Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-G-09.pdf

УДК 517.958:536.12

ВИКОРИСТАННЯ ГРАНИЧНИХ, ПРИГРАНИЧНИХ ТА КОНТАКТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ У НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

Грицько Б.Є.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, toker.lviv.ua@gmail.com

Розглянуто плоску однозв'язну кусково-однорідну область $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\subset\mathbf{R}^2$ з простим замкнутим краєм Γ, яка містить підобласті $\Omega_{kg}\subset\Omega_k$ ($\partial\Omega_{kg}\cap\partial\Omega_k=\varnothing$; $\partial\Omega_{kg}$, $\partial\Omega_k$ – відповідно межі Ω_{kg}, Ω_k, k=1,2). Коефіцієнт теплопровідності $\lambda(x)$ середовища є функцією декартових координат x_1, x_2:

$$\lambda(x)=\lambda_{10}+(\lambda_{20}-\lambda_{10})\chi_{12}(x)+\sum_{k=1}^{2}\lambda_{kg}(x)\chi_{kg}, \tag{1}$$

де $x=(x_1,x_2)$, χ_{kg}, χ_{12} – характеристичні функції областей Ω_{kg}, межі поділу $\partial\Omega^{12}=\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$, причому $\chi_{kg}(x)=1$ при $x\in\Omega_{kg}$, $\chi_{kg}(x)=0$ при $x\notin\Omega_{kg}$, $\chi_{12}(x)=1$ при $x\in\Omega_2$, $\chi_{12}(x)=0{,}5$ при $x\in\partial\Omega^{12}$, $\chi_{12}(x)=0$ при $x\in\Omega_1$, $\lambda_{k0}=const$, $\lambda_{kg}(x)\big|_{x\in\partial\Omega_{kg}}=0$.

На частинах $\partial\Omega^s\subset\Gamma$ $(s=1,2,3,\ \cup_{s=1}^{3}\cup_{k=1}^{2}\partial\Omega^s=\Gamma)$ межі тіла задано, відповідно, поведінку температурного поля, теплового потоку та конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого $\theta_c(x)$. Всередині областей Ω_k діють джерела тепла інтенсивності $\psi^{(k)}(x)$.

Для визначення стаціонарного температурного поля в Ω записано рівняння

$$\Delta\theta(x)=-D_{12}\sum_{b=1}^{2}q_b(x)n_b(x)\delta(x-x\big|_{\partial\Omega^{12}})-\sum_{k=1}^{2}\mathbf{P}_{kg}(x,\mathbf{q}(x))-\widetilde{\psi}(x),\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

граничні умови першого, другого і третього роду $\theta(x)=\theta_\Gamma(x),\ x\in\partial\Omega^1$,

$$-\lambda(x)\frac{\partial\theta(x)}{\partial\mathbf{n}(x)}=q_\Gamma(x),\ x\in\partial\Omega^2,\quad \alpha(x)\theta(x)-\lambda(x)\frac{\partial\theta(x)}{\partial\mathbf{n}(x)}=\alpha(x)\theta_c(x),\ x\in\partial\Omega^3, \tag{3}$$

та умови ідеального теплового контакту

$$\theta(x)\big|_{x-0\to\partial\Omega^{12}} = \theta(x)\big|_{x+0\to\partial\Omega^{12}},\ \lambda(x)\frac{\partial\theta(x)}{\partial\mathbf{n}^{12}(x)}\bigg|_{x-0\to\partial\Omega^{12}} = \lambda(x)\frac{\partial\theta(x)}{\partial\mathbf{n}^{12}(x)}\bigg|_{x+0\to\partial\Omega^{12}} \quad (4)$$

Тут Δ – оператор Лапласа,

$$\mathbf{P}_{kg}(x,\mathbf{q}(x)) = \frac{1}{\lambda(x)}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\lambda_{kg}(x)}{\partial x_l}q_l(x)\chi_{kg},\ q_l(x) = \frac{\partial\theta(x)}{\partial x_l},$$

$$D_{12} = \frac{2(\lambda_{20}-\lambda_{10})}{\lambda_{10}+\lambda_{20}},\ \tilde{\psi}(x) = .\sum_{k=1}^{2}\psi^{(k)}(x)\chi_k(x)/\lambda(x),$$

χ_k – характеристична функція області Ω_k, $\mathbf{q}(x) = (q_1(x), q_2(x))$, $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$, $\mathbf{n}^{12}(x) = (n_1^{12}(x), n_2^{12}(x))$ – відповідно зовнішні однозначно визначені нормалі до $\partial\Omega$ та до $\partial\Omega^{12}$, коли вважати її частиною межі $\partial\Omega^1$, записи $x-0\to\partial\Omega^{12}$, $x+0\to\partial\Omega^{12}$ означають, що x прямує до $\partial\Omega^{12}$ з боку областей Ω^1, Ω^2, тобто зліва та справа.

