникною міжфазною тріщиною // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2005. – Вип. 3. – С. 83-88.
5. Мартыняк Р.М., Середницкая Х.И. Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3 (49). – С. 91-98.

#### **TRANSFORMATION OF HEAT - PERMEABLE INTERFACIAL CRACK UNDER ACTION OF HEAT FLOW**

*Taking into account the comprehensive effect of surface films and a crack filler, the partial contact between surfaces of an interfacial crack under the heat flow action is investigated. The problem is reduced a nonlinear system of singular integro-differential equations for the crack closure and the temperature jump between the crack surfaces. The solution to this system is constructed using the methods of successive approximations and collocations. It is showed that increase in the thermal conductivity of the filler and decrease in the thermal resistance of the films lead to increase in the crack closure and decrease in the length of the region where the crack surfaces are in contact.*

## ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТУНЕЛЬНОЇ ПОРОЖНИНИ У ДОВГОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ НА ОСНОВІ ДАНИХ ІЧ-ТЕРМОГРАФІЇ

Сінькевич О.О.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН  
України, [deneb.acvg@gmail.com](mailto:deneb.acvg@gmail.com)

У публікаціях [2,3] наведені результати виявлення засобами ІЧ-термографії приповерхневих дефектів у тонкостінних об'єктах різної форми. На основі отриманих даних на сформоване теплове зображення, зокрема, на його контрастність впливають розміри дефекту в плані та в напрямку зондування, а також глибина його залягання. Тому, метод не дозволяє кількісно відновлювати геометричні параметри дефектів у твердих тілах на основі їхніх теплових зображень.

Метою роботи є побудова гранично-елементної моделі для задач ідентифікації порожнин у твердих тілах, розробка та апробація математичного і програмного апарату для розв'язування прямих та обернених задач, дослідження геометричних параметрів включень, зокрема, їх вплив на температурне поле тіла. Використовуючи граничні інтегральні рівняння [1], була сформульована відповідна двовимірною прямою задачею, виконана її гранично-елементна реалізація та здійснено числові експерименти. Також запропонований варіаційний метод для розв'язання оберненої задачі.

Характеристичні параметрами, які описують циліндричну тунельну порожнину є полярні координати центру  $(\rho_0, \varphi_0)$  та власний радіус  $r_0$ . За результатами експериментів було з'ясовано, що при співпадінні азимуту опромінення  $\omega \in [0, 2\pi]$  з кутовою координатою центру включення досягається максимум температурного збурення на межі тіла у відповідній точці з еквівалентною кутовою координатою. Для отримання решти параметрів була розв'язана обернена задача як послідовність прямих задач з деякими наборами характеристичних параметрів. Маючи певне емпіричне значення збуреного температурного поля  $\Delta u^e$ , величини

$$f_1^e = \max(\Delta u^e), \quad (1)$$

$$w_{\max}^e = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}, \quad (2)$$



$$f_2^e(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{\max}^e, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Шуканий розв'язок отримуємо з системи рівнянь

$$r_0^e = f_j(\rho_0^e), \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

Спираючись на розподіл значень теплового поля та потоків на межі області отримано висновок щодо можливості ідентифікації параметрів, що описують геометрію включення, а такої глибини її залягання.

1. *Becker A.A.* The boundary element method in engineering. – McGraw Hill International Limited, UK. – 1992.
2. *Brett J. Ingold.* Selecting a Nondestructive Testing Method, Part VI: Thermal/Infrared Inspection Techniques – Thermography, The AMMТІАС Quarterly.–2008, V 3, N 2, pp.10-12.
3. *Souza M.P.V., Rebello J.M.A., Soares S.D., Freitas G.A.* Defect detection in fiberglass reinforced epoxy composite pipes reproducing field inspection conditions/9th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography: July 2-5, 2008, Krakow – Poland.
4. *Ищук И.Н., Фесенко А.И., Громов Ю.Ю.* Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн. – М.:«Машиностроение», 2008.
5. *Чекурін В.Ф., Сінькевич О.О.* Гранично-елементний підхід до ідентифікації порожнин у твердих тілах із використанням ІЧ-термографії/XVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» присвячена 350-річчю Львівського національного університету імені Івана Франка, 6-7 жовтня 2011 року. Матеріали конференції. М. Львів: ЛНУ ім. І. Франка. – с.103.

**THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR PROBLEMS OF  
CYLINDRICAL TUNNEL-LIKE CAVITY IN A LONG CYLINDRICAL  
SOLID IDENTIFICATION BASED ON IR THERMOGRAPHY DATA**

*Mathematical model for cavity identification in solids by infrared thermography has been considered. In the scope of the model direct and inverse 2-d problems have been formulated. Numerical solutions of the problems have been obtained with the use of boundary element method.*

## ПРО УМОВИ ПОСЛІДОВНОЇ ВІДДІЛЬНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У ВИКРИВЛЕНОМУ ПРОСТОРИ

Тайстра Ю. В., Пелих В. О.

ІПШММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, [ythelloworld@gmail.com](mailto:ythelloworld@gmail.com)

*Розглядаємо систему рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу у співорному формалізмі Ньюмена-Пенроуза та отримуємо достатні умови віддільності системи.*

На фоні викривленого простору-часу розглядаємо рівняння Максвелла. У цьому випадку система рівнянь Максвелла, яка є системою з чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, є сильно зв'язаною. Це не дозволяє знайти її розв'язок відомими методами.

Вихідні рівняння для вектор-потенціалу за відсутності струму ( $J^a = 0$ ) та з врахуванням умови Лоренца ( $\nabla_a A^a = 0$ ) мають вигляд

$$\nabla_b \nabla^b A^a + R^a{}_c A^c = 0, \quad (1)$$

де  $A^a$  – 4-вектор-потенціал е/м поля,  $\nabla_a$  – коваріантна похідна,  $R^a{}_c$  – тензор Річчі.

Використані наступні співвідношення для коваріантної похідної та представлення 4-вектора у формалізмі Ньюмена-Пенроуза:

$$\nabla_a = g_a{}^b \nabla_b = (l_a n^b + n_a l^b - m_a \bar{m}^b - \bar{m}_a m^b) \nabla_b = n_a D + l_a \Delta - \bar{m}_a \delta - m_a \bar{\delta},$$

$$A^a = A_0 l^a + A_1 n^a + A_2 m^a + \bar{A}_2 \bar{m}^a.$$

Враховуємо також деякі комутаційні співвідношення та рівняння поля Ньюмена-Пенроуза.

Систему (1) нами записано у формалізмі Ньюмена-Пенроуза

$$D\Delta A \begin{pmatrix} D\Delta A_0 \\ D\Delta A_1 \\ D\Delta A_2 \\ D\Delta A_3 \end{pmatrix} + \Delta D A \begin{pmatrix} \Delta D A_0 \\ \Delta D A_1 \\ \Delta D A_2 \\ \Delta D A_3 \end{pmatrix} + \delta\bar{\delta} A \begin{pmatrix} \delta\bar{\delta} A_0 \\ \delta\bar{\delta} A_1 \\ \delta\bar{\delta} A_2 \\ \delta\bar{\delta} A_3 \end{pmatrix} + \bar{\delta}\delta A \begin{pmatrix} \bar{\delta}\delta A_0 \\ \bar{\delta}\delta A_1 \\ \bar{\delta}\delta A_2 \\ \bar{\delta}\delta A_3 \end{pmatrix} + D A \begin{pmatrix} D A_0 \\ D A_1 \\ D A_2 \\ D A_3 \end{pmatrix} + \Delta A \begin{pmatrix} \Delta A_0 \\ \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \Delta A_3 \end{pmatrix} + \delta A \begin{pmatrix} \delta A_0 \\ \delta A_1 \\ \delta A_2 \\ \delta A_3 \end{pmatrix} + \bar{\delta} A \begin{pmatrix} \bar{\delta} A_0 \\ \bar{\delta} A_1 \\ \bar{\delta} A_2 \\ \bar{\delta} A_3 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $D\Delta A$ ,  $\Delta D A$ ,  $\delta\bar{\delta} A$ ,  $\bar{\delta}\delta A$ ,  $D A$ ,  $\Delta A$ ,  $\delta A$ ,  $\bar{\delta} A$ ,  $A$  – матриці коефіцієнтів при других похідних, перших похідних та алгебраїчній частині.

Для того, щоб система була послідовно віддільною достатньо, щоб виконувалась наступні умови на коефіцієнти (скаляри Ньюмена-Пенроуза):

$$\kappa = \sigma = \rho = \tau = 0. \quad (3)$$

## Застосовуючи перетворення Лоренца спінової бази

$$\begin{cases} \tilde{o}^A = o^A, \\ \tilde{i}^A = i^A + co^A; \end{cases} \begin{cases} \tilde{o}^A = o^A + di^A, \\ \tilde{i}^A = i^A; \end{cases} \quad (4)$$

отримуємо систему диференціальних рівнянь, умови сумісності якої виділятимуть алгебрично спеціальний тип простору.

1. Cohen J. M., Kegeles L. S. Constructive procedure for perturbations of spacetimes. Phys. Rev. D. 1979. 19. 1641\_1664
2. Cohen J. M., Kegeles L. S. Electromagnetic field in curved spaces: a constructive procedure. Phys. Rev. D. 1974. 10. 1070\_1084
3. Stewart J. - Advanced general relativity (CUP, 1991)(K)(ISBN 0521449464) (T)(234s)
4. Пелих В., Тайстра Ю. Побудова спірного підходу до розщеплення системи рівнянь Максвелла у рімановому просторі. Фіз. зб. НТШ. 2011, Т.8, с. 128-133.
5. Пенроуз Р., Риндлер В. – Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля: пер. с англ., - М:Мир, - 1987.

**THE CONDITIONS OF CONSEQUENTIAL DECOUPLING OF  
MAXWELL EQUATIONS ON CURVED SPACE**

*We consider a system of Maxwell equations for the vector-potential in Newman-Penrose formalism. Sufficient conditions of splitting the system was obtained.*

## ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ НА ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ПОРИСТИХ НАСИЧЕНИХ РОЗЧИНОМ ЕЛЕКТРОЛІТУ ТІЛАХ

Твардовська С. Р.

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України, м. Львів,  
вул. Дудаєва 15,  
sofi.lviv@gmail.com

В останні десятиліття в науковій літературі значна увага надається вивченню ефектів взаємодії механічних та електромагнітних процесів в пористих тілах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Одним з аспектів такого дослідження є вивчення впливу зовнішнього постійного електричного поля на хвильові механоелектромагнітні процеси. Такі дослідження стимулювала перспектива практичного використання дії зовнішнього електричного поля на сейсмічне зондування з метою підвищення його інформативності [2, 3]. У перших теоретичних роботах цього напрямку дію електричного поля пов'язували лише із його взаємодією зі збуреннями зарядової системи пористого тіла. Однак на електромагнітні поля накладали умови, які обмежували область використання отриманих результатів. В роботі [10] показано, що для слабоконсолідованих пористих матеріалів (грунти) вагомого значення набувають, зокрема, електрохімічні механізми впливу поля.

У цій доповіді для консолидованого статистично однорідного та ізотропного насиченого пористого середовища (пористість – відкрита, матеріал скелету – неферомагнітний діелектрик, порова рідина – водний розчин електроліту), за обмеження тільки силовою взаємодією зовнішнього постійного електричного поля з зарядовою системою тіла, розглядаємо ефекти впливу поля на параметри хвильових процесів, взаємодію поперечної та поздовжньої хвиль, електросейсмічний та сейсмоелектричний ефекти в залежності від характеристик середовища.

За вихідну взято систему рівнянь електромагнітної механіки пористого насиченого тіла, записану у двоконтинуумному наближенні за урахування наявності електричного поля, створеного зовнішніми джерелами [11]. Ця система рівнянь включає взаємозв'язані рівняння руху порової рідини та скелету

$$\alpha_{10}\rho_0^{(1)}\frac{\partial^2\vec{u}^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\alpha_{10}^2}{\beta}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{(1)}) + \frac{\alpha_{10}\alpha_{20}(1-\nu_f)}{\beta}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{(2)}) + \vec{R} + \vec{R}_m + \alpha_1\vec{F}_\Lambda^{(1)},$$

$$\alpha_{20}\rho_0^{(2)}\frac{\partial^2\vec{u}^{(2)}}{\partial t^2} = \alpha_{20}G_f\Delta\vec{u}^{(2)} + \frac{\alpha_{20}\alpha_{10}^2(1-\nu_f)}{\beta}\cdot\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{(1)}) +$$

$$+ \alpha_{20}\left(K_f + \frac{1}{3}G_f - \frac{\alpha_{10}\alpha_{20}}{\beta}(1-\nu_f)\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{(2)}) - \vec{R} - \vec{R}_m + \alpha_2\vec{F}_\Lambda^{(2)} + \vec{R}_\Lambda^{(2)} \quad (1)$$

за урахування сил міжфазної взаємодії в'язкої та пористої природи (відповідно сили  $\vec{R} = A\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}\right)$  та  $\vec{R}_m = \rho_{12}\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}\right)$ ) і пондеромоторних сил  $\vec{F}_\Lambda^{(j)}$ ,  $\vec{R}_\Lambda$  та рівнянь електромагнітного поля

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{rot}\vec{H} = \vec{J}_M + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \text{div}\vec{D} = \rho_{eM}, \text{div}\vec{B} = 0, \quad (2)$$

в яких вплив механічного руху на електромагнітне поле враховують модифіковані поля електричного заряду  $\rho_{eM}$  та густини електричного струму  $\vec{J}_M$ , який включає також сейсмоелектричні ефекти  $E$  та  $I$ . Зауважимо, що у рівняннях (1)-(2) використано загальноприйняті позначення фізичних величин [11].

При конкретних дослідженнях враховано також, що ефективні макроскопічні характеристики пористих насичених тіл залежать від характеристик складових компонент та структурних параметрів тіла. Між окремими характеристиками середовища (пористістю та проникністю, проникністю та звивистістю) також існують зв'язки, які, як правило, визначаються експериментальним шляхом для певних типів зразків пористих матеріалів.

За використання вказаних рівнянь досліджено закономірності впливу зовнішнього постійного електричного поля на поширення та взаємодію плоских поздовжньої та поперечної механоелектромагнітної хвиль в безмежному середовищі. Встановлено, що дія поля, вектор напруженості якого складає з хвильовим вектором хвилі кут  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , приводить до ефективної анізотропії середовища, яка проявляється, зокрема, у взаємодії поздовжніх та поперечних хвиль. Збурення зовнішніми чинниками поздовжньої хвилі в такому середовищі приводить також до генерації поперечної хвилі і навпаки. У загальному випадку у тілі поширюються два типи поздовжніх хвиль (першого і другого роду), поперечна та електромагнітна, модифіковані механоелектромагнітною взаємодією. Кожна з хвиль має дві компоненти – механічну та електромагнітну, закони поширення яких ідентичні.

