Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-F-33.pdf

УДК 539.3

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ГРАНИЧНОГО ПЕРЕХОДУ ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛІВ З ПАРАМЕТРАМИ

Федачківський Віталій Дмитрович

Тернопільський національний педагогічний університет імені В.Гнатюка,
v-i-t-a-l-i@mail.ru

При розв'язуванні прикладних задач часто виникає проблема пошуку границь від інтегралів, залежних від параметра. Такі границі не завжди можна обчислити відомими методамию У зв'язку з цим ми розробили інший підхід для розв'язування подібних проблем задач за допомогою "часткового" граничного переходу під знаком інтеграла Рімана.

Нехай необхідно обчислити границю $\lim\limits_{n \to n_o} \int\limits_a^b \varphi(n,x)dx$, причому інтеграл $\int\limits_a^b \varphi(n,x)dx$ не обчислюється в скінченному вигляді. В такому випадку часто підінтегральну функцію розвивають в ряд Тейлора (Маклорена), інтегрують ряд і знаходять границю. Проте може виявитися, що функцію $\varphi(n,x)$ не можливо розкласти в ряд або принаймні це не просто зробити. Може також виявитись, що одержаний ряд не можна інтегрувати або важко довести його рівномірну збіжність. Тому потрібно шукати інший підхід для розв'язування таких задач. Якщо функцію $\varphi(n,x)$ можна зобразити у вигляді добутку двох функцій $\varphi(n,x) = f(n,x)g(n,x)$, причому $g(n,x)$ така, що для довільного $x \in [a,b]$: $g(n_0,x) = A$, де A – скінченне дійсне число, що не залежить від x, то за певних умов виконуватиметься рівність

$$\lim_{n \to n_o} \int\limits_a^b f(n,x)g(n,x)dx = A \lim_{n \to n_o} \int\limits_a^b f(n,x)dx . \qquad (1)$$

Якщо виконується рівність (1), то від інтеграла $\int\limits_a^b f(n,x)g(n,x)dx$, який не обчислюється в скінченному вигляді, ми зможемо в певних випадках прийти до інтеграла $\int\limits_a^b f(n,x)dx$, який вже буде обчислюватись в скінченному вигляді. Тому задача полягає у тому щоб з'ясувати за яких достатніх умов буде виконуватись рівність (1).

Нами було отримано та доведено декілька теорем про достатні умови граничного переходу під знаком інтегралів, залежних від параметрів.

Теорема 1. Нехай $a, b \in R$, $a < b$ і існує $\delta > 0$ таке, що:

1. $g(n,x)$ - неперервна на прямокутнику $n_0 \le n \le n_0 + \delta$, $a \le x \le b$,
2. для довільного фіксованого $n \in (n_0; n_0 + \delta) : f(n,x) \in R(a;b)$, *
3. для довільного $x \in [a;b] : g(n_0, x) = A,$ де A – скінченне дійсне число, що не залежить від x,
4. існують $M(n), m(n) : [n_0; n_0 + \delta] \to R$ такі, що $M(n), m(n)$ - обмежені на відрізку $[n_0; n_0 + \delta]$, для довільних $n, x \in ([n_0; n_0 + \delta]; [a;b])$: $m(n) \le g(n,x) \le M(n)$ і існує $\lim\limits_{n \to n_0 + 0} \left((M(n) - m(n)) \int\limits_a^b |f(n,x)| dx \right) = 0$.

Тоді, якщо існує $\lim\limits_{n \to n_0 + 0} \int\limits_a^b f(n,x) dx$, то існує

$$\lim_{n \to n_0 + 0} \int_a^b f(n,x) g(n,x) dx = A \lim_{n \to n_0 + 0} \int_a^b f(n,x) dx .$$

**Зауваження:* при $n = n_0$ функція $f(n_0, x)$ може бути не інтегровною.

Доведемо спочатку наступну лему.

Лема 1. Нехай $b \le x \le B$, де $b, x, B \in R$. Тоді для довільного $y \in R$:

$$by + (b - B)|y| \le xy \le By + (B - b)|y| .$$

Доведення леми. Розглянемо два можливі випадки:

1) якщо $y \le 0$, то $b \le x \le B$. Тоді $By \le xy \le by$, звідки $by + (B - b)y \le xy \le By + (b - B)y,$ а оскільки $|y| = -y$, то $by + (b - B)|y| \le xy \le By + (B - b)|y|$,

2) якщо $y \ge 0$, то $b \le x \le B$. Тоді $by \le xy \le By$, а оскільки $by \ge by + (b - B)|y|$ і $By \le By + (B - b)|y|$, то тоді одержимо, що $by + (b - B)|y| \le xy \le By + (B - b)|y|$. Лему доведено.

