Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-K-14.pdf

УДК 517.95

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЗАГАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТІВ

Кондратів Л.Й.

Інститут прикладних проблем ім. Я. С. Підстригача НАН України,
kondrativ@ukr.net

В області $D=(0,T)\times\Omega^p$, де Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглянемо задачу

$$L[u]\equiv\sum_{|\hat{s}|=n}a_{\hat{s}}\frac{\partial^n u(t,x_1-s_1h_1,x_2-s_2h_2,\ldots,x_p-s_ph_p,)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_p^{s_p}}=0, \qquad (1)$$

$$M_l[u]\equiv\frac{\partial^{l-1}u(t,x)}{\partial t^{l-1}}|_{t=0}-\mu\frac{\partial^{l-1}u(t,x)}{\partial t^{l-1}}|_{t=T}=\varphi_l(x),\quad l=1,\ldots,n, \qquad (2)$$

де $\mu\in C\setminus\{0,1\}$, $a_{\hat{s}}\in C$, $h_r\in(0,2\pi), r=1,\ldots,p$, $\hat{s}=(s_0,s_1,\ldots,s_p)$, $|\hat{s}|=s_0+s_1+\ldots+s_p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in R^p$. Вигляд області D D накладає умови 2π- періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ на функції $u(t,x)$ і $\varphi_l(x)$, $l=1,\ldots,n$. Будемо вважати, що $a_{n,0,\ldots0}=1$. Позначимо: $k=(k_1,\ldots,k_p)\in Z^p$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $\|k\|=(k_1^2+\ldots+k_p^2)^{1/2}$; $W_{\alpha,\beta},\alpha,\beta\in R$, – простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum_{k\in Z^p}\varphi_k e^{(ik,x)}$ за нормою $\|\varphi(x);W_{\alpha,\beta}\|=\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_k|(1+|k|)^\alpha\exp(\beta|k|)$; $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta})$ – простір функцій $u(t,x)=\sum_{k\in Z^p}u_k(t)\exp(ik,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ похідні $\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}$, $j=0,1,\ldots,n$, належать до простору $W_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за $t\in[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta})$ задаємо так:

$$\left\| u(t,x); C^n\left([0,T]; W_{\alpha,\beta}\right)\right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; W_{\alpha,\beta} \right\|.$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in Z^p} u_k(t) \exp(ik,x). \tag{3}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in Z^p$, є розв'язком такої крайової задачі:

$$\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \left(\frac{ik_1}{e^{ik_1 h_1}}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{ik_p}{e^{ik_p h_p}}\right)^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{4}$$

$$u_k^{(l-1)}(0) - \mu u_k^{(l-1)}(T) = \varphi_{lk}, l = 1,...,n, \tag{5}$$

де φ_{lk}, $k \in Z^p$, – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_l(x)$, $l = 1,\ldots,n.$.

Припустимо, що для всіх векторів $k \in Z^p \setminus \{0\}$ корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,...,n$ рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \lambda^{s_0} \left(\frac{ik_1}{e^{ik_1 h_1}}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{ik_p}{e^{ik_p h_p}}\right)^{s_p} = 0, \tag{6}$$

є простими. Тоді рівняння (4) має таку фундаментальну систему розв'язків: $u_{kj}(t) = \exp(\lambda_j(k)t)$, $j = 1,...,n$, де $\lambda_j(k)$, $j = 1,...,n$ – корені рівняння(6), а розв'язок задачі (4), (5) зображується формулою: $u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \exp(\lambda_j(k)t)$, $k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\}$. При цьому коефіцієнти c_{kj}, $j = 1,...,n$ визначаються зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} \lambda_j^{l-1}(k)\left(1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)\right) = \varphi_{lk}, \ l = 1,...,n.$$

Поділимо обидві частини рівняння (6) на $\|k\|^n$, $k \neq (0)$. Тоді отримуємо рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \left(\frac{\lambda}{\|k\|}\right)^{s_0} \left(\frac{ik_1}{\|k\| e^{ik_1 h_1}}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{ik_p}{\|k\| e^{ik_p h_p}}\right)^{s_p} = 0. \tag{7}$$

Позначимо: $\xi = \dfrac{\lambda}{\|k\|}$, $\eta_j(k,h) = \dfrac{ik_j}{\|k\| e^{ik_j h_j}}$, $j = 1,\dots,p$. Тоді $\lambda = \xi\|k\|$ і рівняння (7) матиме вигляд

$$\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \xi^{s_0} \eta_1^{s_1}(k;h)\dots\eta_p^{s_p}(k;h) = 0 . \tag{8}$$

Корені рівняння (8) $\xi_j(k,h)$, $j = 1,\dots,n$, є обмеженими зверху рівномірно за k тобто $|\xi_j(k,h)| \le M$, а $|\lambda_j(k)| \le M\|k\|$, $j = 1,\dots,n$.

