Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-S-28a.pdf

УДК 511.7

МЕТРИЧНА ОЦІНКА ДИСКРИМІНАНТА МНОГОЧЛЕНА НА НЕВИРОДЖЕНОМУ МНОГОВИДІ

Савка І. Я.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, s-i@ukr.net

Для доведення існування розв’язків нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними виникає потреба оцінки знизу дискримінанта характеристичного многочлена диференціального рівняння.

Для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$ побудуємо многочлен $L_k(\lambda, y)$ за змінною λ степеня n, $n \geq 1$, із довільними дійсними коефіцієнтами b_{jk} вигляду

$$L_k(\lambda, y) = \lambda^n + b_{1k}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1,k}\lambda + b_{nk} + g_k(y), \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{1}$$

де $g_k(y) = y_1 k_1^n + y_2 k_2^n + \ldots + y_p k_p^n$. Позначимо через $\mathrm{D}_k(y)$ дискримінант многочлена $L_k(\lambda, y)$ за змінною λ.

Питання про оцінку знизу степенем $\tilde{k}^{-\delta}$ величин $\mathrm{D}_k(y)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, при великих значеннях $\tilde{k}$, де $\tilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2$, $\delta \in \mathbb{R}$, тобто про можливість виконання нерівності

$$|\mathrm{D}_k(y)| \geq \tilde{k}^{-\delta}, \tag{2}$$

для деякого дійсного числа δ. Такого типу оцінки дискримінанта розглянуто у монографії [3] для випадку незалежних параметрів $y_1, \ldots, y_p$ та у роботах [2,4] – для випадку одновимірного гладкого многовиду. В даній роботі ми поширюємо цей результат на випадок невиродженого многовиду M довільної розмірності, який можна параметризувати невиродженим відображенням .

*Означення 1***.** Нехай $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $d \in \mathbb{N}$, $d \leq p$, $U \subset \mathbb{R}^d$ – компактна підмножина і $f : U \to \mathbb{R}^p$ – відображення гладкості m. Відображення f називається m-невиродженим, якщо існує p лінійно незалежних частинних похідних $f(x)$ в кожній точці $x \in U$ до порядку m.

Означення 2. Многовид M називається δ-нормальним, якщо для майже всіх (стосовно індукованої міри Лебега на M) точок $y \in M$ нерівність (2) виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Число δ називається показником δ-нормальності M.

Лема [1]. Нехай функція $F \in C^l(U)$ така, що $\inf_{x \in U} \left| D_v^l F(x) \right| \ge \varepsilon_1$ для деякого вектора $v \in \mathbb{R}^d$ з нормою $|v| = 1$, де D_v – похідна за напрямком v, $D_v^l = D_v(D_v^{l-1})$. Тоді

$$\operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} \left\{ x \in U : |F(x)| < \varepsilon \right\} \le C(\operatorname{diam} U)^{d-1} \left(\varepsilon / \varepsilon_1 \right)^{1/l},$$

де додатна стала C залежить тільки від l.

Теорема. m-невироджений многовид M є δ-нормальним із показником нормальності $\delta > (n-1)(mp-n)$.

Доведення. За умовою теореми многовид M параметризується m-невиродженим відображенням $f : U \to M$, тобто $y = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^d$.

Дискримінант $\mathrm{D}_k(y)$ можна зобразити за допомогою значень многочлена $L_k(\lambda, y)$ на коренях $\mu_{1k}, \ldots \mu_{n-1,k}$ його похідної $\partial L_k(\lambda, y) / \partial \lambda$

$$D_k(y)\Big|_{y=f(x)} = (-1)^{n(n-1)/2} n^n \prod_{i=1}^{n-1} L_k(\mu_{ik}, y)\Big|_{y=f(x)} . \tag{3}$$

Для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$ позначимо функції $F_{ik}(x) := L_k\left(\mu_{ik}, f(x)\right)$, $i = 1, \ldots, n-1$, і оцінимо їх знизу за допомогою метричного підходу. Для цього введемо множини $A_k^1, \ldots, A_k^{n-1}$ за формулами

$$A_k^i = \left\{ x \in U : |F_{ik}(x)| < n^{n/(1-n)} \tilde{k}^{-\delta_1} \right\}, \qquad \delta_1 \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}^p,\ i = 1, \ldots, n-1,$$

а також множини $A^1, \ldots, A^{n-1}$, де A^i – множина тих точок $x \in U$, для яких безліч раз (стосовно вектора k) виконується нерівність $|F_{ik}(x)| < n^{n/(1-n)} \tilde{k}^{-\delta}$.

