Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-C-35.pdf

УДК 517.9

ІНВАРІАНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ D - ЕРМІТОВИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Чвартацький О.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
alex.chvartatskyy@gmail.com

Запропоновано метод побудови точних розв'язків просторово-двовимірного узагальнення ієрархії рівнянь типу Кадомцева-Петвіашвілі з додатковими D - ермітовими в'язями за допомогою перетворень типу Дарбу.

Нехай функція φ є фіксованим $N \times K$ - матричним розв'язком лінійної інтегро-диференціальної задачі

$$L\{\varphi\} := \alpha\varphi_y - \sum_{i=0}^{n} u_i \varphi^{(i)} + \mathbf{q} M_0 \Omega[\mathbf{r}, \varphi] = \varphi\Lambda, \qquad (1)$$

з матричними $N \times N$ коефіцієнтами $u_i = u_i(x, y)$, $i = \overline{0, n}$ та $\alpha \in \mathbf{R} \bigcup i\mathbf{R}$. Λ та M_0 — сталі матриці розміру $K \times K$ та $l \times l$ відповідно; $q = q(x, y)$ та $r = r(x, y)$ — матричні функції розміру $N \times l$; $\Omega[\mathbf{r}, \varphi]$ — функція, що задовольняє умову: $\Omega_x[\mathbf{r}, \varphi] = \mathbf{r}^{\top}\varphi$.

Оператор Лакса L (1) вперше розглянуто в роботах [1], [2] при побудові просторово-двовимірних узагальнень нелінійних систем математичної фізики, які виникають при нелокальних редукціях в матричній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі. В роботах [3], [4] розглянуто додаткові редукції типу D - ермітового та D - косоермітового спряження, накладені на оператор L (1).

Твердження. Для оператора L (1) справджується редукція $L^* = \mu D L D^{-1}$ (де $\mu = 1$ або $\mu = -1$) тоді і лише тоді, коли для коефіцієнтів оператора L виконуються такі співвідношення:

$$\mu\alpha = -\overline{\alpha}, \quad \mu u_0' = \mu q M_0 r^{\top} + \overline{r}\, M_0^* q^*, \qquad \mu u_n = (-1)^n u_n{}^*,$$

$$\mu(u_{l+1}' + u_l) = \sum_{i=l}^{n} (-1)^i \binom{i}{l} (u_i^*)^{(i-1)}, \quad l = \overline{0, n-1};$$

$$\mu q' M_0 (D^{-1}\{r^{\top}\})^{(j)} = \overline{r} M_0^* (q^*)^{(j)}, j \geq 1 \text{, якщо } q_x \neq 0 .$$

Теорема 1.

1. Нехай для оператора L (1) справджується редукція $L^* = \mu D L D^{-1}$ (де $\mu = 1$ або $\mu = -1$), $\mu\Lambda = \overline{\Lambda}$, а функція f розміру $N \times 1$ є розв'язком спектральної задачі

$$L\{f\} := \alpha f_y - \sum_{i=0}^{n} u_i f^{(i)} + \mathbf{q} M_0 \Omega[r, f] = f\lambda, \tag{2}$$

з власним значенням $\lambda \in \mathbf{C}$, і функцією $\Omega[r, f]$, де $\Omega_x[r, f] = r^\top f$. Тоді функція $F := W_{DU}\{f\} = f - \varphi(\Delta^*)^{-1}\Omega[\overline{\varphi}, f_x]$ з оператором $W_{DU} = I - \varphi(\Delta^*)^{-1}\Omega[\overline{\varphi}, D]$, де $\Delta = C + \Omega[\overline{\varphi}_x, \varphi]$, $C = -C^*$, задовольняє спектральну задачу

$$\hat{L}\{F\} = F\lambda, \tag{3}$$

з інтегро-диференціальним оператором $\hat{L}$ вигляду

$$\begin{aligned}\hat{L} &:= W_{DU} L W_{DU}^{-1} = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n} \hat{u}_i D^i - \varphi(\Delta^*)^{-1} \mathrm{M}\Omega[((\Delta^{-1}\varphi^*)^\top)', \cdot] + \\ &+ W_{DU}\{q\} M_0 \Omega[W_{DU}{}^{-1,\tau}\{r\}, \cdot],\end{aligned} \tag{4}$$

де $\mathrm{M} = C\Lambda + \Lambda^* C$

2. Коефіцієнти $\hat{u}_l$, $l = \overline{0,n}$, перетвореного оператора $\hat{L}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}\hat{u}_0 &= (I - \varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*) \sum_{i=0}^{n} u_i (I - \varphi\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i)} + \\ &\varphi(\Delta^*)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\varphi_x^* u_i)^{(j)} (I - \varphi\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-j-1)} + \\ &(I - \varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} u_i \varphi^{(j)} (\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-j)} + \\ &\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{i-j-2} (-1)^j \binom{i-j-1}{k} \varphi(\Delta^*)^{-1} (\varphi_x^* u_i)^{(j)} \varphi^{(k)} (\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-k-j-1)} + \\ &\alpha\varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi_y^* - \alpha\varphi_y\Delta^{-1}\varphi^* + \alpha\varphi(\Delta^*)^{-1}(\varphi^*\varphi_y - \Delta_y)\Delta^{-1}\varphi^*,\end{aligned}$$

