Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-G-08.pdf

УДК 539.3

АНТИСИМЕТРИЧНИЙ СКРУТ НЕОБМЕЖЕНОГО ТІЛА ПЕЛЕНОЮ МОМЕНТНИХ ДИПОЛІВ ЗА СТАЛИХ НЕНУЛЬОВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Галазюк О.В.

Львівський національний університет імені Івана Франка, halazyuk@mail.ru

У задачі антисиметричного скруту необмеженого тіла віднайдено розв'язок рівнянь статики у циліндричній системі координат з єдиною не рівною нулю у цьому випадку компонентою вектора пружного переміщення, яка є сталою на нескінченності. При цьому з'ясовано, що такий стан рівноваги є можливим за існування у площині симетрії внутрішнього межового шару (interior boundary layer).

Запропоновано його математичну модель як пелену розподілених за певним законом моментних диполів, механічним проявом якої є стрибок компоненти вектора пружного переміщення під час переходу площини симетрії вздовж нормалі до неї. За таких обставин площина розподілу моментних диполів за означенням [1] є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля нульового порядку.

1. Фундаментальний розв'язок рівнянь статики за антисиметричного кручення необмеженого тіла. Пружне необмежене тіло віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де R - радіус кругової неоднорідності і за відсутності дилатації $\theta(\alpha,\beta,\gamma) = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, компоненти вектора пружного переміщення $R\mathbf{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ у циліндричній системі координат будуть такими:

$$u_\alpha(\alpha,\beta,\gamma) = u_\gamma(\alpha,\beta,\gamma,) = 0, \quad u_\beta = u_\beta(\alpha,\gamma).$$

За таких обставин векторне рівняння Ламе за наявності об'ємної сили $\mathbf{F}$

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \mathbf{F} = 0$$

зведеться до одного рівняння [2]- проекції на вісь β

$$2\left(\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\gamma} - \frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha}\right) = X_\beta(\alpha,\gamma) \tag{1}$$

відносно компонент ω_α і ω_γ вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0.5 \operatorname{rot} \mathbf{u}$, які у циліндричній системі координат визначається компонентою $u_\beta(\alpha,\gamma)$ так:

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma) = -\frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma}, \quad 2\omega_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha u_\beta\right). \tag{2}$$

Якщо ввести ключову функцію $Q(\alpha,\gamma)$ таку, що $u_\beta(\alpha,\gamma) = \frac{\partial Q}{\partial\alpha}$, то за поданням (2) знайдемо:

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma) = -\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\gamma}, \qquad 2\omega_\gamma = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right), \tag{3}$$

а також за законом Гука і ненульові у цьому випадку дотичні компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma) = \mu\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right), \quad \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma) = \mu\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\gamma}. \tag{4}$$

Як наслідок, рівняння в частинних похідних (1) набере вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial\gamma^2}\right) = X_\beta(\alpha,\gamma), \tag{5}$$

з якого слід визначити ключову функцію $Q(\alpha,\gamma)$ за довільного розподілу об'ємної сили $X_\beta(\alpha,\gamma)$.

Якщо компоненту $X_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора об'ємної сили $\mathbf{F}$ задати пеленою моментних диполів

$$X_\beta(\alpha,\gamma) = 2\delta'(\gamma)\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) J_1(\xi\alpha)d\xi, \tag{6}$$

розміщених у площині $\gamma = 0$, де $\delta'(\gamma)$ - похідна від дельта-функції Дірака, $A(\xi)$ - твірна функція моментних диполів, $J_1(\xi\alpha)$ - функція Бесселя, то ключова функція $Q(\alpha,\gamma)$ буде такою:

$$Q(\alpha,\gamma) = \operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)d\xi, \tag{7}$$

у чому легко переконатися, якщо подання (7) підставити в рівняння у частинних похідних (5).

За відомою функцією $Q(\alpha,\gamma)$ (7) віднайдемо

$$u_\beta(\alpha,\gamma) = \frac{\partial Q}{\partial\alpha} = -\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)d\xi \tag{8}$$

і поданням (3) компоненти вектора $\mathbf{\Omega}$:

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=2\delta(\gamma)\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)J_1(\xi\alpha)d\xi-\int_0^\infty \xi^3 A(\xi)J_1(\xi\alpha)d\xi,$$

$$2\omega_\gamma(\alpha,\gamma)=-\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \xi^3 A(\xi)e^{-\xi\gamma}J_0(\xi\alpha)d\xi. \tag{9}$$

Таким чином, у випадку кручення циліндра без дилатації його напружений стан визначається тільки дотичними напруженнями, рівень яких обумовлює появу пластичних деформацій або крихке руйнування.

