Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-UMJ-39.pdf

УДК 621.391:519.22

ВЛАСТИВОСТІ КОВАРІАЦІЙНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ОЦІНКИ ПЕРІОДУ

Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Яворський І.М.

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів,
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, м. Бидгощ, Польща,
abzac@ipm.lviv.ua

У моделі прихованих періодичностей у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) періодичні властивості сигналу описуються величинами, які визначаються тільки поведінкою в часі математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції, спектральної густини тощо [1-2].

Метод визначення періоду на основі аналізу часової мінливості оцінок кореляційних характеристик описаний у роботі [3] можна узагальнити на випадок, коли математичне сподівання ПКВП не дорівнює нулю. Тоді доцільно використовувати коваріаційне перетворення

$$\hat{\hat{b}}(t,u,\tau)=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\xi(t+n\tau)\xi(t+u+n\tau).$$

Математичне сподівання цього функціоналу

$$S(\tau)=E\hat{\hat{b}}(t,u,\tau)=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\tilde{b}(t+n\tau,u)$$

при $\tau=T$ дорівнює коваріаційній функції сигналу

$$S(\tau)=\tilde{b}(t,u)=b(t,u)+m(t)m(t+u).$$

Флуктуаційна складова в даному випадку

$$N(\tau)=\hat{\hat{b}}(t,u,\tau)-S(\tau)=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\mathring{\tilde{\zeta}}(t+n\tau,u),$$

$$\mathring{\tilde{\zeta}}(t,u)=\xi(t)\xi(t+u)-\tilde{b}(t,u).$$

Для її середньоквадратичного значення маємо

$$EN^2(\tau)=\frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}b_{\zeta}\left(t+n\tau,(k-n)\tau,u\right),$$

де

$$b_{\zeta}\left(t+n\tau,(k-n)\tau,u\right)=$$
$$=E\xi\left(t+n\tau\right)\xi\left(t+u+n\tau\right)\xi\left(t+k\tau\right)\xi\left(t+u+k\tau\right)-\tilde{b}\left(t+n\tau,u\right)\tilde{b}\left(t+k\tau,u\right).$$

Введемо в розгляд параметр

$$\gamma=\frac{\sqrt{EN^2\left(T\right)}}{S\left(T\right)}. \tag{1}$$

Враховуючи, що непарні центральні моменти центрованого гаусового ПКВП дорівнюють нулю, то відношення (1) тоді можна записати

$$\gamma=\frac{1}{\tilde{b}\left(t,u\right)}\left[\frac{\sum\limits_{k=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|k|}{2N+1}\right)}{2N+1}\left[\begin{array}{l}b\left(t,kT\right)b\left(t+u,kT\right)+b\left(t,u+kT\right)b\left(t,u-kT\right)+\\+m^2\left(t+u\right)b\left(t,kT\right)+m^2\left(t\right)b\left(t,kT\right)+\\+m\left(t\right)m\left(t+u\right)\left[b\left(t,u+kT\right)+b\left(t,u-kT\right)\right]\end{array}\right]\right]^{\frac{1}{2}}$$

.Припустимо, що кореляційна функція ПКВП заникає з ростом зсуву u:

$$\lim_{|u|\to\infty} b\left(t,u\right)=0. \tag{2}$$

При виконанні умови (2) і великих N величина (1) буде досить малою (табл. 1). Тому властивості оцінки періоду можуть бути проаналізовані з використанням методу малого параметру. Для дисперсії оцінки:

$$D\left[\hat{T}\right]=9\left[N\left(N+1\right)\left(2N+1\right)\tilde{b}_t''\left(t,u\right)\right]^{-2}\sum_{m,n=-N}^{N}\left[\frac{\partial^2 b_{\zeta}\left(t+nx,my-nx,u\right)}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=T\\y=T}}$$

$$D\left[\hat{T}\right]=9\left[N\left(N+1\right)\left(2N+1\right)\tilde{b}_t''\left(t,u\right)\right]^{-2}\sum_{m,n=-N}^{N}\left[\frac{\partial^2 b_{\zeta}\left(t+nx,my-nx,u\right)}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=T\\y=T}}. \tag{3}$$

