Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-V-06.pdf

УДК 539.5

РЕГУЛЯРНА ТА ХАОТИЧНА АДВЕКЦІЯ РІДИНИ ЦИЛІНДРОМ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Вовченко Олександр Миколайович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
кафедра теоретичної та прикладної механіки
oleksandr.vovchenko@gmail.com

Вступ. Вивчення переносу властивостей рідини разом з її частинками (адвекції) є практичною задачею з широким застосуванням до різномаштабних явищ від течій океану до мікротечій. Дослідження руху індивідуальної молекули рідини найефективніше у випадках відомого поля швидкостей [2]. У двовимірному випадку рух пасивної частинки описується гамільтоновою системою з одним степенем вільності. Проте, у нестаціонарному випадку така система дуже чутлива до зміни початкових умов і характеризується появою детермінованого хаосу. Регулярні та хаотичні режими визначаються методами стохастичної динаміки, зокрема, з допомогою відображень Пуанкаре.

Постановка задачі. Розглянемо рух циліндра в ідеальній нестисливій рідині з циркуляцією навколо нього. Поле швидкостей отримується з розв’язку динамічної задачі з відповідними граничними умовами. Функція току, що описує безвихрове обтікання кругового циліндру радіуса a потоком зі швидкістю $(-U,-V)$ на достатній віддалі від циліндру і з циркуляцією Γ навколо нього має вигляд [1,§6.6]:

$$\psi=\left(1-\frac{a^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)\left\{-U(y-y_0)+V(x-x_0)\right\}-\\-\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{a^2}, \quad (1)$$

де x_0, y_0 - положення осі циліндра. При періодичному русі циліндра по квадрату та з циркуляцією Γ навколо нього (суперпозиція поступального руху циліндру та обертового навколо власної осі) функція току має вигляд:

$$\psi=\frac{a^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\left\{U(y-y_0)-V(x-x_0)\right\}-\\-\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{a^2}. \quad (2)$$

Схема руху, значення швидкості (U,V) осі циліндра на відповідних проміжках, циркуляція навколо нього показані на рис.1.

Рівняння руху пасивної частинки рідини отримуються зі співвідношень для функції току (2) [3]:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{dy},\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi}{dx}. \tag{3}$$

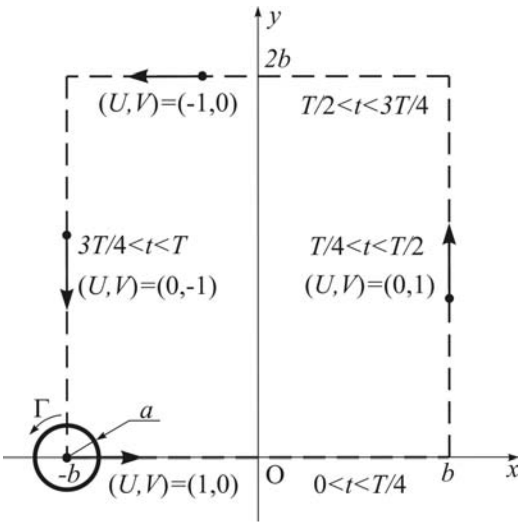
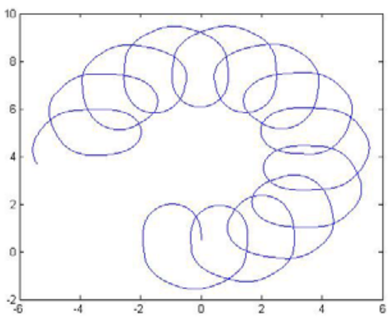


Рис.1 Схема руху циліндру

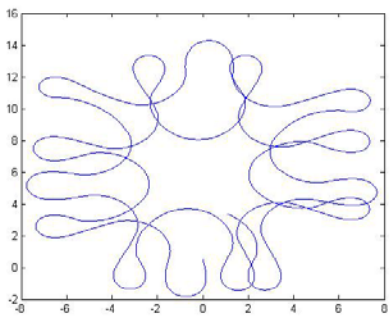
Таким чином, рівняння адвекції у двовимірному випадку будуть мати гамільтонову форму, роль Гамільтоніана грає функція току, а фазовий простір канонічних змінних буде співпадати з конфігураційним. Отже, при розгляді руху лагранжевої частинки у відомому ейлеровому полі швидкостей ми маємо справу з канонічною системою першого порядку. Проте, у нестаціонарному випадку поведінка такої системи далеко не завжди регулярна.