Якщо вираз (6) функції $Q(\alpha,\gamma)$ підставити у подання (9), то для дотичних компонент тензора напружень одержимо:

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)=\mu\left\{\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi-2\delta(\gamma)\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)J_1(\xi\alpha)d\xi\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)=\mu\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \xi^3 A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_2(\xi\alpha)d\xi. \tag{10}$$

Отже, можна стверджувати наступне: за розподілу моментних диполів у площині $\gamma=0$ за законом (6) компонента $u_\beta(\alpha,\gamma)$ відповідно до подання (8) має стрибок під час переходу цієї площини вздовж нормалі, про що свідчить наявність функції стрибка $\operatorname{sign}\gamma$ і величина цього стрибка визначається твірною функцією $A(\xi)$ через інтеграл Ганкеля. При цьому відповідно до подання (10) зрізуюче напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$ складається з двох доданків, один з яких визначає дотичні напруження у всьому тілі, а другий зосереджений тільки в площині $\gamma=0$, оскільки має множником дельта-функцію Дірака.

2. Постановка і розвязки задачі про антисиметричне кручення тіла за сталого переміщення на нескінченності. Нехай твірна $A(\xi)$ моментних диполів $X_\beta(\alpha,\gamma)$ є такою:

$$\xi^2 A(\xi)=-u_\beta^0\xi^{-1}e^{-p\xi^2},\quad p>0, \tag{11}$$

де p зведена механічна характеристика межового шару у площині $\gamma=0$. Тоді за поданням (7) одержимо, що компонента

$$u_\beta(\alpha,\gamma)=u_\beta^0\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \frac{1}{\xi}e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi, \tag{12}$$

звідки на берегах $\gamma=\pm 0$ межового шару одержимо такий розподіл переміщення:

$$u_\beta(\alpha,\pm 0) = \pm u_\beta^0 \int_0^\infty \frac{1}{\xi} e^{-p\xi^2} J_1(\xi\alpha)\, d\xi =$$

$$= \pm \frac{u_\beta^0 \sqrt{\pi}}{4\sqrt{p}} \alpha e^{-\alpha^2/8p} \left[\mathrm{I}_0\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) + \mathrm{I}_1\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) \right], \qquad (13)$$

причому в границі при $\alpha \to \infty$ матимемо, що

$$\lim_{\alpha\to\infty} u_\beta(\alpha,\pm 0) = \pm u_\beta^0 = \mathrm{const}\,. \qquad (14)$$

Таким чином, твірна функція $A(\xi)$ (11) компонентою $u_\beta(\alpha,\gamma)$ (12) визначає напружено-деформований стан у необмеженому тілі за його антисиметричного скручування сталими при $\alpha \to \infty$ переміщеннями $u_\beta(\alpha,\gamma)$ із максимальним значенням (14) на поверхнях $\gamma = \pm 0$ межового шару при $\alpha \to \infty$.

За відомою твірною функцією $A(\xi)$ (11) і поданнями (10) визначимо розподіл максимальних дотичних напружень, які мають місце на поверхнях межового шару $\gamma = \pm 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\pm 0) &= -\mu u_\beta^0 \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_1(\xi\alpha) d\xi = -\mu u_\beta^0 \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha^2/4p}), \\ \sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\pm 0) &= \pm\mu u_\beta^0 \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_2(\xi\alpha) d\xi = \mp\mu u_\beta^0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} e^{-\alpha^2/8p}\, I_1(\alpha^2/8p), \end{aligned} \qquad (15)$$

де $I_1(\alpha^2/8p)$ - модифікована функція Бесселя першого роду.

Отже, відповідно до розподілів (15) дотичних напружень вони залежать від параметра $p > 0$ і заникають при $\alpha \to \infty$ як α^{-1}.

Причому зрізуючі напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\pm 0)$ мають максимум у деякій точці $\alpha = \alpha_0$, який визначається параметром p, а кільцеві напруження $\sigma_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\pm 0)$ мають стрибок під час переходу площини $\gamma = 0$ вздовж нормалі до неї.

Зазначимо, що у теорії кручення Кулона–Сен-Венана кільцеві дотичні напруження взагалі відсутні.

У цій постановці можна розв'язати задачу про антисиметричний скрут необмеженого діла з абсолютно жорстким дисковим включенням.

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс механики сплошных сред. - Пер.с англ., М.: Мир, 1975. – 592 с.
2. *О. Андрейків., О. Галазюк* Математична модель осесиметричного кручення циліндра поверхневим навантаженням за існування межового шару // Машинознавство. –2009. – **6.** – С. 3-8.