Характеристичний визначник задачі (4), (5) має вигляд

$$\Delta(k) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \mu \exp\left(\xi_j(k,h)\|k\|T\right)\right) \prod_{n\ge\alpha>\beta\ge1} \|k\|\left(\xi_\alpha - \xi_\beta\right),\ \ k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\}. \tag{9}$$

Теорема.1 Для единості розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^n\left([0,T];W_{\alpha,\beta}\right)$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k \in Z^p \setminus \{0\} \quad 1 - \mu \exp\left(\xi_j(k;h)\|k\|T\right) \ne 0,\ j = 1,\dots,n . \tag{10}$$

Нехай виконується умова (10). Тоді для кожного $k \in Z^p \setminus \{0\}$ існує единий розв'язок задачі (4), (5), який зображується формулою

$$u_k(t) =$$

$$= \sum_{j,l,\alpha=1}^{n} \frac{(-1)^{n+\alpha}(\|k\|)^{n-j-\alpha+1} \exp\left(\|k\|\xi_j(k,h)t\right) S_{n-\alpha}\left[\xi_j(k,h)\right]\varphi_{lk}}{\left(1 - \mu \exp\left(\|k\|\xi_j(k,h)T\right)\right) \prod\limits_{m=1,m\ne j}^{n}\left(\xi_j(k,h) - \xi_m(k,h)\right)},$$

де $S_q\left(\xi_j(k,h)\right)$ – сума всіх можливих добутків чисел $\xi_1(k,h),\dots,\xi_{p-1}(k,h),\xi_{p+1}(k,h),\dots,\xi_n(k,h)$, узятих у кількості q штук, $S_0\left(\xi_j(k,h)\right) = 1$.

Збіжність ряду (11) пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки вираз $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно близьких до нуля значень для нескінченної кількості векторів $k \in Z^p \setminus \{0\}$ (див. [1]).

Теорема 2. Нехай виконується умова (10) і нехай існують додатні сталі $\delta, \Theta_1, \Theta_2, c_1, c_2$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in Z^p$ справджуються нерівності

$$\left|1-\mu\exp\left(\xi_j(k;h)\|k\|T\right)\right| \geq c_1|k|^{-\Theta_1} e^{-\delta|k|}, \quad j=1,\ldots,n, \tag{12}$$

$$\prod_{m=1, m\neq j}^{n}\left|\xi_j(k,h)-\xi_m(k,h)\right| \geq c_2|k|^{-\Theta_2}, \quad j=1,\ldots,n. \tag{13}$$

Якщо $\varphi_l \in W_{2n-1+\Theta_1+\Theta_2+p+\varepsilon, MT+\delta}$ $(0<\varepsilon<1)$, то існує розв'язок задачі (1), (2), який зображується рядом (11) і належить до простору $C^n\left([0,T];W_{\alpha,\beta}\right)$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій $\varphi_l(x)$, $l=1,\ldots,n$.

Теорема 3. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R) чисел $T\in[T_0,T_1]$ $(T_0>0, T_1>0)$ і для довільних фіксованих $\mu, a_s, h_j, j=1,\ldots,n$, нерівності (12) виконуються при $\Theta_1>p$, $c_1=B_1|\mu|/\sqrt{p}$, $\delta=MT_1$ (B_1 -додатна стала) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in Z^p$.

Позначимо через $y=(y_1,\ldots,y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (1), де γ - кількість всіх коефіцієнтів.

Теорема 4 . Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^γ) векторів y і фіксованого $h=(h_1,\ldots,h_p)$ нерівності (13) виконуються при $\Theta_2>p(n-1)$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in Z^p$.

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITIONS FOR GENERAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS WITH DELAY

The correctness of a problem with nonlocal conditions for general partial differential equations with constant coefficients with delay in a cylindrical domain, which is a product of time segment by torus, is studied. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.