

Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача

**КОНФЕРЕНЦІЯ**  
молодих учених із сучасних проблем  
механіки і математики  
імені академіка Я. С. Підстригача

**ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ**

(25-27 травня 2009 року)

Львів  
2009



Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача

## КОНФЕРЕНЦІЯ

молодих учених із сучасних проблем  
механіки і математики  
імені академіка Я. С. Підстригача

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ  
(25-27 травня 2009 року)



Львів  
2009

Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача / Тези доповідей. – Львів, 2009. – 242 с.

ISBN 978-966-02-5252-3

Збірник містить тези праць, присвячених таким проблемам механіки і математики: розв'язуванню актуальних задач механіки суцільного середовища та термомеханіки; розвитку математичних моделей та методів механіки неоднорідних тіл; математичних методів механіки тіл з тріщинами та включеннями; проблемам контактної механіки та контактної-поверхневих явищ; розвитку математичних методів динаміки неоднорідних середовищ; актуальним проблемам біомеханіки та робототехніки; застосуванню числових та аналітико-числових методів розв'язування прикладних задач; задачам теорії функцій та функціонального аналізу, алгебри і топології; застосуванням диференціальних рівнянь.

### **Редакційна колегія:**

**Головні редактори** – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. **Р.М. Кушнір**  
чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. **Г.С. Кіт**

### **Заступники головного редактора:**

чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. **Я.Й. Бурак**

чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. **Б.Й. Пташник**

**Відповідальний секретар** – к.ф.-м.н. **Б.А. Литвин**

**Комп'ютерна верстка** – к.ф.-м.н. **К.П. Павлик**

**Члени редколегії:** к.ф.-м.н. **В.І. Асташкін**, к.ф.-м.н. **І.О. Бутрак**, д.ф.-м.н., проф. **М.М. Войтович**, д.ф.-м.н., проф. **О.Р. Гачкевич**, д.ф.-м.н., проф. **В.В. Гафійчук**, к.ф.-м.н. **Б.Й. Дацко**, к.ф.-м.н. **М.В. Демидюк**, д.ф.-м.н., проф. **С.Г. Кияк**, д.ф.-м.н. **Я.І. Кунець**, к.ф.-м.н. **В.Я. Лозинська**, д.ф.-м.н. **Р.М. Мартиняк**, д.ф.-м.н. **М.В. Марчук**, д.ф.-м.н. **І.В. Микитюк**, д.ф.-м.н. **В.В. Михаськів**, к.ф.-м.н. **В.О. Міщенко**, д.ф.-м.н., проф. **М.М. Николишин**, д.ф.-м.н., проф. **В.А. Осадчук**, д.ф.-м.н. **В.О. Пелих**, д.ф.-м.н. **В.М. Петричків**, д.т.н., проф. **В.С. Попович**, д.ф.-м.н. **Я.Д. П'янило**, к.ф.-м.н. **М.Й. Ростун**, к.ф.-м.н. **М.М. Симолюк**, **Б.С. Слободян**, д.ф.-м.н. **Р.Ф. Терлецький**, к.ф.-м.н. **Ю.П. Тополіюк**, д.ф.-м.н., проф. **Є.Я. Чапля**, д.ф.-м.н., проф. **В.Ф. Чекурін**.

*Ухвалено Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, протокол № 5 від 29.04.2009 р.*

## ЗМІСТ

### СЕКЦІЯ 1. “АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ”

<b>Авраменко О.В., Наратовий В.В.</b> Еволюція хвильових пакетів у двошаровій гідромеханічній системі з вільною поверхнею .....	11
<b>Берлов О.В., Веселовський В.Б.</b> Нелінійні задачі теплопровідності для складених елементів конструкцій за дії електромагнітних полів.....	13
<b>Бойко З. В.</b> Про термодинамічний та варіаційний підходи до математичного моделювання пружних систем з урахуванням приповерхневих явищ.....	15
<b>Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.</b> Дослідження впливу теплообміну на термопружний стан трансверсально-ізотропних пластин, що перебувають за дії “плоских” джерел тепла, із використанням $\{1,2\}$ -апроксимації.....	17
<b>Калоєров С.О., Добряк Д.О.</b> Термопружний стан анізотропної пластинки з отворами та пружними включеннями .....	19
<b>Клим В.Ю., Веселовський В.Б.</b> Математична модель розігріву елементів конструкцій при циклічному деформуванні.....	21
<b>Постолак І.І.</b> Варіаційний метод розв’язування бігармонічної задачі для прямокутної області .....	23
<b>Турій О.П.</b> Теплоперенос та напружений стан в опромінюваній двошаровій пластині, з’єднаній проміжковим шаром.....	25
<b>Nechepurenko M.A.</b> A blowup result in a nonlinear coupled evolution system with variable coefficients in an unbounded domain.....	27

### СЕКЦІЯ 2. “МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ”

<b>Авраменко О.О.</b> Розв’язання задач про напружено-деформований стан відкритих та замкнених нетонких конічних оболонок змінної товщини при різних умовах закріплення країв .....	29
<b>Будз С.Ф., Чупик І.І.</b> Розрахунок напружень у локально нагрітій титановій оболонці обертання з врахуванням фазових перетворень .....	30
<b>Васильєв К., Сулим Г.</b> Узагальнені умови взаємодії тонкого стрічкового включення з матрицею за поздовжнього зсуву.....	32
<b>Галазюк О.В.</b> Напружено-деформований стан безмежного циліндра за симетричного кручення поверхневим навантаженням .....	33
<b>Гуртовий Ю.В.</b> Математичне моделювання дисперсії хвильового пакету .....	37

<b>Здобіцька Н.В., Делявський М.В.</b> Розрахунок механічної поведінки ортотропних плит на трипараметричній основі Вінклера методом конструкційних елементів .....	39
<b>Коваленко Д.С., Молдаванова Н.О., Шрамко Ю.В.</b> Осереднення магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів .....	41
<b>Кузін М.О.</b> Побудова математичної моделі механіки бінарних пружних гетерогенних систем з врахуванням релаксаційних явищ.....	43
<b>Струк А.Б.</b> Рівновага трубопроводу при взаємних переміщеннях основи обабіч повітряного переходу .....	45
<b>Чиж А.І.</b> Термопружний стан в круглій пластині з концентричним отвором за залежних від радіуса коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь .....	46

### **СЕКЦІЯ 3. “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ, ВКЛЮЧЕННЯМИ”**

<b>Бутрак І.О.</b> Розв’язання задач розсіяння пружних хвиль сферичним включенням з тонким прошарком методом граничних елементів .....	49
<b>Войтко М.В.</b> Взаємодія циліндричної SH-хвилі з міжфазною тріщиною .....	51
<b>Діхтяренко Ю.В.</b> Дослідження напруженого стану біля вершини міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою межі розділу двох середовищ .....	53
<b>Довбня К.М., Гордієнко М.М.</b> Визначення пружно-деформованого стану ортотропної оболонки з системою поверхневих тріщин .....	55
<b>Зарицький С.В.</b> Розподіл напружень біля тріщини в обмеженій циліндричній оболонці .....	57
<b>Кундрат А.М.</b> Рівновага пружного простору з п’ятьма взаємозв’язаними компланарними включеннями за умов поздовжнього зсуву.....	59
<b>Куротчин Л.Р.</b> Двовісний розтяг ізотропної пластини з двома тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин .....	61
<b>Маковійчук М.В.</b> Моделювання закриття колінеарних тріщин при згині сферичної оболонки на пружній основі.....	63
<b>Маковійчук М.В., Щербій А.Б.</b> Розріз з шарнірно з’єднаними берегами у пластині на пружній основі .....	64
<b>Махоркін М.І.</b> Конфігурації багатоклинових систем, при яких можливе аналітичне розв’язування характеристичних рівнянь .....	65
<b>Мацько І.Й., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Яворський І.М.</b> Моделювання коливань пружної пластини з тріщиною .....	67

<b>Опанасович В.К., Яцик І.М.</b> Згин пластини Рейсснера з періодичною системою наскрізних колінарних тріщин з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів .....	69
<b>Поліщук Т.В.</b> Розвиток початкової зони передруйнування біля кутової точки кусково-однорідного пружного тіла.....	71
<b>Ревенко А.</b> Визначення напружень в пружному тілі з в'язко-пружним тонким включенням .....	73
<b>Юхим Р.Я.</b> Осесиметрична деформація пружно-пластичного тіла з дископодібним пружним включенням.....	74

