Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-JB-30.pdf

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖОВИХ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ ПРИПОВЕРХНЕВИМ ШАРОМ

Яцків О.І., Бобик Б.Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, bodiagajata@gmail.com

Властивості приповерхневих шарів елементів конструкцій, які експлуатуються за інтенсивного навантаження і дії фізичних полів різноманітної природи, часто відрізняються від властивостей основного матеріалу, що викликає потребу в адекватному моделюванні їх фізико-механічної поведінки. Якість такого моделювання багато в чому визначається інформативністю і точністю спостережень за об’єктами та процесами, під час перебігу яких вони експлуатуються [1]. Для уточнення характеристик і структури математичних моделей за допомогою непрямих вимірювань фізико-механічних параметрів і обробки їх результатів, поширеним є використання методів теорії обернених задач [1, 2, 3]. Однак з математичної точки зору крайові задачі, під час постави яких враховується вплив тонких приповерхневих неоднорідностей на фізико-механічну поведінку тіла, є некласичними [4, 5], а обернені задачі належать до класу некоректних, зокрема, вони нестійкі до малих збурень вхідних даних, що вимагає розробки ефективних методів розв’язування таких задач [1].

В роботі на прикладі задачі про визначення зведених межових теплофізичних параметрів у довгому циліндрі з тонким приповерхневим шаром, за його нагріву довкіллям, проілюстровано розроблений раніше метод [6] межової параметричної ідентифікації для тіл з тонкими приповерхневими неоднорідностями. Розглянуто і порівняно випадки задання вхідних даних у вигляді температури поверхні циліндра та поверхневих напружень. В умовах зашумленості вхідних даних проаналізовано похибку ідентифікації параметрів.

Постава прямої задачі. Нехай довгий ізотропний суцільний циліндр радіуса r_1, тонкий приповерхневий шар якого має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості, нагрівається середовищем сталої температури T_c. Приповерхневий шар моделюється циліндричною оболонкою, товщина якої спрямовується до нуля, за одночасного усереднення фізико-механічних параметрів. Під час постави крайової задачі термопружності, вплив оболонки на розподіл температури в циліндрі враховується узагальненими граничними умовами теплового контакту з довкіллям [4, 5].

Рівняння теплопровідності та узагальнені граничні умови запишемо для безрозмірних величин

$$\Delta T(r,\tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau}, \quad 0 \le r < r_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} + B \cdot T(r,\tau) + H \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_{r=r_1} = 0, \quad r = r_1. \tag{2}$$

Тут T – температура циліндра, α – коефіцієнт температуропровідності, Δ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат, B, H – відповідно зведені коефіцієнти тепловіддачі з поверхні циліндра та об'ємної теплоємності приповерхневого шару. Граничні умови (2) нестаціонарні, вони дозволяють враховувати кінетику процесу теплопровідності на поверхні циліндра.

Задаємо початкову умову, умови обмеженості і осесиметрії

$$\begin{gathered} T(r,0) = T^0,\ \tau = 0, \\ T(r,\tau) < \infty,\ \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} = 0,\ \ r = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Для розділення умови (2) введемо межову зв'язувальну функцію $\Phi(\tau)$ [5]

$$a)\ \ B \cdot T(r_1,\tau) = \Phi(\tau), \qquad b)\ \ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_1} + H \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_{r=r_1} = -\Phi(\tau). \tag{4}$$

Крайова задачу (1), (3), (4.*a*) є класичною. Застосувавши метод відокремлення змінних, отримаємо структуру розв'язку вихідної задачі (1)-(3), яка містить розвинення в ряд Фур'є за власними функціями класичної задачі

$$T(r,\tau) = \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \frac{\Phi(\tau)}{B} + 2\sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) \cdot \frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{\alpha\mu_n r_1 J_1(\alpha\mu_n r_1)}. \tag{5}$$

Тут μ_n - нулі функції Бесселя $J_0(x)$, а $E_n(\tau)$ має вигляд:

$$E_n(\tau) = T^0 e^{-\mu_n^2\tau} - \frac{\Phi(\tau)}{B} \cdot \frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2} + \frac{2\mu_n^2}{B} \int_0^{\tau} \Phi(t) e^{-\mu_n^2(\tau - t)} dt.$$

Функцію $\Phi(\tau)$ знаходимо з використанням (4б) та (5). Одержуємо інтегро-диференційне рівняння типу Вольтерри

$$\frac{H}{B} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{2}{r_1 B}\right) \Phi(\tau) = \frac{2}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) \tag{6}$$

Інтегро-диференційне рівняння (6) розв'язуємо, апроксимуючи функцію $\Phi(\tau)$ на рівних часових проміжках кубічними сплайнами [6], для визначення коефіцієнтів яких, крім рівняння (6) використовуються умови сумісності сплайнів у внутрішніх вузлах розбиття часового інтервалу, оптимальність якого досліджено в роботі [5].

