Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-KV-15.pdf

УДК 539.3

ВИХІДНИЙ ПОТІК ЗВ'ЯЗУЮЧОГО НЕЙРОНУ ІЗ ЗАТРИМАНИМ ЗВОРОТНІМ ЗВ'ЯЗКОМ НЕ Є МАРКІВСЬКИМ

Кравчук К.Г., Відибіда О.К.

Інститут теоретичної фізики ім. Боголюбова, Київ, kgkravchuk@bitp.kiev.ua

Нейронні мережі характеризуються наявністю значної кількості зворотніх зв'язків. Для опису стану такої системи необхідно задати не лише стан нейронів, з яких вона складається, але й стан ліній зв'язку між нейронами. Стан ліній зв'язку визначається позиціями імпульсів в них і не може бути виміряний експериментально. Разом з тим, очевидно, що моменти пострілів нейронів істотно залежать від часів приходу імпульсів з ліній зв'язку, які, в свою чергу, залежать від моментів попередніх пострілів. Це підштовхує до думки, що послідовність довжин інтервалів між пострілами нейронів не може бути представлена як послідовність незалежних випадкових величин і, більше того, може взагалі не задовольняти властивості марковості.

В цій роботі ми з'ясовуємо питання про немарковість вихідного потоку у випадку найпростішої рекурентної мережі, а саме – єдиного нейрону із затриманим зворотнім зв'язком. За вхідну стимуляцію взято пуассонівський потік. В якості нейронної моделі обрано зв'язуючий нейрон (ЗН), оскільки це дозволяє отримати точні аналітичні результати.

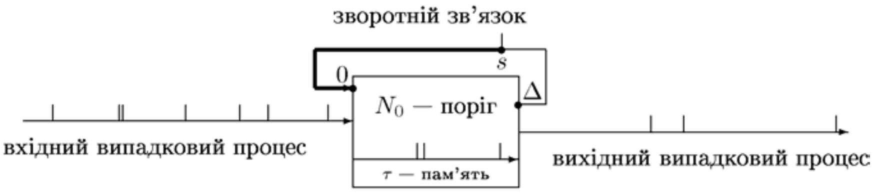

Рис. 1. Схема зв'язуючого нейрону із затриманим зворотнім зв'язком.

Об'єкт, що досліджується. Модель ЗН було розроблено в результаті чисельного моделювання відгуку нейрону типу Ходжкіна-Хакслі на дію стимулів, наближених до природних [1]. У цій моделі розглядаються однакові за величиною вхідні імпульси, кожен з яких перебуває в пам'яті нейрону протягом фіксованого часу τ, після чого миттєво зникає (див. рис. 1.) Коли кількість імпульсів в пам'яті ЗН досягає значення порогу N_0, нейрон без затримки генерує вихідний спайк. При цьому відбувається повне очищення внутрішньої пам'яті. Всі аналітичні розрахунки виконано для випадку $N_0 = 2$.

Дію лінії зворотнього зв'язку (ЗЗ) задано наступним чином. Вихідні імпульси ЗН направляються на вхід нейрону з фіксованою затримкою в часі, Δ . В кожен момент часу лінія ЗЗ або містить один імпульс, або не містить жодного і не може одночасно проводити два чи більше імпульсів. Це означає, що на момент початку вихідного міжімпульсного інтервалу (одразу після попереднього пострілу) лінія ЗЗ ніколи не буває порожньою. Для визначення стану лінії ЗЗ на момент початку вихідного інтервалу запроваджується випадкова змінна $s \in \left]0;\Delta\right]$, що позначає час життя імпульсу в лінії ЗЗ, тобто час, який залишився до досягнення імпульсом з лінії входу ЗН.

Постановка задачі. Таким чином, як дія ЗН, так і дія лінії ЗЗ є цілком детерміністичною. Однак вхідна стимуляція розглядається як випадковий (конкретно – пуассонівський) процес. Це зумовлює стохастичність вихідного процесу досліджуваної системи. Для опису цього процесу ми вводимо наступні статистичні функції:

- густину розподілу одночасових умовних ймовірностей $P(t_1 \mid t_0)$, що задає ймовірність отримати вихідний інтервал довжиною в межах від t_1 до $t_1 + dt_1$ за умови, що довжина попереднього інтервалу складала t_0;
- густину розподілу двочасових умовних ймовірностей $P(t_2 \mid t_1, t_0)$, що задає ймовірність отримати вихідний інтервал довжиною в межах від t_2 до $t_2 + dt_2$ за умови, що довжини двох попередніх складали t_1 та t_0;
- спільні густини розподілів $P(t_1, t_0)$ та $P(t_2, t_1, t_0)$ для довжин двох та трьох послідовних міжімпульсних інтервалів.

Метою роботи є отримання точних аналітичних виразів для густин $P(t_1 \mid t_0)$ і $P(t_2 \mid t_1, t_0)$ та перевірка їх рівності як необхідної умови марковості вихідного потоку.

Схема розрахунків. Для знаходження густин $P(t_1 \mid t_0)$ і $P(t_2 \mid t_1, t_0)$ розглянуто потік **ts** :

$$\mathbf{ts} = \left\{\ldots, (t_i, s_i), \ldots\right\}, \tag{0.1}$$

де s_i позначає час життя імпульсу в лінії ЗЗ на момент початку інтервалу t_i . Для потоку **ts** означено відповідну одинарну $P(t_1, s_1 \mid t_0, s_0)$ та подвійну $P(t_2, s_2 \mid t_1, s_1, t_0, s_0)$ густину розподілу умовних ймовірностей, а також відповідні спільні густини $P(t, s)$, $P(t_1, s_1; t_0, s_0)$ та $P(t_2, s_2; t_1, s_1; t_0, s_0)$. Показано, що потік **ts** утворює марківський ланцюг першого порядку.

