Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-PL-27.pdf

УДК 539.3

ЧИСЛОВА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ РУХУ ГАЗУ В ТРУБАХ ТА ПІДЗЕМНИХ СХОВИЩАХ

П'янило Я.Д., Лопух Н.Б.

ЦММ ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України

Фізичні процеси, як правило, є нелінійними за параметрами, що їх характеризують. Зокрема, неізотермічний нестаціонарний руху газу в трубопроводі описується диференціальними рівняннями (або системами диференціальних рівнянь) в частинних похідних, які в загальному випадку є нелінійними [1]. Нелінійним диференціальним рівнянням описується і процес фільтрації газу в пористих середовищах складної структури. Розв'язування поставлених на їх основі відповідних задач математичної фізики пов'язане із суттєвими труднощами. На цей час не існує аналітичних методів для їх розв'язування. Основними підходами розв'язування таких задач є лінеаризація вихідних рівнянь або побудова ітераційних процедур. Кожен з них має свої переваги та недоліки. Очевидно, що поєднання декількох методів розв'язування з врахуванням їх позитивних сторін буде більш ефективним , ніж використання окремо кожного методу.

Метою роботи є дослідження числових моделей руху газу в трубопроводах та фільтрації газу в пластах підземних сховищ.

1. Фільтрація газу в пластах підземних сховищ. Нехай $\Omega_3 \subset R^3$ – тривимірна область, яку займає пласт ПСГ (рис.1). На Ω_3 задана множина точок (множина свердловин) з координатами $\{x_i, y_i\}$, $i = 1,...,n$ та значення тисків $p(x_i, y_i, z_i, t_0)$ в цих точках в момент часу t_0. Розподіл тиску газу $p(x, y, z, t)$ в пласті в нестаціонарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_z h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial z}\right)=2\alpha_n mh\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\chi}\right)+4mhqp_{st}, \quad (1)$$

де k_u – проникність пласту в напрямі u, μ – динамічна в'язкість газу, χ – коефіцієнт стисливості, h – товщина пласту, m – пористість пласту, α_n – коефіцієнт газонасиченості, q – густина відбору, p_{st} – значення атмосферного тиску в стандартних умовах.

Необхідно знайти розв'язок $p(x, y, z, t)$ рівняння (1) за відомими значеннями $p(x_i, y_i, z_i, t_j)$. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі

$$M = \int_V \rho dv ,$$

де інтегрування проводиться по об'єму сховища V, M - маса газу в сховищі, ρ - густина газу. Якщо врахувати подані вище зауваження щодо геометрії сховища і перейти від маси газу до об'єму в стандартних умовах $Q_{зап}$, то останню рівність наближено можна записати наступним чином

$$Q_{зап} = \frac{T_{am}}{P_{am}} \int_0^F \int_0^h \frac{p\,m}{T\,z} dF\,dh \approx \frac{T_{cm}}{p_{cm}} \frac{\overline{p}}{\overline{T}\,\overline{z}} \overline{m}\,\overline{h}\,F .$$

Тут рискою зверху позначено усереднені значення відповідних величин, а F - площа пласту сховища. Рівняння (1) на границі Γ_2 області Ω задовольняє крайову умову Неймана:

$$\Phi p(x, y) = 0,\ (x, y) \in \Gamma_2 ;$$

де $\Phi p \overset{def}{=} \frac{k \cdot h}{\mu \cdot z}\frac{\partial p}{\partial x}\nu_x + \frac{k \cdot h}{\mu \cdot z}\frac{\partial p}{\partial y}\nu_y$; $\nu_x = \cos(\nu, x)$, $\nu_y = \cos(\nu, y)$, умову Діріхле на Ω_*: $p(x_i, y_i, z_i, t^j) = p_1$, $(x_i, y_i) \in \Omega_*$; Γ_2 - зовнішня границя області Ω; Ω_* - підмножина області Ω, яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків p_i^j, j - часовий індекс; ν – зовнішня нормаль до області $\Omega \subset R^2$.

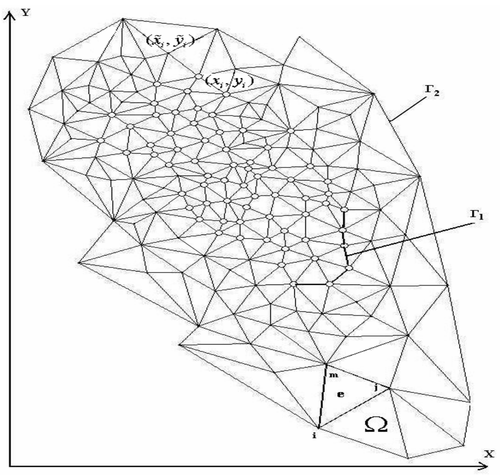

Рис.1. Область розбиття на трикутні елементи пласту мринського ПСГ.

