Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-N-22.pdf

УДК 517.95

# АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗБУРЕННЯМ

**Нечепуренко М.О.**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
m.nechepurenko@mfc.in.ua

У цій праці досліджено асимптотичну поведінку узагальненого розв'язку однієї крайової задачі для нелінійної системи рівнянь з інтегральним збуренням в необмеженій за часом області. Подібні задачі моделюють, наприклад, коливання струни при поперечній складовій напруженості і розглядались багатьма дослідниками. Для обмеженої області деякі результати існування отримані у припущенні певної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності; а для необмеженої області отримано умови існування локального узагальненого розв'язку подібної задачі в просторах локально інтегровних функцій.

В області $Q_T = \Omega\times(0,\infty)$ розглянемо мішану задачу для системи рівнянь

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} + a_0(x)u + a_1(x)u_t + a_2(x)\theta - \\ -\left(\int_\Omega u_{x_i}^2 dx\right)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + b_0(x)|u|^{p-2}u = f_1(x,t), \tag{1}$$

$$\theta_t - \sum_{i,j=1}^{n}(c_{ij}(x)\theta_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}(b_i(x)u_t)_{x_i} + c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta + c_1(x)u_t + \\ + c_2(x)\theta = f_2(x,t) \tag{2}$$

з початковими та крайовими умовами:

$$u(0,x) = u_0(x),\quad u(0,x) = u_1(x),\quad \theta(0,x) = \theta_0(x) \tag{3}$$

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0,\quad \theta\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0. \tag{4}$$

Вважаємо, що область $\Omega$ обмежена область в $R^n$ з межею $\partial\Omega\subset C^1$, регулярною в сенсі Кальдерона. Вважатимемо, що $p>2, q>2$; $u_0, u_1, \theta_0 \in H_0^1(\Omega)$; $f_1(x,t),\ f_2(x,t),\ f_{1t}(x,t),\ f_{2t}(x,t) \in L^2(Q)$.

Нехай коефіцієнти системи (1)–(2) задовольняють такі умови:

**(H$_1$)** $a_0, a_1, a_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,

$a_0(x) \geq A_0 > 0$, $a_1(x) \geq A_1 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

**(H$_2$)** $b_{ij} \in W^{2,\infty}(\Omega), i, j \in \{1,...,n\}; b_i, b_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,

$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq B_2 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i \in R$ і для майже всіх $x \in \Omega, B_2 > 0$,

$b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для всіх $i, j \in \{1,...,n\}$ і для майже всіх $x \in \Omega$,

$b_0(x) \geq B_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

**(H$_3$)** $c_{ij} \in W^{2,\infty}(\Omega), i, j \in \{1,...,n\}; c_0, c_1, c_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,

$\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C^0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i \in \mathrm{R}$ і для майже всіх $x \in \Omega, C^0 > 0$,

$c_{ij}(x) = c_{ji}(x)$ для всіх $i, j \in \{1,...,n\}$ і для майже всіх $x \in \Omega$,

$c_0(x) \geq C_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$c_2(x) \geq C_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

*Означення. Узагальненим розв'язком задачі* (*1*)–(*4*) назвемо пару функцій $(u,\theta)$ таких, що

$$u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L_{loc}^p((0,T); L^p(\Omega)), \quad u_t \in L_{loc}^\infty((0,T); H_0^1(\Omega)),$$
$$u_{tt} \in L_{loc}^\infty((0,T); L^2(\Omega)), \quad \theta \in C([0,T]; \quad H_0^1(\Omega)) \cap L_{loc}^q((0,T); L^q(\Omega)),$$
$$\theta_t \in L_{loc}^\infty((0,T); L^2(\Omega))$$

для $T \leq +\infty$ і задовольняють початкові умови (3) та систему інтегральних рівностей

$$\int\limits_{\Omega_\tau} [u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} v + a_0(x)uv + \quad + a_1(x)u_t v +$$
$$+ a_2(x)\theta v]dx + (\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx)(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} dx) +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} b_0(x)|u|^{p-2} uv dx = \int\limits_{\Omega_\tau} f_1(x,t)\,dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} [\theta_t w + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i} w_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_t w_{x_i} + c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta w + c_1(x)u_t w +$$
$$+ c_2(x)\theta w]dx = \int\limits_{\Omega_\tau} f_2(x,t)\,dx$$

для майже всіх $\tau \in (0,T)$ і всіх $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Якщо $T < +\infty$, то такий розв'язок називатимемо *локальним*, а якщо $T = +\infty$, *глобальним*.