#### **СЕКЦІЯ 4. “ПРОБЛЕМИ КОНТАКТНОЇ МЕХАНІКИ ТА КОНТАКТНО-ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА”**

<b>Бобик Б.</b> Про наближене визначення межових теплофізичних параметрів циліндричних тіл.....	76
<b>Бобильов О.О., Дробишева О.А.</b> Застосування алгоритму Удзави зі змінним параметром у плоских контактних задачах з тертям.....	78
<b>Бобильов О.О., Іщук М.О.</b> Чисельна реалізація алгоритмів розв'язання плоских контактних задач для пружних тіл з тріщинами на основі квадратичних граничних елементів.....	80
<b>Дмитрів М.І.</b> Особливості напружено-деформованого стану неоднорідної прямокутної пластини за контакту з гладким штампом .....	82
<b>Коцюба А.Ю.</b> Вплив сил тертя на контактні напруження при взаємодії штампу складної форми та нескінченної пластинки з отвором .....	84
<b>Максимчук Д.М.</b> Тиск пружних циліндрів на шар з початковими (залишковими) напруженнями.....	85
<b>Монастирський Б.Є., Микитин М.М.</b> Локальне відшарування пружного півпростору від жорсткої основи під дією стоку тепла .....	87
<b>Рудницький В.Б., Луцько Н.Б.</b> Контактна взаємодія двох пружних циліндрів, один з яких має початкові (залишкові) напруження .....	88
<b>Рудницький В.Б., Ярецька Н.О.</b> Просторова контактна задача для пружного циліндра та шару з початковими (залишковими) напруженнями .....	92
<b>Рудницький Т.В.</b> Вплив початкових (залишкових) напружень на контактні зусилля в області контакту пружного штамп та півпростору .....	94
<b>Чумак К.А., Нагалка С.П.</b> Термомеханічна поведінка спряжених тіл за локальної недосконалості теплового контакту .....	97

## СЕКЦІЯ 5. “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ”

<b>Рабош Р.В.</b> Асимптотично точні моделі динамічної взаємодії тонкого криво-лінійного п'єзоелектричного включення з пружною матрицею за поздовжнього зсуву .....	99
<b>Твардовська С.Р.</b> Електросейсмічний ефект в пористих насичених тілах .....	101
<b>Шопа Т.В.</b> Коливання пластини з масивним включенням через пружний прошарок типу Вінклера.....	102
<b>Bondarenko A.O.</b> Thickness resonance in rectangular plates .....	104
<b>Katunin A.</b> Simplified method for obtaining basic frequency of axisymmetrical vibrations of in-plane laminate circular clamped plate .....	106

## СЕКЦІЯ 6. “АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ БІОМЕХАНІКИ ТА РОБОТОТЕХНІКИ”

<b>Даляк Т.М., Кривенький Т.П.</b> Тривимірне моделювання металокерамічних зубних протезів .....	108
<b>Крак Ю.В., Стеля І.О.</b> Комп'ютерна модель мовного апарату людини для систем синтезу мови .....	109
<b>Мандзюк Т.С.</b> Числовий аналіз впливу періодонту на поведінку зуба людини в умовах функціонального навантаження .....	110
<b>Місюра Є.Ю., Місюра С.Ю.</b> Математична модель лівого шлуночка серця. Напружено-деформований стан .....	111
<b>Попадюк О.Я.</b> Вивчення властивостей протиємболічних фільтрів на фізичній моделі кава-вени .....	113

## СЕКЦІЯ 7. “ЧИСЛОВІ ТА АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ”

<b>Бобилєв Д.Є.</b> Методика розрахунку напружено-деформованого стану неоднорідних тіл методом граничних елементів.....	115
<b>Бомба А.Я., Гаврилюк В.І.</b> Метод «фіктивних областей» розв'язання крайових задач на конформні відображення в областях з невизначеними ділянками меж.....	116
<b>Глебена М.І., Цегелик Г.Г.</b> Чисельний метод відшукування абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій багатьох змінних .....	118



<b>Зінкевич Я.С., Козаченко Т.О.</b> Еволюція обертань твердого тіла під дією збурюючих моментів.....	119
<b>Кириченко В.В.</b> Використання методу перерізу Пуанкаре для дослідження руху гіроскопу Гесса .....	120
<b>Клименко А.О.</b> Стійкість нормальних форм коливань пружинного маятника.....	122
<b>Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О.</b> Обернення крайових задач на просторі конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіеди .....	124
<b>Коковська Я.В.</b> Застосування методу скінченних елементів для чисельного розв'язування задач стоку рідини у відкритих руслах.....	126
<b>Корнута В.А.</b> Моделювання з'єднання з натягом методом скінченних елементів.....	129
<b>Литвин Б.А.</b> Модифікація гібридного генетичного алгоритму для задач мінімізації функцій дійсних змінних .....	130
<b>Паздрій О.І.</b> Точна триточкова різницева схема для нелінійної крайової задачі на півосі.....	131
<b>Поліщук Д.О.</b> Про задачу оцінки функціонування структурних елементів залізничної системи України.....	133
<b>Рябокоть С.А.</b> Дослідження напружено-деформованого стану пластини з двома круговими отворами проекційно-ітераційним варіантом методу скінченних елементів .....	135
<b>Смирнова Н.О., Дадаян З.Ю.</b> Аналіз нелінійних методів оцінки параметрів виробничих функцій.....	137
<b>Успенський Б.В.</b> Нелінійні коливання однодискового ротора на одній пружній опорі .....	138
<b>Чабан Ф.В.</b> Застосування h-адаптивного методу скінченних елементів для аналізу околів резонансних частот п'єзоелектрика.....	141
<b>Черниш Р.І.</b> Модифікована адитивно-усереднена схема розщеплення .....	143
<b>Яровий А.Т., Страхов Є.М.</b> Дослідження збіжності двокрокового методу мінімізації функцій багатьох змінних .....	145
<b>Novikov V.V.</b> Numerical methods for uncertainty of measurements' results calculation .....	147

## СЕКЦІЯ 8. “ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ”

<b>Войтенко С.П.</b> Найкращі $M$ -членні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних.....	149
<b>Гнатюк Ю.В., Гудима У.В., Гнатюк В.О.</b> Апроксимація компактнозначного відображення множиною однозначних відображень з додатковим обмеженням.....	151
<b>Гудима У.В., Гнатюк Ю.В.</b> Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням.....	153
<b>Гудима У.В., Гнатюк Ю.В., Гнатюк В.О.</b> Задача найкращої у розумінні метрики Гаусдорфа наближення опуклого компакта лінійного нормованого простору множиною інших опуклих компактів цього простору.....	155
<b>Крайнічук Г.В., Сохацький Ф.М.</b> Розв’язування деяких функційних рівнянь з оборотними бінарними функціями.....	158
<b>Лозинська В.Я.</b> Про згорткову алгебру ультрарозподілів.....	160
<b>Митрофанов М.</b> Деякі властивості рівномірно аналітичних і розділяючих функцій.....	162
<b>Юрків М.І.</b> Про асимптотичну поведінку голоморфної в півплощині функції цілого порядку з нулями на скінченній системі променів.....	164

## СЕКЦІЯ 9. “АЛГЕБРА І ТОПОЛОГІЯ”

<b>Білявська С.І.</b> Стабільний ранг адекватного кільця.....	167
<b>Джалюк Н.С.</b> Дільники многочленних матриць з умовою паралельності розкладів.....	168
<b>Домша О.В.</b> Редукція матриць над $n$ -простими кільцями Безу без дільників нуля.....	171
<b>Здомська Л.М.</b> Індекс та період кривих над псевдолокальними та псевдоглобальними полями.....	172
<b>Кадубовський О.А.</b> Узагальнення функції Ейлера та деякі її застосування.....	174
<b>Ладзоришин Н.Б.</b> Про еквівалентність пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями.....	176
<b>Мельник І.О.</b> Про ультрадобутки диференціально первинних модулів.....	178
<b>Нестерук В.І.</b> Про невіродженість добутку Тейта для кривих над псевдоскінченними полями.....	180

