Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-Z-13.pdf

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ГАЛЬМУВАННЯ ОБЕРТАНЬ СИМЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА З ВНУТРІШНЬОЮ СТУПІННЮ ВІЛЬНОСТІ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Зінкевич Я.С.

Одеська державна академія будівництва та архітектури, yaninaz@mail.ru

Досліджується задача оптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного тіла, з’єднаного в точці на осі симетрії з масою відносно малих лінійних розмірів за допомогою пружних в’язей з квадратичною дисипацією. Крім того, на тверде тіло діє малий гальмівний момент опору середовища. Керування обертаннями проводиться за допомогою моменту сил, обмеженого за модулем.

На основі підходу [1] рівняння керуючих обертань в проекціях на осі зв’язаної з фіксованим твердим тілом системи координат (рівняння Ейлера) можуть бути зображені у вигляді [1-3]

$$A\dot{p} + \left(C - A\right)qr = M_p + FG^2 qr + Spr^6\omega - \chi Ap\,,$$

$$A\dot{q} + \left(A - C\right)pr = M_q - FG^2 pr + Sqr^6\omega_\perp - \chi Aq\,, \qquad (1)$$

$$C\dot{r} = M_r - AC^{-1}Sr^5\omega_\perp^3 - \chi Cr\,,$$

тут p, q, r - проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ на зв’язані осі, $\mathbf{J} = diag(A, A, C)$ - тензор інерції незбуреного тіла, $M_{p,q,r}$ - проекції вектора моменту керуючих сил $\mathbf{M}$; кінетичний момент тіла $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, його модуль

$$G = \left|\mathbf{G}\right| = \left[A_1^2\omega_\perp^2 + A_3^2 r^2\right]^{1/2}, \quad \omega_\perp^2 = p^2 + q^2\,.$$

Для спрощення задачі в систему (1) внесено структурне обмеження

$$\mathbf{M}^r = -\chi J\boldsymbol{\omega}\,, \qquad (2)$$

де χ - деякий постійний коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища. Передбачається, що допустимі значення моменту керуючих сил $\mathbf{M}$ обмежені сферою [1]

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}\,, \quad \left|\mathbf{u}\right| \le 1; \quad b = b(t, \mathbf{G})\,, \quad 0 < b_* \le b < b^* < \infty\,, \qquad (3)$$

де b - деяка скалярна функція.

Введені в (1) позначення F, S виражаються через параметри системи наступним чином

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}, \quad S = m\rho^3\lambda\Omega^{-3}d\left|d\right|C^4A^{-4}, \quad d = 1 - CA^{-1}, \tag{4}$$

тут m - маса рухомої точки, ρ - радіус-вектор точки O_1 кріплення рухомої маси, що знаходиться на осі симетрії. Сталі $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \mu/m = \Lambda\Omega^3$ означають частоту коливань та швидкість їх затухань, відповідно; c - жорсткість; μ - коефіцієнт квадратичного тертя.

Розглядається задача оптимального за швидкодією гальмування обертань

$$\boldsymbol{\omega}(T) = 0, \quad T \to \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \le 1. \tag{5}$$

Потрібно знайти оптимальний закон керування в вигляді синтезу $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, відповідну йому траєкторію $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ та час швидкодії $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а також функцію Беллмана задачі $W = T(t, \boldsymbol{\omega}) - t$.

На основі динамічного програмування синтез оптимального по швидкодії керування має вигляд [1]

$$M_p = -b\frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b\frac{Aq}{G}, \quad M_r = -b\frac{Cr}{G}, \quad b = b(t, G), \tag{6}$$

тут для подальшого спрощення можна вважати $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \le b \le b_2 < \infty$.

Домножимо перше рівняння (1) на Ap, друге - на Aq, третє - на Cr та складемо їх. Отримуємо рівняння вигляду, яке підлягає інтегруванню, та рівняння для T

$$\begin{gathered} G(t) = G^0 e^{-\chi(t - t_0)} - \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\chi(t-\tau)} d\tau, \\ G^0 = e^{-\chi t_0} \int_{t_0}^{T} b(\tau) e^{\chi\tau} d\tau, \quad T = T\left(t_0, G^0\right), \end{gathered} \tag{7}$$

тут t - поточний час процесу гальмування, T -час швидкодії.

При $b = const$ розв'язок рівняння та крайової задачі (7) записується наступним чином

$$G(t) = \frac{1}{\chi}\left[\left(G^0\chi + b\right)\exp(-\chi t) - b\right],$$
$$T = \frac{1}{\chi}\ln(G^0\frac{\chi}{b} + 1), \quad t_0 = 0. \tag{8}$$

Далі детально аналізується випадок (8).

