Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-S-23.pdf

УДК 539.3

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ТІЛ З ПЕРІОДИЧНИМ ПРОФІЛЕМ ЗА НАЯВНОСТІ ГАЗУ В МІЖПОВЕРХНЕВИХ ЗАЗОРАХ

Слободян Б.С.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, sbodia@bigmir.net

Розглянемо взаємодію двох пружних ізотропних півнескінченних тіл D_1 і D_2 із різних матеріалів за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл прямолінійна, а іншого – має малі нерівності у вигляді періодичної системи виїмок однакової форми завдовжки $2c$ кожна, розташованих з періодом d вздовж всієї межі. В основній смузі періодів $-d/2 \le x \le d/2$ форма виїмки задається парною неперервно-диференційованою функцією

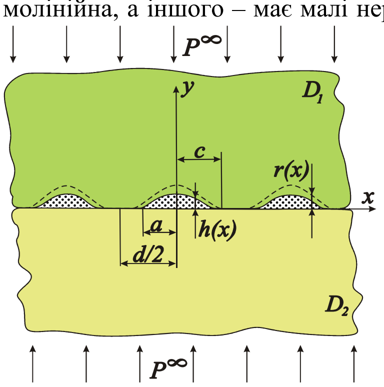

Рис. 1

$$r(x) = A\left(1 - tg^2\frac{\pi x}{d} / tg^2\frac{\pi c}{d}\right)^{3/2}.$$

Виїмки є плиткими ($r(x) << c$), пологими ($r'(x) << 1$) і в крайніх точках переходять в пряму ($r(\pm c) = 0$, $r'(\pm c) = 0$). Тіла вступають у контакт під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних навантажень P^{∞} . Внаслідок нерівності однієї межі їх контакт не є повним і між ними виникають міжповерхневі просвіти (зазори) (рис. 1). Вважаємо, що всі зазори містять однакову кількість ідеального газу, внаслідок чого тиск газу P_1 у всіх зазорах однаковий. Тіла контактують без тертя.

Використовуючи методи комплексних потенціалів і функцій міжконтактних зазорів [1] задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно висоти просвітів $h(x)$:

$$\frac{2}{d}\int_{-a}^{a} h'(t)ctg\frac{\pi(t-x)}{d}dt = K\left(P^{\infty} - P_1\right) + \frac{2}{d}\int_{-c}^{c} r'(t)ctg\frac{\pi(t-x)}{d}dt, \ x \in [-a, a], \quad (1)$$

де $K = \frac{1+\kappa_1}{2G_1} + \frac{1+\kappa_2}{2G_2}$, $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$, G_n, ν_n ($n = 1,2$) – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Права частина СІР (1) містить заздалегідь невідомий тиск газу P_1. Для його визначення використовуватимемо рівняння Клапейрона-Менделєєва, виразивши в ньому об'єм зазору через функцію висоти зазору $h(x)$:

$$P_1 \int_{-a}^{a} h(x)dx = \frac{m}{\mu} RT . \tag{2}$$

Тут m – маса газу, що припадає на одиницю довжини зазору в його поздовжньому напрямі, перпендикулярному до площини xOy; μ – молярна маса газу; T – температура газу; R – універсальна газова стала.

Висота зазору в крайніх його точках дорівнює нулеві:

$$h(-a) = h(a) = 0 . \tag{3}$$

Умова (3) забезпечує неперервність переміщень меж півплощин. Внаслідок гладкості виїмок береги зазорів плавно змикаються. Тому похідна від висоти зазору в точках змикання повинна задовольняти умову

$$h'(-a) = h'(a) = 0 , \tag{4}$$

яка забезпечує обмеженість контактних напружень. Умови (4) служать для визначення довжини зазорів.

Провівши заміну змінних $\xi = tg\frac{\pi x}{d}$, $\eta = tg\frac{\pi t}{d}$, СІР (1) з ядром Гільберта трансформуємо до СІР з ядром Коші

$$\frac{2}{d}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta = \frac{1}{1+\xi^2}\left(K\left(P^{\infty}-P_1\right)+\left(1+\xi^2\right)\frac{2}{d}\frac{3A\pi}{\gamma}\left(\frac{\xi^2}{\gamma^2}-\frac{1}{2}\right)\right),\ \xi\in[-\alpha,\alpha], \tag{5}$$

де $\alpha = tg\frac{\pi a}{d}$, $\gamma = tg\frac{\pi c}{d}$.

Умови (4) і рівняння (2) в нових змінних мають вигляд:

$$h'(-\alpha) = h'(\alpha) = 0 , \tag{6}$$

$$P_1 \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h(\xi)d\xi}{1+\xi^2} = \frac{m}{\mu} RT . \tag{7}$$

Згідно з умовою (4) шукатимемо обмежений розв'язок рівняння (5), з якого, врахувавши умову (3), визначаємо висоту зазору

$$h(\xi) = \frac{dK\left(P^{\infty}-P_1\right)}{2}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{1+\xi^2}-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}arcth\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\right)+\frac{A}{\gamma^3}\left(\alpha^2-\xi^2\right)^{3/2} . \tag{8}$$

З умови існування обмеженого розв'язку СІР (6) отримуємо таке рівняння

$$\frac{dK\left(P^{\infty}-P_1\right)\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{3A\pi}{2\gamma}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)=0 . \tag{9}$$

Рівняння (9) та (7) з урахуванням форми зазорів (8) є системою трансцендентних рівнянь для визначення довжини зазорів α і тиску газу P_1 в них. Наведено алгоритм розв'язання такої системи. Проаналізовано вплив кількості газу в зазорі на контактні параметри системи.

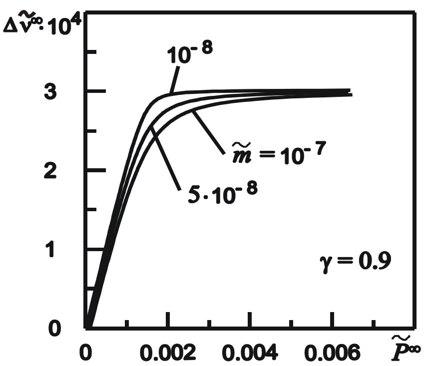

Рис. 2

Зумовлене поодинокою виїмкою збурення переміщень у півплощинах заникає на нескінченності. Проте інтегральний вплив періодичної системи виїмок проявляються у тому, що на великих відстанях від поверхні контакту (при $y \to \infty$) в напрямі дії прикладених зусиль P^{∞} виникає додаткове зближення матеріалів тіл

$$\Delta v^{\infty}=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\left(h(x)-r(x)\right)dx .$$

Залежність безрозмірного контактного зближення $\Delta\tilde{v}^{\infty}=\Delta v^{\infty}/d$ від навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ та маси $\tilde{m}=mRT/\left(\mu d\right)$ заповнювача одного зазору зображено на рис. 2. На початковій стадії навантаження зближення швидко зростає, на наступній змінюється повільно, наближаючись до величини зближення, що відповідає цілковитому закриттю незаповнених зазорів. Що більше газу в зазорах, то менше зближення.

1. *Мартиняк Р. М.* Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 4. – С. 144–149.

PLANE CONTACT PROBLEM FOR BODIES OF PERIODIC PROFILE WITH GAS IN INTERCONTACT GAPS

Model of contact interaction of elastic bodies which take into account filled by gas periodically placed interface gaps is proposed. For solving nonlinear elasticity contact problem the singular integral equation with Gilbert's kernel from height of gap is proposed. Two transcendent equations for length of gap and gas presser are obtained.