<b>Олійник Р.М.</b> Про 1–фільтри часток в категорії комутативних моноїдів .....	181
<b>Пирч Н.М.</b> Вільні добутки паратопологічних груп .....	182
<b>Романів А.М.</b> Про деякі властивості визначальної матриці .....	184
<b>Шукель О.Б.</b> Деякі геометричні властивості функтора симетричного степеня в асимптотичній категорії.....	186
<b>Banakh T.O., Guran I.Y., Ravsky O.V.</b> Characterizing meager paratopological groups.....	188
<b>Banakh T., Zarichnyi I.</b> Classifying countable abelian groups up to the bijective coarse equivavlence .....	190
<b>Gutik O., Pavlyk K.</b> Brandt extensions and primitive topological inverse semigroups .....	191
<b>Gutik O., Reiter A.</b> Topological finite symmetric inverse semigroups.....	193

## СЕКЦІЯ 10. “ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ”

<b>Андрусяк Р.В., Бурдейна Н.О.</b> Гіперболічна квазілінійна задача Стефана з нелокальними крайовими умовами .....	195
<b>Баранська І.Є.</b> Обернена задача визначення старшого коефіцієнта в двовимірному параболічному рівнянні з умовами Стефана .....	196
<b>Білусяк Н.І., Репетило С.М.</b> Крайова задача з мішаними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами .....	198
<b>Бурский В.П., Зарецкая А.А.</b> Про єдиність розв’язку однієї граничної задачі для загальних систем диференціальних рівнянь першого порядку.....	199
<b>Буряченко Е.А.</b> Единственность решения задачи Дирихле для правильно эллиптических уравнений произвольного четного порядка $2m$ с вырожденным символом.....	201
<b>Вакал Ю.Є.</b> Оцінка кількості періодичних розв’язків близької до інтегровної гамільтонової системи з півтора ступенями волі .....	203
<b>Віра М.Б.</b> Побудова асимптотичного розв’язку крайової задачі для лінійної виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора .....	204
<b>Галун К.С.</b> Багатоточкова задача для гіперболічно-параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами .....	206
<b>Горбань Ю.С.</b> Существование решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с $L_1$ -правыми частями.....	208

<b>Кириченко Є.В.</b> Про розв'язок задачі інтегральної геометрії на сфері.....	209
<b>Крадїнова Т.А.</b> Коливання системи змінної маси при дії сил в'язкого тертя .....	211
<b>Кусік Л.І.</b> Асимптотичні зображення $P_{\omega}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку .....	213
<b>Кузь А.М.</b> Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами .....	215
<b>Лопушанський А.О., Пасічник О.В.</b> Оператори Гріна задачі Коші для рівнян- ня дифузії з дробовою похідною за часом .....	217
<b>Панат О.Т., Бугрій О.М.</b> Деякі властивості розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку зі змінним степенем не лінійності .	219
<b>Процах Н.П.</b> Про задачу Коші для нелінійного ультрапараболічного рівняння з запізненням.....	221
<b>Савка І.Я.</b> Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідни- ми і сталими алгебрично залежними коефіцієнтами.....	222
<b>Снітко Г.А.</b> Обернена задача визначення молодших коефіцієнтів в параболіч- ному рівнянні в області з вільною межею .....	224
<b>Стефанишин О.Б.</b> Виділення неосциляційних розв'язків точних рівнянь Маті- сона в полі Шварцшильда поблизу $r = 1, 5r_g$ .....	225
<b>Торган Г.Р.</b> Неіснування глобального розв'язку мішаної задачі для одного нелінійного гіперболічного рівняння п'ятого порядку .....	227
<b>Тимків І.Р.</b> Багатоточкова задача для факторизованого параболічного опера- тора зі змінними коефіцієнтами.....	228
<b>Федорчук В.І.</b> Про деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1, 4) \times R(u)$ , інваріантні відносно абелевих розщеплюваних підгруп розширеної групи Галілея $\tilde{G}(1, 3)$ .....	230
<b>Фекета П.В.</b> Існування асимптотично стійкого інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь .....	231
<b>Чмир О.Ю.</b> Про характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелі- нійного інтегрального рівняння Вольтерра.....	233
<b>Шатковська К.В.</b> Асимптотичне інтегрування лінійних вироджених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу .....	235
<b>Яковець В.П., Тарасенко О.В.</b> Про побудову асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь .....	237
<b>Kukso O.S., Shamukova N.V.</b> Small denominators in several metrics .....	238
<b>Man'ko S.S.</b> On the Schrödinger operator with point interactions .....	240

**СЕКЦІЯ 1. “АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ”**

УДК 532.59

**ЕВОЛЮЦІЯ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ДВОШАРОВІЙ ГІДРОМЕХАНІЧНІЙ СИСТЕМІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ**

**Авраменко О.В., Нарядовий В.В.**

*Кіровоградський державний педуніверситет,  
[ovavramenko@rambler.ru](mailto:ovavramenko@rambler.ru), [naradvova@rambler.ru](mailto:naradvova@rambler.ru)*

Ставиться задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідкого шару  $\Omega_1 = \{(x, y, z) | -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h_1 < z < 0\}$  з густиною  $\rho_1$  та верхнього рідкого шару  $\Omega_2 = \{(x, y, z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h_2\}$  з густиною  $\rho_2$ . Шари розділені поверхнею контакту  $z = \eta(x, t)$ , а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею  $z = \eta_0(x, t)$ . При розв’язанні враховуємо сили поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від’ємному  $z$ -напрямку. Вихідні співвідношення задачі є наступними:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{у } \Omega_j, \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при } z = \eta(x, t), \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= -\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad \text{при } z = \eta_0(x, t), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho(\nabla \varphi_2)^2 - \\ &\quad - T \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \eta(x, t), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \eta_0 + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{при } z = \eta_0(x, t), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1.$$

Тут  $\varphi_j$  ( $j=1,2$ ) - потенціали швидкостей у рідких середовищах,  $\rho = \rho_2 / \rho_1$  - відношення густин.

Слабконелінійна проблема (1) досліджувалась раніше методом багатомасштабних розвинень. Результати цих досліджень представлено у статті [1], де отримано перші три лінійні наближення проблеми, отримано розв'язок першого лінійного наближення.

У даній роботі для отримання розв'язку використано метод багатомасштабних розвинень до третього порядку [4]. При цьому шукані відхилення вільної поверхні та поверхні контакту і потенціали швидкостей представлено у вигляді розвинень за масштабами

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(X_0, X_1, X_2, T_0, T_1, T_2) + O(\alpha^3), \\ \eta_0(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(X_0, X_1, X_2, T_0, T_1, T_2) + O(\alpha^3), \\ \varphi_j(x, z, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(X_0, X_1, X_2, z, T_0, T_1, T_2) + O(\alpha^3), \quad j=1,2, \end{aligned}$$

де коефіцієнт нелінійності  $\alpha$  введено як відношення висоти хвилі до її довжини; швидкий масштаб  $T_0$  та короткий масштаб  $X_0$  характеризують частоту та довжину хвилі, відповідно. Повільні масштаби  $T_1$ ,  $T_2$  та довгі масштаби  $X_1$ ,  $X_2$  характеризують часові та просторові зміни фази та амплитуди хвилі.

Отримано розв'язки та умову розв'язуваності задачі другого наближення, а також умову розв'язуваності задачі третього наближення. Використано засоби пакетів комп'ютерної алгебри за проведення всіх можливих комп'ютерних тестових перевірок, а також порівняння нових аналітичних результатів з отриманими раніше для гідродинамічних систем «півпростір-півпростір», «шар з твердим дном – шар з твердою кришкою» [2], [3].

З використанням вищеназваних результатів досліджено еволюційне рівняння для обвідної хвильового пакету на поверхні контакту рідких шарів у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера.

1. Авраменко О.В., Наратовий В.В. Умови лінійної стійкості хвильових пакетів у двошаровій рідині з вільною поверхнею // Наукові записки. – Вип. 67. - Кіровоград: РВВ КДПУ, 2008. - С. 3-10.
2. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханіка. - 2001. - 3(75), №.4. - С. 38-46.

3. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. - 2005. - Т. 7(79), № 1. - С. 80-89.
4. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME J. Appl. Mech. Ser. E. - 1976. - 43, № 4. - P. 584-588.



УДК 536.2:539.3

## НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

Берлов О.В., Веселовський В.Б.

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, [berlov@bigmir.net](mailto:berlov@bigmir.net)

Зміна теплового стану елементів конструкцій виникає під дією зовнішніх і внутрішніх впливів, врахування яких необхідно для побудови адекватних математичних моделей опису теплових режимів в складових елементах конструкцій (СЕК) під впливом електромагнітних полів (ЕМП). Останнім часом спостерігається значна інтенсифікація сучасних технологічних процесів електромагнітними методами, в яких як інтенсифікуючий чинник служить енергія електромагнітного поля.

