Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-K-16.pdf

УДК 539.3

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Кузь А.М.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

В останні роки значна увага математиків спрямована на дослідження задач з інтегральними умовами, які є узагальненням дискретних нелокальних умов. Інтегральні умови часто використовуються при моделюванні деяких процесів теплопровідності, вологопереносу в капілярно-пористих середовищах, процесів, що виникають у турбулентній плазмі, у задачах математичної біології, при дослідженні деяких обернених задач математичної фізики та ін.

Дана робота є розвитком праці [1].

1.Основні позначення. Надалі будемо використовувати такі позначення: $x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $(t,x)=(t,x_1,\ldots x_p)\in\mathbb{R}^{p+1}$;

$$k=\left(k_1,k_2,\ldots,k_p\right)\in\mathbb{Z}^p;\quad \hat{s}=(s_0,s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p,\quad |\hat{s}|=s_0+s_1+\cdots+s_p;$$

$$\mu_k=\left(\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}\right)\in\mathbb{R}^p,\quad (\mu_k,x)=\mu_{k_1}x_1+\cdots+\mu_{k_p}x_p;$$

$$\|z\|^2=\sum_{j=1}^{p}z_i^2,\quad |z|=\sum_{j=1}^{p}|z_i|,\quad z\in\mathbb{R}^p.$$

2. Постановка задачі. В області $D^p=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}:t\in(0,T),x\in\mathbb{R}^p\right\}$ розглядаємо задачу

$$L[u]:=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_1^2\Delta+c_1^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_2^2\Delta+c_2^2\right)u(t,x)=0,\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}U_j[u]&:=\alpha_j\left.\frac{\partial^{2(j-1)}u}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0}+\beta_j\int_0^T t^{r_j}u(t,x)dt=\varphi_j(x),\\ U_{2+j}[u]&:=\alpha_{2+j}\left.\frac{\partial^{2(j-1)}u}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T}+\beta_{2+j}\int_0^T t^{r_{2+j}}u(t,x)dt=\varphi_{2+j}(x),\end{aligned}\right\}\quad j=1,2,\tag{2}$$

де $a_j>0$, $c_j>0$, $j=1,2$; $\alpha_m,\beta_m\in\mathbb{R}$, $\alpha_m^2+\beta_m^2\neq 0$, $r_m\in\mathbb{Z}_+$, $r_q>r_s$, $q>s$, $m=1,\ldots,4$; $\Delta=\sum_{j=1}^{p}\partial^2\big/\partial x_j^2$; функції $\varphi_m(x)$, $m=1,\ldots,4$, є рівномірними майже періодичними функціями зі спектром $M_p = \{\mu_k, k \in \mathbb{Z}^p\}$, $\mu_{-k} = -\mu_k$; вони розвиваються у ряди Фур'є вигляду

$$\varphi_m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{mk} \exp(i\mu_k, x), \quad \varphi_{mk} = \lim_{H \to \infty} \frac{1}{H^p} \int_0^H \varphi_m(x) \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad m = 1, \ldots, 4.$$

Припускаємо, що існують такі додатні сталі d_1, d_2, σ, що для всіх $\mu_k \in M_p$ виконуються нерівності $d_1 |k|^\sigma \le |\mu_k| \le d_2 |k|^\sigma$.

Будемо використовувати такі простори функцій:

$C_B^n(\bar{D}^p)$ – простір функцій $u(t,x)$, які є n раз неперервно диференційовними в області $\bar{D}^p$ за всіма змінними і рівномірними майже періодичними за x, із нормою

$$\left\| u; C_B^n(\bar{D}^p) \right\| = \sum_{0 \le |\hat{s}| \le n} \max_{t \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial u^{|\hat{s}|}(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|.$$

$C_B^n(\mathbb{R}^p)$ – підпростір функцій із простору $C_B^n(\bar{D}^p)$, які не залежать від t.

3. Єдиність розв'язку задачі. Майже періодичний за x зі спектром M_p розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x),$$

де кожен із коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком, відповідно, такої задачі:

$$l[u_k] := \left(d^2/dt^2 + a_1^2 \|\mu_k\|^2 + c_1^2 \right) \left(d^2/dt^2 + a_2^2 \|\mu_k\|^2 + c_2^2 \right) u_k(t) = 0, \qquad (3)$$

$$U_m[u_k] = \varphi_{mk}, \quad m = 1, \ldots, 4. \qquad (4)$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (4) є такою

$$u_{kj}(t) = \exp(i\gamma_{jk} t), \quad u_{k,2+j}(t) = \exp(-i\gamma_{jk} t), \quad j = 1, 2,$$

де $\gamma_{jk} = \sqrt{a_j^2 \|\mu_k\|^2 + c_j^2}$, $j = 1, 2$. Відомо, що задача (3), (4) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли характеристичний визначник $\Delta(\mu_k)$ відмінний від нуля [3].