*Теорема 1.* Нехай виконуються умови $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_3})$ і, крім того, нехай $2 < p \le \frac{2(n-1)}{n-2}$ при $n > 2$ і $p > 2$ при $n \in \{1,2\}$; $q > 2$; $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$, тоді існує локальний узагальнений розв'язок задачі (1) – (4).

Введемо позначення:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} [u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x) u^2 + \theta^2] dx +$$

$$+ \frac{1}{p}\int_{\Omega_t} b_0(x) |u|^p \, dx + \frac{1}{4}\Big(\int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx\Big)^2.$$

Розглянемо систему нерівностей

$$2A_1\nu_2 - \nu_1\nu_2 - C_1 \ge \nu_0, \;\; 2C_2\nu_1 - A_2 - \nu_1\nu_2 > \nu_0, \;\; \nu_0 > 0, \qquad (5)$$

під додатним розв'язком якої розумітимемо такі $(\nu_1, \nu_2)$, що $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$. Позначимо через $\Xi$ множину всіх додатних розв'язків системи (5). Завжди існують такі значення параметрів $A_1$, $A_2$, $C_1$, $C_2$, для яких $\Xi \ne \varnothing$.

*Теорема 2.* Нехай коефіцієнти системи рівнянь (1)–(2) задовольняють умови $(\mathbf{H_1})$ - $(\mathbf{H_3})$, $\Xi \ne \varnothing$; $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$; $p > 2, q > 2$. Нехай, крім того, при $t \to +\infty$ виконується нерівність

$$\int_{Q_t} e^{\frac{\varepsilon M_2 \tau}{2}} [|f_1(x,\tau)|^2 + |f_2(x,\tau)|^2] dx d\tau \le \alpha t^{\beta}$$

для деяких додатніх сталих $\varepsilon, M_2, \alpha$ і $\beta$. Тоді узагальнений розв'язок задачі (1)–(4) задовольняє оцінку

$$E(t) \le C e^{-\frac{\varepsilon M_2 t}{2}}$$

для всіх $t \ge 0$ і всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де $C$ і $\varepsilon_0$ – додатні сталі.

Дослідження систем гіперболічно-параболічного типу зумовлено тим, що вони мають широке застосування у важливих питаннях механіки, фізики та техніки. У даній роботі досліджено мішану задачу з однорідними крайовими умовами Діріхлє та ненульовими початковими умовами для нелінійної зв'язної системи еволюційних рівнянь з інтегральним збуренням в необмеженій за часом області. Така задача узагальнює певні математичні моделі термодинаміки та містить, зокрема, як частковий випадок, нелінійну канонічну модель Кіргхофа. Розглянута асимптотична поведінка узагальненого розв'язку задачі при певних умовах на коефіцієнти рівняння і початкові дані.

1. *Aassila M.* Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system // Applied Math Letters. – 2000. - **13.** – P. 71 -76.
2. *D'Ancona P., Spagnolo S.* Nonlinear perturbation of the Kirchhoff-Carrier equations. – Univ. Pisa Lecutures Notes, 1992.
3. *Medeiros L.A.* On some nonlinear perturbations of Kirchhoff-Carrier's operator // Camp. Appl. Math. – 1994. – **13**:3. – P. 225-233.
4. *Nechepurenko M.O.* The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain // Visnyk Lvivskogo Univ. Ser.Mech-Math. – 2007. – **67.** – P. 207-223.
5. *Нечепуренко М.О., Торган Г.Р.* О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области // Український математичний вісник. — 2010. – **7**:1. – С. 49-72.

## ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM OF EQUATIONS WITH INTEGRAL PERTURBATION

*In this paper we investigate the asymptotic behaviour of generalized solutions to the one initial boundary value problem for a nonlinear system of equations with integral perturbation in unbounded by time domain.*