Отримані та кількісно проаналізовані дисперсійні рівняння для поздовжньої та поперечної механоелектромагнітних хвиль. Встановлено, що

постійне електричне поле може вагомо впливати на характеристики поздовжньої хвилі. При цьому наведено систему безрозмірних параметрів, які характеризують вплив зовнішнього електричного поля, зарядової системи тіл (електрокінетичної активності), міжфазової взаємодії, тощо. Найбільші кількісні зміни характеристик хвиль мають місце для поля, вектор напруженості якого паралельний хвильовому вектору. Зміна напрямку на  $180^\circ$  приводить до зміни знаку поправки до коефіцієнтів загасання хвилі першого роду, спричиненої полем. За певних умов коефіцієнт загасання хвиль може ставати рівним нулеві і навіть змінювати знак. Впливом поперечного електричного поля ( $\alpha = 90^\circ$ ), як правило можна знехтувати. Параметри, (фазова швидкість та коефіцієнти загасання) поперечної квазіпружної хвилі для розглянутої моделі пористого тіла слабо залежить від параметрів зовнішнього електричного поля. Для практики сейсмічних досліджень така залежність є нехтовною. Електрокінетична активність пористого тіла пов'язана із наявністю зарядів подвійного електричного шару в околі поверхні контакту скелет-порова рідина. Параметри всіх вказаних хвиль вагомо залежать від електрокінетичної активності середовища. Зокрема, коефіцієнти загасання поперечних хвиль, модифікованих механічної та електромагнітної хвиль зростають з ростом електрокінетичної активності, а їх фазові швидкості – зменшуються.

Розглянуто також вплив зовнішнього постійного електричного поля на сейсмоелектричний ефект, спричинений поздовжніми або поперечними хвилями. Встановлено, що для поздовжньої хвилі вплив поздовжнього поля приводить до вагомого (на порядки) збільшення сейсмоелектричної різниці потенціалів. Причиною цього є вклад сейсмоелектричного ефекту  $I$ .

Представляє також практичний інтерес вивчення впливу зовнішнього гармонічного за часом електричного поля на механоелектромагнітні процеси в пористому тілі. У зв'язку з цим розглянута задача про вимушені товщинні коливання безмежного пористого насиченого шару під впливом однорідного гармонічного електричного поля (електросейсмічний ефект). Встановлено, зокрема, що фазові характеристики таких коливань є чутливими до пористості та проникності тіла.

Розглянута задача про перетворення механоелектромагнітної поздовжньої хвилі за нормального падіння на межу контакту пористих тіл в постійному електричному полі. Встановлено, що дія такого поля приводить, як правило, до збільшення амплітуди генерованої хвилі другого роду та зміни (збільшення або зменшення) амплітуди відбитої хвилі. Відносний вплив електричного поля більш вагомий для контакту слабконтрастних за механікою середовищ.

Отримані результати досліджень можуть представляти практичний інтерес для лабораторних досліджень пористих матеріалів та геофізичних польових досліджень.

1. *Кондрат В. Ф., Твардовська С. Р.* Вплив зовнішнього електричного поля на параметри механічних хвиль сейсмічних частот у пористих насичених тілах. // Фіз.- мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип.10. – С. 56-65.
2. *Основы сейсмоэлектроразведки / О. А. Потапов, С. А. Лизун, В. Ф. Кондрат* и др. – Москва: Недра, 1995. – 268 с.
3. *Способ геофизической разведки.* А. с. 1045190 СССР МКИ G 01 V 3/08 / *Д. Н. Ляцук, А. И. Бойко, В. Н. Бойко, Н. Н. Фрейк* (СССР). – № 3371404/18-85; Заяв. 23.12.81; Опубл. 25.06.1983. Бюл. № 36. – 2 с.
4. *Мигунов Н. И.* О распространении продольных упругих волн в грунтах с электрокинетическими свойствами// Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1981. – №3. – С. 47-54.
5. *Светов Б. С.* Основы геоэлектрики. М.: Издательство ЛКИ. – 2008. – 656 с.
6. *Garambois S., Dietrich M.* Seismoelectric Wave Conversion in Porous Media: Field Measurements and Transfer Function Analysis // *Geophysics.* – 2001. – Vol. 66, No 5. – P. 1417-1430.
7. *Butler K. E., Russel R. D., Kepic A. W. und Maxwell M.* Measurement of Seismoelectric Response from a Snallow Boundary // *Geophysics.* – 1996. – Vol. 61, No 6. – P. 1769-1778.
8. *Pride S, Haartsen M.* Electro seismic Wave Properties // *The Journal of the Acoustical Society of America.* – 1996. – Vol. 100, No 3. – P. 1301-1315.
9. *Sobotka J.* Proseesy elektroakustyczne i elektro sejsmiczne wzbudzone w skałach osadowych // *Nafta-Gaz.* – 2004, R. 60, №4. - S. 181-189.
10. *Подбережный М. Ю.* Особенности взаимодействия многофазных микро-структурированных сред с акустическими и электрическими полями. – Автореферат дис. к. ф.-м. наук. – Новосибирск, 2009. – 17 с.
11. *Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний та ін.; під ред. Я. Й. Бурака, Є. Я. Чаплі.* – Львів:СПОЛЮМ, 2004. – 264 с.

**THE INFLUENCE OF EXTERNAL ELECTRIC FIELD ON WAVE  
PROCESS IN POROUS MEDIUM SATURATED BY ELECTROLYTIC  
SOLUTION**

*The investigation of a plane mechanoelectromagnetic waves, seismoelectric and electro seismic effects, transformation of waves on boundary contact of the porous bodies depending on the parameters of external electric field, electrokinetic activity and characteristics bodies are made.*

## **ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ СТВОРЕННЯ ІНТЕРФЕЙСУ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ДІАЛОГУ «АВТОМАТИЗОВАНА ЕКСПЕРТНА СИСТЕМА – ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ АГЕНТ»**

**Терендій О.В.**

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С.Підстригача НАН України, dept25@iapmm.lviv.ua

За останні десятиріччя широке розповсюдження отримали системи підтримки прийняття рішень у різноманітних галузях людської діяльності. Основне завдання цих систем – максимально полегшити роботу та забезпечити інтелектуальному агенту можливість прийняти правильне рішення. Важливою частиною систем підтримки прийняття рішень є інтерфейсна компонента, на яку покладено завдання: забезпечити можливість ефективної взаємодії «не програмуючого» користувача з програмним комплексом [1–3].

У даній роботі описується інтелектуалізований інтерфейс користувача, який використовується в автоматизованій системі підтримки прийняття рішень у галузі медичної діагностики. Ідеологія цієї системи базується на принципі формального подання знань про спеціалізовану предметну область [4]. Програмна реалізація формує та використовує банки даних, експертів, патологій, словник стандартних та придбаних у процесі діагностики термінів та процедуру узгодження трактувань термінології. Основними прийомами отримання робочої інформації є опитування в діалоговому режимі за допомогою електронних ієрархічних анкет [4, 5]. Ці анкети створюються в інтегрованому середовищі розробки електронних анкет, яке є складовою частиною інтерфейсної компоненти. Електронні анкети використовуються під час опитування респондентів для

- отримання діагностичних даних при початковому анамнезі в реєстратурі та при анамнезі у профільного спеціаліста;
- уніфікації термінології складної предметної області з метою однозначності тлумачень термінів і понять у словнику предметної області, що є складовою банку знань системи підтримки прийняття рішень;
- проведення узгодженої експертизи групою фахівців-експертів.

На рис.1 приведено схему, на якій кружечками зображені перелічені вище ситуації, при яких виникає потреба проведення опитування. В реєстратурі медична сестра вимірює тиск, визначає вагу і температуру та проводить початковий анамнез пацієнта з використанням стандартної електронної анкети. Після обробки автоматизованою системою отриманих



від пацієнта відповідей, визначається, консультацій яких саме профільних спеціалістів потребує пацієнт та схильність до яких захворювань виявлено в нього під час цього опитування. Далі пацієнта направляють до одного або кількох профільних спеціалістів, які проводять його огляд та опитування з використанням інших електронних анкет. Ці електронні анкети слугують лікарю пам'яткою, які саме запитання слід задати пацієнту, щоб не упустити через власну неувважність або втому виявлення наявності важливої ознаки для встановлення діагнозу пацієнту.

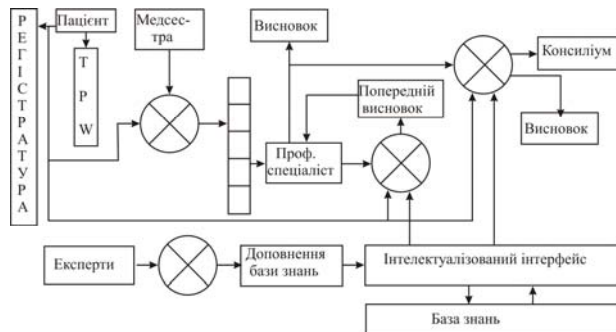


Рис.1.

Електронні анкети використовуються також при проведенні узгодженої експертизи групою фахівців. Перед проведенням цієї експертизи обов'язково необхідно уніфікувати термінологію, яка використовується, щоб уникнути ситуації коли один і той самий термін або поняття кожен із фахівців тлумачить по-своєму. Це є однією із вагомих причин виникнення непорозумінь під час колективного прийняття рішень.

На рис. 2 показано, яким чином інтелектуальний агент (особа, яка встановлює діагноз) формує електронну анкету, за допомогою якої отримуються діагностичні дані. *IA* – інтелектуальний агент; *IDEA* – інтегроване середовище для розроблення електронних анкет; *BA* – банк електронних анкет; *A* – розроблена електронна анкета;  $A_k$  – відповіді *k*-го респондента на запитання електронної анкети *A*.

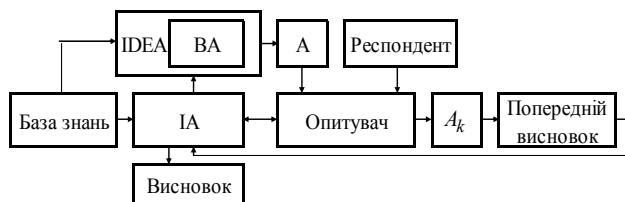


Рис. 2.

Інтелектуальний агент вибирає з банку електронних анкет *ВА* готову електронну анкету або ж розробляє потрібну йому для дослідження анкету в інтегрованому середовищі розроблення електронних анкет. При цьому інтелектуальному агенту надається можливість скористатися фрагментами анкет, розміщених в банку електронних анкет. Одночасно вказуються правила, з допомогою яких обробляються результати опитування респондента. На підставі цієї обробки автоматизованою системою формується попередній висновок. Після цього інтелектуальний агент або робить остаточний висновок про стан пацієнта, або створює чи вибирає іншу електронну анкету отримання додаткових діагностичних даних, на підставі яких ним робиться остаточний діагностичний висновок. Тобто перед встановленням діагнозу може відбуватися одна або декілька ітерацій проведення опитування.

Отже, у роботі описано розроблений інтелектуальний інтерфейс для автоматизованої експертної системи. Однією із його функцій є забезпечення діалогу експертної системи із інтелектуальним агентом під час встановлення діагнозу пацієнта. Діагностичні дані отримуються також шляхом опитування причетних до встановлення діагнозу осіб за допомогою анкет, які створюються засобами автоматизованої системи.

1. *Поморова О.В., Говорущенко Т.О.* Проектування інтерфейсів користувача, навч. посібник – Хмельницький: ХНУ, 2011. – 206 с.
2. *Кузин Е.С.* Интеллектуальный интерфейс. Общие принципы организации и проблемы реализации // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1985. – №5. – С. 90-102.
3. *Булавенко О.Н.* Интегрированный интеллектуальный интерфейс системы ИРМ // Искусственный интеллект. – 2003. – №3. – С. 39-47.
4. *Терендій О.В., Бунь Р.А.* Інтелектуальна система збору інформації в вузькоспеціалізованій предметній області // Моделювання та інформаційні технології : Зб. наук. праць Ін-ту проблем моделювання в енергетиці. – Київ, 2007. – Вип. 41. – С. 158-163.
5. *Терендій О. В.* Інформаційна технологія створення автоматизованої системи підтримки процесів діагностики для деяких предметних областей // Праці V міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень», Ужгород, 27 вересня – 1 жовтня 2010.– Ужгород, 2010. – С. 212-213.