Згідно непрямих методів граничних [1], приграничних [2] та контактних елементів [2] уведено відповідно на межі $\partial\Omega$ області Ω, у зовнішній приграничній до неї смузі G та на $\partial\Omega^{12}$ джерела тепла невідомої інтенсивності $\varphi^{(\Gamma)}(x)$, $\varphi^{(G)}(x)$, $\varphi_l^{(C)}(x)$ ($l=1{,}2$) та описано шукану температуру замість (2) рівнянням

$$\Delta\theta^{(\gamma)}(x) = -\varphi^{(\gamma)}(x)\chi_\gamma - D_{12}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l^{(C)}(x)n_l(x)\chi_C - \sum_{k=1}^{2}\mathbf{P}_{kg}(x,\mathbf{q}^{(\gamma)}(x)) - \tilde{\psi}(x),\ x\in\mathbf{R}^2, \quad (6)$$

де $\gamma\in\{\Gamma, G\}$, χ_γ, χ_C – характеристичні функції γ, $\partial\Omega^{12}$.

Записано інтегральні зображення температури як розв'язку рівнянь (6), її похідної за координатами та теплового потоку

$$\theta^{(\gamma)}(x) = \mathbf{F}^\gamma(x,U) + \mathbf{F}^C(x,U) + \sum\nolimits_{k=1}^{2}\ \mathbf{F}_{kg}(x,U,\mathbf{q}^{(\gamma)}) + C + \mathbf{F}_\psi(x,U), \quad (7)$$

$$q_j^{(\gamma)}(x) = \mathbf{F}^\gamma(x,Q_j) + \mathbf{F}^C(x,Q_j) + \sum\nolimits_{k=1}^{2}\ \mathbf{F}_{kg}(x,Q_j,\mathbf{q}^{(\gamma)}) + \mathbf{F}_\psi(x,Q_j),\quad j=1{,}2, \quad (8)$$

$$-\lambda(x)\frac{\partial\theta^{(\gamma)}(x)}{\partial\mathbf{n}(x)} = \mathbf{F}^\gamma(x,Q) + \mathbf{F}^C(x,Q) + \sum\nolimits_{k=1}^{2}\ \mathbf{F}_{kg}(x,Q,\mathbf{q}^{(\gamma)}) + \mathbf{F}_\psi(x,Q), \quad (9)$$

де

$$\mathbf{F}^\gamma(x,\Phi) = \int_\gamma \Phi(x,\xi)\varphi^{(\gamma)}(\xi)d\gamma(\xi),\ \mathbf{F}^C(x,\Phi) = D_{12}\int_{\partial\Omega^{12}}\Phi(x,\xi)\sum_{l=1}^{2}\varphi_l^{(C)}(\xi)n_l(\xi)d\partial\Omega^{12}(\xi),$$

$$\mathbf{F}_{kg}(x,\Phi,\mathbf{q}^{(\gamma)}) = \int\limits_{\Omega_{kg}} \Phi(x,\xi)\mathbf{P}_{kg}(\xi,\mathbf{q}^{(\gamma)}(\xi))d\Omega_{kg}(\xi) \quad , \quad \mathbf{F}_{\psi}(x,\Phi) = \int\limits_{\Omega} \Phi(x,\xi)\tilde{\psi}(\xi)d\Omega(\xi) \quad ,$$

$U(x,\xi)$ − фундаментальний розв'язок оператора Лапласа, $\xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbf{R}^2$, $Q_j(x,\xi) = \dfrac{\partial U(x,\xi)}{\partial x_j}$, $Q(x,\xi) = -\lambda(x)\sum\limits_{j=1}^{2} Q_j(x,\xi)n_j(x)$, $\Phi \in \{U, Q_j, Q\}$.

Задовольняючи умови (3), одержано граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi^{(\gamma)}(\xi)$, $\varphi_b^{(C)}(\xi)$, $\mathbf{q}^{(\gamma)}(\xi)$ з заданими на зовнішній межі функціями. Здійснено просторову дискретизацію області G , меж Γ та $\partial\Omega^{12}$ відповідно на приграничні G_v , граничні Γ_v $(v = 1,...,V)$ та контактні елементи Γ_m^C $(m = 1,...,M)$ і апроксимовано невідомі функції $\varphi^{(G)}(\xi)$, $\varphi^{(\Gamma)}(\xi)$, $\varphi_l^{(C)}(\xi)$ в них квадратичними функціями з невідомими коефіцієнтами d_v^{Gi} , $d_v^{\Gamma i}$, d_{ml}^{Ci} ($i = 1,2,3$). Області Ω_{kg} дискретизовано на чотирикутні криволінійні елементи другого порядку з 8 вузлами та здійснено в них інтерполяцію невідомих похідних від температури за координатами [3].

