Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-L-15.pdf

УДК 539.376

# КОЛИВАННЯ СУЦІЛЬНОГО ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА ЗА РІВНИХ ДІАМЕТРА І ВИСОТИ

**Лібов Дмитро Юрійович**

Київський національний університет імені Т. Шевченка, dmytro.libov@gmail.com

**Побудова розв'язку.** Розглядаємо задачу про пружні осесиметричні гармонічні коливання скінченного суцільного ізотропного циліндра. Вважаємо, що пружні властивості циліндра описуються лінійним законом Гука [1]. У цьому разі для опису динаміки циліндра використовуємо рівняння Ламе, подані у циліндричній системі координат $(r,\varphi,z)$. Шукані функції залежать лише від двох координат $r$ та $z$. Граничні умови задачі мають вигляд

$$\sigma_r(a,z)=f(z),\qquad \tau_{rz}(a,z)=0,\qquad -H\le z\le H,$$

$$\sigma_z(r,\pm H)=g(r),\qquad \tau_{rz}(r,\pm H)=0,\qquad 0\le r\le a,$$

де $\sigma_r$, $\sigma_z$, $\tau_{rz}$ - компоненти тензора напружень.

Тут і надалі всі лінійні величини віднесені до радіуса циліндра $a$, $2H$ – висота циліндра, гармонічний множник $e^{i\omega t}$ опущений. Розв'язки рівняння Ламе для компонент вектора переміщення такі [2]:

$$u_r=x_0\frac{J_1(\gamma_1 r)}{\gamma_1}+\sum_{n=1}^{\infty}x_n(-1)^n\left[\frac{I_1(q_2 r)}{I_1(q_2)}-\frac{k_n^2+q_2^2}{2k_n^2}\frac{I_1(q_1 r)}{I_1(q_1)}\right]\cos(k_n z)-$$
$$h\sum_{j=1}^{\infty}y_j\left[\frac{p_2}{\lambda_j}\frac{\cosh(p_2 z)}{\sinh(p_2 h)}-\frac{\lambda_j^2+p_2^2}{2\lambda_j p_1}\frac{\cosh(p_1 z)}{\sinh(p_1 h)}\right]\frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)},$$

$$u_z=y_0\frac{\sin(\gamma_1 z)}{\gamma_1}-\sum_{n=1}^{\infty}x_n(-1)^n\left[\frac{q_2}{k_n}\frac{I_0(q_2 r)}{I_1(q_2)}-\frac{k_n^2+q_2^2}{2k_n q_1}\frac{I_0(q_1 r)}{I_1(q_1)}\right]\sin(k_n z)+$$
$$h\sum_{j=1}^{\infty}y_j\left[\frac{\sinh(p_2 z)}{\sinh(p_2 h)}-\frac{\lambda_j^2+p_2^2}{2\lambda_j^2}\frac{\sinh(p_1 z)}{\sinh(p_1 h)}\right]\frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}.$$

Тут $k_n={\pi n}/{h}$, $(n=1,2,...)$, $J_1(\lambda_j)=0,$ $(j=1,2,...)$ - нулі функції Бесселя першого порядку, $\gamma_i={\omega a}/{V_i}$, $q_i^2=k_n^2-\gamma_i^2$, $p_i^2=\lambda_j^2-\gamma_i^2$, $(i=1,2)$ ,

$\gamma_2^2 = 2\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\gamma_1^2$, $\nu$ –коефіцієнт Пуассона, $V_1 = \sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}}$ –швидкість хвилі розширення, $V_2 = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ – швидкість хвилі зсуву, $G$ –модуль зсуву, $\rho$ –густина матеріалу.

Зауважимо, що гранична умова для дотичних компонентів тензора напружень задовольняється тотожно. З умов для нормальних компонент тензора напружень випливає нескінченна система алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $x_j, y_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ [2]. Проведені дослідження в роботі [3], зокрема, показали, що на частоті, яка не співпадає з власною існує розв'язок нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, якому властивий асимптотичний закон

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{j\to\infty} y_j = a_0 = const.$$

**Аналіз отриманих даних.** При використанні циліндрів в якості збуджувачів і прийомників коливань, ліній затримки в техніці [4], важливо знати кінематику руху точок всередині циліндра, динаміку форми коливань границі циліндра, а також пружні характеристики матеріалу $\nu$ та $G$. Для цього експериментально визначаємо перші дві симетричні або антисиметричні моди при h=1, шукаємо їх відношення $f_1/f_2$ ($f_1$, $f_2$ – частота першої та другої експериментальних мод в Гц) та порівнюємо з відношенням частот у таблиці 1 $\gamma_2^{(1)}/\gamma_2^{(2)}$, і далі знаходимо другу пружну сталу $G$ за формулою: $G = \dfrac{\pi^2 (f_1)^2 (2a)^2 \rho}{\gamma_2^{(1)}}$. Проте при проведенні експериментальних досліджень на основі такої методики стикаємося з проблемою відповідності теоретичних і експериментальних частот і форм. Так, наприклад, частоті $\gamma_2^{(i)}$ ($i$=1,2,3) в табл. 1, яка ілюструє залежність частоти від коефіцієнта Пуассона, може відповідати збуджена експериментально неосесиметрична форма. Тому, щоб теоретична частота збігалася з експериментальною потрібно співставити перші три теоретичні форми на рис.1 з отриманими в експерименті