#### **INFORMATION TECHNOLOGY FOR CREATION OF THE INTERFACE FOR REALIZATING DIALOG «AUTOMATIZATIONAL EXPERT SYSTEM – INTELLECTUAL AGENT»**

*The problem of the designing the intellectual interface of some automatizational expert system by collecting and processing of a primary information in the field of the medical diagnostic is considered. The principles of the creation of the questionnaire for interrogations of a patient and a doctor during the medical diagnostic is proposed as well.*

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО КРУГОВОГО ДИСКА

Токова Л.П.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
НАН України

Розглянемо плоску неосесиметричну задачу теорії пружності для радіально-неоднорідного ізотропного кругового диска  $\mathcal{L} = \{(\rho; \theta) \in [0; k] \times [0; 2\pi]\}$  в умовах плоского напруженого стану. Тут  $\rho$  – безрозмірна радіальна, а  $\theta$  – кутова координати. Задача описується рівняннями рівноваги

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = \sigma, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_{r\theta}) + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

та рівнянням суцільності в напруженнях [2]

$$\Delta \left( \frac{\sigma}{E} \right) = \frac{\sigma_r}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} \left( \frac{1}{G} \right) + \frac{\sigma_\theta}{2\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{G} \right), \quad (2)$$

де

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$  – компоненти тензора напружень;  $\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta$ ;  $E = E(\rho)$  – модуль пружності;  $\nu = \nu(\rho)$  – коефіцієнт Пуассона;  $G = G(\rho)$  – модуль зсуву. Кругова межа диска знаходиться під дією нормальних та дотичних зовнішніх зусиль

$$\sigma_r|_{\rho=k} = -p(\theta), \quad \sigma_{r\theta}|_{\rho=k} = q(\theta). \quad (3)$$

З використанням підходу, запропонованого у роботах [2,3] на основі рівнянь рівноваги (1) можна отримати наступні рівняння

$$D\sigma_r = \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma) + \rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2}, \quad D\sigma_\theta = \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho^2 \sigma), \quad (4)$$
$$D\sigma_{r\theta} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} (\rho \sigma),$$

які виражають кожну з компонент тензора напружень через сумарні напруження  $\sigma$ . Тут

$$D = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) \right) + \rho \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

У свою чергу, сумарні напруження знайдемо із рівняння (2). З цією метою розвинемо компоненти тензора напружень, сумарні напруження та зовнішні зусилля у ряди Фур'є за повною тригонометричною системою:

$$\begin{aligned} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\} &= \{R_0, \Phi_0, \sigma_0, p_0, S_0, q_0\} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \{R_n^1, \Phi_n^1, \sigma_n^1, p_n^1, S_n^2, q_n^2\} \cos n\theta + \right. \\ &\left. + \{R_n^2, \Phi_n^2, \sigma_n^2, p_n^2, S_n^1, q_n^1\} \sin n\theta \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \{R_0, \Phi_0, \sigma_0, p_0, S_0, q_0\} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\} d\theta, \\ \{R_n^1, \Phi_n^1, \sigma_n^1, p_n^1, S_n^2, q_n^2\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\} \cos n\theta d\theta, \\ \{R_n^2, \Phi_n^2, \sigma_n^2, p_n^2, S_n^1, q_n^1\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\} \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

На основі рівнянь (1) або (4) для елементарних складових розвинень (5) отримуємо наступні рівняння:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R_0) = \sigma_0, \quad \frac{d}{d\rho} (\rho^2 S_0) = 0, \quad (6)$$

а рівняння суцільності (2) при цьому набуде вигляду

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\sigma_0}{E} \right) \right) = \frac{\rho R_0}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} \left( \frac{1}{G} \right) + \frac{\Phi_0}{2} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{G} \right). \quad (7)$$

При розв'язанні рівнянь (6), (7) слід врахувати крайові умови

$$R_0(k) = -p_0, \quad S_0(k) = q_0, \quad (8)$$

які впливають із умов (3) та розвинень (5). Із першого рівняння (6) з урахуванням першої умови (8) отримаємо вираз

$$R_0 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \eta \sigma_0(\eta) d\eta, \quad (9)$$

з якого при  $\rho = k$  випливає умова рівноваги для сумарних напружень

$$\int_0^k \eta \sigma_0(\eta) d\eta = -k^2 p_0. \quad (10)$$

Застосовуючи інтегрування частинами та використовуючи вираз (9), рівняння суцільності (7) зводиться до вигляду:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{\sigma_0}{E} \right) = \frac{R_0}{2} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{G} \right).$$

Рівняння такого типу розглядалося, зокрема, у роботі [4]. З урахуванням виразу (9), воно зводиться до інтегрального рівняння Вольєра

$$\sigma_0 = E \left[ C_0 + \int_0^{\rho} \sigma_0(\eta) \mathcal{K}(\rho, \eta) d\eta \right],$$

де

$$\mathcal{K}(\rho, \eta) = \frac{\eta}{2} \int_{\eta}^{\rho} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{G(\xi)} \right) d\xi,$$

а  $C_0$  – стала інтегрування, яку слід знайти за допомогою інтегральної умови (10). Розв'язок рівняння (12) можна побудувати з використанням відомих підходів [1].

Після визначення сумарних напружень за формулою, елементарні радіальні напруження визначаються виразом (9), а колові – за формулою

$$\Phi_0 = \sigma_0 - R_0.$$

При цьому задля виконання умов статичної рівноваги повинні задовольнятися наступні рівності

$$S_0 = q_0 = 0.$$

Для знаходження залежних від колової змінної частин напружень (5), з рівнянь (2) випливає наступне рівняння суцільності

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\sigma_n^i}{E} \right) \right) - \frac{n^2}{\rho^2} \frac{\sigma_n^i}{E} = \frac{R_n^i}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} \left( \frac{1}{G} \right) + \frac{\Phi_n^i}{2\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{G} \right). \quad (11)$$

Рівняння (4) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R_n^i) \right) - n^2 \rho R_n^i &= \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_n^i) - \rho n^2 \sigma_n^i, \\ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \Phi_n^i) \right) - n^2 \rho \Phi_n^i &= \rho \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho^2 \sigma_n^i), \\ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} (\rho^2 S_n^i) \right) - n^2 \rho S_n^i &= (-1)^{i+1} n \rho \frac{d}{d\rho} (\rho \sigma_n^i), \end{aligned} \quad (12)$$

де  $i = 1, 2$ . Розв'язки рівнянь (12) слід знайти за виконання крайових умов

$$R_n^i(k) = -p_n^i, \quad S_n^i(k) = q_n^i, \quad n = 1, 2. \quad (13)$$

Розв'язавши рівняння (12) з крайовими умовами (13), знаходимо вирази радіальних та колових напружень через сумарні напруження. Підставивши отримані вирази у рівняння (11), аналогічно до випадку елементарних частин, прийдемо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, розв'язок якого знаходимо з використанням методів [1].

1. *Верлань А.Ф., Сизинів В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1983. – 543 с.
2. *Токовий Ю.В.* Визначення плоского неосесиметричного термонапруженого стану радіально-неоднорідного кільця // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 4. – С. 113-123.
3. *Vihak V. M.* Solution of the thermoelastic problem for a cylinder in the case of two-dimensional nonaxisymmetric temperature field // *ZAMM.* – 1996. – № 1. – P. 35–43.
4. *Калиняк Б. М.* Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 2. – С. 124-131.

#### DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF A RADIALLY-INHOMOGENEOUS CIRCULAR DISC

*Application of direct integration method for construction of an analytical solution to the plane non-axisymmetric elasticity problem for a radially inhomogeneous circular disc under the plane stress hypothesis is considered. By making use of the decompositions into the Fourier series along with integration of the equilibrium equations, the stress tensor components are expressed in terms of the total stress, which is found from the compatibility equation in terms of stresses. This gives the opportunity to develop an efficient method for analysis of radially inhomogeneous discs.*

## ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА

**Токовий Ю.В.**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
 НАН України

Розглядається підхід до побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для суцільного ізотропного циліндра скінченної довжини  $\mathcal{C} = \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi, -h \leq z \leq h\}$  під дією силових навантажень. Для визначення компонент тензора напружень, які точно задовольняють вихідну систему рівнянь задачі, використано два різні подання через гармонічні функції Дуголла [3,4], одне з яких дозволяє зручно задовольнити крайові умови на бічній поверхні (ці складові назвемо «циліндричними»), а інше – на торцях циліндра (ці складові назвемо «шаровими»). Вирази для циліндричних складових компонент тензора напружень розвинуто у ряди Фур'є за окружною та осьюою координатами, а залежні лише від радіальної координати коефіцієнти цих розвинень побудовано так, що вони забезпечують тотожне задоволення рівнянь рівноваги й суцільності та володіють достатньою кількістю ступенів вільності (невдомих сталих коефіцієнтів) для задоволення крайових умов на бічній поверхні циліндра. Аналогічно, вирази шарових складових розвинуто у ряди Фур'є за окружною та Бесселя-Діні за радіальною координатами, а залежні від осьової координати коефіцієнти цих розвинень тотожно задовольняють вихідну систему рівнянь задачі та володіють достатньою кількістю ступенів вільності для задоволення крайових умов на торцях циліндра. Наведемо для прикладу вираз для осьових напружень:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{G} = & \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 \left[ B_n \left( 2(2-\nu) \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} + k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right) - D_n \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right] \cos k_n z + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (\bar{C}_{0j} - \bar{A}_{0j}) \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{sh } \lambda_j h} + 2\lambda_j z \bar{A}_{0j} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{sh } \lambda_j h} \right] \frac{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_n^2 & \left[ B_{nm} \left( (m+4-2\nu) \frac{I_m(k_n r)}{I_m(k_n a)} + k_n r \frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_m(k_n a)} \right) - D_{nm} \frac{I_m(k_n r)}{I_m(k_n a)} \right] \cos m\theta \cos k_n z + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} & \left[ (\bar{C}_{mj} - \bar{A}_{mj}) \frac{\text{ch } \mu_{mj} z}{\text{sh } \mu_{mj} h} + 2\mu_{mj} z \bar{A}_{mj} \frac{\text{sh } \mu_{mj} z}{\text{sh } \mu_{mj} h} \right] \frac{\mu_{mj}^2 J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \cos m\theta, \quad (1) \end{aligned}$$

отриманий, для спрощення запису, у припущенні, що навантаження циліндра є симетричним відносно площини  $z = 0$  і нормальні зусилля, розподілені по торцях циліндра, є парними функціями окружної координати. Тут  $k_n = \frac{n\pi}{h}$ ,

$\mu_{mj}$  – корені рівняння  $\left. \frac{dJ_m(\mu r)}{dr} \right|_{r=a} = 0$ ;  $\lambda_j \equiv \mu_{0j}$ ;  $B_n, D_n, B_{nm}, D_{nm}, \bar{A}_{0j}, \bar{C}_{0j}, \bar{A}_{mj}, \bar{C}_{mj}$  – невідомі коефіцієнти;  $J_m$  – функції Бесселя першого роду порядку  $m$ ,  $I_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) – функції Макдональда першого роду порядку  $m$ ,  $\sigma_0$  – поліноміальна елементарна частина осьових напружень;  $G$  – модуль зсуву і  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлено циліндр  $\mathcal{C}$ .

Показано, що частини напружень, які не залежать від окружної координати співпадають з точністю до позначення констант з відповідними виразами для напружень, отриманими для осесиметричного випадку [2] навантаження циліндра  $\mathcal{C}$ .

Із застосуванням методу суперпозиції [1] для невідомих коефіцієнтів залежних від  $\theta$  частин напружень отримано систему лінійних алгебричних рівнянь, розв'язок якої знайдено з використанням методики [2].

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. Мелешко В.В., Токовий Ю.В., Барбер Дж.Р. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С.120–137.
3. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – 41, № 8. – P. 129–228.
4. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – 49, № 17. – P. 895–978.

#### ON THE SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEM FOR A SOLID FINITE CYLINDER

*This talk addresses an approach for analysis of three-dimensional stresses in a solid elastic cylinder of finite length subjected to the external field of force loading. This approach is based on application of the method of cross-wise superposition, which allows for satisfaction of the entire set of the force boundary conditions, imposed on both lateral surface and end-faces of the cylinder, within a required accuracy. The governing equations are satisfied identically by making use of the harmonic displacement potential functions suggested by Dousgall.*



## ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРО ОСЕСИМЕТРИЧНУ ДЕФОРМАЦІЮ ТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Тучапський Р. І.

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
e-mail: roman.tuch@gmail.com

Б. Л. Пелех і М. А. Сухорольський у [1] навели один спосіб редукування тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорії оболонок, який ґрунтується на апроксимації переміщень і напружень рядами за поліномами Лежандра із задоволенням умов для напружень на лицевих поверхнях оболонки. У [2] вони отримали схему наближення функції і її першої похідної поліномами Лежандра при виконанні граничних значень для похідної, давши порівняльну оцінку цього наближення. У [3] на основі підходу [1, 2] вони побудували загальну лінійну теорію тонких ортотропних оболонок та розробили методи розрахунку їх контактної взаємодії.

Інший метод побудови лінійної теорії ізотропних тонких пластинок і тонких пологих оболонок, що теж використовує розвинення характерних величин їх напружено-деформованого стану в ряди Фур'є за поліномами Лежандра від поперечної координати, запропонований І. Н. Векуа [4].

У рядах для всіх трьох компонент вектора переміщень у теорії оболонок І. Н. Векуа втримано однакову кількість доданків. Це дозволило йому в [4] отримати рівняння й співвідношення безмоментної теорії оболонок, застосувавши свій метод нормованих моментів поля напружень у випадку  $N = 0$  (де  $N$  – порядок наближення для переміщень).

У рядах для тангенціальних і поперечного переміщень у теорії [3] втримано різну кількість доданків. Цей підхід відомий під назвою  $\{m, n\}$ -апроксимації (де  $m$  – порядок наближень тангенціальних переміщень,  $n$  – порядок наближення поперечного переміщення). Він дозволив Б. Л. Пелеху й М. А. Сухорольському при  $m = 1$ ,  $n = 0$  отримати в [3] рівняння й співвідношення теорії оболонок типу Тимошенка.

У [5] викладено основні способи побудови двовимірних рівнянь узагальнених теорій пластин і оболонок, в основу яких покладено метод розвинення характерних величин їх напружено-деформованого стану в ряди Фур'є за поліномами Лежандра від поперечної координати, та здійснено систематизацію й аналіз досліджень, виконаних на основі цих теорій.

У запропонованій роботі лінійна теорія тонких ортотропних оболонок [3] узагальнена на випадок геометричної нелінійності. Рівняння й співвідношення теорії записані в тензорному вигляді, тобто у формі, не прив'язаній до якоїсь конкретної координатної системи на поверхні параметризації оболонки. Розглядалась нелінійність із першими доданками рядів для величин, що характеризують кути повороту тангенціальних елементів оболонки навколо тангенціальних координатних осей. Забезпечено точне виконання силових умов на лицевих поверхнях. Рівняння та граничні умови отримано на основі варіаційного принципу Вашіцу.

Утримавши по два перших члени в рядах для тангенціальних переміщень і перший член у ряді для поперечного переміщення, отримано варіант геометрично нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка.

Розглянуто осесиметричну деформацію оболонки обертання й здійснено відповідні спрощення рівнянь теорії. Спрощену систему рівнянь зведено до нормальної системи десяти звичайних диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних, і побудовано методику їх чисельного розв'язування на ЕОМ.

Нелінійну крайову задачу зведено до послідовності лінійних крайових задач методом квазілінеаризації (узагальнений метод Ньютона) [6]. Для розв'язування крайових задач для нормальних систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь використано метод дискретної ортогоналізації С. К. Годунова [7].

На основі даної методики розв'язано задачу про осесиметричну деформацію замкнутої кругової циліндричної оболонки. Проведено порівняння отриманого розв'язку з розв'язком на основі іншого варіанту теорії.

