Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-M-18.pdf

УДК 512.552.12

ЧИСТО-МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ PIM-МОДУЛІ ТА ЦІГЛЕРІВ СПЕКТР

Малоїд М.О.

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Розлядаємо тільки комутативні кільця; надалі R таке кільце з ненульовою одиницею. Лівий (правий) ідеал P цього кільця називається *лівим (правим) первинним ідеалом*, якщо з того, що $aRb \subseteq P$ випливає, що $a \subseteq P$ або $b \subseteq P$. Лівий R −модуль M називається *мультиплікаційним модулем*, якщо для кожного підмодуля N з M, існує такий ідеал B кільця R, що $N = BM$. Якщо ця умова виконується лише для чистих підмодулів, то модуль називається *чисто-мультиплікаційним*. Модуль M називається *чисто-ін'єктивним*, якщо він є ін'єктивним над чистими вкладеннями. Окрім того, для кожного модуля M існує чисте вкладення цього модуля в чисто-ін'єктивний модуль $H(M)$, котрий називається *чисто-ін'єктивною оболонкою модуля* M.

Означення 1. Нехай M - довільний модуль, N - його плідмодуль. Назвемо N *чисто-нерозкладним під модулем*, якщо чисто-ін'єктивна оболонка фактор-модуля M/N буде нерозкладним модулем.

Введемо також поняття Ціглерового спектру для модуля M: Zg_M

Означення 2. Нехай M мультиплікаційний модуль, N - підмодуль M. Під *точками Ціглерового спектру* розумітимемо класи ізоморфізму модулів виду $H(M/N)$, де N пробігає чисто-нерозкладні підмодулі модуля M. Базою цього топологічного простору будуть всі множини такого вигляду: $(\varphi/\psi) = \{N \in Zg_R : \varphi(N)/\psi(N \neq 0)\}$, де $\varphi(N)$ та $\psi(N)$ − формульні підгрупи і $\varphi \geq \psi$.

Для модуля M через $Spec(M)$ позначимо множину всіх первинних підмодулів модуля M, через $Max(M)$ позначимо множину всіх максимальних підмодулів модуля M, через $Min(M)$ позначимо множину всіх мінімальних підмодулів модуля M через $Spec_{Zg}(M)$ позначимо множину всіх чисто-первинних підмодулів модуля M.

Означення 3. Нехай M довільний лівий мультиплікаційний модуль. Такий модуль називається *lpm-модулем* (*лівим pm-модулем*), якщо кожен первинний підмодуль цього модуля має, з точністю до ізоморфізму один простий гомоморфний образ.

Тобто, якщо $f:P\to S_1$ і $g:P\to S_2$ - два довільні модульні гомоморфізми, і $S_i, i=1,2$ - прості підмодулі модуля M, P - первинний підмодуль цього модуля, то $S_1\cong S_2$.

Означення 4. Нехай M довільний лівий модуль. Такий модуль називається *lpm -модулем* (*лівим pm -модулем*), якщо кожен первинний підмодуль цього модуля міститься, з точністю до відносності, в єдиному максимальному підмодулі модуля M.

Твердження 5. Подані вище означення 3 і 4 еквівалентні.

Доведення необхідності ґрунтується на тому факті, що сума двох максимальних підмодулів рівна всьому модулю, і фактор-модулі по цих максимальних підмодулях будуть простими підмодулями. Припускаємо, що існують два різні максимальні підмодулі, що містять первинний підмодуль P, і доводиться протилежне. Для доведення достатності розглянемо два довільні модульні гомоморфізми $f:P\to S_1$ та $f:P\to S_1$ з первинного підмодуля P в прості підмодулі $S_i, i=1,2$. Використовуємо той факт, що ядра цих гомоморфізмів $Kerf=M_1$, $Kerg=M_2$ будуть дорівнювати двом різним максимальним підмодулям модуля M. Тоді існуватимуть такі максимальні ідеали I та J, для котрих $Kerf=IP$ і $Kerg=JP$. Поступово отримуємо суперечність, спираючись на акт, що кожен первинний підмодуль повинен міситися в єдиному максимальному підмодулі.

Твердження 6. Нехай M лівий мультиплікаційний R -модуль. Якщо L,N пара підмодулів M, то $V(L)\cap V(N)=0$ тоді і лише тоді, коли $L+N=M$, де

$$V(L)=\left\{P\in Spec_l(M)\middle|L\subseteq P\right\} \text{ і } V(N)=\left\{P\in Spec_l(M)\middle|N\subseteq P\right\}.$$

Теорема 7. Якщо M - мультиплікаційний R −модуль, і простір $Max(M)$ буде ретрактом простору $Spec(M)$, тоді M буде *lpm* -модулем.

Окрім того, отримуємо висновки, що кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного *lpm* -модуля міститиме єдиний мінімальний первинний підмодуль, і що простір $Min(M)$ мінімальних первинних підмодулів буде ретрактом простору $Spec(M)$.

Означення 8. Нехай M мультиплікаційний модуль, N -підмодуль M. Модуль M називатимемо *pim -модулем*, якщо кожен чисто-нерозкладний підмодуль міститься в єдиному максимальному підмодулі.

Твердження 9. Кожен гомоморфний образ чисто-мультиплікаційного модуля є чисто-мультиплікаційним модулем.

Твердження 10. Нехай R − кільце, M лівий чистий мультиплікаційний модуль, B − такий ідеал кільця R, що $M=BM$. Тоді $N=BN$ для кожного чистого підмодуля N з M.

Теорема 11. Якщо M - чисто-мультиплікаційний $R-$модуль, і простір $Max(M)$ буде ретрактом простору $Spec_{Zg}(M)$, тоді M буде pim-модулем.

1. *Guoyin Zhang, Wenting Tong, Fanggui Wang,* Multiplication Modules, in Which Every Prime Submodule Is Contained in a Unique Maximal Submodule // Communications in algebra. – 2004. – **32**. – P. 1945-1959.
2. *Mike Prest,* Topological and Geometric aspects of The Ziegler Spectrum. - Department of Mathematics Univercity of Manchester, UK.
3. *Tuganbaev A.A.,* Multiplication Modules // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. - **123**, № 12. – P. 3839-3905.

PURE MULTIPLICATION PIM-MODULES AND ZIEGLER SPECTRUM

It is shown that if M is pure multiplication left R-module, and $Max(M)$ is retract of $Spec_{Zg}(M)$, then M is pim-module. Also there are shown some properties of multiplication modules and pure-multiplication modules, especially are given two equivalent notions of lpm-module.