Визначення температурних полів елементів конструкцій при дії на них ЕМП вимагає розв'язку цілого комплексу взаємозв'язаних задач електродинаміки, які характеризують вплив ЕМП, і теорії теплопровідності. Для створення адекватних математичних моделей, які б в найбільшій мірі відповідали моделюванню температурних полів СЕК під впливом ЕМП, враховано неідеальний тепловий контакт на межі шарів; прийнято враховувати теплові дії ЕМП на СЕК окремо у вигляді джерел (стоків) тепла в рівнянні теплопровідності  $w_{v,\Sigma}$  і в нестационарних, на відміну від відомих в літературі математичних

моделей, граничних умовах  $f_{0,\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_1} f_{0,i}(\tau)$ ,  $f_{1,\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_2} f_{1,i}(\tau)$ . Запропоновано вплив полів різної фізичної природи враховувати у вигляді джерел (стоків) тепла по перетину конструкції і у вигляді поверхневих джерел (стоків) тепла на межах шарів  $f_{2,\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_3} f_{2,i}(\tau)$ , де  $N_1, N_2, N_3$  – кількість граничних дій.

Представлена математична модель задач нестационарної теплопровідності. Приведена уніфікована постановка нелінійних задач теплопровідності для

багатошарового кусково-однорідного тіла (необмежена пластина) з неідеальним тепловим контактом на межах шарів.

Зараз розв'язання рівнянь, які враховують вплив ЕМП на складові елементи конструкцій, може бути одержано за допомогою чисельних і чисельно-аналітичних методів. Розв'язок, одержаний аналітичним методом на відміну від найрозвиненіших в даний час чисельних методів, дозволяє представити його в кінцевому вигляді, і дає можливість варіювати теплофізичними і геометричними параметрами для докладного аналізу температурних полів, тобто дає можливість використовувати результати для якісного аналізу температурних режимів.

Побудовані розв'язки лінійних задач теплопровідності для СЕК, приведений чисельно-структурний метод розв'язання двовимірних задач теплопровідності для складених тіл, а також проведено дослідження переносу тепла в багатошаровій системі. Отримано структурний розв'язок задач нестационарної теплопровідності для СЕК при дії ЕМП. Розв'язок заснований на використанні операційного методу [1].

Одним з підходів до розв'язання нелінійних задач теплопровідності є метод послідовних інтервалів [2,3]. Основна особливість розв'язків полягає в розбитті часу процесу на кінцеві інтервали, в кожному з яких характеристики матеріалу, внутрішні джерела тепла і коефіцієнти тепловіддачі – постійні а початкові умови на кожному інтервалі задаються функцією, яка визначається із розв'язку задачі для попереднього інтервалу. В такій постановці нелінійна задача теплопровідності зводиться до сукупності розв'язків лінійних задач з різними початковими і граничними умовами для кожного інтервалу часу.

Приведені результати параметричних досліджень і порівняння з даними відомими з літератури. Таким чином отримані розв'язки задач, які забезпечують можливість побудови адекватних моделей сучасних технологічних процесів в галузях, які зв'язані з виробництвом труб, виготовленням кабелів і дротів з різною тепло- і електроізоляцією, електровакуумних вимикачів, прогнозуванням теплових режимів для складених конструкцій авіа- і космічної продукції, виготовлення багатошарових захисних теплоізоляцій і футерок [1-3].

1. Берлов А.В. Решение структурным методом задач теплопроводности для составных элементов конструкций при воздействии электромагнитных полей // Дифференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. ДНУ. – Д., 2006. - С. 70 - 79.
2. Веселовский В. Б. Метод последовательных интервалов в исследовании теплофизических процессов. - Днепропетровск, "Металлургическая теплотехника", 2004. - С. 255-265.
3. Веселовський В.Б. Розрахунок температурних полів складених конструкцій // Вісник ТДТУ. – Тернопіль. – Вип. №1, 2008. - С. 161-170.



**THE HEAT TRANSFER NONLINEAR PROBLEMS FOR COMPOSED CONSTRUCTION ELEMENTS UNDER INFLUENCE OF ELECTROMAGNETIC FIELDS**

*The method of thermal regimes determination for composed construction elements with structural method is proposed. The solution of heat transfer nonlinear problems with the method of consequent intervals is received.*



УДК 539.3

**ПРО ТЕРМОДИНАМІЧНИЙ ТА ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХОДИ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ЯВИЩ**

**Бойко З.В.**

*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
[zoya@cmm.lviv.ua](mailto:zoya@cmm.lviv.ua)*

Розрахунки на міцність та надійність елементів конструкцій та приладів, які працюють в екстремальних умовах силового навантаження і нагрівання, є актуальні в сучасній механіці деформівних систем [6]. У зв'язку з цим для побудови математичних моделей механіки важливо враховувати, зокрема, приповерхневі явища, які можуть суттєво впливати на поведінку тіла та є вихідними для кількісної оцінки граничних параметрів міцності. У науковій літературі приповерхневу область здебільшого моделюють тонкою оболонкою, характеристики матеріалу якої відмінні від відповідних характеристик внутрішніх областей тіла [5]. Приповерхневу неоднорідність описують також на основі локально-градієнтного підходу в термомеханіці [1], який базується на використанні загальних принципів термодинаміки нерівноважних процесів [4].

Використання енергетичного підходу до модельного опису кінетики формування приповерхневих явищ у термопружних тілах та встановлення відповідного стаціонарного стану проаналізовано у статті [3].

У даній роботі розглядається термопружне тіло, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем. За відліковий термодинамічний стан тіла приймається його природний однорідний стан, який характеризується абсолютною температурою – густиною ентропії, хімічним потенціалом – густиною маси, тиском – питомим об'ємом. Приповерхнева неоднорідність є зумовлена переходом тіла із вихідного природного (однорідного) стану до локального градієнтного стаціонарного.

На основі поєднання енергетичного та термодинамічного підходів [2] запропоновано математичну модель формування приповерхневих явищ, яка пов'язує процеси пружного зміщення центрів мас та дисипативні процеси переходу системи "пружне тіло – зовнішнє середовище" із вихідного природного стану до стаціонарного. Одержане енергетичне співвідношення є базовим, як для опису локального термодинамічного стану (рівняння Гіббса), так і дисипативних процесів.

Структура фізичних співвідношень та рівнянь для опису дисипативних процесів сконкретизована для ізотермічних процесів, що дало змогу отримати ключову систему рівнянь моделі стосовно вектора переміщення та вектора пружного зміщення центра мас.

На основі отриманих результатів за варіаційним підходом побудовано функціонал, з умови мінімізації якого отримано згадані вище співвідношення локального термодинамічного стану та опису дисипативних процесів, а також природні граничні умови. Сформульовано достатні умови опуклості функціонала.

Одержані результати є базовими для кількісної оцінки напружено-деформованого стану пружних систем з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності.

1. Бурак Я. Й. Визначальні співвідношення локально градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987. – № 12. – С. 19-23.
2. Бурак Я. Й., Мороз Г. І, Бойко З. В. Математичне моделювання та оптимізація термопружних систем на основі поєднання енергетичного та термодинамічного підходів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С.129-135.
3. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я. Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 1. – С. 39–44.
4. Де Гроот С Р. Термодинамика необратимых процессов. – М., 1956. – 281 с.
5. Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
6. Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С. Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.

#### ON THERMODYNAMIC AND VARIATIONAL APPROACHES TO MATHEMATICAL MODELLING ELASTIC SYSTEMS WITH TAKING INTO ACCOUNT NEAR-SURFACE PHENOMENA

*Within the energetic, thermodynamic and variational approaches a mathematical model for the description of thermomechanical processes in elastic deformable systems with taking into account dissipative effects under forming near-surface phenomena is proposed. The equations of the local thermodynamic state and also corresponding for a description of dissipative processes are obtained. Using the variational approach the functional is constructed. From the conditions of minimization of this functional the above-mentioned*

*equations of the local thermodynamic state and dissipative processes and also natural boundary conditions are obtained. The sufficient conditions of functional convexity are formulated.*



УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛООБМІНУ НА ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН, ЩО ПЕРЕБУВАЮТЬ ЗА ДІЇ “ПЛОСКИХ” ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА, ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ {1,2}-АПРОКСИМАЦІЇ

Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.