1. *Пелех Б. Л., Сухорольський М. А.* Про один новий підхід до побудови теорії оболонок з врахуванням граничних умов на поверхнях // Доповіді Академії наук Української РСР. – 1978, № 5. – С. 441 – 444.
2. *Пелех Б. Л., Сухорольський М. А.* Об одном методе аппроксимации функции и ее первой производной полиномами Лежандра и его приложениях // Доклады Академии наук Украинской ССР. – 1980, № 3. – С. 26 – 29.
3. *Пелех Б. Л., Сухорольський М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
4. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
5. *Немиш Ю. Н., Хома И. Ю.* Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (Обзор) // Прикладная механика. – 1993. – **29** (39), № 11. – С. 3 – 34.
6. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
7. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – **XVI**, вып. 3 (99). – С. 171 – 174.

**ON AN APPROACH TO NUMERICAL SOLVING OF THE  
GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF AXISYMMETRIC  
DEFORMATION OF THIN ANISOTROPIC SHELLS OF REVOLUTION**

*On the basis of a shell theory, which provides accurate fulfillment of power conditions on facial surfaces combined with the quasilinearization method of a nonlinear boundary value problem reduction to a sequence of linear boundary value problems and S. K. Godunov's discrete orthogonalization method for solving of linear boundary value problems for systems of ordinary differential equations a method for numerical solving of the geometrically nonlinear problems of axisymmetric deformation of thin anisotropic shells of revolution is constructed.*

## ПАРАЛЕЛЬНА ОРГАНІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ПРОБЛЕМИ ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Марія Тютюнник

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36, м. Львів, 79060  
[dept25@iapmm.lviv.ua](mailto:dept25@iapmm.lviv.ua)

Робота присвячена побудові та аналізу схем спеціалізованих обчислювальних структур для реалізації паралельних алгоритмів розв'язання однієї задачі цифрової фільтрації.

**Вступ.** На даний час перед людством окреслилась низка проблем, успішне вирішення яких потребує подальшого розвитку комп'ютерної техніки. У різних галузях науки виникають складні задачі, що пов'язані з обробкою великих масивів вхідних даних та вимагають виконання значних обсягів обчислень. Тому є потреба покращувати продуктивність існуючих та розробляти нові швидкодіючі архітектури для обчислювальних систем спеціального та універсального призначення [1].

Вагомі досягнення в розвитку технології проектування та виготовлення надвеликих інтегральних схем сприяли виникненню та поширенню таких спеціалізованих обчислювальних засобів, як систолічні [2] та квазісистолічні [3] структури; пристрої, побудовані з використанням однорідних обчислювальних середовищ [4], програмованих логічних інтегральних схем [5] тощо.

Одним із класів задач, розв'язки яких у більшості випадків необхідно одержувати у режимі реального часу є задачі цифрової фільтрації (ЗЦФ). Слід зазначити, що постійно зростає кількість таких задач, зокрема під час обробки сигналів, поліпшення якості зображень для розпізнавання образів, попередньої обробки експериментальних даних тощо.

Очевидно, що для розв'язання ЗЦФ в режимі реального часу застосовують високопаралельні алгоритми, орієнтовані на реалізацію на спеціалізованих обчислювальних структурах.

У роботі [6] ЗЦФ полягала у виконанні деякої кількості перерахунків згладжування масиву значень змінних через рухоме вікно заданого розміру. У цій праці було розроблено оптимальний за швидкодією та використанням пам'яті паралельноконверсний алгоритм (ПКА) для розв'язання одновимірної задачі. Оптимальність було доведено у класі еквівалентних за інформаційним графом алгоритмів.

**Формулювання проблеми.** Нами розглядається одновимірна ЗЦФ, яка полягає у виконанні  $S$  перерахунків згладжування масиву значень змінних

$x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Перерахунок значення  $x_i$  здійснюється через рухоме вікно розміром  $2m_i + 1$  за формулою:

$$x_i = \sum_{s=-m_i}^{m_i} f_s^i * x_{i+s}. \quad (1)$$

Тут вагові коефіцієнти  $f_s^i$  ( $s = \overline{-m_i, m_i}$ ) є відомими константами.

Вирішувана нами проблема полягає в розробці та аналізі схем обчислювальних структур для реалізації паралельних алгоритмів розв'язання сформульованої задачі фільтрації. Уточнимо, що ця задача розглядається нами за двох умов, накладених на вагові коефіцієнти.

**Побудова та аналіз обчислювальних структур.** Раніше [7] для розв'язання сформульованої задачі за умови  $f_{-m_i}^i = f_{1-m_i}^i = \dots = f_{-1}^i = f_0^i = f_1^i = \dots = f_{m_i-1}^i = f_{m_i}^i = f^i \quad \forall i : i = \overline{1, n}$ , нами був запропонований ПКА, який є подібним до відповідного алгоритму із [6] і задає виконання  $n$  зсунутих між собою паралельних гілок з їх синхронізацією через кожну операцію. Цей алгоритм зорієнтований на реалізацію на квазісistolічній обчислювальній структурі (КСОС) [8], яка є сукупністю функціональних елементів, кожен із яких реалізує одну із операцій: додавання, множення або транспортування даного. Зауважимо, що КСОС у даному разі повністю відповідає потактовій схемі ПКА. У цій обчислювальній структурі дозволяється передача даних з однієї інстанції одразу в декілька точок прийому. Тобто, відмова від повної локальності зв'язків дозволяє розпаралелити окремі фрагменти обчислень.

У випадку, коли вагові коефіцієнти у формулі (1) є різними, нами розроблено ПКА, що задає виконання  $n$  пар зсунутих між собою паралельних гілок з їх синхронізацією через кожну операцію. При цьому у кожній  $i$ -й парі гілок на кожному такті одночасно із сумуванням здійснюється "підготовлення" наступного доданку, тобто множення на відповідний ваговий коефіцієнт. Очевидно, що для реалізації такого ПКА на кожному такті знадобиться принаймні ще один процесорний елемент.

У цій праці для реалізації ПКА перерахунку масиву значень змінних  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) за формулою (1) побудовано схеми КСОС при  $n = 6$ ,  $m_1 = m_2 = m_4 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ,  $m_5 = m_6 = 2$  (див. рис. 1а, 1б). На рис. 1а зображено схему обчислювальної структури для реалізації ПКА за умови, що вагові коефіцієнти є різними для всіх змінних, а на рис. 1б зображено КСОС для випадку, коли набори вагових коефіцієнтів співпадають для змінних з однаковим розміром рухомого вікна. Для побудови наведених структур було використано три типи функціональних елементів з різною конфігурацією зв'язків. Ці елементи реалізують одну із операцій: додавання і транспортування даного, мно-

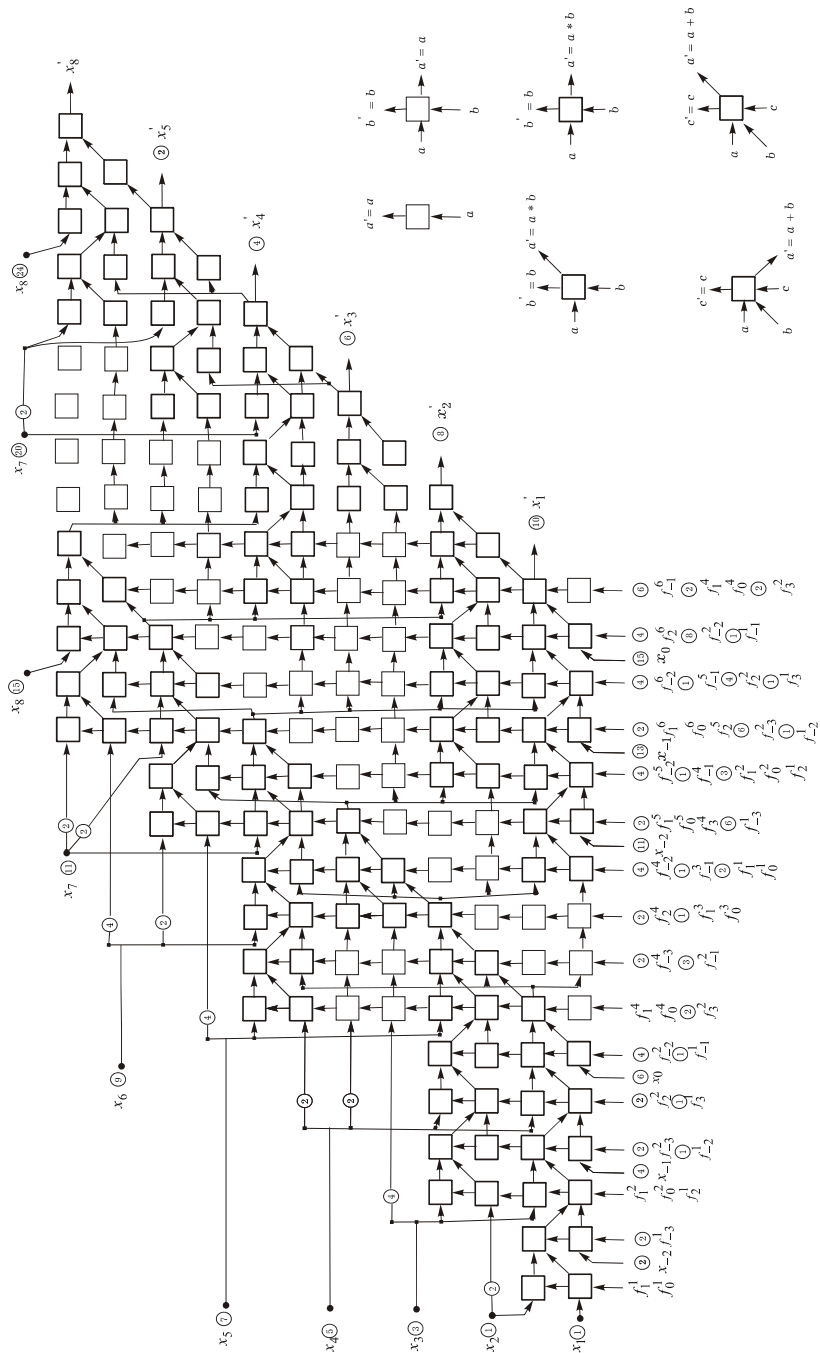


Рис. 1а

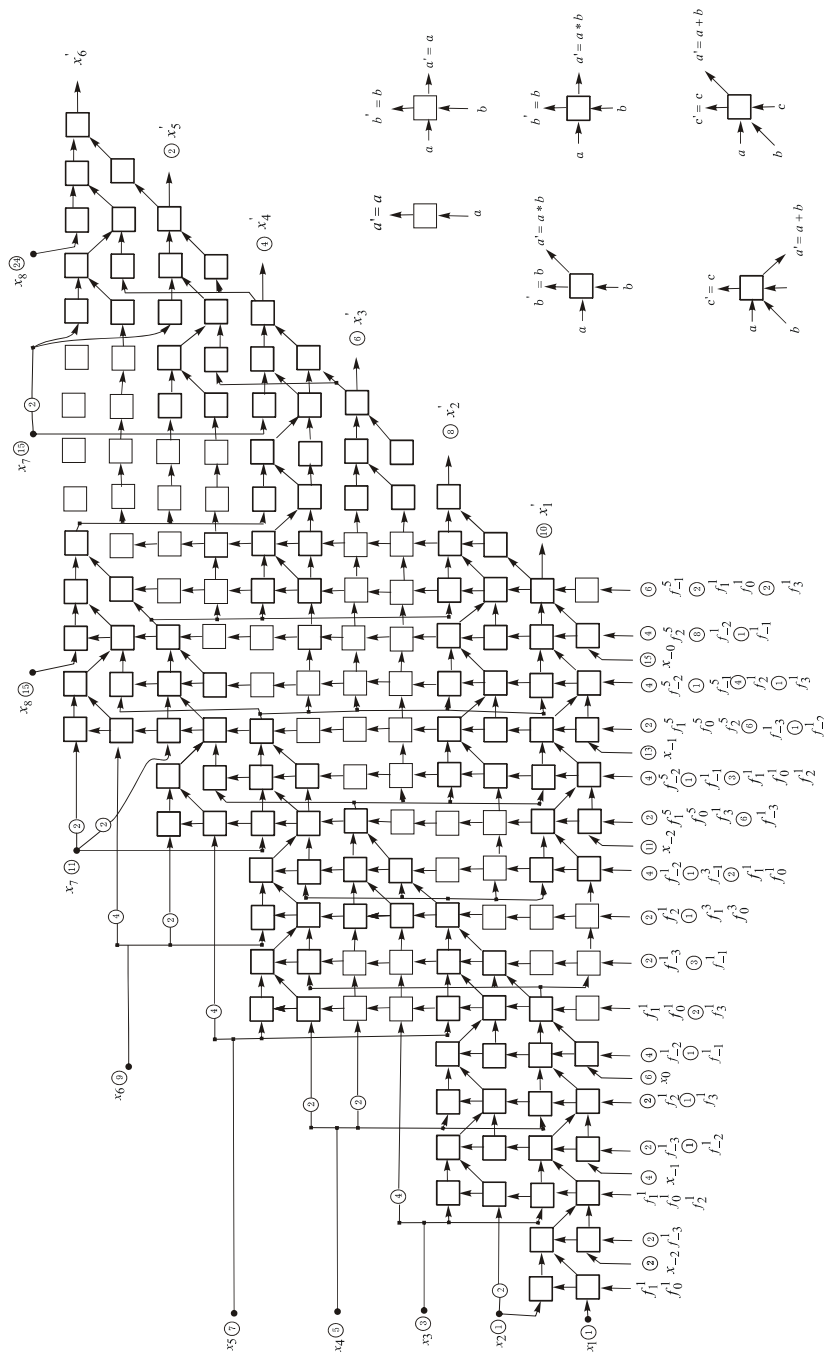


Рис. 16

ження і транспортування даного та транспортування даного. На обох рисунках подання вагових коефіцієнтів здійснюється знизу, вхідні дані з врахуванням необхідних тактів затримки подаються зліва, перераховані значення отримуємо справа. На рис. 1а, 1б такти затримки схематично позначені кружечком, всередині його вказана їх кількість. Детальний аналіз розроблених КСОС показав, що кількість типів функціональних елементів в них суттєво не відрізняється.

**Висновок.** Нами запропоновано та проаналізовано схеми архітектур спеціалізованих обчислювальних засобів для реалізації високопаралельних алгоритмів цифрової фільтрації в режимі реального часу.