Доведемо теорему 1. Оскільки функція $g(n,x)$ неперервна в замкнутій обмеженій області $D(g) = \left([n_0; n_0 + \delta]; [a;b] \right)$, то вона обмежена в цій області. То для довільного фіксованого $n \in [n_0; n_0 + \delta]$: функція $g(n,x)$ однієї змінної x обмежена на $[a,b]$. Таким чином, для довільного фіксованого $n \in [n_0; n_0 + \delta]$:

$$\left(\exists\, b(n)=\min_{\substack{a\le x\le b\\ n=const}} g(n,x)\right)\wedge\left(\exists\, B(n)=\max_{\substack{a\le x\le b\\ n=const}} g(n,x)\right) \qquad (2).$$
$$\wedge\left(\exists x_1\in[a,b]: g\left(n,x_1\right)=b\left(n\right)\right)\wedge\left(\exists x_2\in[a,b]: g\left(n,x_2\right)=B\left(n\right)\right).$$

Оскільки, функція двох змінних $g(n,x)$ неперервна в замкнутій обмеженій області $D(g)$, то з цього випливає, що для довільного фіксованого $x\in[a,b]$: функція $g(n,x)$ однієї змінної n неперервна на $[n_0;n_0+\delta]$. Тоді згідно з означенням неперервності функції однієї змінної отримаємо, що для довільного фіксованого $x\in[a,b]$ існує $\exists \lim\limits_{n\to n_0+0} g(n,x)=g(n_0,x)$, і як наслідок

$$\exists \lim_{n\to n_0+0} g(n,x)=A\,. \qquad (3)$$

Оскільки, для довільного фіксованого $x\in[a,b]$ існує $\lim\limits_{n\to n_0+0} g(n,x)=A$, то

$$\exists \lim_{n\to n_0+0} g(n,x_1)=A \wedge \exists \lim_{n\to n_0+0} g(n,x_2)=A\,.$$

Тоді, враховуючи (2), отримаємо:

$$\exists \lim_{n\to n_0+0} B(n)=\lim_{n\to n_0+0} b(n)=A\,. \qquad (4)$$

Оскільки, згідно з умовою теореми для довільних $n,x\in\left([n_0;n_0+\delta];[a;b]\right)$: $m(n)\le g(n,x)\le M(n)$ і, крім цього, $b(n)=\min\limits_{\substack{a\le x\le b\\ n=const}} g(n,x)$, $B(n)=\max\limits_{\substack{a\le x\le b\\ n=const}} g(n,x)$, то очевидно, що для довільного $n\in[n_0;n_0+\delta]$ $\begin{cases} b(n)\ge m(n)\\ B(n)\le M(n)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $B(n)-b(n)\le M(n)-m(n)$ $\Rightarrow$ $0\le \dfrac{B(n)-b(n)}{M(n)-m(n)}\le 1$.У зв'язку із цим приходимо до висновку, що $\dfrac{B(n)-b(n)}{M(n)-m(n)}$ - обмежена при $n\to n_0+0$. А так як, окрім цього, згідно з умовою теореми $\left(\left(M(n)-m(n)\right)\int\limits_a^b \left|f(n,x)\right|dx\right)$ - безмежно мала при

$n \to n_0 + 0$, то тоді в силу того, що добуток обмеженої на безмежно малу є безмежно малою, отримаємо:

$$\exists \lim_{n \to n_0 + 0} \left(\frac{B(n) - b(n)}{M(n) - m(n)} \left(M(n) - m(n) \right) \int_a^b \left| f(n,x) \right| dx \right) = 0,$$

тобто

$$\exists \lim_{n \to n_0 + 0} \left((B(n) - b(n)) \int_a^b \left| f(n,x) \right| dx \right) = 0 \qquad (5).$$

На основі леми 1, одержимо що для довільних $n, x \in ([n_0; n_0 + \delta]; [a; b]) \cap D(f)$ виконується

$$b(n) \le g(n,x) \le B(n) \Rightarrow b(n) f(n,x) + (b(n) - B(n)) \left| f(n,x) \right| \le$$

$$f(n,x) g(n,x) \ \le B(n) f(n,x) + (B(n) - b(n)) \left| f(n,x) \right| \ \Rightarrow$$

$$b(n) \int_a^b f(n,x) dx + \left(b\left(n\right) - B\left(n\right) \right) \int_a^b \left| f(n,x) \right| dx \le \int_a^b f(n,x) g\left(n,x\right) dx \le$$

$$\le B\left(n\right) \int_a^b f(n,x) dx + \left(B\left(n\right) - b\left(n\right) \right) \int_a^b \left| f(n,x) \right| dx . \qquad (6)$$

