Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-BG-04.pdf

УДК 512.581.2

АРТІНОВІ І НЕТЕРОВІ КАТЕГОРІЇ

Бурбан Н.Ю.[1], Горбачук О.Л.[2]

Львівський національний університет імені Івана Франка, n_burban@mail.ru [1];
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, o_horbachuk@yahoo.com [2]

Нехай A – довільна конкретна категорія. Нагадаємо, що категорія називається *конкретною*, якщо її об'єктами є множини (зі структурою), морфізмами є відображення множин (які зберігають структуру), композицією морфізмів є композиція відображень, одиничними морфізмами є тотожні відображення [1]. (Ми надалі розглядатимемо лише конкретні категорії). Якщо $a', a \in Ob(A)$, a' є підоб'єктом a, a' не ізоморфне a, то позначатимемо це так: $a' \subset a$ (або $a \supset a'$). Всі основні факти і теореми з теорії категорій наведено у монографіях [2, 3].

Означення. Об'єкт a категорії A називається *артіновим*, якщо не існує нескінченного строго спадного ланцюга

$$a_1 \supset a_2 \supset a_3 \supset \ldots$$

підоб'єктів a. *Категорія* називається *артіновою*, якщо всі її об'єкти артінові.

Означення. Підоб'єкт a' об'єкта a називається *мінімальним* (простим), якщо $a' \neq 0$ (0 – це нульовий об'єкт категорії) і не існує підоб'єкта a'', відмінного від 0 і a', такого що $a'' \subset a' \subset a$.

Теорема 1. Для $a \in Ob(A)$ наступні умови еквівалентні:

1) a – артіновий;

2) будь-яка непорожня сім'я підоб'єктів a має мінімальний елемент (з точністю до ізоморфізму).

Доведення. (*Необхідність*) Припустимо, що B це непорожня множина підоб'єктів об'єкта a без мінімального елемента. Нехай a_1 довільний елемент з цієї сім'ї. Оскільки він не мінімальний, то існує a_2 з B, такий що $a_1 \supset a_2$. Оскільки a_2 не мінімальний , то у нього є підоб'єкт a_3, і так далі. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо строго спадний нескінченний ланцюг $a_1 \supset a_2 \supset a_3 \supset \ldots$ підоб'єктів a, що суперечить умові.

(*Достатність*) Оскільки будь-яка непорожня сім'я підоб'єктів a має мінімальний елемент, то не може існувати нескінченного строго спадного ланцюга $a_1 \supset a_2 \supset a_3 \supset \ldots$ підоб'єктів a.

Означення. Об'єкт a категорії A називається *нетеровим*, якщо не існує нескінченного строго зростаючого ланцюга

$$a_1 \subset a_2 \subset a_3 \subset \ldots$$

підоб'єктів a. *Категорія* називається *нетеровою*, якщо всі її об'єкти нетерові.

Означення. Підоб'єкт a' об'єкта a називається *максимальним*, якщо $a' \neq a$ і не існує підоб'єкта a'', відмінного від a і a', такого що $a' \subset a'' \subset a$.

Теорема 2. Для $a \in Ob(A)$ наступні умови еквівалентні:

1) a – нетеровий;

2) будь-яка непорожня сім'я підоб'єктів a має максимальний елемент (з точністю до ізоморфізму).

Доведення теореми 2 дуальне до теореми 1.

Означення. Об'єкт a категорії A називається *напівпростим*, якщо він є прямою сумою простих підоб'єктів.

Категорію, де кожен об'єкт є напівпростим назвемо *напівпростою*.

Категорію, в якій кожен нормальний підоб'єкт виділяється прямим доданком, назвемо *розщеплюваною*.

В категорії модулів ці два поняття співпадають, але в довільній категорії це не так.

Відомий приклад категорії, яка є артіновою і нетеровою, в якій кожен об'єкт розкладається в пряму суму простих підоб'єктів, але є підоб'єкти, які не виділяються прямим доданком (тобто категорія є напівпростою, але не є розщеплюваною).

Також є приклад категорії розщеплюваної, але не напівпростої. В ній немає жодного простого об'єкта. Ця категорія не є артіновою і не є нетеровою.

В артіновій (нетеровій) категорії завжди є простий (максимальний) об'єкт. Якщо об'єкт є артіновий (нетеровий), то в нього є простий (максимальний) підоб'єкт.

1. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.,* Monoids, acts and categories: with applications to wreath products and graphs; a handbook for students and researchers. - Berlin; New York: de Gruyter. - 2000.
2. *Mitchell B.,* Theory of categories. - New York, London Acad. Press. - 1965.
3. *Freyd P.,* Abelian categories. - New York, Evanston & London: Harper & Row. - 1966.
4. *Gubareni N. M., Kirichenko V. V.,* Rings and Modules. – Chestostova. - 2001.

ARTINIAN AND NOETHERIAN CATEGORIES

Such notions as artinian, noetherian, semisimple, splitting modules are well known in the category of modules. We generalize these notions for an arbitrary concrete category.