Порівняно два підходи до одержання дискретно-континуальних моделей ГІР: ітераційний і прямий. Перший дав змогу обмежитись застосуванням методу зважених нев'язок, уведених лише для крайових умов, уникнувши нев'язок в області неоднорідності та на межі поділу середовищ. При цьому розв'язано послідовність систем лінійних алгебричних рівнянь, яка відображає рекурентне співвідношення між сусідніми наближеннями розв'язку. Другий підхід полягає у побудові системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення вузлових значень за допомогою методу зважених нев'язок, уведених для крайових умов, областей неоднорідності і на межі поділу середовищ. Під час використання цього підходу ГІР доповнено рівняннями у вузлах внутрішніх елементів, на які дискретизовано локальні області неоднорідності матеріалу, та у вузлах контактних елементів, на які дискретизовано межу поділу середовищ. При цьому використання контактних елементів дозволило на межі поділу середовищ аналітично врахувати умову неперервності температури, тобто автоматично задовольнити першу умову контакту.

Розглянуто кусково-однорідний одиничний круг з вертикальною межею поділу середовищ x_1=0 для $\lambda_{10} = 3$, $\lambda_{20} = 1$, коли на межі круга задано температуру $\theta_{k\Gamma}(x) = x_1$, $x \in \Gamma$, за відсутності джерел тепла, та порівняно точність розв'язків, отриманих обома підходами (табл.).

Таблиця.

x_1	прямий підхід	ітерац. підхід
0	-0.3138	-0.3167
0.1	-0.3211	-0.3189
0.2	-0.3100	-0.3175
0.3	-0.2961	-0.3042
0.4	-0.2908	-0.2824
0.5	-0.2611	-0.2607
0.6	-0.2310	-0.2374
0.7	-0.2107	-0.2047
0.8	-0.1563	-0.1564
0.9	-0.0931	-0.0987
1	-0.0134	-0.0168

Обчислювальні експерименти підтвердили можливість успішного їх використання, однак слід зазначити, що прямий підхід вимагає вищої математичної підготовки дослідника, тому при перших спробах моделювання температурних полів у неоднорідних середовищах краще починати з ітераційного підходу. Розглянуто також аналогічний кусково-однорідний одиничний круг, що містив в Ω_2 локальну область неоднорідності у вигляді квадрату розміром $2a \times 2a$ з центром у точці $(0.5,\ 0.0)$ при

$$\lambda_{2g}(x) = 10 \times \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(x_1 - 0.5)}{a}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right), \quad a\text{=0.25}.$$

На ізотермах (рис. 1) у локальній неоднорідності та в прилеглій до неї області поряд з викривленням спостерігається їхнє розрідження, пов'язане зі зростанням коефіцієнта теплопровідності.

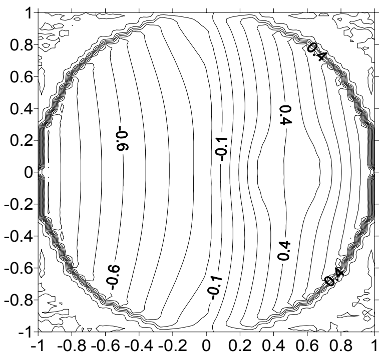

Рис.1

При математичному моделюванні стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних областях з локальними неоднорідностями за умов ідеального контакту між складовими розроблено чисельно-аналітичні підходи, які ґрунтуються на використанні НМГЕ або НМПГЕ та апарату узагальнених функцій, зокрема, непрямого методу контактних елементів, у поєднанні з дискретизацією локальних неоднорідних областей на восьмивузлові чотирикутні криволінійні елементидругого порядку та інтерполяцією в них невідомих похідних від температури за координатами.

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Журавчак Л.М. Грицько Є.Г.* Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. - Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.

3. *Журавчак Л. М., Гудзь Р. В., Грицько Б. Є.* Стаціонарне температурне поле в кусково-однорідному тілі з локальними неоднорідностями // Прикл. пробл. мех. і мат. - 2009. – **7.** – С. 111-120.

USING OF BOUNDARY, NEAR-BOUNDARY AND CONTACT ELEMENTS FOR MODELING OF TEMPERATURE FIELD IN INHOMOGENEOUS SOLIDS

The piece-homogeneous solid of the any shape that contains local domains where thermal characteristics depend on Cartesian coordinates is considered. On a boundary of solid conditions of the first, second and third types are set. On a dividing boundary the ideal thermal contact is set. The technique of the decision will consist in construction of integral representation of temperature which use convolution of the fundamental solution of the Laplace equation with entered on boundary (or near-boundary domain) and on dividing boundary sources of heat of unknown intensity. Two approaches to find unknown intensity of heat sources and derivative of temperature are compared. In first case a system of the linear algebraic equations (SLAE) which it is received to satisfy in sense of a collocation of boundary conditions and iteration approach is constructed. In second case a SLAE which it is received to satisfy in sense of a collocation of boundary conditions and correlation of weighted residual technique, entered in heterogeneous domain and on dividing boundary is constructed.