



УДК 539.3

РІВНОВАГА ПРУЖНОГО КЛИНА З НАПІВНЕСКІНЧЕНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ НА НЕСКІНЧЕНОСТІ

Некислих К.М.

Сумський державний педагогічний університет ім. А. С. Макаренка

В умовах плоскої деформації розглянемо пружний клин $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$ з напівнескінченною тріщиною $l < r < \infty$, $\vartheta = 0$, яка починається на відстані l від вершини і знаходиться на лінії симетрії клина. До берегів тріщини в точках $(r_0, \pm 0)$, $r_0 > l$, прикладені зосереджені нормальні сили P . Грані клина $0 \leq r < \infty$, $\vartheta = \pm \alpha$ вільні від напружень, а на нескінченності в кожному з півклинів $0 < \vartheta \leq \alpha$ і $-\alpha \leq \vartheta < 0$ напруження мають головний вектор P_∞ , направлений перпендикулярно до осі клина. Із літератури відомий наближений розв'язок цієї задачі [1], а також точні розв'язки однорідної задачі, коли береги тріщини вільні від сил, а на нескінченності задано головний вектор і головний момент напружень [2-4].

У даній роботі із застосуванням метода Вінера – Гопфа отримано точні розв'язки задачі як за умови відсутності обертання на нескінченності, так і без накладання зазначеної умови. Далі розглянемо ці два випадки.

1. Обертання на нескінченності відсутнє. В цьому випадку береги тріщини, до яких прикладене навантаження, на нескінченності паралельні, так що окружні переміщення обмежені. Остання умова суттєва для побудови розв'язку задачі, оскільки за її відсутності перетворення Мелліна від окружних переміщень, які в цьому разі стають лінійними на нескінченності, не існує. Відсутність обертання на нескінченності справджується за рахунок певних моментів, заданих на нескінченності і прикладених до кожного з півклинів, розділених напівнескінченим розрізом. Значення моменту знаходиться у процесі розв'язування задачі.

Завдяки симетрії задачі крайові умови сформулюємо на межі півклина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ ($\delta(r - r_0)$ – дельта-функція Дірака):

$$\begin{aligned} u_\vartheta|_{\vartheta=0} &= 0, \quad 0 \leq r \leq l; \quad \sigma_\vartheta|_{\vartheta=0} = -P\delta(r - r_0), \quad l < r < \infty; \\ \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0, \quad \sigma_\vartheta|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Введемо невідому функцію нормальних напружень на лінії продовження тріщини (G – модуль зсуву)

$$g(r) = \sigma_\vartheta/2G|_{\vartheta=0}, \quad 0 < r < l. \quad (2)$$

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна отримаємо розв'язок першої крайової задачі для півклина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \right|_{\vartheta=0} &= -\frac{m-1}{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Delta(s)}{\lambda(s)} a(s) r^{-s-1} ds, \\ \left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \right|_{\vartheta=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds, \quad a(s) = \int_0^l g(y) y^s dy - \frac{P}{2G} r_0^s, \\ \Delta(s) &= \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha, \quad \lambda(s) = \sin^2 s\alpha - s^2 \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

де m – число Пуассона.

Підставивши вираз для $a(s)$ у першу рівність (3), задовольнимо продиференційовану першу крайову умову (1). Виконуючи заміни

$$s = -i\tau, \quad r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta}, \quad \varphi(\eta) = g(le^{-\eta})e^{-\eta} \quad (4)$$

отримаємо інтегральне рівняння з різницеvim ядром на півосі

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad (5)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{K(\tau)}{-i\tau} e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{-i\tau \Delta(-i\tau)}{\lambda(-i\tau)},$$

$$f(\xi) = \bar{P}k(\xi - \xi_0), \quad \bar{P} = P/(2Gl), \quad \xi_0 = \ln(l/r_0). \quad (6)$$

Методом Вінера – Гопфа знайдено точний розв'язок інтегрального рівняння (5), при цьому факторизація коефіцієнтів функціональних рівнянь проведена в нескінченних добутках за коренями s_n , δ_n , ($n=1, 2, \dots$) рівнянь $\lambda(s) = 0$ і $\Delta(s) = 0$ відповідно із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$.

Визначено коефіцієнт інтенсивності напружень

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow l-0} \sqrt{2\pi(l-r)} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \\ &= \frac{P}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)(l/r_0)^{s_k}}{\lambda'(s_k)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(s_n + s_k)}{s_n(\delta_n + s_k)} + \\ &\quad + \frac{(P+P_{\infty})}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (7)$$

У випадку $P=0$, $P_{\infty} \neq 0$ для K_I маємо значення, отримане в роботах [2, 3].

Отримано розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини ($0 < r < l$, $\vartheta = 0$)

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{P}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{s_n(\delta_n + \delta_k)}{\delta_n(s_n + \delta_k)} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)}{\lambda'(s_m)} \frac{(l/r_0)^{s_m}}{s_m - \delta_k} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(s_n + s_m)}{s_n(\delta_n + s_m)} - \left(1 + \frac{P_{\infty}}{P}\right) \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\delta_k(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)} \right] \left(\frac{r}{l}\right)^{\delta_k - 1} \quad (8)$$

В аналогічному вигляді знайдені нормальні переміщення берегів тріщини.

