Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-CD-26.pdf

УДК 517.958:532.72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ В РЕГУЛЯРНИХ СТРУКТУРАХ З УРАХУВАННЯМ ПЕРІОДИЧНОГО ХАРАКТЕРУ КОНВЕКТИВНИХ ЯВИЩ

Чернуха О.Ю., Дмитрук В.А.

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України;
Національний університет «Львівська політехніка»,
cher@cmm.lviv.ua; dmytruk15@gmail.com

При дослідженні процесів, які протікають в оточуючому середовищі, в багатьох випадках потрібно знаходити точні розв'язки конкретних контактно-крайових задач процесів масоперенесення з урахуванням конвективної складової для кусково-однорідних систем, у т.ч. просторово регулярних. Проте для кількісного опису процесів дифузійного типу в таких системах застосування класичних методів математичної фізики є неефективним. Тому навіть для найпростіших постановок контактно-крайових задач дифузії необхідно розробляти нові методи дослідження або узагальнювати відомі.

У роботі для побудови точних аналітичних розв'язків контактно-крайових задач дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням конвективного механізму масопереносу в одній з фаз запропоновано та обґрунтовано метод, який базується на використанні інтегральних перетворень у різних областях [1]. Оскільки оператори рівнянь у різних фазах різняться між собою, то типи інтегральних перетворень в різних областях також можуть відрізнятися. З використанням контактних умов знайдено зв'язок між відповідними інтегральними перетвореннями.

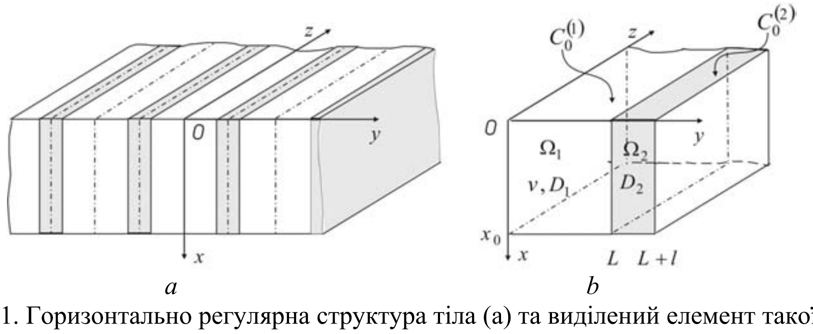

Рис.1. Горизонтально регулярна структура тіла (a) та виділений елемент такої структури (b)

Розглядаємо шар товщини x_0, що складається з періодично розташованих областей двох типів. Поверхні, що їх обмежують, перпендикулярні до поверхонь шару (рис.1*a*). При цьому області з коефіцієнтом дифузії D_1 мають ширину $2L$, а з коефіцієнтом D_2 - $2l$, крім цього в областях з коефіцієнтом D_1 масоперенос відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом. Така структура має сімейство площин симетрії ($y = \pm n(L+l)$, $n = 0,1,2,...$), які ділять навпіл сусідні контактуючі області. Тому можемо виділити елемент тіла, на вертикальних границях якого потоки в напрямку, паралельному поверхням шару (осі Oy), дорівнюють нулю (рис.1*b*).

У стаціонарному випадку концентрація домішкової речовини $c_1^\infty(x,y)$ в області $\Omega_1 =]0;x_0[\times]0;L[$ визначається з рівняння

$$D_1\left[\frac{\partial^2 c_1^\infty(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_1^\infty(x,y)}{\partial y^2}\right]-v\frac{\partial c_1^\infty(x,y)}{\partial x}=0, \quad x,y\in\Omega_1. \tag{1}$$

Тут v - швидкість конвективного перенесення. В області $\Omega_2 =]0;x_0[\times]L;L+l[$ концентрація $c_2^\infty(x,y)$ задовольняє рівняння дифузії

$$D_2\left[\frac{\partial^2 c_2^\infty(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_2^\infty(x,y)}{\partial y^2}\right]=0, \qquad x,y\in\Omega_2. \tag{2}$$

На функції концентрації накладені такі крайові умови

$$c_1^\infty(x,y)\Big|_{x=0}=C_0^{(1)}\equiv\text{const}, \qquad c_1^\infty(x,y)\Big|_{x=0}=C_0^{(2)}\equiv\text{const}; \tag{3}$$

$$c_1^\infty\Big|_{x=x_0}=c_2^\infty\Big|_{x=x_0}=0, \quad \left.\frac{\partial c_1^\infty(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \left.\frac{\partial c_2^\infty(x,y)}{\partial y}\right|_{y=L+l}=0. \tag{4}$$

На границі $y = L$ накладені умови неідеального масового контакту на концентрації:

$$\nu_1 c_1(x,y)\big|_{y=L}=\nu_2 c_2(x,y)\big|_{y=L}, \quad \rho_1 D_1\left.\frac{\partial c_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=L}=\rho_2 D_2\left.\frac{\partial c_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=L}, \tag{5}$$

де ν_1 і ν_2 ($\nu_1 \neq \nu_2$) - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях Ω_1 і Ω_2 відповідно.

