Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-C-27.pdf

УДК 539.3

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В СКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ЗА КУСКОВО-ПОСТІЙНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОВІДДАЧІ Й ТЕМПЕРАТУРИ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА НА ЛИЦЕВИХ ПОВЕРХНЯХ

Чиж А.І.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача,
Chyzh_Tolik@ukr.net

Розвинуто методику розрахунку термопружних оболонок, що нагріваються по замкнутих областях їх поверхонь, з урахуванням коефіцієнтів теплообміну, які залежать від координати. При такому нагріві термонапруження в тонких оболонках мають важливе значення для оцінки працездатності конструкції.

Нехай тонка кругова циліндрична оболонка товщини $2h$ та довжини l нагрівається по кільцевих областях $x \in [a_{j-1}, a_j)$, $j = \overline{1,n}$, $a_0 = 0$, $a_n = l$, температурою зовнішнього середовища $t_j^{\pm}$ на лицевих поверхнях $z = \pm h$; $t_j^{+} \neq t_j^{-}$. Коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь кожної області нагріву $\mu_j^{\pm}$ є різними, а також $\mu_j^{+} \neq \mu_j^{-}$. На торцях оболонки задано конвективний теплообмін з довкіллям температури T_{mq}^{c}, $(m,q = 1,2)$ з коефіцієнтами теплообміну b_1 та b_2 при $x = 0$ та $x = l$ відповідно.

Для визначення стаціонарного температурного поля в оболонці маємо взаємозв'язану систему рівнянь [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T_1}{dx^2} - \mu_1 T_1 - \mu_2^* T_2 = -\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2, \\ \dfrac{d^2T_2}{dx^2} - 3\left(1+\mu_1\right) T_2 - 3\mu_2^* T_1 = -3\mu_1 t_2 - 3\mu_2 t_1, \end{cases} \tag{1}$$

і граничні умови:

$$\frac{\partial T_m}{\partial x} - b_1\left(T_m - T_{m1}^{c}\right) = 0, \; x = 0; \quad \frac{\partial T_m}{\partial x} + b_2\left(T_m - T_{m2}^{c}\right) = 0, \; x = l. \tag{2}$$

Тут T_m – температурні інтегральні характеристики, k_2 – кривина оболонки, $\mu_{1,2}(x) = h\left(\mu^+(x) \pm \mu^-(x)\right)/2$, $t_{1,2} = \left(t^+ \pm t^-\right)/2$, $\mu_2^* = \mu_2 - kh$, $k_2 = 2k$,
$\mu^\pm(x) = \mu_1^\pm + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\mu_{i+1}^\pm - \mu_1^\pm\right) H(x; a_i, a_{i+1})$, $H(x; a_i, a_{i+1}) = \begin{cases} 1, \ x \in [a_i, a_{i+1}), \\ 0, \ x \notin [a_i, a_{i+1}), \end{cases}$
$t^\pm(x) = t_1^\pm + \sum_{i=1}^{n-1}\left(t_{i+1}^\pm - t_1^\pm\right) H(x; a_i, a_{i+1})$.

Для розв'язування системи рівнянь (1) сформульованої задачі зробимо таку заміну невідомих функцій:

$$T_1 - t_1 = \frac{\lambda_2 (F_1 - \lambda_1 F_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \ T_2 - t_2 = \frac{\lambda_2 F_2 - F_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{3}$$

де $\lambda_{1,2} = \frac{1}{6\eta_1^-}\left(2\eta_1^+ + 3 \mp \sqrt{\left(2\eta_1^+ + 3\right)^2 + 12\left(\eta_1^-\right)^2}\right)$, $\eta_j^+ = \frac{h\left(\mu_j^+ + \mu_j^-\right)}{2}$,
$\eta_j^- = \frac{h\left(\mu_j^+ - \mu_j^-\right)}{2} - kh$.

Підставимо (3) в (1), (2) і в результаті для визначення функцій F_m одержуємо відповідну крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} - \delta_1^2 F_1 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(d_i^1 F_1 - d_i^2 F_2\right) H(x; a_i, a_{i+1}) + R_1(x) + \lambda_1 R_2(x), \\ \frac{d^2 F_2(x)}{dx^2} - \delta_2^2 F_2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(d_i^3 F_1 - d_i^4 F_2\right) H(x; a_i, a_{i+1}) + \frac{R_1(x)}{\lambda_2} + R_2(x), \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial x} - b_1\left(F_m - F_{m1}^c\right) = 0, \ x = 0; \ \frac{\partial F_m}{\partial x} + b_2\left(F_m - F_{m2}^c\right) = 0, \ x = l. \tag{5}$$