Для мультиплікативної моделі $\xi(t)=\eta(t)f(t)$, коли $m_{\eta}=E\eta(t)\neq 0$:

$$b_{\zeta}\left(t+nx,my-nx,u\right)=R_{\eta}^2\left(my-nx\right)+R_{\eta}\left(my-nx+u\right)R_{\eta}\left(my-nx-u\right)+$$
$$+m_{\eta}^2\left[2R_{\eta}\left(my-nx\right)+R_{\eta}\left(my-nx+u\right)+R_{\eta}\left(my-nx-u\right)\right]\times$$
$$\times f\left(t+nx\right)f\left(t+u+nx\right)f\left(t+mx\right)f\left(t+u+mx\right).$$

Вираз для дисперсії (3) тоді приймає вигляд

$$D\left[\hat{T}\right]=\frac{18f^2(t)}{\tilde{R}_\eta^2(0)\left[N(N+1)(2N+1)\left[f''(t)f(t)+\left[f'(t)\right]^2\right]\right]^2}\times$$

$$\times\sum_{m,n=1}^{N}mn\left[2\left[R_\eta^2\left[(m-n)T\right]-R_\eta^2\left[(m+n)T\right]+2m_\eta^2\left[R_\eta\left[(m-n)T\right]-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-R_\eta\left[(m+n)T\right]\right]\right]\left[f'(t)\right]^2+\left[\left[R_\eta'\left[(m-n)T\right]\right]^2-\left[R_\eta'\left[(m+n)T\right]\right]^2+\right.$$

$$+R_\eta''\left[(m-n)T\right]R_\eta\left[(m-n)T\right]-R_\eta''\left[(m+n)T\right]R_\eta\left[(m+n)T\right]+$$

$$\left.\left.+m_\eta^2\left[R_\eta\left[(m-n)T\right]-R_\eta\left[(m+n)T\right]\right]\right]f^2(t)\right].$$

де $\tilde{R}_\eta(0)=R_\eta(0)+m_\eta^2$.

Таблиця 1. Залежність малого параметру від кількості періодів N для різних α.

N	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
10	0.308606699	0.308606863	0.324689056
20	0.220863052	0.220863172	0.232646506
30	0.181071492	0.181071591	0.190809169
40	0.157134840	0.157134926	0.165619141
50	0.140719508	0.140719586	0.148335811
60	0.128564869	0.128564940	0.135534522
70	0.119098266	0.119098332	0.125562160
80	0.111455642	0.111455704	0.117509973
90	0.105117666	0.105117724	0.110831557
100	0.099750933	0.099750988	0.105176025

Для $R_\eta(u)=De^{-\alpha u^2}$, $f(t)=\cos\omega_0 t$ і вибравши $t=0$, маємо:

$$D\left[\hat{T}\right]=\frac{6\alpha}{\omega_0^4 N(N+1)(2N+1)\left(1+\dfrac{m_\eta^2}{D}\right)}.$$

Дисперсія в цьому випадку пропорційна до декременту заникання кореляційних зв'язків γ і зменшується при збільшені відношення квадрату математичного сподівання процесу $\eta(t)$ до його дисперсії. Виведені за допомогою методу малого параметра формули для дисперсії оцінок дають можливість визначати точність такого оцінювання і дослідити її залежність від довжини відрізка реалізації її параметрів, що описують імовірнісну структуру сигналу.

1. *Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н.* Методы вероятносного анализа Ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 319 с.
2. *Серебреников М. Г., Первозванский А. А.* Выявление скрытых периодчностей. – М: Наука, 1965. – 244 с.
3. *Яворський І.М., Юзефович Р.М., Мацько І.Й.* Схема Бюй-Балло для виявлення періодичних змін кореляційних характеристик стохастичних коливань // Відбір і обробка інформації. – 2009. – Вип. **30** (106). – С. 25-34.

THE PROPERTIES OF COVARIANCE FUNCTIONAL FOR PERIOD ESTAMATION

It is shown that covariance functional properties can be analyzed using the small parameter method.