Донецький національний університет, [bondarenko\\_n\\_s@mail.ru](mailto:bondarenko_n_s@mail.ru), [goltsev@univ.donetsk.ua](mailto:goltsev@univ.donetsk.ua)

У працях Я.С. Підстригача [1,2] були розроблені моделі зосереджених температурних впливів на тонкостінні елементи конструкцій. Одна из них – зосереджене джерело – становить інтегральне джерело тепла, що підсумовує об’ємні джерела тепла, які розподілені за однією координатною лінією, перпендикулярною до серединної поверхні тонкостінного елемента. Розрізняють “плоске” та “згинне” зосереджені джерела тепла, що відповідають парному та непарному закону розподілу об’ємних джерел тепла за товщиною тонкостінного елемента.

До теперішнього часу дослідження термопружного стану пластин і оболонок, що перебувають під дією зосереджених джерел тепла, проведені лише в рамках класичної теорії. Метод {m,n}-апроксимації дозволяє враховувати в таких дослідженнях поперечні зсувні та нормальні напруження.

Розглянуто трансверсально-ізотропну пластину, що перебуває в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем нульової температури. Пластина знаходиться під впливом джерел тепла, локалізованих в обмеженій області.

Система рівнянь термопружності {1,2}-апроксимації, яка враховує поперечні зсувні та нормальні напруження, містить у собі [3,4]:

1.) Рівняння теплопровідності першого наближення

$$l_{j0}T_0 + l_{j1}T_1 = (2j+1)w_{0j} \quad (j = \overline{0,1}), \quad (1)$$

де  $l_{jk}$  ( $j, k = \overline{0,1}$ ) – диференціальні оператори не вище 2-го порядку;  $T_0$ ,  $T_1$  – компоненти розвинення температури в ряд за поліномами Лежандра (середня температура та температурний момент відповідно);  $w_{00}$ ,  $w_{01}$  – зведені густини розподілу “плоских” та “згинних” джерел тепла.

2.) Рівняння рівноваги в узагальнених переміщеннях, що описують

а) безмоментний термопружний стан

$$L_{j1}^0 u + L_{j2}^0 v + L_{j3}^0 w_1 = D_j^0 T_0 \quad (j = \overline{1,3}); \quad (2)$$

б) стан термопружного згину

$$L_{j1} \gamma_1 + L_{j2} \gamma_2 + L_{j3} w_0 + L_{j4} w_2 = D_j T_1 \quad (j = \overline{1,4}). \quad (3)$$

Тут  $u, v, w_i$  ( $i = \overline{0,2}$ ),  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1,2}$ ) – узагальнені переміщення;  $L_{jk}^0$  ( $j, k = \overline{1,3}$ ),  $L_{jk}$  ( $j, k = \overline{1,4}$ ) – диференціальні оператори не вище 2-го порядку;  $D_j^0$  ( $j = \overline{1,3}$ ),  $D_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ) – диференціальні оператори не вище 1-го порядку.

Після інтегрування систем (1)-(3) узагальнені зусилля та моменти (компоненти розвинення напружень у ряди за поліномами Лежандра) знаходяться за допомогою рівнянь закону Гука [3,4].

Зосереджений характер розподілу джерел тепла моделюється  $\delta$ -функціями Дірака, які стоять у правих частинах рівнянь теплопровідності (1).

При симетричному теплообміні, коли величини параметрів теплообміну на основах пластини однакові, отримуємо, що  $l_{01} = l_{10} = 0$ , і система рівнянь теплопровідності (1) розпадається на два незалежних рівняння для визначення  $T_0$  і  $T_1$ . При цьому, система рівнянь, яка складається з першого рівняння (1) і рівнянь (2), описує безмоментний термопружний стан, обумовлений лише “плоскими” джерелами тепла. Система рівнянь, що складається з другого рівняння (1) і рівнянь (3), описує стан термопружного згину, обумовлений лише “згинними” джерелами тепла. У випадку несиметричного теплообміну дія “плоского” джерела тепла може спричинити згин, а “згинного” – безмоментний напружений стан. Найбільш яскраво цей ефект проявляється при односторонньому теплообміні (верхньому або нижньому).

Досліджено впливи теплових і термомеханічних параметрів трансверсально-ізотропного матеріалу на компоненти дотичних та нормальних температурних напружень, які обумовлені “плоским” джерелом тепла, в умовах одностороннього теплообміну.

1. Підстригач Я.С., Ярема С.Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Видво АН УРСР, 1961. – 212 с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
4. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.

INVESTIGATION OF HEAT EXCHANGE INFLUENCE ON THE THERMOELASTIC STATE OF TRANSVERSE-ISOTROPIC PLATES, WHICH ARE UNDER THE ACTION OF “PLANE” HEAT SOURCES, WITH USING {1,2}-APPROXIMATION

The thermoelastic equations of {1,2}-approximation for transverse-isotropic plates which take into account transversal shear and normal stresses are solved. The influence of heat and thermomechanical parameters of transverse-isotropic material on the components of thermoelastic state under conditions of one-sided heat exchange is investigated.



УДК 539.3

**ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ОТВОРАМИ ТА ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

**Калоєров С.О., Добряк Д.О.**

Донецький Національний університет, [kaloerov@mail.ru](mailto:kaloerov@mail.ru)

Розглядається нескінченна анізотропна пластинка, що займає багатозв’язну область  $S$ , обмежену контурами еліптичних отворів  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). Контури одних отворів вільні від зусиль або підкріплені абсолютно твердими кільцями, в інші отвори вставлені пружні кільця  $S^l$  (які в окремому випадку можуть бути суцільними) з іншого матеріалу з не завантаженими внутрішніми контурами, що знаходяться з пластинкою в умовах ідеального теплового та механічного контакту. На вільних від зовнішніх механічних впливів контурах отворів і твердих кілець задана температура або вони тепло ізольовані. На нескінченності підтримується однорідний тепловий потік.

Розв’язок задачі про термопружний стан розглянутої кусково-однорідної пластинки проводиться з використанням комплексних потенціалів [1]. Для комплексних потенціалів теплопровідності і похідних комплексних потенціалів термопружності отримані вирази [2]

$$F_3(z_3) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} \ln \zeta_{3l} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \zeta_{3l}^{-n},$$

$$F_3^l(z_3^l) = c_{30}^l + D_{3l} \ln \zeta_3^l + \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_{3n}^l [\zeta_3^l]^{-n} + c_{3n}^l [z_3^l - z_{30}^l]^n \right),$$

$$\Phi'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ A_{kl} \ln \zeta_{kl} + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl}) \zeta_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k),$$

$$\Phi_k^{\prime l}(z_k^l) = A_k^l \ln \zeta_k^l + \frac{(A_k^l z_k^l + B_k^l) \zeta_k^l}{R_k^l \left( (\zeta_k^l)^2 - m_k^l \right)} + \sum_{n=1}^{\infty} (d_{kn}^l \Phi_{kn}^{\prime l} + a_{kn}^l \Psi_{kn}^{\prime l}),$$

$$\Phi_{kln}^{\prime l}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \Psi_{kn}^{\prime l} = n [z_k^l - z_{k0}^l]^{n-1},$$

$$\Phi_{kn}^{\prime l}(z_k^l) = -\frac{n}{R_k^l (\zeta_k^l)^{n-1} \left( (\zeta_k^l)^2 - m_k^l \right)},$$

де  $D_{3l}$ ,  $A_{kl}$  - постійні, які виражаються через сумарні потоки тепла через контури отворів, твердих включень і внутрішні контури пружних кілець;  $R_{kl}$ ,  $m_{kl}$ ,  $z_{k0}$  і  $\zeta_{3l}$ ,  $\zeta_{kl}$  - постійні та змінні, що обчислюються на основі виразів конформних відображень зовнішності одиничного кола на зовнішності відповідних еліптичних контурів;  $c_{30}^l$ ,  $D_{3l}$ ,  $c_{3ln}$ ,  $b_{3n}^l$ ,  $c_{3n}^l$ ,  $a_{kln}$ ,  $d_{kn}^l$ ,  $a_{kn}^l$  - постійні, визначення яких із граничних умов методом найменших квадратів зведено до розв'язку двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь (величини з індексом  $l$  угорі відносяться до кільця з областю  $S^l$ , без цього індексу - до отворів). За відомих значень цих постійних обчислюються характеристики термопружного стану пластинки і включень у будь-якій точці.