Результати. Нехай $2b$ – довжина сторони квадрата, по якому рухається вісь циліндру. Тоді період руху циліндру $T=4b/U+4b/V$, де U – величина швидкості руху осі по нижній та верхній сторонах, V – по лівій та правій.

Проінтегруємо рівняння (3) чисельно, використовуючи метод Рунге-Кутта, для отримання траєкторії руху молекули рідини у заданому полі швидкостей. Використаємо наступні значення параметрів: $b=6, U=V=1$, а також два значення для циркуляції навколо циліндра: $\Gamma=3\pi$ та $\Gamma=-3\pi$.



а



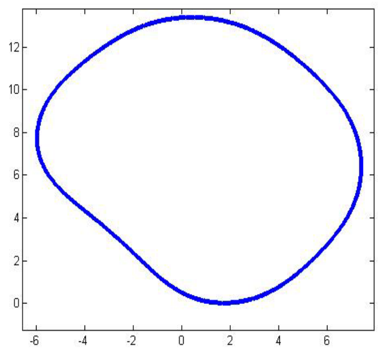
б

Рис.2. Траєкторії точки з початковими умовами $x_0=0, y_0=0{,}5$ при значеннях циркуляції $\Gamma=3\pi$ (а) та $\Gamma=-3\pi$ (б)

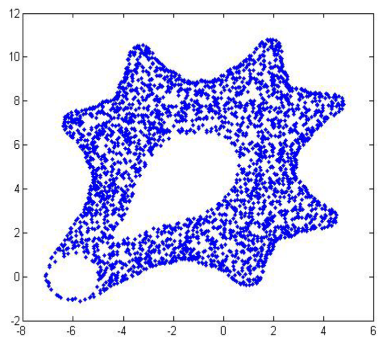
Побудуємо відображення Пуанкаре, що задається як

$$(x(t),\, y(t)) \mapsto (x(t+T),\, y(t+T)). \tag{4}$$

Дані відображення є сукупностями положень точки через кожний період руху циліндра. У випадку $\Gamma = 3\pi$ будь-яка точка всередині квадрату, який описує вісь циліндру, буде рухатись регулярно, з'являючись після кожного відображення на замкненій кривій (квазіперіодичний рух), або у одному і тому ж положенні (періодичний рух). Натомість, якщо обертання циліндру протилежне напрямку обходу віссю квадрату, точка може з'являтись після кожного періоду руху циліндра у будь-якому місці певної області (Рис.3б). Це свідчить про хаотичний режим руху. Слід зазначити, що в даному випадку у фазовому просторі також присутні періодичні точки 1-го та 7-го порядку.



а



б

Рис.3 Відображення Пуанкаре точки з початковими умовами $x_0 = 0, y_0 = 0{,}5$ при значеннях циркуляції $\Gamma = 3\pi$ (а) та $\Gamma = -3\pi$ (б)

Така поведінка точки не пов'язана з нагромадженням похибки обчислень, а є приниповою властивістю детермінованого хаосу. При чисельному розв'язку системи іншим методом, а саме багатокроковим методом Адамса-Башфорта, отримуються абсолютно ідентичні результати. Вся справа у найточнішому слідуванні початковим умовам і дуже високій чутливості системи до їх зміни. Хаотична поведінка лагранжевих частинок рідини у другому випадку пояснюється наявністю гіперболічної точки у рухомій системі координат всередині квадрату, по якому рухається вісь циліндру.

Висновки. При розгляді поведінки пасивної лагранжевої частинки ідеальної рідини у полі швидкостей навколо циліндра, що обертається та вісь якого рухається по квадрату, встановлена наявність двох принципово різних режимів. При обертанні циліндру у протилежному напрямку до напрямку обходу віссю замкненої траєкторії виникає режим хаотичної адвекції, який грає важливу роль при перемішуванні рідини.

1. *Дж. Бэтчелор.* Введение в динамику жидкости. – Москва: Изд. «Мир», 1973. – 747 с.
2. *JC Maxwell.* On the Displacement in a Case of Fluid Motion // Proc. Lond. Math. Soc. – 1870. – Mar.**10.** – P. 82-87.
3. *O.S. Galaktionov, V.V. Meleshko, G.W.M. Peters, H.E.H. Meijer.* Stokes ow in a rectangular cavity with a cylinder // Fluid Dynamics Research. – 1999. – **24.** – P. 81-102

REGULAR AND CHAOTIC ADVECTION BY ROTATING CYLINDER

Regular and chaotic regimes of ideal incompressible fluid advection by a rotating and moving cylinder are investigated. The trajectories and Poincare maps for passive fluid particle are obtained numerically by Runge-Kutta and Adams-Bashforth methods.