Розв'язок контактно-крайової задачі дифузії (1)-(5) шукаємо за допомогою інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в областях Ω_1 і Ω_2. Для того, щоб застосувати перетворення Фур'є необхідно знати величину відповідних функцій або їхніх похідних на границях області перетворення. Оскільки на поверхні контакту величини $\partial c_i^\infty / \partial y$ є невідомими, дооначимо їх, враховуючи другу контактну умову (5). Вона означає, що на границі контакту $y = L$ масові потоки рівні між собою і, в свою чергу, дорівнюють деякій функції $g^\infty(x)$, тобто

$$\rho_1 D_1 \left.\frac{\partial c_1^\infty}{\partial y}\right|_{y=L} = \rho_2 D_2 \left.\frac{\partial c_2^\infty}{\partial y}\right|_{y=L} = g^\infty(x). \tag{6}$$

За змінною y в області Ω_1 застосуємо скінченне cos-перетворення Фур'є, а в області Ω_2 - cos-перетворення Фур'є зі зсувом [1]. За змінною x в області Ω_1 використаємо інтегральне перетворення для параболічних рівнянь другого порядку з конвективною складовою [2], а в області Ω_2 - класичне sin-перетворення Фур'є. В отриманих розв'язках в зображеннях залишається невідомою функція $g(x)$, яка означена співвідношенням (6). Для її знаходження використана перша контактна умова (5) стрибка функції концентрації на границі розділу фаз. В результаті одержуємо

$$g^\infty(x) = \frac{2}{x_0} e^{\frac{vx}{2D_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n^\infty \sin(x_n x), \tag{7}$$

$$\bar{g}_n^\infty = \frac{\rho_1 \rho_2 D_1 D_2 \left(\dfrac{2\nu_2}{x_0} C_0^{(2)} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_j} B_{n,j} - \nu_1 \frac{C_0^{(1)} x_n}{v_D^2 + x_n^2} \right)}{\nu_1 \rho_2 D_2 R_n + \nu_2 \rho_1 D_1 \dfrac{2}{x_0^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(x_j l)}{x_j} B_{n,j} A_{n,j}},$$

де $x_n = \frac{n\pi}{x_0}$, $x_j = \frac{j\pi}{x_0}$, $v_D = v/2D_1$, $R_n = \frac{1}{\eta_n}\operatorname{cth}(\eta_n L) + \left(1 - \frac{1}{L}\right)\frac{1}{v_D^2 + x_n^2}$;

$$B_{n,j} \equiv -\frac{njv\pi^2}{D_1 x_0^2}\left[(-1)^{n+j} e^{-v_D x_0} - 1\right]\left\{v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2}(n-j)^2\right\}^{-1}\left\{v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2}(n+j)^2\right\}^{-1},$$

$$B_{n,j} = -\frac{(-1)^{n+j} e^{-v_D x_0} - 1}{(-1)^{n+j} e^{v_D x_0} - 1} A_{n,j}.$$

Числові розрахунки для функції $g(x)$, яка описує результуючий потік маси між контактуючими областями Ω_1 і Ω_2, проводились у безрозмірній формі і представлені на рис. 2 і рис. 3.

Після застосування обернених інтегральних перетворень, отримано точні розв'язки контактно-крайової задачі (1)-(5) конвективної дифузії – дифузії, що дало можливість визначити потоки маси домішкової речовини через довільні вертикальний і горизонтальний перерізи тіла.

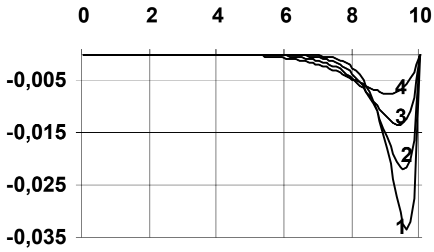

Рис.2. Залежність функції $g(x)$ від різних значень швидкості конвективного переносу в області Ω_1 (криві 1-4 відповідають $v = 5; 4; 3; 2$)

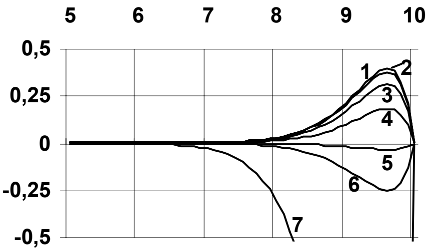

Рис.3. Залежність функції $g(x)$ від різних значень відношення ν_1/ν_2 (криві 1-7 відповідають $\nu_1/\nu_2 = 0.1; 0.5; 2; 5; 10; 15; 100$)

1. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наукова думка, 2009. – 302 с.
2. *Мартыненко Н.А., Пустельников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1985. – 304 с.

MATHEMATICAL MODELLING STATIONARY DIFFUSION PROCCESSES IN REGULAR STRUCTURES ALLOWING FOR PERIODICAL CHARACTER OF CONVECTIVE PHENOMENA

For constructing analytical solutions of contact-boundary value problems of convection-diffusion processes in two-phase regular structures the method based on application of suitable integral transformations separately in contacting regions is proposed and justified.