При різних (у тому числі ізотропних) матеріалах проведено числові дослідження для пластинки з одним кільцем (ядром), із двома отворами, одне з яких підкріплене пружним кільцем (ядром), а інше вільне або підкріплене пружним або абсолютно твердим кільцем (ядром). Встановлено, що ширина кільця істотно впливає на напруження в пластинці. При зміні цієї ширини від нуля (отвір) до одиниці (ядро) значення напружень зменшуються близько 2 разів. Якщо ширина кільця порівняно велика і його внутрішній контур теплоізований, то значення напружень у пластинці є такими ж, як у пластинці із суцільним включенням. Якщо ширина кільця порівняно мала, то значення напружень у пластинці є такими ж, як у пластинці з вільним отвором. З розрахунків для пластинки з двома кільцями встановлено, що при зменшенні відстані між кільцями від 2 діаметрів до 0,1 діаметра у випадку ізотропної пластинки значення напружень змінюються в 1,5 – 2 рази, у випадку анізотропної пластинки ці змінні значно більші.

1. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К.; Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
2. Калоеров С.А., Добряк Д.А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. - Вып. 2. - С. 77–88.

**THERMOELASTIC STATE OF ANISOTROPIC PLATE WITH HOLES AND ELASTIC INCLUSIONS**

*The thermoelastic problem for anisotropic plate with holes, rigid and elastic rings (which in the special case may be entire kernels) under uniform heat flow using the complex potentials was solved. Numerical researches of influence on the stresses in plate of plate and inclusions material anisotropy, rings width and distance between the rings in plate with two rings was provided.*



УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗІГРІВУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ  
ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ**

**Клим В.Ю., Веселовський В.Б.**

*Дніпропетровський національний університет ім. О.Гончара*

Розвиток сучасної промисловості і технологій вимагає уточнення математичних моделей, які б враховували повніший набір чинників, що впливають на поведінку досліджуваних об'єктів. Підвищення температури елементів конструкцій в деяких випадках може викликати істотне зниження циклічної довговічності. Відомо, що циклічне навантаження супроводжується локальним розігрівом матеріалу унаслідок накопичення необоротної енергії деформації [1]. Таким чином побудова математичної моделі розрахунку температурних полів тіл з урахуванням дисипативного розігріву як одного з важливих ефектів циклічної деформації є актуальним питанням.

У роботі досліджено температурне поле суцільного складеного стержня унаслідок розігріву при циклічному навантаженні (подовжні і поперечні коливання) з різними частотами і умовами теплообміну з навколишнім середовищем. Зміна температурного поля в процесі розігріву відбувається тільки по довжині стержня.

Тепловиділення в процесі деформації враховане через введення в рівняння теплопровідності розподілених джерел тепла. Для кожної частини послідовно–складеного стержня прийняті свої початкові розподіли температури і потужність внутрішніх джерел тепла.

Для розв'язку отриманої нелінійної задачі нестационарної теплопровідності використовується метод послідовних інтервалів [2,3]. Суть методу полягає в розбитті всього часу навантаження на кінцеві часові інтервали, в кожному з яких характеристики матеріалу, внутрішні джерела тепла і коефіцієнти тепловіддачі мають постійні значення. Таким чином реалізується залежність

основних механічних і теплофізичеських характеристик від температури. У такій постановці нелінійна задача нестационарної теплопровідності зводиться до розв'язку серії лінійних задач з різними початковими і граничними умовами для кожного інтервалу часу.

Наведено математичне формулювання задачі нестационарної теплопровідності для кожного інтервалу часу з відповідними початковими і граничними умовами [2].

Визначено, що при більшій потужності внутрішнього джерела тепла залежність температури стержня від часу має різко виражену нестационарність. У зв'язку з цим з деякого моменту часу виникає необхідність в зменшенні часового інтервалу при розрахунках. Отримано асимптотичний розв'язок, зручний для малих значень критерію Фур'є. Іншим варіантом розрахунку температурного поля у разі істотного стрибка температури може бути розбиття всього часу навантаження на інтервали за температурою [2,3].

Отримані залежності температури в перетині циклічно навантажуваного стержня від критерію Фур'є. При цьому апроксимація зміни механічних і теплофізичеських характеристик матеріалу кусково-постійними функціями проводилася в межах температурного діапазону шириною  $10^0\text{C}$ . Для порівняння приведені наближені аналітичні розв'язки нелінійної і лінійної задач теплопровідності. Аналіз проведених досліджень показує [2], що при циклічному навантаженні з низькими (приблизно 400 Гц) частотами має місце збіг результатів розрахунку температурного поля стержня, отриманих на основі лінійної та нелінійної задач нестационарної теплопровідності. За різкого підвищення температури, яке має місце при високих частотах навантаження, виникає різниця в значеннях температури, визначених відповідно в лінійних і нелінійних постановках.

Представлені залежності температури від амплітуди напружень при різних частотах. Наявність внутрішніх джерел тепла в циклічно навантажуваному стержні та збільшення їх потужності за зростання амплітуди напружень і частоти циклічної деформації є однією з основних причин підвищення температури.

Таким чином, використання методу послідовних інтервалів дає можливість прогнозувати вплив кількісних і якісних характеристик циклічного навантаження на температурне поле елемента конструкцій (стержнів різної конфігурації).

1. *Ботвина Л.Р.* Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. – М.: Наука, 2008. – 334 с.
2. *Веселовский В.Б., Клим В.Ю.* Разогрев ограниченного стержня при высокочастотном нагружении // Вісник Дніпропетровського університету. – Механіка. - 2001. - Вип. 5. - Т. 2. - С. 59-60.



3. Клим В.Ю. Математическое моделирование температурных полей элементов конструкций при циклическом деформировании // Сучасні проблеми механіки та математики. - Львів, 2008. - Т. 1. - С. 84-86.

**A MATHEMATICAL MODEL OF WARMING UP OF THE ELEMENTS OF CONSTRUCTION AT THE CYCLIC DEFORMATION**

*The temperature field of the rod because of warming-up at the cyclic loading with different frequencies and terms of heat exchange with an environment is investigated.*



УДК 539.3

**ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ЗАДАЧІ  
ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ**

**Постолакі Л.І.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача  
НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, Україна*

В багатьох наукових дисциплінах — у двовимірній теорії пружності, теорії пластин, гідромеханіці тощо, приходять до крайових задач для бігармонічного рівняння [1]:

$$\Delta\Delta\Phi(x, y) = 0 . \tag{1}$$

Зокрема багато задач двовимірної теорії пружності можна звести до бігармонічних задач для прямокутника  $\mathbf{D}(x, y) = (-a < x < a) \cup (-1 < y < 1)$ , на сторонах  $y = \pm 1$  якого діють умови відсутності навантажень, а на двох інших сторонах прямокутника задані нормальні та дотичні напруження чи переміщення.

Відомий метод розв'язування однорідного бігармонічного рівняння для прямокутника  $\mathbf{D}(x, y)$  з однорідними умовами на поздовжніх сторонах  $y = \pm 1$ , що базується на відокремленні змінних та розвиненні розв'язку в ряд за двома незалежними системами комплексних бігармонічних функцій  $\exp(-\gamma_k(x-a))F_k(y)$  та  $\exp(\gamma_k(x+a))\bar{F}_k(y)$ , які відповідають двом послідовностям коренів трансцендентних рівнянь  $\gamma_k$  та  $-\gamma_k$ , де  $F_k^{(1)} = F_k(y)$ ,  $F_k^{(2)} = \bar{F}_k(y)$ ,  $F_k(y)$  - система бігармонічних функцій П.Ф. Папковича [2]. Відповідно до цього, шуканий розв'язок подамо у вигляді [3]:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\mu=1}^2 \left( C_k^{(\mu)} \exp\left(-\gamma_k^{(\mu)}(x+a)\right) + D_k^{(\mu)} \exp\left(\gamma_k^{(\mu)}(x-a)\right) \right) F_k^{(\mu)}. \quad (2)$$

Тут  $C_k^{(1)} = C_k$ ,  $C_k^{(2)} = \bar{C}_k$ ,  $D_k^{(1)} = D_k$ ,  $D_k^{(2)} = \bar{D}_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  – невизначені комплексні сталі;  $\gamma_k^{(1)} = \gamma_k$ ,  $\gamma_k^{(2)} = \bar{\gamma}_k$ ,  $\gamma_k$  – комплексні корені трансцендентного рівняння [2]; Застосування варіаційного підходу зводить задачу до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо коефіцієнтів розвинення  $C_k^{(\mu)}$ ,  $D_k^{(\mu)}$  відмінної від тієї, яка виникає у відомому методі перехресної суперпозиції [1].

