



УДК 512.536

ПРО НАПІВТОПОЛОГІЧНІ СИМЕТРИЧНІ ІНВЕРСНІ НАПІВГРУПИ ОБМЕЖЕНОГО СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Гутік О. В.¹, Рейтер А. Р.²

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
o_gutik@franko.lviv.ua¹, reiter@i.ua²

Термінологія, означення та позначення такі як у [1, 2, 3]. Усі топологічні простори вважаються гаусдорфовими.

Нагадаємо [2], що напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента x в S існує єдиний інверсний x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$.

Напівтопологічна напівгрупа - це гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому нарізно неперервною напівгруповою операцією [3].

Нехай X - множина потужності $\lambda \geq 1$. Через I_λ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень множини X з напівгруповою операцією:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \text{ якщо } x \in \text{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \text{dom}\alpha \mid y\alpha \in \text{dom}\beta\},$$

для $\alpha, \beta \in I_\lambda$. Напівгрупа I_λ називається симетричною інверсною напівгрупою над множиною X [2]. Позначимо $I_\lambda^n = \{\alpha \in I_\lambda \mid \text{ran } \alpha \leq n\}$, для $n = 1, 2, 3, \dots$. Надалі називатимемо напівгрупу I_λ^n *симетричною інверсною напівгруповою скінченних перетворень рангу n множини потужності λ* .

Ми опишемо усі конгруенції на напівгрупі I_λ^n і доведемо наступну теорему:

Теорема 1. Довільний нетривіальний гомоморфний образ напівгрупи I_λ^n є напівгруповою зі щільним ідеальним рядом.

Нехай Ω - клас напівтопологічних напівгруп. Напівтопологічна напівгрупа $S \in \Omega$ називається:

- *H-замкненою в класі Ω* , якщо вона є замкненою піднапівгруповою у кожній напівтопологічній напівгрупі $T \in \Omega$, що містить S як піднапівгрупу;
- *абсолютно H-замкненою в класі Ω* , якщо довільний неперервний гомоморфний образ напівгрупи S у напівгрупу $T \in \Omega$ є H-замкненою напівгруповою в класі Ω ;

- алгебраїчно h -замкненою в класі Ω , якщо напівгрупа S з дискретною топологією τ_d є абсолютно H -замкненою в класі Ω .

Теорема 2. Напівгрупа I_λ^n є алгебраїчно h -замкненою в класі напівтопологічних інверсних напівгруп з неперервною інверсією.

Для довільного елемента α напівгрупи I_λ^n позначимо

$$\uparrow_l \alpha = \{\gamma \in I_\lambda^n \mid \alpha \alpha^{-1} \gamma = \alpha\} \text{ і } \uparrow_r \alpha = \{\gamma \in I_\lambda^n \mid \gamma \alpha^{-1} \alpha = \alpha\}.$$

Тоді, оскільки $\uparrow_l \alpha = \uparrow_r \alpha$ у напівгрупі I_λ^n , то означимо

$$\uparrow \alpha = \uparrow_l \alpha = \uparrow_r \alpha.$$

Означимо топологію τ_c на напівгрупі I_λ^n наступним чином: сім'я

$$B = \{U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \uparrow \alpha \setminus (\uparrow \alpha_1 \cup \dots \cup \uparrow \alpha_k) \mid \alpha_i \in \uparrow \alpha \setminus \{\alpha\}, \\ \alpha, \alpha_i \in I_\lambda^n, i = 1, \dots, k\}$$

є базою топології τ_c на напівгрупі I_λ^n .

Твердження. Для довільних $\lambda \geq \omega$ і натурального n , (I_λ^n, τ_c) -гаусдорфова компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією.

Теорема 2. Нехай $\lambda \geq \omega$, $n = 1, 2, 3, \dots$ і τ -гаусдорфова топологія на напівгрупі I_λ^n . Тоді наступні умови еквівалентні:

- (i) (I_λ^n, τ_c) - компактна напівтопологічна напівгрупа;
- (ii) (I_λ^n, τ_c) - топологічно ізоморфна напівгрупі (I_λ^n, τ_c) ;
- (iii) (I_λ^n, τ_c) - компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією;
- (iv) (I_λ^n, τ_c) - зліченно компактна напівтопологічна напівгрупа.

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология.- М.: Мир, 1986. – 752 с.
2. *Clifford A. H., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. – Providence: Amer. Math. Soc., 1961. – Vol. 1. – 288 p.; 1972. – Vol. 2. – 424 p.
3. *Ruppert W.*, Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory, Lecture Notes in Mathematics, 1079. Berlin etc.: Springer-Verlag, V, 1984. - 260 p.

**ON SEMITOPOLOGICAL SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUPS OF A
BOUNDED FINITE RANK**

We describe all congruences on the semigroup I_λ^n . Also we show that the semigroup I_λ^n is algebraically h -closed in the class of semitopological inverse semigroups with continuous inversion and describe all compact and countably compact topologies τ on I_λ^n such that (I_λ^n, τ) is a semitopological semigroup.