Для знаходження двочасових умовних ймовірностей $P(t_2 \mid t_1, t_0)$ виконано наступні кроки:

Крок 1. Використано властивість марковості потоку **ts**:

$$P(t_2, s_2; t_1, s_1; t_0, s_0) = P(t_2, s_2 \mid t_1, s_1) P(t_1, s_1 \mid t_0, s_0) P(t_0, s_0). \qquad (0.2)$$

Крок 2. Представлено спільну густину розподілу у вигляді інтегралу:

$$P(t_2, t_1, t_0) = \int_0^{\Delta} ds_0 \int_0^{\Delta} ds_1 \int_0^{\Delta} ds_2 P(t_2, s_2; t_1, s_1; t_0, s_0). \qquad (0.3)$$

Крок 3. Використано означення умовних ймовірностей:

$$P(t_2 \mid t_1, t_0) = \frac{P(t_2, t_1, t_0)}{P(t_1, t_0)}. \qquad (0.4)$$

Для знаходження $P(t_1, t_0)$ та $P(t_1 \mid t_0)$ здійснено аналогічні кроки. Функції $P(t, s)$ та $P(t_1, s_1 \mid t_0, s_0)$ знайдено шляхом розбору подій та їх ймовірностей за різних співвідношень між t та s.

Результати. В результаті виконання кроків 1 – 3 отримано аналітичні вирази для $P(t_1 \mid t_0)$ та $P(t_2 \mid t_1, t_0)$. Знайдені вирази є сумами гладкої функції та сингулярної частини у вигляді лінійної комбінації зсунутих δ-функцій Дірака. На основі сингулярної частини знайдених виразів показано існування залежності як густини $P(t_1 \mid t_0)$, так і густини $P(t_2 \mid t_1, t_0)$, від t_0. Це означає, що густина розподілу одночасових умовних ймовірностей не зводиться до вихідного розподілу, тобто існують кореляції між довжинами сусідніх вихідних інтервалів:

$$P(t_1 \mid t_0) \neq P(t_1), \qquad (0.5)$$

а густина розподілу двочасових умовних ймовірностей $P(t_2 \mid t_1, t_0)$ не зводиться до одночасової:

$$P(t_2 \mid t_1, t_0) \neq P(t_2 \mid t_1). \qquad (0.6)$$

Це означає, що послідовність довжин вихідних міжімпульсних інтервалів навіть найпростішої рекурентної мережі не може бути адекватно представлена як послідовність незалежних випадкових величин (вираз (0.5)) і, більше того, не задовольняє необхідній умові марковості (див. (0.6)).

Чисельний експеримент. Здійснено також чисельну перевірку отриманих аналітичних виразів. Для цього виконано моделювання дії ЗН із затриманим ЗЗ під дією пуассонівського потоку за методом Монте-Карло. Вихідні розподіли отримано шляхом підрахунку вихідних інтервалів різної довжини та нормування. В результаті знайдено густини $P(t_1 \mid t_0)$ та $P(t_2 \mid t_1, t_0)$. В чисельному експерименті отримано підтвердження висновку про існування кореляцій між довжинами сусідніх вихідних інтервалів, а також про немарковість вихідного потоку у випадку затриманого зворотнього зв'язку.

Висновки. На відміну від ЗН без ЗЗ [2] та ЗН з миттєвим ЗЗ [3], дожини вихідних інтервалів ЗН із затриманим ЗЗ скорельовані. Доведено немарковість потоку довжин вихідних інтервалів для випадку затриманого ЗЗ. Подібну поведінку вихідного потоку єдиного нейрону із затриманим ЗЗ слід очікувати і за використання інших нейронних моделей.

1. *Vidybida A.K.* Neuron as time coherence discriminator // Biol. Cybern. – 1996. – **74:**6. - P. 539-544.
2. *Vidybida O.K.* Output stream of a binding neuron // Ukr. Math. J. – 2007. – **59:**12. - P. 1819-1839.
3. *Vidybida A.K.* Output stream of binding neuron with instantaneous feedback // Eur. Phys. J. B – 2008. – **65. -** pp. 577-584; *Vidybida A.K.*, Eur. Phys. J. B – 2009. – **69**, p. 313.

OUTPUT STREAM OF BINDING NEURON WITH DELAYED FEEDBACK IS NOT A MARKOVIAN ONE

Output inter-spike intervals (ISI) statistics of a single binding neuron (BN) with delayed feedback is considered. As input stimulation we take Poisson stream. Output impulses are fed back to BN's input with fixed time delay Δ. *Output ISIs statistics is investigated in terms of single- and double-moment conditional probability densities,* $P(t_1 \mid t_0)$ *and* $P(t_2 \mid t_1, t_0)$ *, respectively. Namely,* $P(t_1 \mid t_0)dt_1$ *gives the probability to obtain an output ISI of duration within interval* $[t_1; t_1 + dt_1[$ *provided the previous ISI had duration* t_0 . *And* $P(t_2 \mid t_1, t_0)dt_2$ *gives the probability to obtain an output ISI of duration within interval* $[t_2; t_2 + dt_2[$ *provided two previous ISIs had durations* t_1 *and* t_0 *, respectively. The exact analytical expressions are found both for* $P(t_1 \mid t_0)$ *and for* $P(t_2 \mid t_1, t_0)$. *It is shown, that* $P(t_2 \mid t_1, t_0)$ *as well as* $P(t_1 \mid t_0)$ *depends on* t_0, *which means that the neighboring output ISI durations are correlated and that the output stream does not possess Markov property. We conclude that it is namely the delayed feedback presence causes the non-markovian behavior of the output stream, and expect same behavior to be found for the output stream of a single neuron with delayed feedback for other neuronal models as well.*