Теорема 1. Для того, щоб задача не мала більше одного майже періодичного за x зі спектром M_p розв'язку у просторі $C_B^4(\bar{D}^p)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\forall \mu_k \in M_p, \quad \Delta(\mu_k) \neq 0. \tag{5}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.1 із [2].

4. Існування розв'язку задачі. Надалі будемо вважати, що виконується умова (5). Тоді для кожного $\mu_k \in M_p$ існує єдиний розв'язок $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$ задачі (3), (4), а формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j=1}^{2} \sum_{m=1}^{4} \left(\frac{\Delta_{mj}(\mu_k)}{\Delta(\mu_k)} \varphi_{mk} \exp\left(i\gamma_{jk} t\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta_{m,2+j}(\mu_k)}{\Delta(\mu_k)} \varphi_{mk} \exp\left(-i\gamma_{jk} t\right) \right) \exp(i\mu_k, x) \tag{6}$$

де $\Delta_{ml}(\mu_k)$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k)$ елемента m -го рядка та l -го стовпчика.

Питання існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників, бо вираз $|\Delta(\mu_k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in M_p$.

Теорема 2. Нехай справджується умова (5) та існує стала $\eta > 0$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in M_p$ виконується нерівність

$$|\Delta(\mu_k)| > |\mu_k|^{-\eta}. \tag{7}$$

Якщо $\varphi_m(x) \in C_B^{9+[p/\sigma+\eta]}\left(\mathbb{R}^p\right), m = 1,\dots,4,$ то існує розв'язок задачі (1), (2) із простору $C_B^4(\bar{D}^p)$, який зображується формулою (6) і неперервно залежить від функцій $\varphi_m(x), m = 1,\dots,4.$

Доведення. Враховуючи (6), (7), а також нерівності $|\Delta_{ml}(\mu_k)| < C_1 |\mu_k|^4, m,l = 1,\dots,4,$ і $|\varphi_{mk}| < C_2 \|\mu_k\|^{9+[p/\sigma+\eta]} \left\|\varphi_m; C_B^{9+[p/\sigma+\eta]}\left(\mathbb{R}^p\right)\right\|$ отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2)

$$\left\|u; C_B^4\left(\bar{D}^p\right)\right\| < C_3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{m=1}^{4} |\mu_k|^{8+\eta-(9+[p/\sigma+\eta])} \left\|\varphi_m; C_B^{8+[p/\sigma+\eta]}\left(\mathbb{R}^p\right)\right\| \le$$

$$\le C_4 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{m=1}^{4} |k|^{(\eta-1+[\eta+p/\sigma])\sigma} \left\|\varphi_m; C_B^{8+[p/\sigma+\eta]}\left(\mathbb{R}^p\right)\right\| =$$

$$= C_4 \sum_{m=1}^{4} \left\|\varphi_m; C_B^{8+[p/\sigma+\eta]}\left(\mathbb{R}^p\right)\right\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |k|^{-z},$$

де $z = p + (1 - \{\eta + p/\sigma\})$. Оскільки $z > p$ то ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} |k|^{-z}$ є збіжний. Позначивши його суму через S_z отримаємо таку оцінку для норми розв'язку

$$\left\| u; C_B^4\left(\bar{D}^p\right) \right\| < C_4 S_z \sum_{j=1}^{4} \left\| \varphi_j; C_B^{8+[p/\sigma+\eta]}\left(\mathbb{R}^p\right) \right\|$$

з якої випливає доведення теореми.

Оцінка (8) може бути встановлена за допомогою методів метричної теорії чисел [2, 4].

Результати роботи можна поширити на гіперболічні рівняння вигляду

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta + c_j^2 \right) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D^p,$$

Які описують поведінку системи n релятивістських елементарних частинок з масами спокою $c_j, j = 1,...,n$.

1. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами// Конференція молодих вченихіз сучасних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача (Львів, 25-27 травня 2009р.): Тези доповідей. – Львів, 2009. – С.215-217.
2. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наукова думка, 2002. – 416 с.
3. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917.
4. *Штабалюк П.І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка": Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – **286.** – С.153-165.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR KLEIN-GORDON TYPE EQUATION

The problem with integral conditions for the Klein-Gordon type equation in a class of functions, almost periodic for space variables is considered. Conditions of the existence and uniqueness of the solution for the problem are obtained.