1. *Воеводин Вл. В., Жуматий С. А.* Вычислительное дело и кластерные системы. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – 150 с.
2. *Каневский Ю. С.* Систематические процессоры. – Киев: Техника, 1991. – 173 с.
3. *Яджак М. С.* Квасисистемные обчислювальні структури та їх застосування // Академический вестник. – 2007. – № 20. – С. 53–57.
4. *Тимченко О. В.* Різницеви методи цифрової фільтрації. – Львів: Фенікс, 1999. – 388 с.
5. *Комухаев Э.* Современные тенденции развития ПЛИС и заказных БИС // Электронные компоненты и системы. – 2004. – № 4. – С. 9–13.
6. *Valkovskii V. A.* An optimal algorithm for solving the problem of digital filtering // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1994. – 4, № 3. – P. 241–247.
7. *Яджак М. С., Тютюнник М. І.* Оптимальний алгоритм чисельного розв'язування задачі цифрової фільтрації // Тези доп. Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатка, Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р. – Львів, 2007. – С. 306.
8. *Тютюнник М. І.* Паралельні алгоритми розв'язання задач цифрової та засоби їх реалізації // Матеріали наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів ФМІ ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2011. – С. 206–209.

#### **THE PARALLEL ORGANIZATING OF CALCULATIONS FOR SOME PROBLEM OF THE DIGITAL FILTERING AND PROBLEMS OF THEIRS REALIZATION**

*The schemes of computer structures for realization of parallel calculation algorithms during solving of digital filtering problems are proposed.*



## ПРО ПОПЕРЕДНЮ ГРУПОВУ КЛАСИФІКАЦІЮ НЕЛІНІЙНОГО П'ЯТИВИМІРНОГО РІВНЯННЯ Д'АЛАМБЕРА

Федорчук В. І.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, [volfed@gmail.com](mailto:volfed@gmail.com)

Лінійні та нелінійні рівняння Д'Аламбера в просторах різних розмірностей використовуються при розв'язуванні різних задач диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, теоретичної і математичної фізики (наприклад, [1]).

Розглянемо клас нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера виду:

$$\square_5 u = F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) \quad (1)$$

де  $\square_5 \equiv \partial^2/\partial x_0^2 - \partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2 - \partial^2/\partial x_3^2 - \partial^2/\partial x_4^2$  – оператор Д'Аламбера в просторі Мінковського  $M(1,4)$ ,  $F$  – довільна гладка функція,  $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $u_\mu = \partial u / \partial x_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ .

В цьому повідомленні мова йтиме про попередню групову класифікацію класу рівнянь (1). Кожне перетворення з групи Пуанкаре  $P(1,4)$  належить до групи еквівалентності класу (1). Для попередньої групової класифікації використаємо неспряжені підалгебри алгебри Лі групи  $P(1,4)$  (спряження розглядалося відносно групи  $P(1,4)$ ) та нееквівалентні функціональні бази диференціальних інваріантів першого порядку (НФБДПП) [2] цих підалгебр. Неспряжені підгрупи групи  $P(1,4)$  мають НФБДПП розмірностей 2, 3, ..., 10. На сьогодні описані класи рівнянь вигляду (1), які інваріантні відносно тих неспряжених підгруп групи  $P(1,4)$  які мають НФБДПП розмірностей 2, 3, 4.

1. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
2. *Федорчук В.М., Федорчук В.І.* Про функціональні бази диференціальних інваріантів першого порядку неперервних підгруп групи Пуанкаре  $P(1,4)$  // Мат. методи та фіз. - мех. поля. – 2005. – **48**, №4. – С. 51-58.

### ON PRELIMINARY GROUP CLASSIFICATION OF NON-LINEAR FIVE-DIMENSIONAL D'ALLEMBERT EQUATION

*Using some non-conjugate subgroups of the Poincaré group  $P(1,4)$  the partial preliminary group classification of non-linear five-dimensional d'Allembert equation has been performed.*

## СУТТЄВО НЕГЕОДЕЗІЙНІ ЕКВАТОРІАЛЬНІ КОЛОВІ ОРБИТИ ЧАСТКИ ЗІ СПІНОМ У ПОЛІ ШВАРЦШІЛЬДА

**Феник Микола**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060*

З аналізу рівнянь геодезійних ліній відомо, що колові орбіти для безспінової частки з ненульовою масою в полі Шварцшільда існують за умови, що радіальна координата  $r > 3M$  (тут  $M$  – шварцшільдівська маса в системі одиниць, де швидкість світла у вакуумі та гравітаційна стала дорівнюють одиниці). При цьому орбітальна швидкість такої частки на коловій геодезійній орбіті залежить від радіальної координати таким чином, що вона прямує до швидкості світла, коли  $r$  прямує до  $3M$ . Інша ситуація для частки зі спіном, рух якої в загальній теорії відносності описують рівняння Матісона-Папапетру: її ультрарелятивістські колові орбіти існують не лише для значень радіальної координати  $r > 3M$ . Зокрема, ультрарелятивістська частка зі спіном може рухатися по орбіті з  $r$  як дещо більшим від  $3M$ , так і рівним або меншим від  $3M$ .

На основі точних рівнянь Матісона-Папапетру і їх лінійного за спіном наближення ми проаналізували суттєво негеодезійні колові орбіти спінової частки в полі Шварцшільда за межами малого околу  $r = 3M$ . Досліджено область існування таких орбіт, отримано залежності гама-фактора Лоренца, енергії та моменту кількості руху частки від радіальної координати. Проілюстровано випадки, коли спін-орбітальна взаємодія впливає на орбіту частки як значна відштовхувальна сила, що протидіє звичайному гравітаційному притягання, або ж посилює дію цього притягання.

### SIGNIFICANTLY NONGEODESIC EQUATORIAL CIRCULAR ORBITS OF A SPINNING PARTICLE IN STRONG GRAVITATIONAL FIELD

*Using the exact Mathisson-Papapetrou equations which describe motions of a spinning test particle in general relativity and their linear spin approximation we investigate significantly nongeodesic circular orbits of a highly relativistic spinning particle in the Schwarzschild background. The region of the existence of these orbits, the dependence of the relativistic Lorentz factor on the radial coordinate, as well as the energy and angular momentum, are considered. We illustrate different cases when the spin-gravity interaction acts on the particles orbits as a strong repulsive force, which can compensate the usual ("geodesic") attraction, or acts as an additional strong attractive force.*

## ПРО СХРЕЩЕНІ ІЗОТОПІЗМИ КВАЗІГРУП

Фриз І.В.

e-mail: friz\_irina@ukr.net

Операція  $f$ , яка визначена на множині  $Q$ , називається  $i$ -оборотною, якщо для довільних  $a_0, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n$  із  $Q$  існує єдиний елемент  $x \in Q$  такий що

$$f(a_0, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b.$$

Введемо позначення  $J_\tau(i) := |\{\tau(0), \dots, \tau(\tau^{-1}(i)-1)\}|$ ,  $i \in \overline{0, n} := \{0, \dots, n\}$ .

Нехай  $\nu$  – довільне часткове ін'єктивне монотонно зростаюче перетворення множини  $\overline{0, n}$ ,  $m \in \overline{0, n}$  і нехай  $a_0, \dots, a_n$  – довільні елементи множини  $Q$ .  $(n+1)$ -арна операція  $f$  називається *схрещено ізотопною типу  $(m, \nu)$*  до  $(n+1)$ -арної операції  $g$ , якщо існує послідовність  $\vec{\gamma} := (\gamma_0, \dots, \gamma_n, \gamma)$  підстановок  $\gamma_0, \dots, \gamma_n, \gamma$  множини  $Q$  і  $J_\nu(m)$ -оборотна  $J_\nu(n+1)$ -арна операція  $h$  на  $Q$  така що

$$f(x_0, \dots, x_n) = \gamma^{-1} g(\gamma_0 x_0, \dots, \gamma_{\nu(\nu^{-1}(m)-1)} x_{\nu(\nu^{-1}(m)-1)}, \\ \gamma_m h(x_{\nu 0}, \dots, x_{\nu m}), \gamma_{\nu(\nu^{-1}(m)+1)} x_{\nu(\nu^{-1}(m)+1)}, \dots, \gamma_n x_n)$$

для всіх  $x_0, \dots, x_n \in Q$ . Пара  $(\vec{\gamma}, h)$  називається *схрещеним ізотопізмом типу  $(m, \nu)$*  [1]. Якщо  $f = g$ , то пара  $(\vec{\gamma}, h)$  називається *схрещеним автотопізмом типу  $(m, \nu)$* . Якщо  $h$  є унарною операцією, то  $(\vec{\gamma}, h)$  є звичайним ізотопізмом (відповідно, звичайним автотопізмом).

Нехай  $\tau$  і  $\nu$  – довільні часткові ін'єктивні перетворення множини  $\overline{0, n}$  і  $\text{Im } \tau \cap \text{Im } \nu = \overline{0, n}$ . Тоді пара бінарних операцій називається  $(\tau, \nu)$ -відповідними  $\{i, m\}$ -ретрактами операцій  $g$  і  $h$ , якщо вони визначені термами, які отримані із  $g(x_{\tau 0}, \dots, x_{\tau n}), h(x_{\nu 0}, \dots, x_{\nu n})$  таким чином: усі змінні термів замінюються деякими елементами множини  $Q$ , окрім  $x_i$  і  $x_m$ , де  $i \neq m$ ; до того ж, якщо змінна зустрічається у обох термах, тоді вона замінюється на один і той самий елемент [2]. Якщо  $\tau = \varepsilon$ , то пару бінарних операцій будемо називати  $\nu$ -відповідними  $\{i, m\}$ -ретрактами.

Наведемо критерій оборотності схрещеного ізотопа квазігрупи, що є наслідком теореми 5 із [2].

*Теорема 1.* Нехай  $f = g(\vec{\varepsilon}, h)$  – схрещений ізотоп типу  $(m, \nu)$  операції  $g$ , де  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$ , тоді:

- 1) якщо  $i = m$ , то операція  $f$  є  $i$ -оборотною тоді і тільки тоді, коли операція  $g \in J_\nu(i)$ -оборотною;
- 2) якщо  $i \notin \text{Im } \nu$ , то операція  $f$  є  $i$ -оборотною тоді і тільки тоді, коли  $g \in i$ -оборотною;
- 3) якщо  $i \in \text{Im } \nu$  і  $i \neq m$ , то операція  $f$  є  $i$ -оборотною тоді і тільки тоді, коли  $\nu$ -відповідні  $\{i, m\}$ -ретракти операцій  $g$  і  $h^{(J_\nu(m))}$  є ортогональними, де  $h^{(J_\nu(m))}$  позначає  $J_\nu(m)$ -ге ділення операції  $h$ ;
- 4) операція  $f$  є оборотною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови 1)–3) для всіх  $i \in \overline{0, n}$ .

Будемо говорити, що  $m$ -та і  $s$ -та змінні операції  $f$  виділяються над групою  $(Q; +)$ , якщо

$$f(x_0, \dots, x_n) = f_1(x_0, \dots, x_{m-1}) + \varphi x_m + f_2(x_{m+1}, \dots, x_{s-1}) + \psi x_s + f_3(x_{s+1}, \dots, x_n)$$

для деяких автоморфізмів  $\varphi$  і  $\psi$  групи  $(Q; +)$  і операцій  $f_1, f_2, f_3$ .

Операція  $f$  називається лінійною над групою  $(Q; +)$ , якщо

$$f(x_0, \dots, x_n) = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n + a,$$

де  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  є автоморфізмами групи  $(Q; +)$  і  $a \in Q$ . Група  $(Q; +)$  називається групою розкладу операції  $f$ . Отже, кожна змінна лінійної квазігрупи виділяється над її групою розкладу.

*Теорема 2.* Якщо  $m$ -та і  $s$ -та змінні операції  $f$  виділяються над неабелевою групою  $(Q; +)$  і  $\nu s$ -та змінна операції  $h$  виділяється над тією ж групою, тоді кожен схрещений автотопізм  $(\vec{\gamma}, h)$  операції  $f$  є звичайним, тобто  $h$  є підстановкою множини  $Q$ .

*Наслідок.* Лінійні схрещені автотопізми довільного типу лінійних квазігруп над неабелевою групою  $(Q; +)$  є звичайними.

1. *Сохацький Ф.М.* Про схрещену ізотопію та схрещений ізоморфізм // Труды ИПММ НАН України. – 2005. – Вип.11. – С. 23-33.
2. *Sokhatsky F.M., Fryz I.V.* Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2012. – vol 53. – 00-00.

### ABOUT CROSS ISOTOPISMS OF QUASIGROUPS

*An invertibility criterion for cross isotope of a quasigroup is given. It is proved that cross autotopisms of operations are ordinary, if the operations have allocated variables over a non-abelian group.*

## ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ МЕТОДОМ ПРОЕКТУВАННЯ

Чвартацький О.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
[alex.chvartatsky@gmail.com](mailto:alex.chvartatsky@gmail.com)

Рівняння Бюргера

$$u_{t_2} - u_{xx} - 2uu_x = 0 \quad (1)$$

є однією із найвідоміших моделей, яка допускає лінеаризацію при відповідній заміні змінних. А саме, рівняння (1) можна звести до рівняння теплопровідності

$$\varphi_{t_2} = \varphi_{xx} \quad (2)$$

за допомогою підстановки Хопфа-Коула

$$u = \frac{\varphi_x}{\varphi}. \quad (3)$$

В рівняннях (1)-(3) і надалі нижні індекси при функціях позначають диференціювання по відповідних змінних:  $u_{t_2} := \frac{\partial u}{\partial t_2}$ ,  $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$  і т.д.

Різноманітні (матричні, просторові) узагальнення рівняння Бюргера цікаві як з точки зору фізичних застосувань [1], так і своїм тісним зв'язком з нелінійними моделями, інтегровними методом оберненої задачі.

Рівняння (1) можна природнім чином узагальнити, використовуючи підстановку (3). А саме, нехай  $L_0$  — матричний лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, а  $(N \times N)$ -матрична функція  $\varphi$  є розв'язком лінійного рівняння:

$$L_0\{\varphi\} = 0. \quad (4)$$

Тоді функції

$$\Phi = \varphi_x \varphi^{-1}, \quad \tilde{\Phi} = \varphi^{-1} \varphi_x, \quad (5)$$

будуть розв'язками нелінійних рівнянь:

$$L\{\Phi\} = 0, \quad \tilde{L}\{\tilde{\Phi}\} = 0, \quad (6)$$

де  $L$  та  $\tilde{L}$  — деякі нелінійні диференціальні оператори.

*Означення.* Рівняння вигляду (6), які допускають лінеаризацію (4) за допомогою матричних узагальнень (5) підстановки Хопфа-Коула (6), ми називатимемо рівняннями типу Бюргерса.