2. Рух газу в трубах в ізотермічному випадку з достатньою для практики адекватністю описується нелінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних [1,2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \alpha\rho\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right) + \rho g\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\lambda\rho\upsilon^2}{2D} + \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Тут p, ρ, υ — відповідно тиск, густина та швидкість руху газу; α - коефіцієнт Коріоліса; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; D — внутрішній діаметр трубопроводу; g — прискорення вільного падіння; $h(x)$ — крива, що описує рельєф траси трубопроводу; c — швидкість звуку в газі; $t > 0$ — час; $x \in [0, l]$ — лінійна координата, l — довжина трубопроводу. Для замикання системи використовується рівняння стану $\rho = p/zRT$, де R - газова стала; T - температура газу; z - коефіцієнт стиснення газу, який показує відмінність реального газу від ідеального.

При постановці задачі математичної фізики початковою умовою, як правило, виступає розподіл тиску вздовж трубопроводу у вихідному стаціонарному режимі руху газу. Граничні умови вибираються в залежності від відомої вхідної інформації на функцію тиску або на об'ємну витрату $q(x,t)$, яка зі швидкістю руху газу пов'язана наступним чином $q(x,t) = \pi D^2 \upsilon(x,t)/4$.

Розв'язок задач математичної фізики шукається методом скінченних елементів. Досліджено вплив апроксимуючих функцій на елементах розбиття першого і другого порядку, а також апроксимації Петрова-Гальоркіна на збіжність та точність результатів обчислень.

Ітераційна процедура розв'язування поставленої задачі математичної фізики з використання методу скінчених елементів полягає в наступному.

- На першому етапі розв'язується аналітично лінеаризований варіант вихідної системи при нульовій неув'язці. Отриманий розв'язок виступає за початкове наближення ітераційної процедури.
- На наступному кроці знайдений розв'язок використовується для визначення неув'язки і уточнення початкового наближення шуканого розв'язку.

Процес ітерацій продовжується до цього часу, поки різниця між двома послідовними наближеннями буде меншою за задану точність.

3. Метод скінчених елементів. Для спрощення записів і більшої ілюстративності при розв'язуванні задач математичної фізики стосовно руху газу в трубі доцільно використати векторні та матричні подання величин. В розглядуваному випадку шукані функції ω та p зручно подати як вектор $W = (\omega, p)$. Тоді в матрично-векторній формі система (1) записується у вигляді

$$A\frac{\partial W}{\partial t}+B\frac{\partial W}{\partial x}=VW+M$$

де $W=[\omega,p]$ - вектор шуканих функцій ω і p;

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ c^2 & 0\end{pmatrix};\quad V=\begin{pmatrix}-c_2 & -c_3\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix}-c_4\\ 0\end{pmatrix}.$$

Однією з переваг методу скінченних елементів є те, що він дозволяє досліджувати фізичні процеси, які описуються диференціальними рівняннями із розподіленими параметрами.

Аналогічно будується МСЕ для знаходження розподілу тиску в пласті.

В ході обчислювального експерименту проведено дослідження впливу кроків дискретизації за координатою та часом на достовірність і збіжність ітераційного процесу; визначено межі застосовності побудованого алгоритму стосовно геометричних параметрів трубопроводу. На основі проведених досліджень побудовано пакет прикладних програм, який використовується в програмному комплексі розрахунку параметрів складних газотранспортних систем.

В процесі проведення числових експериментів встановлено, що: існують такі співвідношення між кроками розбиття за координатою Δx і часом Δt, при яких обчислювальний процес є розбіжним; в області збіжності обчислювальний процес збігається швидше при $\Delta t\to 0$ і $\Delta x\to 0$; дискретизація за координатою має більший вплив на збіжність процесу, ніж дискретизація за часом; на величину перехідних часів суттєвий вплив має динаміка зміни граничних умов та довжина трубопроводу.

1. *Александров А.В., Яковлев Е.И.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. – М.: Недра, 1974. – 432 с.
2. *Лопух Н, Притула М., П'янило Я., Савула Я.* Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. - 2007. - Вип.1. - С. 4-7.

NUMERICAL MODELS' MOVEMENT OF GAS IN THE PIPE AND UNDERGROUND STORAGE

Deployment numerical model of unsteady motion of gas in the pipeline and process gas filtration in porous media is devoted to this work. The combination of several methods for solving tasks in view of their positive sides is more effective than using each method separately.