Використовуючи отримані в [2] співвідношення узагальненої ортогональності, які пов'язують функції  $F_k(y)$  та комплексно-спряжені до них  $\bar{F}_k(y)$ , отримуємо доволі прості аналітичні вирази для коефіцієнтів СЛАР, завдяки чому вдається істотно підвищити швидкодню алгоритмів числової реалізації задачі.

У доповіді розглядається приклад застосування розробленого методу розв'язування бігармонічної задачі у прямокутнику  $\mathbf{D}(x, y)$  до визначення двовимірного напружено-деформованого стану тіла прямокутної форми, бічні сторони якого  $y = \pm 1$  не навантажені, а на двох інших – задано умови виду:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial^2 y} \right|_{x=a} &= \sigma(y), \quad \frac{1}{E} \left( -v \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \int \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} dx \right) \Bigg|_{x=-a} = u(y), \\ \left. \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} &= \tau(y), \quad \frac{1}{E} \left( -(2+v) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} - \iint \frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial y^3} dx \right) \Bigg|_{x=-a} = \upsilon(y), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$ ,  $u(y)$ ,  $\upsilon(y)$  – задані функції,  $E$ ,  $v$  – відомі сталі.

Ця задача виникає, зокрема, при дослідженні міцності на відрив клеєного з'єднання [3].

1. Мелешко В. В. Бігармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Математичні методи та фізико – механічні поля. – 2004. – Вип. 47, № 3. – С. 45–68.
2. Постолак Л. І., Чекурін В. Ф. Властивості однієї системи однорідних розв'язків бігармонічного рівняння // Прикл. математика и механика. – 2007. – Вип. 5. – С. 156–162.
3. Чекурін В. Ф., Постолак Л. І. Варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для прямокутної області // Математичні методи та фізико – механічні поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 88–98.

VARIATIONAL METHOD FOR SOLVING OF BIGARMONIC PROBLEM FOR RECTANGULAR AREA

*A variational method for solving of biharmonic problems for rectangular area, on one pair sides of which the function and its normal derivative obtain zero values and on the another pair some inhomogeneous conditions are valid, has been considered in the paper. To solve this variational problem a series expansion of the solution by the systems of complex biharmonic functions, knowing as Papkovich homogeneous solutions, has been applied. Application of the developed method to determine the stress components distributions in the rectangular area, a side of which is rigidly clamped and to the opposite one normal forces are applied, has been exemplified in the paper.*



УДК 539.3

ТЕПЛОПЕРЕНОС ТА НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ОПРОМІНЮВАНІЙ ДВОШАРОВІЙ ПЛАСТИНІ, З'ЄДНАНІЙ ПРОМІЖКОВИМ ШАРОМ

Турій О.П.

*Институт прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060*

Вибір раціональних режимів експлуатації чи термообробки шаруватих елементів конструкцій за дії випромінювання передбачає дослідження як процесів теплоперенесення (з урахуванням перенесення випромінювання), так і розрахунок напруженого стану. На практиці з'єднання шарів здійснюється різними способами (варювання, наплавлення, склеювання) [1] за яких утворюється проміжковий шар з відмінними радіаційними, теплофізичними, механічними характеристиками. Під час розрахунку термомеханічної поведінки шаруватих структур з проміжковими шарами їх, як правило, включають з розгляду, а їхній вплив враховують узагальненими контактними тепловими та механічними умовами [2, 3].

Розглядається шарувата пластина, утворена частково-прозорим (скляним) та непрозорим (металевим) шарами, з'єднаних частково-прозорим проміжковим, товщина якого  $h_{np}$  значно менша за товщини основних шарів  $h_c$ ,  $h_m$  (часткова прозорість, зокрема, характерна для прошарків клею товщини яких не перевищують 0,3 мм). З боку поверхні частково прозорого основного шару пластина перебуває під дією теплового випромінювання від нагрітої ізотермічної плоскої паралельної до неї поверхні. Приймаються умови ідеального теплового (з урахуванням випромінювання теплової енергії з поверхні не-

прозорого шару) та механічного контактів. Поверхні пластини і краї вільні від навантаження.

Запропонована методика дослідження термомеханічної поведінки пластини. Вона базується на використанні операторного методу при встановленні узагальнених контактних умов теплообміну через проміжковий шар [2, 3] за врахування переносу випромінювання та отриманих наближених виразів для напружень у пластині, що враховують жорсткісні характеристики на згин і розтяг проміжкового шару. Нелінійна контактнo-крайова задача теплоперенесення розв'язувалася методом скінченних різниць із застосуванням процедури квазілінеаризації [4]. На основі розробленої аналітико-числової методики розв'язування проаналізовано вплив ефектів поглинання та випромінення теплової енергії на термомеханічну поведінку пластини, зокрема, встановлено:

- нерівномірність тепловиділень, обумовлених опроміненням, в скляному шарі зростає з пониженням температури джерела та при збільшенні його товщини;

- градієнтність нагріву пластини зростає при пониженні температури джерела від  $3000K$  до  $1000K$ , а при фіксованій температурі зі збільшенням товщини скляного шару. За розрахованими кривими розподілу температури в пластині та відомими з експерименту її значеннями на поверхнях можна оцінити радіаційні характеристики на межі поділу шарів;

- за розглядуваних товщин ( $h_m = 10 \text{ мм}$ ,  $h_c = 3 \text{ мм}$ ,  $5 \text{ мм}$ ,  $7 \text{ мм}$ ) і температур джерела ( $1000K$ ,  $3000K$ ) в обох шарах наявні зони розтягувальних і стискувальних напружень. Максимальні рівні розтягувальних напружень досягаються на поверхні металевого шару, а стискальних – скляного. На поверхні контакту є стрибок напружень. Рівні напружень і величина стрибка зростають зі збільшенням товщини скляного шару;

- на основі сформульованої нелінійної контактнo-крайової задачі, нелінійної за нехтування випромінення тільки на поверхні контакту та лінійної, коли випромінення теплової енергії непрозорим складником не враховується, що нехтування ефектами випромінення теплової енергії непрозорим шаром при формулюванні контактних задач для шаруватих опромінюваних елементів (що містять непрозорі складники) суттєво впливає на розрахункові значення температури та напружень.

1. Мусин Р. А., Конюшков Г. В. Соединение металлов с керамическими материалами. – М. Машиностроение, 1991. – 224 с.
2. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах. // Защитные покрытия на металлах. – 1971. – Вып. 5. – С. 180–183.

3. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. - 1963. № 7. - С. 872-874.
4. Беллман Р., Калаба Р., Квасілінеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 223 с.

**HEAT TRANSFER AND STRESSES IN TWO-LAYER PLATE CONNECTED BY AN INTERMEDIATE THIN LAYER AT THERMAL RADIATION**

*The generalized thermal contact conditions between the basic layers and approached expressions for stresses in a plate, which take into account characteristics on a bend and a stretching of intermediate layer are received. The nonlinear contact-boundary problem of heat transfer was solved by a method of final elements using procedure quasilinearization.*



УДК 517.95

**A BLOWUP RESULT IN A NONLINEAR COUPLED EVOLUTION SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN AN UNBOUNDED DOMAIN**

**Nechepurenko M.A.**

*Lviv Ivan Franko National University, [m.nechepurenko@mfc.in.ua](mailto:m.nechepurenko@mfc.in.ua)*

Over the last decades, there has been a large literature on results concerning existence, uniqueness and large time behavior of solutions to certain initial value problems of nonlinear coupled systems with smooth initial data.

In this work, we consider a nonlinear coupled evolution system with variable coefficients in an unbounded by time domain and show that the energy of any generalized solution blows up in finite time if the initial energy is negative.