В роботах [2,3] рівняння типу Бюргерса використовувались для побудови розв'язків рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (КР), системи Деві-Стюартсона (ДС) та інших інтегровних моделей теорії солітонів. Наступні твердження показують зв'язок між рівняннями типу Бюргерса та матричним узагальненням рівняння КР у потенціальній формі, а також дають змогу використати операцію проектування для отримання  $N$ -солітонних розв'язків скалярного потенціального рівняння КР.

*Твердження 1.* [1] Нехай  $(N \times N)$ -матрична функція  $\Phi$  задовольняє систему рівнянь типу Бюргерса:

$$\begin{cases} \alpha_2 \Phi_{t_2} - \Phi_{xx} - 2\Phi_x \Phi = 0, \\ \alpha_3 \Phi_{t_3} - \Phi_{xxx} - 3\Phi_{xx} \Phi - 3\Phi_x^2 - 3\Phi_x \Phi^2 = 0. \end{cases} \quad \alpha_2 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Тоді функція  $\Phi$  є розв'язком матричного рівняння Кадомцева-Петвіашвілі у потенціальній формі:

$$\left( \alpha_3 \Phi_{t_3} - \frac{1}{4} \Phi_{xxx} - \frac{3}{2} \Phi_x^2 \right)_x - \frac{3}{4} \alpha_2^2 \Phi_{t_2 t_2} + \frac{3}{2} \alpha_2 [\Phi_x, \Phi_{t_2}] = 0. \quad (8)$$

*Твердження 2.* [1] Нехай  $\hat{\phi} = W[\varphi_1, \dots, \varphi_N]$  —  $(Nk \times Nk)$ -матриця Вронського, побудована по  $(k \times k)$ -матричних функціях  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ . Тоді функція  $\Phi = \hat{\phi}_x \hat{\phi}^{-1}$  має такий вигляд:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & I_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_N \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де  $I_k$  - одиничні матриці розмірності  $k \times k$ .  $\Phi_j$  —  $(k \times k)$ -матричні функції. У випадку  $k = 1$  функції  $\Phi_1, \Phi_N$  мають вигляд:

$$\Phi_1 = (-1)^{N-1} \frac{\det(\hat{\phi}_x)}{\det \hat{\phi}}, \quad \Phi_N = \frac{(\det \hat{\phi})_x}{\det \hat{\phi}}.$$

Використавши твердження 1 та 2 ми отримуємо для скалярного потенціального рівняння Кадомцева-Петвіашвілі

$$\left( \alpha_3 v_{t_3} - \frac{1}{4} v_{xxx} - \frac{3}{2} v_x^2 \right)_x = \frac{3}{4} \alpha_2^2 v_{t_2 t_2} \quad (10)$$

розв'язок вигляду  $v = \Phi_N = \frac{(\det \hat{\varphi})_x}{\det \hat{\varphi}}$ , де  $\hat{\varphi}$  — матриця Вронського,

побудована по скалярних функціях  $\varphi_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , що є розв'язками систем

$$\begin{cases} \alpha_2 \varphi_{jt_2} = \varphi_{jxx}, \\ \alpha_3 \varphi_{jt_3} = \varphi_{jxxx}, \end{cases} \quad j = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Зауважимо, що даний метод використовується і до інших нелінійних моделей. Зокрема, до нелінійного рівняння Шредінгера та задачі нелінійної взаємодії  $N$  хвиль, тощо (див. [2]).

Інший підхід до побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь, інтегровних методом оберненої задачі, полягає у зображенні відповідного нелінійного рівняння за допомогою пари диференціальних операторів (пара Лакса) та використанні диференціальних операторів перетворення Дарбу-Крама-Матвеева [4].

На прикладі одних із найбільш відомих моделей — рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та нелінійного рівняння Шредінгера ми покажемо, що обидва методи інтегрування нелінійних рівнянь приводять до однакових результатів. Виявляється, що це спостереження має загальний характер. Це пояснюється "невною присутністю" перетворення Дарбу-Крама-Матвеева в методі проектування. В рамках підходу проектування, запропонованого В.О. Марченком, ми демонструємо як можна отримати загальне перетворення Дарбу-Крама-Матвеева, а також показуємо його зв'язок з матричним узагальненням перетворення Хопфа-Коула.

Можна показати, що нелінійні рівняння типу Бюргерса (6) є частковим випадком більш загальних  $S$ -інтегровних систем, які отримуються з лінійного рівняння (4) за допомогою бінарних перетворень [5]-[6]. При цьому розв'язки відповідних нелінійних систем, інтегровних методом оберненої задачі, виражаються в термінах визначників Грама. Замість диференціального оператора Дарбу-Крама-Матвеева в цьому випадку виникають інтегральні одягаючі оператори, які відіграють важливу роль в методі оберненої задачі розсіяння (див., наприклад [7]).

1. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу //Акустический журнал — 2011. — Т.57, № 3 — с. 313-322.
2. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. — Київ: Наукова думка, 1986. — 155 с.
3. Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Иерархия матричных уравнений Бюргерса и интегровні редукції в системі Деві-Стюардсона // Укр. мат. журн. — 1998. — Т.50, №2. — С.252-264.
4. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons. — Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. — 1991. — 120 p.

5. *Samoilenko V.H., Sidorenko Yu.M., Buonanno L., Matarazzo G.* Explicit solutions of nonlinear evolution equations via nonlocal reductions approach // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2000. – V.30, Part II. – P.406-410.
6. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – V.54, №11. – С. 1531-1550.
7. *Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І.* Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень. // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010. – №287: Серія фізико-математичні науки. – С. 28-59.

#### **CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS OF SOLITON THEORY BY PROJECTION METHOD**

*Two algebrized methods of integration of nonlinear equations, which are proposed by V.O. Marchenko and V.B. Matveev, are compared. Matrix Darboux-Crum-Matveev transformation is obtained by the projection method proposed by V.O. Marchenko.*



## МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПОТОКІВ У ВИПАДКОВО-НЕОДНОРІДНІЙ ТРИШАРОВІЙ СМУЗІ

Чернуха О.Ю., Давидок А.Є.

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: cher@cmm.lviv.ua;  
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, вул. Т. Шевченка, 57,  
76025, Івано-Франківськ, e-mail: davydoka@gmail.com

Під час дослідження потоків маси домішкової речовини у багатофазних тілах випадково неоднорідної структури процедура усереднення за ансамблем конфігурацій фаз може викликати значні труднощі, оскільки невідомими є функції кореляції градієнта стохастичного поля концентрації та випадкового коефіцієнта дифузії. Тому у роботі [1] запропоновано крайові задачі дифузії формулювати безпосередньо для потоку, що дозволяє шукане випадкове поле подати у вигляді ряду Неймана, зручного для проведення процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз.

Застосовуючи такий підхід, у даній роботі розв'язано два випадки крайової задачі для смуги з випадково розташованим прошарком.

Відповідно до [1], в загальному випадку процес перерозподілу маси в тілі описується співвідношеннями

$$\frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t), \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = -D(\vec{r})\vec{\nabla}c(\vec{r}, t) \quad (1)$$

де  $c(\vec{r}, t)$  – концентрація частинок домішки,  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  – потік маси,  $\vec{\nabla}$  – набла-оператор Гамільтона, крапкою позначена операція скалярного добутку,  $\vec{r}$  – радіус-вектор біжучої точки,  $t$  – час.

Застосовувавши до першого з рівнянь (1) оператор  $-\vec{\nabla}$  і використавши друге, для потоку отримали наступну рівність

$$\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = D(\vec{r})(\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (2)$$

де  $\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} = \nabla_i \nabla_j \vec{i}^i \otimes \vec{i}^j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), « $\otimes$ » – тензорний добуток,  $\nabla_1 = \partial/\partial x$ ,  $\nabla_2 = \partial/\partial y$ ,  $\nabla_3 = \partial/\partial z$ ,  $\vec{i}^i$  – базисний вектор ( $\vec{i}^1 = \vec{i}$ ,  $\vec{i}^2 = \vec{j}$ ,  $\vec{i}^3 = \vec{k}$ ).

В одновимірному випадку рівняння (2) набуває вигляду

$$\frac{\partial J(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z, t)}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Розглянуто процес дифузії домішки у смузі товщиною  $z_0$  з випадково розташованим прошарком, за умови, що об'ємна частка базової фази  $v_0$  набагато більша за об'ємну частку включення  $v_1$ . Враховано, що випадковий коефіцієнт дифузії рівняння (3) є сталим у межах фаз:

$$D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0; \\ D_1, & z \in \Omega_1, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\Omega_0 = ]0; z_1[ \cup ]z_2; z_0[$  – область, яку займає матриця, а  $\Omega_1 = ]z_1; z_2[$  – область включення,  $z_1$  і  $z_2$  – випадкові координати меж включення.

Прийнято, що в початковий момент часу в тілі відсутній дифузійний потік частинок і заданий розподіл концентрації в тілі. Зокрема, розглянуто два випадки – розподіл концентрації у смузі є нульовим, або ж відомий сталий ненульовий розподіл концентрації  $C_* \equiv const$ . На границі  $z = 0$  підтримується постійне значення потоку, а на границі шару  $z = z_0$  концентрація домішкових частинок є нульовою. А саме

$$J(z, t)|_{t=0} = 0; \quad J(z, t)|_{z=0} = J_* \equiv const, \quad J(z, t)|_{z=z_0} = F(t). \quad (5)$$

При цьому дифузійний потік на цій поверхні було додатково визначено, з відповідних крайових задач для концентрації та з використанням першого закону Фіка.

Введено до розгляду випадкову функцію просторової координати типу одиничної функції Хевісайда [2]:

$$\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij}; \\ 0, & z \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \quad \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(z) = 1. \quad (6)$$

Тут  $j$  – номер фази ( $j = \overline{0, 1}$ ), зокрема  $j = 0$  відповідає матриці,  $i$  – номер включення в рамках фази ( $i = \overline{1, n_j}$ , де  $n_j$  – кількість підшарів сорту  $j$ ),  $\Omega_{ij}$  –  $i$ -та однозв'язна область  $j$ -ї фази.

Використовуючи подання коефіцієнта дифузії (4) через функцію  $\eta_{ij}$  (6) та враховуючи умову суцільності тіла, рівняння (3) зводимо до форми

$$L_0(z, t)J(z, t) = L_s(z, t)J(z, t), \quad (7)$$

де  $L_0(z, t) = \partial / \partial t - D_0 \partial^2 / \partial z^2$ ,  $L_s(z, t) \equiv L_s(z) = (D_1 - D_0) \eta_1(z) \partial^2 / \partial z^2$ ,

$$\eta_1(z) = \begin{cases} 1, & z \in [z_1; z_2] \\ 0, & z \notin [z_1; z_2] \end{cases}, \quad z_1, z_2 - \text{координати меж включення.}$$

Розглядаючи неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела, розв'язок крайової задачі (7), (5) подано у вигляді суми розв'язку однорідної крайової задачі  $J_0(z, t)$  та згортки функції Гріна з джерелом  $G(z, z', t, t')$ :

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J(z', t') dz' dt'. \quad (8)$$

Зокрема, за нульового розподілу концентрації в початковий момент часу

$$J_0(z, t) = J_* \left( 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) \right), \quad (9)$$

а у випадку сталого ненульового розподілу концентрації у смузі

$$J_0(z, t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( J_* / \xi_n + (-1)^n C_* D_0 \right) \sin(\xi_n z). \quad (10)$$

Функція Гріна є однаковою для обидвох випадків і визначається рівністю:

$$G(z, z', t, t') = \frac{\theta(t-t')}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 (t-t')} [\cos(y_k(z-z')) - \cos(y_k(z+z'))], \quad (11)$$

де  $y_k = k\pi / z_0$ .

Розв'язок рівняння (8) побудований ітеруванням у вигляді ряду Неймана. Обмежившись двома першими членами цього ряду та припускаючи, що фази у тілі розташовані за рівномірним законом розподілу, одержано усереднений за ансамблем реалізацій структури тіла вираз для потоку:

$$\begin{aligned} \langle J(z, t) \rangle_{conf} = J_0(z, t) + (D_1 - D_0) \int_0^t \left[ \frac{v_1}{h} \int_0^h z' G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' + \right. \\ \left. + v_1 \int_h^{z_0} G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' \right] dt', \quad (12) \end{aligned}$$

де  $h$  – товщина включення.

Підставляючи у (12) функцію Гріна (11) та вираз (9) для потоку маси в однорідній смузі, отримано розрахункову формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_*} \langle J(z, t) \rangle_{conf} = 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) + \\ + \frac{2v_1}{z_0^2} \cdot \frac{(D_1 - D_0)}{D_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n A_{kn}}{y_k^2 - \xi_n^2} \left[ \frac{3}{2} e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right] \sin(y_k z). \end{aligned}$$

Якщо розв'язок однорідної задачі задається формулою (10), маємо

$$\frac{1}{J_*} \langle J(z, t) \rangle_{conf} = 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( \frac{1}{\xi_n} + (-1)^n D_0 \frac{C_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z) +$$

$$+ \frac{2v_1}{z_0^2} \cdot \frac{(D_1 - D_0)}{D_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} A_{kn} \left( 1 + (-1)^n D_0 \frac{C^*}{J^*} \xi_n \right) \left( \frac{3}{2} e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right) \sin(y_k z).$$

Тут  $A_{kn} = \frac{\cos[(y_k - \xi_n)h]}{h(y_k - \xi_n)^2} - \frac{\cos[(y_k + \xi_n)h]}{h(y_k + \xi_n)^2} - \frac{4y_k \xi_n}{h(y_k^2 - \xi_n^2)^2} + (-1)^{k+n} \frac{2y_k}{y_k^2 - \xi_n^2}.$

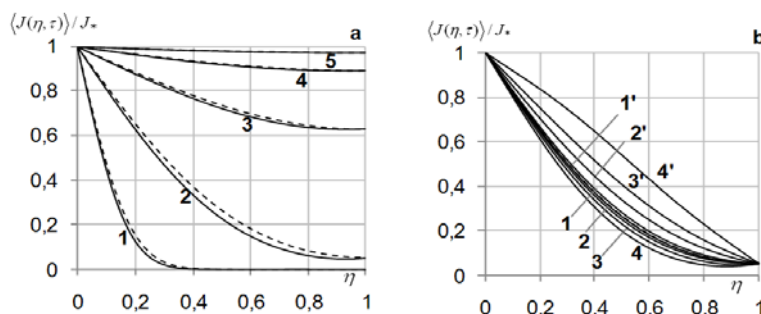


Рис. 1. Розподіли потоків маси у смузі в різні моменти безрозмірного часу для  $D_1 / D_0 = 0,01$  (рис. а) та при різних значеннях товщини прошарку  $h$  (рис. б)

На основі знайдених формул, було проведено чисельні розрахунки і встановлено залежність поведінки та величини усередненого дифузійного потоку від характеристик матеріалу смуги за нульової (Рис.1) та ненульової сталої концентрації частинок домішки в початковий момент часу. Зокрема встановлено, що у випадку більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку ніж у матриці дифузійний потік у тришаровій смузі майже завжди менший ніж в однорідному тілі.