Для доведення теореми досить показати, що при деякому $\delta_1 \in \mathbb{R}$ $\operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} A^1 = \ldots = \operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} A^{n-1} = 0$. При оцінюванні мір виняткових множин будемо використовувати методику роботи [1].

Оскільки відображення f – m-невироджене, то для кожної точки $x \in U$ існує набір пар (залежний від x)

$$(v_1, \ell_1),\ (v_2, \ell_2), \ldots,\ (v_p, \ell_p),$$

де $v_j \in \mathbb{R}^p$, $|v_j| = 1$, $\ell_j \in N$, $1 \le \ell_j \le m$, $j = 1, \ldots, n-1$, такий, що вектори $D_{v_1}^{\ell_1} f(x), \ldots, D_{v_p}^{\ell_p} f(x)$ лінійно незалежні. Тоді система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} D_{v_1}^{\ell_1} f_1(x) k_1^n + D_{v_1}^{\ell_1} f_2(x) k_2^n \ldots + D_{v_1}^{\ell_1} f_p(x) k_p^n = D_{v_1}^{\ell_1} F_{ik}(x), \\ D_{v_2}^{\ell_2} f_1(x) k_1^n + D_{v_2}^{\ell_2} f_2(x) k_2^n \ldots + D_{v_2}^{\ell_2} f_p(x) k_p^n = D_{v_2}^{\ell_2} F_{ik}(x), \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ D_{v_p}^{\ell_p} f_1(x) k_1^n + D_{v_p}^{\ell_p} f_2(x) k_2^n \ldots + D_{v_p}^{\ell_p} f_p(x) k_p^n = D_{v_p}^{\ell_p} F_{ik}(x), \end{cases} \tag{4}$$

стосовно вектора $\left(k_1^n,...,k_p^n\right)$ має єдиний розв'язок, який зображається за формулами Крамера

$$k_j^n = W_{jk}(x)/\det\left[D_{v_j}^{\ell_j} f_i(x)\right]_{i,j=1}^n, \tag{5}$$

де $W_{jk}(x)$ визначник матриці, яка отримується із матриці $\left[D_{v_j}^{\ell_j} f_i(x)\right]_{i,j=1}^n$ шляхом заміни її j-го стовпця на стовпець правої частини системи (4).

Оскільки $(p+1)^{-n/2}\tilde{k}^n \le |k_1|^n + ... + |k_p|^n$ та існують такі сталі (незалежні від k) $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$, що виконуються нерівності

$$\left|\det\left[D_{v_j}^{\ell_j} f_i(x)\right]_{i,j=1}^n\right| \ge C_1 > 0, \ \sum_{j=1}^p \left|W_{jk}(x)\right| \le C_2 \max_{j=1,...,p}\left|D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x)\right|,$$

то із формули (5) при $C_3 = C_1^{-1}C_2(p+1)^{n/2}$ випливає нерівність

$$\left(\forall x \in U\right) \qquad C_3\tilde{k}^n \le \max_{j=1,...,p}\left|D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x)\right|. \tag{6}$$

З неперервності відображення $D_{v_j}^{\ell_j} f(x)$ на компакті U випливає рівномірна неперервність на U. Тоді, для кожного $j \in \{1,...,p\}$ існує стала $\gamma_j > 0$ така, що для будь-яких $x^1, x^2 \in U$, які задовольняють умову $\left|x^1 - x^2\right| < \gamma_j$, виконується нерівність

$$\left|D_{v_j}^{\ell_j} f(x^1) - D_{v_j}^{\ell_j} f(x^2)\right|_\infty < C_3/(2p). \tag{7}$$

Покладемо $C_4 = 2\min\{\gamma_1,...\gamma_p\}$. Візьмемо кулю $K(x^1)$ з центром в точці x^1, діаметр якої задовольняє нерівність $\operatorname{diam} K(x^1) \le C_4$.