$$\hat{u}_l = (I-\varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*)\sum_{i=l}^{n}\binom{i}{i-l}u_i(I-\varphi\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-l)}+$$
$$\varphi(\Delta^*)^{-1}\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-1}(-1)^j\binom{i-j-1}{i-j-l-1}(\varphi_x^* u_i)^{(j)}(I-\varphi\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-j-l-1)}+$$
$$+(I-\varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*)\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-1}\binom{i}{j}\binom{i-j-1}{i-j-l-1}u_i\varphi^{(j)}(\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-j-l)}+$$
$$+\sum_{i=l+2}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-2}\sum_{k=0}^{i-l-j-2}(-1)^j\binom{i-j-1}{k}\binom{i-k-j-2}{i-k-j-l-2}\times$$
$$\times\varphi(\Delta^*)^{-1}(\varphi_x^* u_i)^{(j)}\varphi^{(k)}(\Delta^{-1}\varphi^*)^{(i-k-l-j-1)},\quad l=\overline{1,n-2},$$
$$\hat{u}_{n-1}=(I-\varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*)u_{n-1}(I-\varphi\Delta^{-1}\varphi^*)+(I-\varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*)u_n\varphi(\Delta^{-1}\varphi^*)'-\varphi\Delta^{-1}\varphi_x^* u_n,$$
$$\hat{u}_n=(I-\varphi(\Delta^*)^{-1}\varphi^*)u_n(I-\varphi\Delta^{-1}\varphi^*).$$

Аналог теореми 1 для оператора L (1) без додаткових редукцій типу D-ермітового спряження був доведений в роботі [5] та апробований на Українському математичному конгресі – 2009 [6].

Наслідок. Нехай виконується рівняння Лакса $\beta L_t=[M,L](:=ML-LM)$, $\beta\in\mathbf{R}\cup i\mathbf{R}$, $\tilde{\mu}\beta=-\bar{\beta}$ ($\tilde{\mu}=1$ або $\tilde{\mu}=-1$) з операторами $M=\sum_{i=0}^{m}v_iD^i$ та L, для яких справджуються редукції: $M=\tilde{\mu}DMD^{-1}$, $L=\mu DLD^{-1}$ ($\mu=1$ або $\mu=-1$), функція φ - фіксований розв'язок еволюційного рівняння

$$\beta\varphi_t=M\{\varphi\},$$

а функція f - довільний розв'язок рівняння

$$\beta f_t=M\{f\}.$$

Тоді перетворені оператори $\hat{L}:=W_{DU}LW_{DU}^{-1}$ та $\hat{M}:=\alpha\partial_t-W_{DU}(\alpha\partial_t-M)W_{DU}^{-1}=\sum_{i=0}^{m}\hat{v}_iD^i$, де $W_{DU}=I-\varphi(\Delta^*)^{-1}\Omega[\bar{\varphi},D]$, задовольняють рівняння Лакса $\beta\hat{L}_t=[\hat{M},\hat{L}]$, а функція $F:=W_{DU}\{f\}$ є розв'язком нового еволюційного рівняння

$$\beta F_t=\hat{M}\{f\}.$$

Приклади нелінійних рівнянь. Розглянемо нелінійні рівняння математичної фізики, які допускають зображення у вигляді пари Лакса $\beta L_t=[M,L]$ з D-ермітовими та D- косоермітовими операторами L та M:

1. $\mu=-1, \beta=i,\ L=D-qM_0D^{-1}q^*D,\ M_0=-M_0^*,\ M=D^2-2qM_0q^*D$,

$$iq_t = q_{xx} - 2qM_0q^*q_x . \tag{5}$$

Рівняння (5) є векторним нелінійним рівнянням Шредінгера.

2. $\mu = 1, \beta = i,\ L = D^2 + iuD - qM_0D^{-1}q^*D,\ M_0 = M_0^*,\quad M = D^2 + iuD$,

$$\begin{cases} iq_t = q_{xx} + iuq_x, \\ u_t = 2(qM_0q^*)_x. \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) є мультикомпонентною модифікацією інтегровної моделі Яджими-Ойкави

3. $\mu = -1,\ \beta = 1,\ L = D^3 + uD - qM_0D^{-1}q^*D$, $M_0 = -M_0^*,\ M = D^3 + uD$

$$\begin{cases} q_t = q_{xxx} + uq_x, \\ u_t = \frac{3}{2}(qM_0q_x^* - q_xM_0q^*)_x. \end{cases} \tag{7}$$

1. *Митропольский Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в’язями // Доповіді НАН України. – 1999. - **8.** – С.19-23.
2. *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія рівняння Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в’язями. Багатовимірні узагальнення та точні розв’язки редукованих систем // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**:1. – С. 78-97.
3. *Sidorenko Yu.* Transformation operators for integrable hierarchies with additional reductions // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – **43**:1. – P. 352-357.
4. *Беркела Ю.Ю.*, *Сидоренко Ю.М.* Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування // Матем. Студії. – 2005. – **23**:1.–С. 31-51.
5. *Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісн. Київ. націон. університету ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. **22.** - С. 32-35.
6. *Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних узагальнень матричної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в’язями. – Український математичний конгрес 2009, м. Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 р.: Тези доповідей. – Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/partUMC2009.html#H

INVARIANT TRANSFORMATIONS OF D - HERMITIAN INTEGRO-DIFFERENTIAL EXPRESSIONS

A method for constructing exact solutions of the spatially two-dimensional generalization of hierarchy of the Kadomtsev-Petviashvili equations under D - Hermitian constraints using Darboux-type transformations is proposed.