Тут δ_1^2, δ_2^2, d_i^1, d_i^2, d_i^3, d_i^4 , $i = \overline{1, n-1}$ – визначаються через $\eta_j^\pm$,

$$R_1(x) = -\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1} H(x; a_i, a_{i+1}) - kh\tau_1^-, \ r_i = \eta_i^+\left(\tau_i^+ - \tau_1^+\right) + \left(\eta_i^- + kh\right)\left(\tau_i^- - \tau_1^-\right),$$

$$R_2(x) = -\sum_{i=1}^{n-1} \rho_{i+1} H(x; a_i, a_{i+1}) + 3\left(\tau_1^- - kh\tau_1^+\right), \ \tau_i^\pm = \frac{t_i^+ \pm t_i^-}{2},$$

$$\rho_i = 3\eta_i^+\left(\tau_i^- - \tau_1^-\right) + 3\left(\eta_i^- + kh\right)\left(\tau_i^+ - \tau_1^+\right).$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4) методом варіації сталої і задовольняючи граничні умови (5), отримаємо для визначення функцій $F_m(x)$ систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

$$\begin{cases} F_1(x) = P_1(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(d_i^1 F_1(s) - d_i^2 F_2(s) \right) K_1(x,s)\,ds, \\ F_2(x) = P_2(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(d_i^3 F_1(s) - d_i^4 F_2(s) \right) K_2(x,s)\,ds. \end{cases} \quad (6)$$

Тут $P_1(x)$, $P_2(x)$, $K_1(x,s)$, $K_2(x,s)$ відомі функції. Систему інтегральних рівнянь (6) розв'язуємо чисельно за допомогою квадратурних формул Сімпсона. Температурні характеристики $T_m(x)$ визначаємо із співвідношень (3).

Переміщення в оболонці u, w, викликані температурним полем (3) визначаємо з рівняння [1,2]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4a^4 w = bT_1 - c\frac{d^2 T_2}{dx^2} - d\,, \quad (7)$$

та рівності

$$u = \int_0^x \left(\alpha_t h (1+\nu) T_1 - h\nu k w \right) dx + A_0 h x + A_1$$

за граничних умов:

$$w = \frac{dw}{dx} = 0\,, \text{ при } x = 0 \text{ та } x = l\,; \quad (8)$$

$$u = 0\,, \text{ при } x = 0 \text{ та } \frac{du}{dx} + h\nu k w - (1+\nu) h\alpha_t T_1 = 0\,, \text{ при } x = l\,, \quad (9)$$

де

$$4a^4 = 3h^2 k \left(1-\nu^2\right), \quad b = 3k\alpha_t h^2 \left(1-\nu^2\right), \quad c = h\alpha_t (1+\nu), \quad d = 3A_0 h^2 \nu k\,.$$

З граничних умов (9) отримуємо $A_0 = A_1 = 0$. Диференціальне рівняння (7) розв'язуємо методом варіації сталої. Розв'язок буде мати вигляд

$$w = \left(C_1(x) + C_1\right) e^{ax} \cos ax + \left(C_2(x) + C_2\right) e^{ax} \sin ax +$$
$$+ \left(C_3(x) + C_3\right) e^{-ax} \cos ax + + \left(C_4(x) + C_4\right) e^{-ax} \sin ax.$$

Тут

$$C_1(x) = \int_0^x \frac{f(x)}{8a^3 e^{ax}} (-\cos ax - \sin ax)\, dx,$$

$$C_2(x) = \int_0^x \frac{f(x)}{8a^3 e^{ax}} (\cos ax - \sin ax)\, dx,$$

$$C_3(x) = \int_0^x \frac{f(x)}{8a^3 e^{-ax}} (\cos ax - \sin ax)\, dx,$$

$$C_4(x) = \int_0^x \frac{f(x)}{8a^3 e^{-ax}} (\cos ax + \sin ax)\, dx,$$

$$f(x) = bT_1 - c\frac{d^2 T_2}{dx^2} - d .$$

Константи C_j визначаємо з граничних умов. Моменти і зусилля знаходимо за відомими формулами [1].

Аналіз одержаних результатів засвідчує, що врахування кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі з різних лицевих поверхонь циліндричної оболонки і локального нагріву суттєво впливає на перерозподіл температурних напружень в оболонці.

1. *Підстригач Я.С., Швець Р.М.* Термоупругость тонких оболочек. – Київ: Наукова думка, 1978. – 344 с.
2. *Коляно Ю.М., Дидык В.З.* Установившиеся напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке с теплообменом, обусловленные локальным нагревом // Математические методи и физико-механические поля. – 1978. – вып. **8.** – С. 93-99.
3. *Мотовиловец И.А.* Температурное поле и тепловые напряжения в обогреваемой цилиндрической оболочке при перемещении уровня жидкости // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1963. – вып. **3.** – С. 45-54.

THERMAL STRESSES IN THE FINITE CYLINDRICAL SHELL WITH PIECEWISE CONSTANT HEAT EXCHANGE COEFFICIENTS AND TEMPERATURE OF OUTDOOR ENVIRONMENT ON LATERAL SURFACES

The technique of reducing the thermal conductivity problem for a finite cylindrical shell with piecewise constant heat exchange coefficients and temperatures on lateral surfaces to simultaneous Fredholm integral equations is shown. Solutions for bending, radial displacement and thermal stresses are obtained.