Із оцінки (6) випливає, що існує такий індекс j із множини $\{1,...,p\}$, що

$$\left|D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x^1)\right| \ge C_3\tilde{k}^n. \tag{8}$$

Використовуючи нерівність (7), для будь-якого $x^2 \in K(x^1)$ отримаємо

$$\left|D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x^1) - D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x^2)\right| \le p\left|D_{v_j}^{\ell_j} f(x^1) - D_{v_j}^{\ell_j} f(x^2)\right|_\infty \tilde{k}^n \le C_3\tilde{k}^n/2,$$

де $|y|_\infty = \max_{i=1,...,p}|y_i|$, звідки на основі (8) випливає

$$\left(\forall x^2 \in K(x^1)\right) \qquad \left|D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x^2)\right| \ge C_3\tilde{k}^n/2.$$

Таким чином, існують такі додатні сталі C_3, C_4, що для довільної кулі $K \subset U$, $\operatorname{diam} K \le C_4$, існує пара (v_j, ℓ_j) така, що $\inf_{x\in K}\left|D_{v_j}^{\ell_j} F_{ik}(x)\right| \ge C_3\tilde{k}^n/2.$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\operatorname{diam} U \le C_4$. В іншому разі, початкову область зміни x можна представити як об'єднання скінченного числа куль, діаметр яких менший за C_4 , і довести теорему на кожній із цих куль.

Застосувавши лему до функції $F_{ik}(x)$, для кожного вектора k отримаємо оцінку міри множини A_k^i

$$\operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} A_k^i \le C_5 (\operatorname{diam} U)^{\ell_j - 1} \left(\frac{2n^{n/(1-n)} \tilde{k}^{-\delta_1}}{C_3 \tilde{k}^n} \right)^{1/\ell_j} \le C_6 \tilde{k}^{-\frac{n+\delta_1}{\ell_j}} \le C_6 \tilde{k}^{-\frac{n+\delta_1}{m}} ,$$

де $C_5 = C_5(\ell_j) > 0$, $C_6 = \max\limits_{j=1,\dots,p} n^{\frac{n}{(1-n)\ell_j}} \left(2/C_3\right)^{\frac{1}{\ell_j}} C_4^{\ell_j - 1} C_5(\ell_j) > 0.$

Оскільки ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} A_k^i$ є збіжним при $\delta_1 > pm - n$, то на підставі леми Бореля-Кантеллі отримаємо, що $\operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} A^1 = \ldots = \operatorname{meas}_{\mathbb{R}^d} A^{n-1} = 0$.

Отже, для майже всіх точок $x \in U$ нерівності

$$\left| F_{ik}(x) \right| \ge n^{n/(1-n)} \tilde{k}^{-\delta_1} , \ \delta_1 > pm - n , \ i = 1, \ldots, n-1, \tag{9}$$

виконуються для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Із формули (3) та нерівності (9) отримуємо нерівність (2) при $\delta = (n-1)\delta_1$, звідки і випливає твердження теореми.

1. *Берeсневич В.В.* Аналог теоремы Хинчина-Грошева для невырожденных многообразий в R^n // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – **44,** №4. – С. 42–45.
2. *Ільків В.С.* Уточнення оцінок дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007, №5. – С. 28–35.
3. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
4. *Симотюк М.М.* Метричні оцінки дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Мат. вісник НТШ. – 2006. – 3. – С. 149–156.

METRIC ESTIMATE FOR DISCRIMINANT OF THE POLYNOMIAL ON NON-DEGENERATE MANIFOLD

The metric estimate for discriminant of the polynomial whose coefficients belong to non-degenerate is established. The property of normality non-degenerate manifold is investigated.