Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-P-26.pdf

УДК 517.95

ПРО МІШАНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ПАМ'ЯТІ В НЕЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Процах Н.П.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

У праці розглянуто мішану задачу для ультрапараболічного рівняння з оператором пам'яті в нециліндричних областях. Знайдено області, в яких мішана задача має єдиний розв'язок.

Нехай $\Omega \subset R^n$, $D \subset R^l$ – обмежені області з межами $\{\partial\Omega, \partial D\} \subset C^1$, функція $\alpha : [0,T] \to R^1$ є неперервно диференційовною на $[0,T]$ та $\alpha(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$. Позначимо через $\Omega_t = \{x : x \in \alpha(t)z,\ z \in \Omega\}$, $y \in D$, $t \in [0,T]$, $G = \Omega_t \times D$, $Q_T = \bigcup\limits_{0 \le t \le T} \Omega_t \times D \times \{t\}$; $\Sigma_T = \bigcup\limits_{0 \le t \le T} \partial\Omega_t \times D \times \{t\}$ – бічна межа області Q_T за змінними x, $S_T = \bigcup\limits_{0 \le t \le T} \Omega_t \times \partial D \times \{t\}$ – бічна межа області Q_T за змінними y, ν – вектор нормалі до поверхні S_T.

В області Q_T для довільного $T > 0$ розглянемо мішану задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + \int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,y,s)\, ds = f(x,y,t), \tag{1}$$

$$u|_{S_T^1} = 0, \quad u|_{\Sigma_T} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \tag{3}$$

де $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0\}$.

Означення. Функцію $u \in H^1(Q_T) \cap C((0,T); L^2(G)), u|_{\Sigma_T} = 0,$ назвемо розв'язком задачі (1)–(3), якщо вона задовольняє початкову умову (3) та рівність

$$\int\limits_{Q_T} [u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+\int\limits_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,y,s) ds] \, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_T} f(x,y,t)\, dx\, dy\, dt,$$

для довільного $v \in \{v, v_{x_i} \in L(Q_T), i = \overline{1,n}, v|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(0,T;C(G)), a_{ij} = a_{ji}, \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq a_0 |\xi|^2$ д. м. в.

$(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i,j = \overline{1,n}$, a_0 – додатна стала;

(F): $f, f_t, f_{y_i} \in L^2(Q_T)$ для всіх $i = \overline{1,l}$;

(G): $g \in L^\infty([0,T])$;

(L): $\lambda_i \in L^\infty(0,T;C(G)), \lambda_{iy_j} \in L^\infty(Q_T)$ д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i,j = \overline{1,l}$;

(U): $u, u_t, u_{y_i} \in L^2(G)$ для всіх $i = \overline{1,l}$.

Теорема. Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови (A)–(U) і, крім того, $\frac{a_0}{(\alpha(t))^2} - \int\limits_0^\tau \frac{g(\xi)}{(\alpha(\xi))^2} d\xi > 0$, $\frac{n\alpha'(t)}{\alpha(t)} - ess\sup\limits_{Q_T} \lambda_y \geq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $\alpha \in C^1[0,T]$, $\alpha' \geq 0$, $g \geq 0$, $f|_{S_T^1} = 0$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).

Для отримання результату цієї теореми, за допомогою заміни $x = \alpha(t)z$, зводимо задачу (1)–(3) до задачі в циліндричній області $Q = \Omega \times D \times (0,T)$. Розв'язність отриманої задачі доводимо за допомогою методу Фаедо-Гальоркіна.

ON MIXED PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH MEMORY TERM IN NONCYLINDRICAL DOMAIN

The mixed problem for nonlinear ultraparabolic equation with the memory term is considered in the noncylindrical domains. The existence and the uniqueness of the solution for this problem is obtained in some classes of domains.