Згідно з умовою теореми $\exists \lim\limits_{n \to n_0 + 0} \int_a^b f(n,x) dx$, а згідно з (4) $\exists \lim\limits_{n \to n_0 + 0} B(n) = \lim\limits_{n \to n_0 + 0} b(n) = A$, тоді

$$\exists \lim_{n \to n_0 + 0} \left(b(n) \int_a^b f(n,x) dx \right) = \lim_{n \to n_0 + 0} \left(B(n) \int_a^b f(n,x) dx \right) =$$

$$A \lim_{n \to n_0 + 0} \int_a^b f(n,x) dx \qquad (7).$$

Тоді взявши до уваги (5) і (7) отримаємо, що

$$\exists \lim_{n \to n_0 + 0} \left(b\left(n\right) \int_a^b f(n,x) dx + \left(b(n) - B(n) \right) \int_a^b \left| f(n,x) \right| dx \right) =$$

$$= \lim_{n \to n_0 + 0} \left(B\left(n\right) \int_a^b f(n,x) dx + \left(B(n) - b(n) \right) \int_a^b \left| f(n,x) \right| dx \right) =$$

$$A \lim_{n \to n_0 + 0} \int_a^b f(n,x) dx \qquad (8).$$

На основі ж подвійної нерівності (6), рівностей (8) і теореми про "двох міліціонерів" отримаємо, що

$$\exists \lim_{n \to n_0+0} \int_a^b f(n,x) g\left(n,x\right) dx = A \lim_{n \to n_0+0} \int_a^b f(n,x) dx .$$

Теорему доведено.

Теорема (1) буде справедливою також і для випадку коли інтегрування відбувається не на відрізку $[a;b]$, а на проміжках $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$ та $(-\infty;+\infty)$, а також вона виконуватиметься і для границі зліва від точки n_0, тобто при $n \to n_0 - 0$.

Крім наведеної вище теореми нами було отримано і доведено ще декілька теорем про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана. Користуючись отриманими теоремами можна для цілих класів підінтегральних функцій обчислювати границі визначених інтегралів залежних від параметрів. Так, зокрема, за допомогою теореми 1 можна розрахувати характеристики магнітного поля колового струму поблизу осі кільця зі струмом. А саме встановлено, що якщо $r << R$, то складова індукції магнітного поля, що паралельна площині кільця, може бути наближено обчислена за формулою:

$$B_x \approx \frac{3\mu\mu_0 IhR^2}{4\left(R^2+h^2\right)^{5/2}} r ,$$

де R - радіус кільця, r - відстань до його геометричної осі, h - відстань до площини кільця, I - сила колового струму. Остання формула добре корелює з відомим результатом, що отримується методом скалярного потенціалу, але який, при цьому, є методично значно складнішим від нашого. Також користуючись згаданою теоремою можна отримати лінійне наближення напруженості електричного поля рівномірно зарядженого кільця. Зокрема, для складової напруженості електричного поля, паралельної площині кільця, при $r << R$ маємо:

$$E_x \approx \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{2h^2 - R^2}{(R^2+h^2)^{5/2}} r ,$$

де R - радіус кільця, q - його заряд, r - відстань до геометричної осі кільця, h - відстань до площини кільця. Отримані подібним чином формули часто є достатньо точними не лише у граничному випадкові, але також і в широких діапазонах зміни аргументів. Так, наприклад, якщо $h = 1,6R$, то з допомогою чисельних методів можна переконатись, що похибка останньої формули не перевищуватиме 0,5% при зміні r від 0 до $0,7R$. Така точність є досить високою, а діапазон зміни r достатньо широким для практичних обчислень, що в черговий раз свідчить про практичне значення одержаних результатів та необхідність вивчення отриманих теорем в курсі класичного математичного аналізу.

Окрім цього нами було встановлено, що відома в математичному аналізі теорема про неперервність інтеграла з параметром є безпосереднім наслідком із наведеної вище теореми. А, отже, теорема 1 узагальнює цю теорему, поширюючи її на випадок деяких інтегровних функцій, що можуть мати розриви.

SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE IMPLEMENTATION OF LIMIT TRANSITION UNDER THE INTEGRAL DEPENDING ON PARAMETERS

Based on the developped theory a new method of calculating the limits of the integrals depending on parameters is examined. The article introduces one of the author's proved theorems about the limit transition under Riman's integral for some classes of functions. It is shown the way one can calculate the characteristics of the electric and magnetic fields by means of this theorem. Besides the connection between well-known and the author's theorems is cleared up.