1. Чапля С., Чернуха О., Васьо Н. Математичне моделювання потоків в шарі // Вісник Львів. ун-ту: Серія прикл. матем. інформ. - 2011. – Вип.17. – С. 103-115.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику Ч. II. Случайные поля. – М.: Наука, 1978. – 436 с.

### MODELLING DIFFUSION FLOWS IN A RANDOMLY NONHOMOGENEOUS THREE-LAYERED STRIP

The paper is devoted to mathematical modeling diffusion flows in a strip with a randomly disposed sublayer. A diffusion equation is formulated for the flow function. Solution is constructed in terms of Neumann series and averaged of the ensemble of structure realizations.

## ОПТИМАЛЬНЕ УПАКУВАННЯ НЕОРІЄНТОВАНИХ ПАРАЛЛЕЛЕПЕДІВ ТА КУЛЬ

**Чугай А.М.**

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,  
chugay@ipmach.kharkov.ua

У роботі розглядається оптимізаційна задача розміщення неорієнтованих паралелепіпедів (що допускають афінні перетворення не тільки трансляції, але й повороту) та куль у паралелепіпеді мінімальної висоти.

Для розв'язку досліджуваної задачі були побудовані  $\Phi$ -функції [1] для пари неорієнтованих паралелепіпедів, а також для неорієнтованого паралелепіпеда та кулі. За допомогою цих  $\Phi$ -функцій була побудована математична модель задачі.

Через те, що задачі розміщення є задачами високої обчислювальної складності, для їх розв'язку в більшості випадків використовуються евристичні підходи, які не гарантують знаходження оптимального розв'язку.

Оскільки математична модель задачі побудована у вигляді задачі програмування, то для її розв'язку можна розробити стратегію, засновану на використанні сучасних методів нелінійної оптимізації, що може значно поліпшити остаточний результат.

Грунтуючись на властивостях математичної моделі задачі, була розроблена стратегія розв'язку, яка передбачає виконання наступних кроків: побудова початкових точок, пошук локальних екстремумів та спеціальний перебір локальних екстремумів.

При розв'язку задач розміщення для одержання початкових точок використовуються різні “жадібні” алгоритми. Однак ці алгоритми не гарантують одержання різноманітних початкових точок. Крім того, обчислювальні витрати для побудови початкових точок значно зростають у тривимірному випадку. У зв'язку із цим пропонується наступний підхід.

Метричні характеристики об'єктів, що розміщуються, приймаються змінними. Для побудови початкових точок генерується випадкове розміщення об'єктів у розглянутому паралелепіпеді. Побудована таким способом точка, у загальному випадку, не буде належати області припустимих розв'язків задачі, оскільки об'єкти, які розміщуються, будуть перетинатися або не будуть належати області розміщення.

Для того щоб з отриманої випадкової точки перейти до точки з області припустимих розв'язків задачі необхідно послідовно розв'язати дві підзадачі нелінійного програмування.

У цих підзадачах висота області розміщення приймається константою, а

змінними є параметри розміщення об'єктів та їх метричні характеристики.

Метою розв'язку першої підзадачі є одержання такого розміщення об'єктів зі змінними метричними характеристиками, при якому об'єкти не будуть мати взаємних перетинань і будуть розташовані в області розміщення. Точка, отримана в результаті розв'язку першої підзадачі, приймається в якості початкової для розв'язку другої підзадачі. Метою розв'язку другої підзадачі є пошук такого розміщення об'єктів в області розміщення, при якому сума їх метричних характеристик була б максимальною.

Для пошуку глобального максимуму другої підзадачі пропонується спеціальний підхід, який забезпечує перехід від одного локального максимуму до іншого з більшим значенням функції мети. Для пошуку нового перспективного локального максимуму, до якого можна перейти з вже отриманого, вирішується допоміжна задача. Дана задача відрізняється від другої підзадачі відсутністю обмежень на граничні значення метричних характеристик об'єктів, що розміщуються. Розв'язок допоміжної задачі дозволяє визначити можливість здійснення перспективної перестановки об'єктів у знайденому локальному максимумі.

Глобальний максимум другої підзадачі приймається в якості початкової точки для пошуку відповідного локального мінімуму основної поставленої задачі.

Розв'язок описаних задач нелінійного програмування здійснюється за допомогою модифікації методу можливих напрямків, що використовує стратегію активних обмежень [2]. Для пошуку вектора “спуску” на кожному кроці методом внутрішньої точки [3] вирішується задача лінійного програмування.

Запропонований у роботі підхід до розв'язку задачі може бути застосований для розв'язку задачі оптимального пакування неорієнтованих багатогранників.

1. *Stoyan Yu. G.*  $\Phi$ -function and its basic properties // Докл. АН України. Сер. А. –2001. – № 8. – С. 112-117.
2. *Stoyan Y., Chugay A.* Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region / Stoyan Y., Chugay A. // European J. Oper. Res. – 2009. –Vol. 197, №.2. – P. 446-455.
3. *Gondzio J.* HOPDM (version 2.12) - A Fast LP Solver Based on a Primal-Dual Interior Point Method // European J. Oper. Res. – 1995. –Vol. 85, №.1. – P. 221-225.

### **OPTIMAL PACKING OF NON-ORIENTED PARALLELEPIPEDS AND SPHERES**

*The work considers a packing optimisation problem of different spheres and different parallelepipeds including the case of their continuous rotations into a right parallelepiped of a minimal height. The mathematical model of the problem stated is constructed as a classical mathematical programming problem. A number of original approaches of local and global optimisation are offered. The approaches are based on properties of the mathematical model.*

## ОСОБЛИВОСТІ КОЛИВАНЬ МОНОКРИСТАЛІЧНИХ ЛОПАТОК СУЧАСНИХ ГТД

**Чугай М.О.**

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,  
chugay@ipmach.kharkov.ua

Підвищення ефективності сучасних ГТД пов'язане із зростанням максимальної температури газу. Ці параметри визначаються можливістю створення, в першу чергу, лопатки першого ступеню, яка зазвичай є охолоджуваною, а також лопаток подальших ступенів. У ряді сучасних робіт наголошується, що якість проектування лопаток газової турбіни визначає основні параметри перспективних ГТД. Тому, як для першого ступеню газової турбіни, так і для подальших використовуються монокристалічні жароміцні сплави, що мають високі жароміцні властивості.

У даній роботі проведено аналіз впливу типу матеріалу і кристалографічної орієнтації (КГО) для неохолоджуваних лопаток. Для них вибір аксіальної орієнтації монокристалічного матеріалу неоднозначний. При аксіальній орієнтації [001] подовжній модуль пружності є мінімальним, але жорсткість на кручення максимальною. Максимальний подовжній модуль пружності досягається при аксіальній орієнтації монокристалічного матеріалу [111].

Вибір раціональної орієнтації монокристалічного матеріалу залежить від геометричної форми лопаток, форм їх коливань і розподілу вібраційних напружень, що представляє найбільшу небезпеку [1-3].

Неохолоджувані лопатки виготовляються з полікристалічних сплавів або монокристалічних з розташуванням матеріалу з аксіальними орієнтаціями [001] та [111].

Для всіх лопаток використовуються тривимірні скінченноелементні моделі. Для пера лопатки використовувалися 20-вузлові гексаедальні ізопараметричні елементи, а для полиць, замків і ніжок лопаток – 10-вузлові тетраедальні елементи (рис. 1). В разі полікристалічних сплавів матеріалу був однорідним (ізотропним) та матриця податливості мала діагональний вигляд. Для монокристалічних лопаток матеріал стає ортотропним і вигляд матриці податливості залежить від його орієнтації.

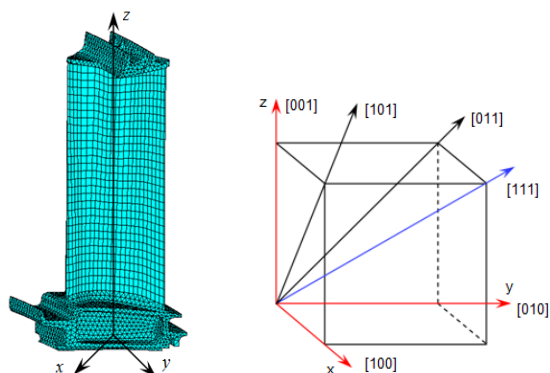


Рис. 1. Структура монокристала

Вибір матеріалу залежить від конкретних вимог до спектру власних частот. Форми коливань міняються залежно від матеріалу і орієнтації КГО. Нижчі форми коливань міняються слабкіше, а вищі сильніше. Поля відносних інтенсивностей напружень міняються істотно при будь-якій орієнтації монокристалічного матеріалу. Зони найбільших відносних напружень зазвичай зміщуються до периферії лопаток. Результати даних досліджень використовувалися на виробництві при виборі матеріалу лопаток.

1. Придорожний Р.П., Шереметьев А.В., Зиньковский А.П. Влияние кристаллографической ориентации на спектр собственных частот и форм колебаний монокристаллических рабочих лопаток турбин // Вестник двигателестроения. – 2006. – №2. – С.42-48.
2. Мельникова Г.В., Шорр Б.Ф. Влияние кристаллографической ориентации монокристалла и ее технологического разброса на частотный спектр турбинных лопаток / Авиационно-космическая техника и технология. – 2001. – №26. – С. 140-144.
3. Ножницкий Ю.А., Голубовский Е.Р. О прочностной надежности монокристаллических рабочих лопаток высокотемпературных турбин перспективных ГТД // Прочность материалов и ресурс элементов энергооборудования. Труды ЦКТИ. – СПб, 2009. – Вып. 296. – С. 74-82.

#### PECULIARITIES OF VIBRATION SINGLE-CRYSTAL BLADES MODERN GAS-TURBINE ENGINES

*In the article the features of vibrations of the uncooled blades are examined from polycrystal and single-crystal material. The analysis of influence of type of material and crystallography orientation is conducted on the spectrum of natural frequencies, forms of vibrations and distributing of relative stresses. Theoretical and experimental results are compared.*



## ВЗАЄМОДІЯ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ АДГЕЗІЇ ПОВЕРХОНЬ МІЖКОНТАКНОГО ЗАЗОРУ

Чумак К.А.<sup>1</sup>, Паук В.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ІППММ ім. Я.С. Підстригача, Львів, labmtd@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup>ЛНУ ім. І. Франка, Львів, labmtd@iapmm.lviv.ua

При розробці та оцінці працездатності низки спряжень, широко використовуваних в мікроелектроніці, мікро/наноприладах, медичній техніці та інших областях, для яких характерні малі розміри та висока ступінь гладкості поверхонь, важливу роль відіграє врахування адгезійної взаємодії поверхонь тіл. Дане повідомлення стосується дослідження контакту двох півбезмежних тіл за наявності міжконтактного зазору з урахуванням дії сил адгезії між його поверхнями.

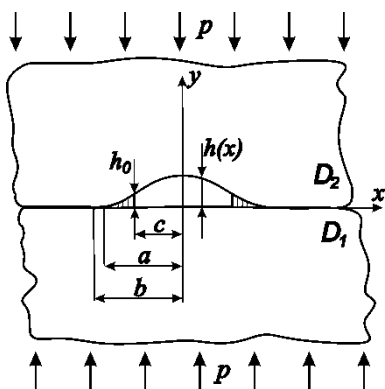


Рис. 1

Розглянемо контактну взаємодію двох пружних ізотропних півбезмежних тіл  $D_1$  і  $D_2$ , які перебувають в умовах плоскої деформації (рис. 1). Поверхня тіла  $D_1$  є плоскою, а поверхня тіла  $D_2$  вздовж смуги шириною  $2b$  має плитку полого виїмку, форму якої описує парна неперервно-диференційована функція  $r(x) = r_0(1 - x^2/b^2)^{3/2}$  ( $r_0 \ll b$ ,  $r'(x) \ll 1$ ). Тіла контактують під дією заданих на нескінченності однорідних стискувальних зусиль  $p$ , перпендикулярних до поверхні розмежування тіл. Внаслідок початкової нерівності поверхні тіла  $D_2$

відбуватиметься неповний контакт тіл, за якого в межах виїмки між ними буде зазор з невідомими довжиною  $2a$  та висотою  $h(x)$ . Вважаємо, що між поверхнями зазору діють сили адгезії, для кількісного опису яких скористаємося моделлю Можіса [1]. Згідно з цією моделлю, на ділянках зазору  $(-a, -c]$  і  $[c, a)$ , де його висота  $h(x)$  не перевищує значення  $h_0$  (це значення приблизно рівне кроку кристалічної решітки матеріалу [1]), між поверхнями тіл діють сталі сили адгезії  $\sigma_0$ . На ділянці зазору  $(-c, c)$ , де  $h(x) > h_0$ , сили адгезії рівні нулю. Механічний контакт вздовж всієї лінії розмежування тіл відбувається без тертя.

Крайові умови сформульованої задачі мають вигляд:

поза зазором  $|x| \geq a$  :

$$\sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+, \quad \sigma_{xy}^- = \sigma_{xy}^+ = 0; \quad u_y^+ = u_y^- - r(x), \quad a < |x| < b; \quad u_y^+ = u_y^-, \quad |x| > b;$$

на ділянці зазору  $|x| < a$  :

$$\sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+ = \sigma_0, \quad c \leq |x| < a; \quad \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+ = 0, \quad |x| < c; \quad \sigma_{xy}^- = \sigma_{xy}^+ = 0;$$

на безмежності:

$$\sigma_{yy}^\infty = -p, \quad \sigma_{xy}^\infty = 0.$$

Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [2], сформульовану задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти міжконтактного зазору  $h(x)$  :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt = \frac{3r_0}{2b^3} (2x^2 - b^2) + \frac{K}{2} (p + p_1(x)), \quad |x| < a, \quad (1)$$

де  $p_1(x) = \sigma_0$  при  $c \leq |x| < a$  і  $p_1(x) = 0$  при  $|x| < c$ ,  $K = 4 \sum_{j=1}^2 (1 - \nu_j^2) / E_j$ .