Підстановка відомого виразу для G в третє рівняння (1) приводить до нелінійного рівняння відносно r наступного вигляду

$$\dot{r} = -r\left[bG^{-1} + A^{-2}C^{-2}Sr^4\left(G^2 - C^2r^2\right)^{3/2} + \chi\right]. \tag{9}$$

Вектор кінетичного моменту $\mathbf{G}$ при проектуванні на головні центральні осі інерції тіла призводить до виразу $Cr = G\cos\theta$, де θ - кут нутації. Рівняння (9) після переходу до невідомої θ може бути записано у вигляді

$$\dot{\theta} = A^{-2}C^{-6}S\sin\theta\left|\sin\theta\right|\cos^5\theta\chi^{-7}\left|\left(G^0\chi + b\right)\exp(-\chi t) - b\right|^7, \quad \theta(0) = \theta^0. \tag{10}$$

Його розв'язок записується наступним чином:

$$2\sec^4\theta\cos ec\theta + 5\left(\sec^2\theta - 3\right)\cos ec\theta - 2\sec^4\theta^0\cos ec\theta^0 -$$
$$-5\left(\sec^2\theta^0 - 3\right)\cos ec\theta^0 + 15\ln\left|tg\left(\pi/4 + \theta/2\right)tg^{-1}\left(\pi/4 + \theta^0/2\right)\right| = K(t), \tag{11}$$

де

$$K(t) = \pm 8A^{-2}C^{-6}S\chi^{-7}\Big[-(7\chi)^{-1}\left(G^0\chi + b\right)^7\left(\exp(-7\chi t) - 1\right) +$$
$$+7b(6\chi)^{-1}\left(G^0\chi + b\right)^6\left(\exp(-6\chi t) - 1\right) -$$
$$-21b^2(5\chi)^{-1}\left(G^0\chi + b\right)^5\left(\exp(-5\chi t) - 1\right) +$$
$$+35b^3(4\chi)^{-1}\left(G^0\chi + b\right)^4\left(\exp(-4\chi t) - 1\right) -$$
$$-35b^4(3\chi)^{-1}\left(G^0\chi + b\right)^3\left(\exp(-3\chi t) - 1\right) +$$
$$+21b^5(2\chi)^{-1}\left(G^0\chi + b\right)^2\left(\exp(-2\chi t) - 1\right) -$$
$$-7b^6\chi^{-1}\left(G^0\chi + b\right)\left(\exp(-\chi t) - 1\right) - b^7 t.$$

Після приведення рівняння (10) до безрозмірного вигляду в окремому випадку $b = const$, отримуємо рівняння для кута нутації θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = sign(d)\left|\left(G_0^* + k^*\right)\exp(-\tau) - k^*\right|^7 \sin\theta\left|\sin\theta\right|\cos^5\theta\,. \qquad (12)$$

Рівняння (12) було чисельно проінтегровано для довільних різних значень G^{0*}, k^* та початкового кута $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики зміни кута нутації θ представлені на рис. 1-2. Рис. 1 відповідає динамічно витягнутому тілу, а рис. 2 - сплющеному.

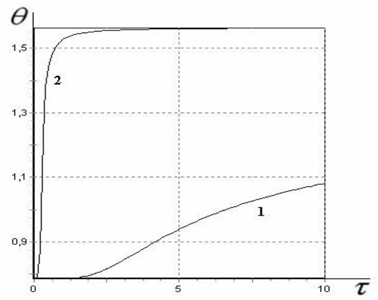

Рис. 1

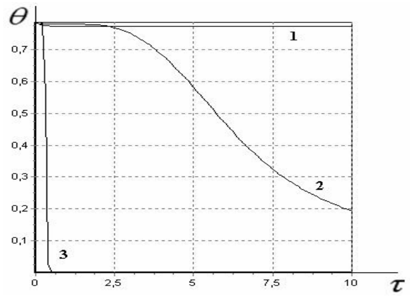

Рис. 2

Чисельний розрахунок показав, що характер поведінки функції $\theta(t)$ в даній задачі співпадає з характером поведінки функції зміни кута нутації для твердого тіла з рухомими внутрішніми масами [8].

Таким чином, напрям вектору кінетичного моменту **G** в зв'язаній з тілом системі координат наближається до стаціонарного стану: до напрямів осей, відповідним найбільшим моментам інерції.

Аналітично і чисельно досліджена задача синтезу оптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, з'єднаною з тілом за допомогою пружної в'язі при наявності квадратичного тертя, в середовищі з опором. В рамках асимптотичного підходу визначені керування, час швидкодії (функція Беллмана) та кут нутації, встановлені якісні властивості оптимального руху.

1. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1987. - 368 с.
2. *Котляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. - М. : Наука, 1985. - 288 с.
3. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. - М.: Наука, 1983. - 544 с.
4. *Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Известия РАН. Механика твердого тела. - 2008. - № 2. - С. 13-26.
5. *Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко* Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Известия РАН. Теория и системы управления. - 1995. - №2. - С. 115-122.

6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
7. *Д.Д. Лещенко, С.Н. Саллам* Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы // Прикл. механика. - 1992. – **28:**8. - С. 58-63.
8. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1973. - № 4. - С. 33-44.

RESPONSE-OPTIMAL BRAKING OF THE ROTATIONS OF A SYMMETRICAL FREE RIGID BODY IN A RESISTING MEDIUM

We investigate the problem of response-optimal braking of the rotations of a free rigid body. It is assumed that the body contains a moving mass connected to the body by an elastic coupling with square-law friction dissipation. Furthermore the braking moment of linear resisting medium is acted on the rigid body. It is supposed that the body is dynamically symmetrical in nondeformed state and mass can be found at axis of symmetry. Optimal control law for braking of rotations of a rigid body in the form of synthesis, time of speed and phase trajectories are determined.