За знайденим температурним полем визначаємо напруження в циліндрі. Механічним впливом приповерхневого шару на напружений стан нехтуємо. Вважаємо, що поверхня циліндра вільна від навантаження

$$\sigma_{rr} = 0, \quad r = r_1 . \tag{7}$$

Для поперечного перерізу циліндра виконується умова рівноваги

$$\int_0^{r_1} r\sigma_{zz}\, dr = 0 . \tag{8}$$

У випадку осесиметричної задачі колові переміщення рівні нулю. Інші компоненти переміщень подаємо у вигляді Папковича-Нейбера [4]. Для визначення температурних напружень використовуємо співвідношення Дюгамеля-Неймана [4]. Як результат одержуємо вирази для напружень

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \frac{1}{r_1}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right|_{r=r_1}\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r_1}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right|_{r=r_1}\right], \\
\sigma_{zz} = \frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \frac{2}{r_1}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right|_{r=r_1}\right],
\end{gathered} \tag{9}$$

де λ, μ - сталі Ляме, ν - коефіцієнт Пуассона, функція $\Lambda(r,\tau)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\Lambda(r,\tau) = 4(1+\nu)\alpha_T \Bigg\{ &\frac{\Phi(\tau)}{B\cdot r_1}\left[\frac{r^4}{16\cdot r_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(\alpha\mu_n)^3}\left(1-\frac{4}{(\alpha\mu_n r_1)^2}\right)\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)}\right] \\
&-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(T^0\frac{1}{(\alpha\mu_n)^3 r_1} + \frac{1}{B\cdot\alpha^2\mu_n r_1}\int_0^{\tau}\Phi(\tau)e^{\mu_n^2 t}dt\right)\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)}e^{-\mu_n^2\tau}\Bigg\}
\end{aligned}$$

α_T - коефіцієнт лінійного температурного розширення циліндра.

Ідентифікація параметрів. В інтегро-диференційне рівняння (6) в явному вигляді входять теплофізичні параметри B та H, що дає змогу визначати їх, коли в низці дискретних моментів часу задано температуру поверхні циліндра. В іншому випадку, коли дано зміну в часі поверхневих колових напружень, то визначаючи з (9) $\Phi(\tau)$, теж можемо з (6) знайти B та H.

Для симуляції експериментальних вимірювань, розв'язувалась пряма задача (1)-(3). Значення температури чи колових напружень в N часових точках збурювались випадковими відхиленнями порядку 2%. За дискретними значеннями вхідних полів визначались теплофізичні параметри. Проаналізовано похибку ідентифікації залежно від величини збурення вхідних даних, проміжків часу, на яких проводилась ідентифікація, способу задання вхідних даних (температура чи напруження) та величини цих параметрів.

Досліджено, що найкращими є результати ідентифікації, коли розглядається середня стадія процесу нагріву циліндра. Виявлено, що в обох випадках вхідних даних, за їх точного задання, як результат розв'язування оберненої задачі одержуємо точні значення параметрів. У разі неточної інформації про вхідні поля похибка ідентифікації в середньому співмірна з величиною їх випадкових збурень. Для більших значень параметра B точність його ідентифікації є краща, а для більших значень H – гірша. Також знайдено інтервали значень параметрів, для яких температура поверхні чи поверхневі напруження, якщо розв'язувати пряму задачу, не виходитимуть за межі деякого, наперед заданого діапазону зміни значень. Досліджено, що у випадку задання $\sigma_{\theta\theta}$, відповідні інтервали значень параметрів є менші, ніж тоді, коли задається $T(r_1,\tau)$. У разі визначення параметра H такі інтервали показано на рис. 1, де світліший інтервал – значення H для випадку задання температури, а темніший – напружень. Точками позначено розв'язки відповідних обернених задач $H_{об.T}$ та $H_{об.\sigma}$. Діапазон зміни вхідних полів в обох випадках брався в межах 2 %. Бачимо, що задання вхідними даними поля напружень підвищує стійкість ідентифікації.

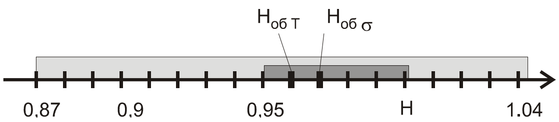

Рис. 1.

Перевагою запропонованого методу параметричної ідентифікації є можливість визначення теплофізичних параметрів в режимі „реального часу".

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей // 4-й Минский междун. форум по тепло- и массообмену, Минск 22-26 мая 2000. – Минск, 2000. – **3.** – С. 3 –13.
2. *Кушнір Р.М., Ясінський А.В.* Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № **6**. – С. 55–61.
3. *Чекурін В.Ф., Процюк Б.В.* До ідентифікації параметрів багатошарових покривів за термопружними переміщеннями поверхні нагрівання // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № **1**. – С. 7–15.
4. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
5. *Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. **5.** – С. 186–194.
6. *Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я.* Вплив тонких межових неоднорідностей на напружений стан циліндричних тіл за дії термодифузійних процесів // Механ. руйнув. матер. і міцність констр. Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут імені Г.В. Карпенка НАН України. – 2009. – С.427–432.

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-JB-30.pdf

BOUNDARY THERMOPHYSICAL PARAMETERS IDENTIFICATION FOR CYLINDER WITH THIN COATING

By using a proposed method boundary thermophysical parameters of heated by the environment long coated cylinder have been identified.