



УДК 512.552.12

МАКСИМАЛЬНО НЕСКІНЧЕННО ПОРОДЖЕНІ ІДЕАЛИ КОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ

Білявська С.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка, zosia_meliss@yahoo.co.uk

Під кільцем R розумітимемо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Більше того, нехай R є не нетеровим.

Ідеал N кільця R назвемо *максимально нескінченно породженим*, якщо N є максимальним серед нескінченно породжених ідеалів R , тобто N є максимально нескінченно породженим, якщо для довільного ідеалу J кільця R , з умови $N \subset J$, $N \neq J$ завжди слідує J - скінченно породжений. [1-4, 6]

Теорема 1. Довільний нескінченно породжений ідеал комутативного кільця міститься хоча б в одному максимально нескінченно породженому ідеалі. Довільний максимально нескінченно породжений ідеал є простим ідеалом кільця R .

Позначимо через $\text{mspec}R$ множину всіх максимально нескінченно породжених ідеалів кільця R .

Скажемо, що ненульовий елемент $a \in R$ називається *скінченним елементом*, якщо довільний ланцюг ідеалів, який містить даний елемент є скінченним. В іншому випадку такий елемент назвемо *нескінченим* [5].

Твердження 1. Нехай R - комутативне, не нетерове кільце, $a \in R$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1) a - скінченний елемент;
- 2) довільний ідеал, який містить елемент a є скінченнопородженим.

Наслідок 1. Довільний елемент a комутативного кільця R , який не міститься в жодному максимально нескінченно породженому ідеалі є скінченним елементом кільця R .

Теорема 2. Нехай R - комутативне кільце і $n \in \bigcap_{N \in \text{mspec}R} N$ (перетин всіх максимально нескінченно породжених ідеалів). Тоді для довільного скінченного елемента $a \in R$ і довільного елемента $x \in R$, елемент $a + nx$ скінченний.

Як наслідок з даної теореми отримуємо наступну теорему:

Теорема 3: Нехай R - комутативне кільце з єдиним максимально нескінченно породженим ідеалом N , тоді виконуються наступні твердження:

- 1) Всі нескінченні елементи з R утворюють ідеал, який співпадає з N .
- 2) Довільний дільник скінченного елемента є скінченним елементом кільця R .

3) Для довільного нескінченного элемента n та довільного скінченного элемента a , элемент $n + a$ скінченний.

1. Cohen I. S. Commutative rings with restricted minimum conditions // Duke. Math. J. – 1950. – **17**. – P. 24-42.
2. Chandran R. On two analogues of Cohen's theorem // Indian J. Par. And Appl. Math. – 1977 – **8**. - № 1. – P. 54-59.
3. Michler G. Rings in which finitely generated right ideals are principal // Proc. London Math. Soc. – 1967. – **17**. – P.617-628.
4. Дубовин Н. И. О кольцах главных правих идеалов // Изд. Вузов. Мат. – 1981. – № 2. – С.30-37.
5. Beauregard R.A. Infinite primes and unique factorization in a principal right ideal domain // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – P.141.
6. Забавський Б.В. Факториальні елементи коммутативної області Безу // Мат. методи и физ.-мех. поля. – 1985. – **22**. – С.32-34.

MAXIMUM NON FINITELY GENERATED IDEALS OF COMMUTATIVE RING

Maximal non-finitely generated ideal and finite elements are considered. Also arbitrary maximum non finitely generated ideal is prime ideal of ring R . Besides, any non-finitely generated ideal of commutative ring contains at least in one maximum non-finitely generated ideal. Some equivalent statements are considered too.