2. Вільне обертання на нескінченності. При цьому береги розрізу на нескінченності повертаються один відносно одного, а головний момент напружень на нескінченності дорівнює нулю. Розв'язок з вільним обертанням і відсутністю моменту на нескінченності будується із попереднього методом суперпозиції з однорідним розв'язком, в якому напруження на нескінченності мають задані головні моменти, протилежні для кожного з півклинів. Розв'язок для заданих на нескінченності моментів будується, в свою чергу, як граничний випадок розв'язку для заданих на кожному березі тріщини пари сил за умови, що ці сили зносяться на нескінченність, а їх величини зростають пропорційно квадрату відстані до вершини клина. При переході до границі умова відсутності повороту на нескінченності зникає. Також показано, що розв'язок задачі з вільним обертанням на нескінченності можна отримати безпосередньо, застосовуючи узагальнене перетворення Мелліна функцій степеневого зростання на нескінченності.

Знайдено коефіцієнт інтенсивності напружень; нормальні переміщення берегів тріщини та розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини у вигляді рядів за коренями s_n , δ_n вказаних трансцендентних рівнянь.

3. Результати обчислень. Для пружного клина з кутом $\alpha = \pi/4$ та числом Пуасона $m = 10/3$ обчислені безрозмірні напруження $\bar{\sigma} = (l/P)\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0}$ та переміщення $\bar{u} = (2G/P)u_{\vartheta}|_{\vartheta=0}$. Розподіл нормальних напружень $\bar{\sigma}$ на лінії продовження тріщини ($0 \leq r < l$) показано на рис. 1, нормальні переміщення \bar{u} верхнього берега тріщини ($r \geq l$) – на рис. 2. Криві 1 відповідають умові відсутності обертання на нескінченності, криві 2 – вільному обертанню і відсутності моментів на нескінченності. При цьому відносна координата прикладання зосереджених сил на берегах тріщини $r_0/l = 2$, а сили на нескінченності відсутні ($P_{\infty} = 0$).

На рис. 3 у випадку чвертьплощини ($\alpha = \pi/4$) і відсутності сил на нескінченності ($P_{\infty} = 0$) показано залежність безрозмірного коефіцієнта

інтенсивності напружень $\hat{K}_I = (\sqrt{l}/P)K_I$ за умови відсутності обертання на нескінченності (крива 1) і без зазначеної умови (крива 2) від відносної

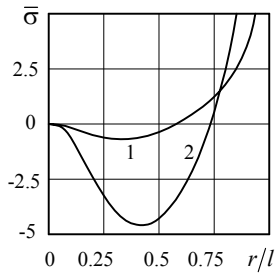


Рис. 1

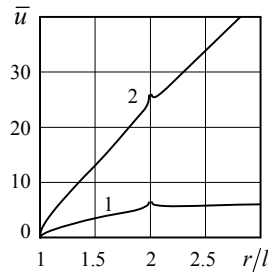


Рис. 2

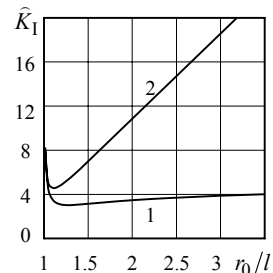


Рис. 3

координати r_0/l точки прикладання зосереджених сил P . При наближенні точки прикладання сил до вершини тріщини ($r_0/l \rightarrow 1$) коефіцієнти інтенсивності напружень K_I необмежено зростають. При віддаленні вказаної точки від вершини тріщини за відсутності обертання (крива 1) коефіцієнт \hat{K}_I прямує до значення 4.691 для випадку дії сили на нескінченності ($P = P_\infty$, $r_0 \rightarrow \infty$), а у разі вільного обертання (крива 2) зростає лінійно.

1. Srivastav R.P. Narain Prem. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1965. – **61**, N 4. – P. 945-954.
2. Кунис Л.А. Упругое равновесие клина с трещиной // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, № 1. – С. 153-159.
3. Садыхов А.Э. Кли́н с трещиной // Азерб. гос. пед. ин-т. – Баку, 1979. – 32 с. – Деп. в ВИНТИ 28.03.79, № 1091.
4. Садыхов А.Э. Об одной задаче теории упругости для клина с полубесконечной трещиной под действием сосредоточенного момента // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 5. – С. 91-96.

EQUILIBRIUM OF ELASTIC WEDGE WITH SEMI-INFINITE CRACK ON ACCOUNT OF ROTATION ON INFINITY

The equilibrium of elastic wedge with semi-infinite crack on the axis of symmetry is studied. The normal point forces to applied on the shores of cracks. Using the Wiener – Hopf method, to constructed the exact exactly solution with and without condition of absence of rotation on infinity. The stress intensity factor, distribution of tensions and jump of displacements are found.