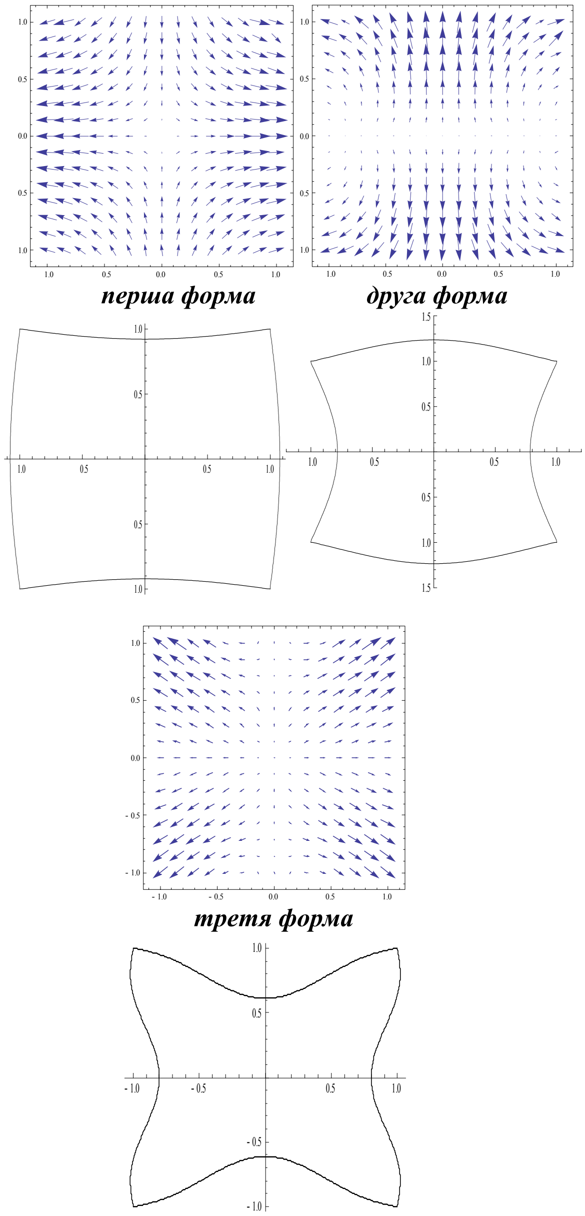


*Рис1.*

(візуалізовані методом порошкових фігур Хладні або лазерним інтерферометром). Форми зображені на рис. 1 отримано із розв’язку скінченної системи [2], яка одержана із нескінченної на основі асимптотичного закону для невідомих задачі. Форми коливань відповідають частотам, що близькі до власних $\gamma_2^{(i)}$. При цьому вибиралося постійне навантаження на границі циліндра ($f$=$g$=$const$).

*Таблиця 1.*

| $\nu$ | $\gamma_2^{(1)}$ | $\gamma_2^{(2)}$ | $\gamma_2^{(3)}$ |
|---|---|---|---|
| 0,29 | 2,2892 | 2,8620 | 3,0276 |
| 0,30 | 2,2902 | 2,8801 | 3,0505 |
| 0,31 | 2,2912 | 2,8980 | 3,0736 |
| 0,32 | 2,2921 | 2,9158 | 3,0967 |
| 0,33 | 2,2930 | 2,9334 | 3,1200 |
| 0,34 | 2,2938 | 2,9509 | 3,1434 |
| 0,35 | 2,2946 | 2,9682 | 3,1669 |

1. *А. Ляв.* Математическая теория упругости. – М. ; Л. :ОНТИ, 1935. – 674 с.
2. *Д. Лібов.* Осесиметричні коливання циліндра // Вісн. Київськ. нац. ун-ту. – Сер. Математика. Механіка. – 2009. – **2.** - с. 71 – 74.
3. *В. Т. Гринченко.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
4. *Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы их применение в преобразователях. Физ. акустика: принципы и методы. - Пер. с англ., 1966, **1А. -** с. 205 – 326.

## VIBRATION OF CONTINUOUS ELASTIC CYLINDER WITH A LENGTH EQUAL TO ITS DIAMETER

*Investigation of wave process in elastic cylinder has a long history whicht connected with names of scientist such as: Euler, Pochhgammer, Chree, Lamb, Timoshenko and many others. In works of these authors principal idea was considering cylinders with the length much more then the diameter or inversely. Pochhgammer and independent of him Chree were the first in finding and considering solve for the infinite cylinder. This infinite cylinder has the shape without stresses. Love offered solve he got from multiplication one harmonic function in time to another harmonic function in length coordinate. This solution satisfies conditions for length component of stress in the base but doesn't satisfies condition for shear component on this shape. Bracroft postulated, mistake in these stresses less than 0.05% and provides when relation between the length and the diameter not more than 2.5. The method of superposition let investigate characteristics of axissimetric oscillation of the cylinder with the length equal to its diameter. This method bases by natural idea, about combination of very well*

*knowing solutions for the infinite cylinder and layer. This method was used in this work. Frequencies for the “cub” cylinder and also oscillations shape motion by frequencies are near to resonance frequencies were considered.*