Шукана висота зазору  $h(x)$  задовольняє умови

$$h(-a) = 0, \quad h(a) = 0, \quad (2)$$

які впливають із неперервності переміщень меж півплощин.

Внаслідок гладкості виїмки (неперервно-диференційованості функції  $r(x)$ ) виконуються умови плавного змикання берегів зазору:

$$h'(-a) = 0, \quad h'(a) = 0, \quad (3)$$

які забезпечують обмеженість контактних напружень.

Розв'язавши рівняння (1) аналітично, з урахуванням умов (2) і (3) знайдемо висоту зазору

$$h(x) = \frac{r_0}{b^3} (a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{K\sigma_0}{4\pi} ((x-c)\Gamma(a, x, c) - (x+c)\Gamma(a, x, -c)), \quad (4)$$

а також залежність між півдовжиною зазору  $a$ , півдовжиною ділянки зазору, де сили адгезії рівні нулю,  $c$  і зовнішнім тиском  $p$  :

$$\frac{3r_0}{b^3} (a^2 - b^2) + Kp + \frac{K\sigma_0}{\pi} (\pi - 2 \arcsin(c/a)) = 0. \quad (5)$$

Тут  $\Gamma(a, x, t) = \ln \left( \frac{a^2 - tx - \sqrt{(a^2 - t^2)(a^2 - x^2)}}{a^2 - tx + \sqrt{(a^2 - t^2)(a^2 - x^2)}} \right)$ .

Оскільки згідно з моделлю Можіса  $h(c) = h_0$ , з (4) отримаємо додаткову залежність між півдовжинами  $a$  і  $c$ :

$$\frac{r_0}{b^3}(a^2 - b^2)^{3/2} - \frac{K\sigma_0}{\pi}c \ln(c/a) = h_0. \quad (6)$$

Таким чином, для знаходження невідомих  $a$  і  $c$  отримали систему двох трансцендентних рівнянь (5), (6). З огляду на те, що зовнішній тиск  $p$  входить у рівняння (5) лінійно, а  $a$  і  $c$  входять в обидва рівняння нелінійно, запропоновано такий підхід до розв'язування цієї системи: 1) за невідомі вибираємо навантаження  $p$  та півдовжину ділянки зазору, де сили адгезії рівні нулю,  $c$ ; 2) півдовжину зазору  $a$  задаємо і змінюємо її від 0 до  $b$ ; 3) для дискретного набору значень  $a$  рівняння (6) розв'язуємо методом поділу відрізка пополам і визначаємо значення  $c$ ; 4) навантаження  $p$  для пари  $(a, c)$  знаходимо з рівняння (5).

На рис. 2 і 3 зображено залежність безрозмірної півдовжини зазору  $\tilde{a} = a/h_0$  від безрозмірного прикладеного тиску  $\tilde{p} = Kp$  для відносних геометричних параметрів виймки  $r/h_0 = 100$  та  $b/h_0 = 10^5$ . Рис. 2 відповідає

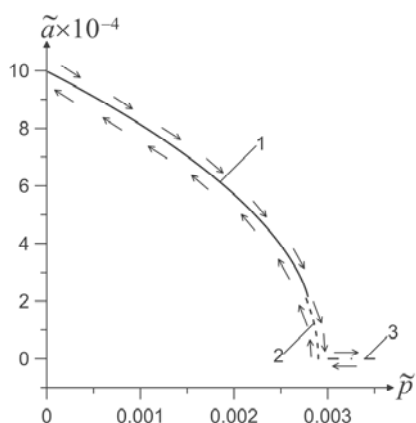


Рис. 2

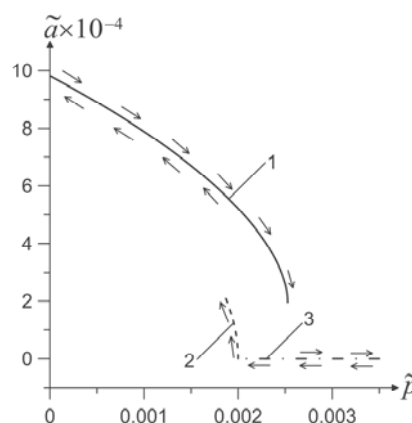


Рис. 3

випадку дії безрозмірних сил адгезії  $\tilde{\sigma}_0 = K\sigma_0 = 10^{-4}$ , рис. 3 -  $\tilde{\sigma}_0 = 10^{-3}$ . Крива 1 – це залежність  $\tilde{a} = \tilde{a}(\tilde{p})$ , коли розподіл сил адгезії між поверхнями зазору відбувається згідно з моделлю Можіса; крива 2 -  $\tilde{a} = \tilde{a}(\tilde{p})$ , коли максимальна висота зазору є меншою, ніж  $h_0$  ( $\sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+ = \sigma_0$ ,  $|x| < a$ ); пряма 3 відповідає випадку повного контакту тіл внаслідок закриття зазору ( $\tilde{a} = 0$ ).

При торканні поверхонь тіл ( $\tilde{p} = 0$ ) сили адгезії зумовляють притягання поверхонь початкової виїмки та нижнього тіла, внаслідок чого утвориться зазор скінченної довжини. Збільшення зовнішнього навантаження  $\tilde{p}$  зумовлює зменшення довжини зазору  $\tilde{a}$  та збільшення довжини ділянок адгезії (зменшення  $\tilde{c}$ ), яке продовжується доти, доки максимальна висота зазору перевищує  $h_0$ . Подальше збільшення  $\tilde{p}$  може спричинити дві різні ситуації: 1) стрибок до рівноважного стану, який відповідає випадку дії сил адгезії інтенсивності  $\tilde{\sigma}_0$  між поверхнями зазору вздовж усієї його довжини (рис. 2), після чого ці сили адгезії з ростом  $\tilde{p}$  зумовлять закриття зазору, а, отже, і повний контакт тіл; 2) стрибок до рівноважного стану, який відповідає повному контакту тіл (рис. 3). Повний контакт тіл буде реалізуватися і надалі, якщо продовжити збільшувати  $\tilde{p}$ . Якщо ж розпочати процес розвантаження, то повний контакт буде відбуватися доти, доки контактні напруження на всій поверхні контакту тіл не перевищуватимуть  $\tilde{\sigma}_0$ . При подальшому зменшенні  $\tilde{p}$  між поверхнями тіл знову утвориться зазор, між поверхнями якого вздовж усієї його довжини діятимуть сталі сили адгезії  $\tilde{\sigma}_0$ . Якщо далі зменшувати інтенсивність навантаження, максимальна висота зазору в певний момент стане більшою, ніж  $h_0$ , внаслідок чого відбудеться стрибок до рівноважного стану, який відповідає випадку розподілу сил адгезії між поверхнями зазору згідно з моделлю Можіса. Подальше зменшення навантаження зумовить повне розділення тіл. З рис. 2 і 3 також можна зробити висновок, що чим більшою є безрозмірна інтенсивність сил адгезії  $\tilde{\sigma}_0$ , тим меншою буде довжина міжконтактного зазору. Виявлено, що збільшення зовнішнього навантаження зумовлює зменшення збільшення довжини ділянок адгезії.

1. *Maugis D.* Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid. Interface Sci. – 1992. – **150**, №1. – P. 243-269.
2. *Мартиняк Р.М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, №2. – С. 124-126.

#### INTERACTION OF SOLIDS IN PRESENCE OF ADHESION BETWEEN SURFACES OF INTERCONTACT GAP

*The adhesive contact of two isotropic semi-infinite solids with a gap between their contacting surfaces is investigated. The effect of adhesion between the gap surfaces is accounted for by using the Maugis model. The contact problem is reduced to a singular integral equation for the gap height. For calculating the gap and adhesion lengths two transcendental equations are obtained. Results are obtained for the gap and adhesion lengths as a function of the applied pressure and for various values of the adhesive stresses.*

## ВЗАЄМОДІЯ ТОНКОГО ПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ В ПОЛІ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ

Бутрак І.О.

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, butrak@iapmm.lviv.ua

Напруження, які виникають в околі тріщини провокують руйнівні процеси та зменшують міцність окремих областей середовища. Одним з аспектів таких досліджень є вивчення особливостей поведінки тріщин поруч з включеннями в пружному хвильовому полі [1-3]. В даній роботі розглядається вплив включення малої жорсткості на сусідню кругову тріщину під час поширення гармонічних пружних хвиль в безмежній матриці.

Нехай в безмежному пружному середовищі вільно розташовані пружне кругове включення та кругова тріщина. Включення знаходиться в умовах ідеального механічного контакту з матрицею. Поверхні тріщини вільні від навантажень. В композиті поширюється гармонічна пружна поздовжня хвиля з перпендикулярним до площини неоднорідностей вектором переміщень та заданою циклічною частотою.

Інтегральні подання розв'язку сформульованої задачі ґрунтуються на використанні формул Папковича-Нейбера з подальшою підстановкою у граничні умови. Отримана вихідна задача зводиться до системи шести граничних інтегральних рівнянь відносно переміщень зі сторони матриці та включення. Розв'язання рівнянь здійснено методом граничних елементів через їх зведення до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

З проведених досліджень випливає, що при виникненні чи наявності у тілі пошкоджених елементів для відновлення його міцності ефективним буде наповнювати дефектні зони матеріалами, які кристалізуються.

3. Панин В. Е., Дерюгин Е. Е., Кульков С. Н. Мезомеханика упрочнения материалов нанодисперсными включениями // ПМТФ. – 2010. – 51, № 4. – С. 127-142.
4. Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I. BIE method for 3D problems of rigid disk-shaped inclusion and crack interaction in elastic matrix // Computer Modeling in Engineering and Sciences. – 2005. – 10, № 1. – P. 45-63.
5. Tamuzs V., Romalis M., Petrova V. Fracture of Solids with Microdefects // Huntigton: Nova Science. – New York, 2000.

**INTERACTION OF A THIN ELASTIC INCLUSION WITH A PENNY-SHAPED CRACK IN FIELD OF A HARMONIC WAVES**

*The influence of a compliant disk-shaped inclusion on a neighboring penny-shaped crack embedded in an infinite elastic matrix subjected an incident time-harmonic elastic waves loading is considered.*

## СПЕКТРАЛЬНИЙ РОЗКЛАД ДЛЯ ТРАНСПОРТНОГО ОПЕРАТОРА

Івасик Г. В.

Національний університет «Львівська політехніка»  
Ivasyk-G@yandex.ru

Вивчається транспортний оператор

$$Lf = -i\mu \frac{\partial f}{\partial x} + c(x) \int_{-1}^1 b(\mu') f(x, \mu') d\mu', \quad (1)$$

який діє в просторі  $L^2(D): D = R \times [-1, 1]$ . Функція  $c(x)$  є експоненційно спадною при  $|x| \rightarrow \infty$ . Стосовно функції  $b(\bullet)$  припускається існування аналітичного продовження в деякий окіл інтервалом  $[-1, 1]$ .

Нехай  $H$  – деякий простір функцій, заданих на всій осі  $R$ . Нехай  $S: H \rightarrow H$  – оператор множення на незалежну змінну з максимальною областю визначення. Ми використовуємо модель Фрідрікса, тобто оператор вигляду  $T = S + V$ , де  $V: H \rightarrow H$  – деякий інтегральний оператор [1]. Вибіримо факторизацію збурення  $V = A^* B$ ,  $A, B: H \rightarrow G$ , де  $G$  – деякий допоміжний простір,  $G = L^2(R)$ . Нашою метою є побудова оператора вигляду

$$T = S + A^* B,$$

унітарно еквівалентного оператору  $L$  [1, 2].

Розглядаємо еволюційне рівняння такого вигляду:

$$\begin{cases} u^\bullet = iTu, & t > 0 \\ u|_{t=0} = u(0), & u(0) \in D(T). \end{cases}$$

Отже, вивчаємо оператор-функцію  $U(t)$ , задану рівністю

$$u(t) = U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda+i\theta)t} T_{\theta-i\gamma} \varphi d\theta. \quad (2)$$

**Теорема 1.** Розв'язок (2) еволюційного рівняння має асимптотику

$$u(t) = \sum e^{i\zeta_k t} \sum t^p (\varphi, e^{k,p}) h_{k,p} + O(1), t \rightarrow \infty,$$

де  $e_{k,p}, h_{k,p} \in H$  – деякі елементи.

Позначено

$$(A(\zeta)\psi)(\tau) = \psi(\tau) - B^* K(\zeta)^{-1*} A S_\zeta \psi, \quad (B(\zeta)\psi)(\tau) = \psi(\tau) - A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \psi.$$

Нехай  $A_-(\sigma), B_+(\sigma): H \rightarrow H$  – оператор-функції вигляду [3]

$$A_-(\sigma)\psi = \psi - B^* K_-(\sigma)^{-1*} (A S_\sigma \psi)_+, \quad B_+(\sigma)\varphi = \varphi - A^* K_+(\sigma)^{-1} (B S_\sigma \varphi)_+, \quad \sigma \in R.$$

Введемо лінійний підпростір

$$H_D = \left\{ \psi = \psi(s, \mu) : \psi'_s(s, \mu) \in H, \|\psi\|_p < \infty \right\}.$$

**Теорема 2.** Якщо  $\varphi, \psi \in H_D$ , тоді виконується наступна рівність Парсеваля для оператора  $T$

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( (B_+(\sigma)\varphi)(\sigma), (A_-(\sigma)\psi)(\sigma) \right)_{H_1} d\sigma + \sum_{k=1}^{k_0} (P_{\zeta_k} \varphi, \psi),$$

де  $P_{\zeta_k}$  – скінченновимірні оператори.

6. Diaba F. Cheremnikh E. V. On the point spectrum of transport operator // Math. Func. Anal. and Topology. – 2005. – Vol. 11, No. 1. P. 21-36.
7. Івасик Г. В., Черемних Є. В. Модель Фрідрікса для транспортного оператора // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643, № 643. – С. 30-36.
8. Івасик Г. В. Спектральний розклад для транспортного оператора. (Spectral decomposition for some transport operator) // Східно-Європейський журнал передових технологій. (Eastern-european journal of Enterprise Technologies) (<http://jet.com.ua>), 1 / 4 (55), 2012, 10-14. (English).

## SPECTRAL DECOMPOSITION FOR SOME TRANSPORT OPERATOR

*It is considered transport operator. Applying Fourier's transformation we obtain Friedrich's model. We use known formula for the jump of the resolvent for Friedrich's model in general case under certain conditions on perturbation. We verify conditions under which this formula holds in our case. With the help of method of contour integrating we obtain Parseval equality.*