Let  $\Omega$  be any bounded domain in  $R^n$  with regular in Calderon's sense boundary and let  $T$  be a positive number;  $S = (0, \infty) \times \partial\Omega$ ,  $Q = (0, \infty) \times \Omega$ . We will consider the following problem

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i} + \alpha_0(t,x)u + \alpha_1(t,x)\theta + \alpha_0(t,x)u_t + \\ \quad + \gamma_1(t,x)|u_t|^{p-2}u_t = \gamma_0(t,x)|u|^{r-2}u + f_1(t,x), \\ \theta_t - \sum_{i,j=1}^n (\mu_i(t,x)|\theta_{x_i}|^s\theta_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^n (b_i(t,x)u_t)_{x_i} + \beta_0(t,x)\theta + \beta_1(t,x)u + \\ \quad + \gamma_2(t,x)|\theta|^{q-2}\theta = f_2(t,x), \end{array} \right. \quad (1,2)$$

with boundary

$$u(t, x) = 0, \theta(t, x) = 0 \quad \text{on } S, \quad (3)$$

and initial

$$u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), \theta(0, x) = \theta_0(x) \quad \text{on } \Omega \quad (4)$$

conditions. Here  $s > 1$ ;  $p, q \in (2, +\infty)$ .

We will make the following assumptions concerning the coefficients, nonhomogeneous terms and initial data of problem (1)-(4).

To establish our result, we impose the following assumption

$$r \leq \frac{2(n-1)}{n-2} \quad \text{for } n > 2, p > 2 \quad \text{for } n \in \{1, 2\}, \text{ and } (4p - 2r - pr) > 0.$$

We showed that any generalized solution, with negative “enough” initial energy blows up a time  $T^* < T$ .

1. *Kalantarov V. K. and O. A. Ladyzhenskaya* The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type // *J. Soviet Math.* – 1978. – **10**. – P. 53-70.
2. *Kirane M. and N. Tatar* A nonexistence result to a Cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity // *J. Math. Anal. Appl.* – 2001. – **254**. – P. 71-86.
3. *Messaoudi S.A.* A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system / *Electronic Journal of Differential Equations.* – 2001. – **30**. – P. 1-9.

#### ПРО “ВИБУХ” РОЗВ’ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ ЗВ’ЯЗНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

У цій праці розглянута нелінійна зв’язна еволюційна система із змінними коефіцієнтами в необмеженій за часом області та показано, що енергія довільного узагальненого розв’язку “вибухає” за скінчений час, якщо початкова енергія була від’ємна.

## СЕКЦІЯ 2. “МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ”

УДК 539.3

### РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ВІДКРИТИХ ТА ЗАМКНЕНИХ НЕТОНКИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ ЗАКРІПЛЕННЯ КРАЇВ

Авраменко О.О.

*Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, [avrolya@front.ru](mailto:avrolya@front.ru)*

Задача про напружено-деформований стан конічних оболонок в уточненій постановці на базі гіпотези прямолінійного елемента приводить до формулювання її у вигляді системи диференціальних рівнянь у частинних похідних із змінними коефіцієнтами. Ця система в об’єднанні з граничними умовами утворює двовимірну крайову задачу.

Досліджується вплив різних умов закріплення країв на напружено-деформований стан нетонких конічних оболонок.

Розв’язання задачі виконувалася методом сплайн-коллокації в одному координатному напрямі і дискретної ортогоналізації в іншому. Сплайн-функції формуються таким чином, щоб задовольнити точно граничним умовам.

На криволінійних контурах задаються такі варіанти граничних умов:

1. контур жорстко закріплений;
2. контур шарнірно закріплений;
3. контур шарнірно опертий і вільний у напрямі твірної.

Проаналізована залежність прогинів і напруги для різних типів закріплення країв в замкнених та відкритих нетонких конічних оболонках, вплив довжини оболонки на напружено-деформований стан за різних умов закріплення країв.

Варіюючи одночасно умовами закріплення торців і геометричними параметрами конічних оболонок, можна досягти необхідних значень напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій.

1. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. Думка (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 4), 1981. – 544 с.

#### THE DECISION OF PROBLEMS ABOUT STRAIN-STRESSED STATE OF THE OPEN AND CLOSED NON-THIN CONICAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS ABOUT VARIOUS CONDITIONS OF BOUNDARY FASTENING

*The analysis of an influence of various conditions of boundary fastening on the stress-strain state of non-thin conical shells is carried out.*

УДК 539.377

## РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ У ЛОКАЛЬНО НАГРІТІЙ ТИТАНОВІЙ ОБОЛОНЦІ ОБЕРТАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВО- РЕНЬ

Будз С.Ф., Чупик І.І.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України,  
[budz@iapmm.lviv.ua](mailto:budz@iapmm.lviv.ua)*

Локальний нагрів оболонкових конструкцій має широке застосування у технології виробництва продукції машинобудівної та приладобудівної галузей. Тимчасові і залишкові напруження, що при цьому виникають, можуть досягати значної величини, перевищувати допустимі і навіть приводити до руйнування конструкції.

Метою роботи є визначення напруженого стану оболонки обертання, виготовленої із титанового сплаву ВТ-23 при локальному кільцевому осесиметричному нагріві. Приймається, що оболонка вільна від будь-яких зовнішніх механічних впливів. Зона локального нагріву оболонки знаходиться в діапазоні температур від 20°C до 720°C. Припускаємо, що в зоні локального нагріву температура змінюється по твірній і є сталою за товщиною

У роботі розглядаємо локальний нагрів оболонки, який описується таким аналітичним виразом [1]:

$$t = \begin{cases} t_1(1 - 3(z/z_0)^2 + 2|z/z_0|^3), & |z| \leq z_0 \\ t_0, & |z| > z_0 \end{cases} \quad (1)$$

де  $z_0$  - пів-ширина локальної зони нагріву,  $t_0$  - температура навколишнього середовища,  $t_1$  - максимальна температура у центрі зони нагріву.

У рівноважному стані при температурі 20°C, сплав ВТ-23 містить 80%  $\alpha$ -фази (гексагональна щільноупакована гратка) і 20%  $\beta$ -фази (об'ємноцентрована кубічна гратка). При поступовому нагріві сплаву від 520°C до 920°C, кількість  $\beta$ -фази у ньому збільшується до 100%. Як показано в [2], різниця питомих об'ємів між  $\alpha$  і  $\beta$  фазами є приблизно 2,5%, що впливає на розподіл і величину напружень, обумовлених нагрівом або неоднорідним розподілом фаз після його завершення. При нагріві, сумарну зміну об'єму матеріалу оболонки визначаємо із співвідношення [2]:

$$de_T = 3\alpha^*(t) dt \quad (2)$$



де  $\alpha^*(t)$  - узагальнений лінійний коефіцієнт теплового розширення, що залежить від усіх змін об'єму, що відбулися в матеріалі при нагріві. Після охолодження неоднорідний розподіл  $\beta$ -фази створює деякий залишковий напружений стан. У цьому випадку, зміна об'єму визначаємо із співвідношення [3]:

$$de_{\Xi} = 3\beta^* d\xi \quad (3)$$

де  $\beta_0$  - лінійний коефіцієнт дилатації структури.

Тимчасові і залишкові напруження знаходимо із співвідношення:

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( de_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} [\nu de - (1+\nu) de_a] \delta_{ij} \right) \quad (4)$$

де  $d\sigma_{ij}$  - прирости компонентів тензора напружень,  $de_{ij}$  - прирости компонентів тензора деформації,  $E$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона,  $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ ,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера,  $a = T, \Xi$ ,  $i, j = (1,2,3)$ .

Зазначимо, що тимчасові напруження при нагріві і залишкові напруження після нагріву визначаються із рівняння (4), так як причиною виникнення залишкових напружень у нашому випадку є не термопластична деформація, а неоднорідний фазовий стан, що фіксується при швидкому охолодженні. Задачу розв'язано методом скінчених елементів для циліндричної оболонки з наступними геометричними і фізичними параметрами: радіус серединної поверхні оболонки  $R = 0.0245$  м, товщина  $2h = 0.001$  м,  $E = 106$  МПа,  $\nu = 0.3$ . Із отриманих результатів випливає, що фазові перетворення у матеріалі суттєво впливають на розподіл тимчасових і залишкових напружень.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев, Наукова думка, 1979. - 364 с.
2. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Засыпкин В.В., Майстров В.И. Объемные изменения, происходящие в ( $\alpha$ - $\beta$ ) титановых сплавах при полиморфном превращении // Металловедение и терм. Обработка. – 1986. - №1. - С. 52-55.
3. Monkawa M., Nagaki S. and Inoue T. Analyses of structural and stress changes during quenching and low-temperature-tempering of steels // The Journal of Society Material Science, Japan. – 1980. - V. 29, N 327. - 1173-1179 p.

#### STRESS DEFINITION IN LOCAL HEATED TITANIUM CIRCULAR SHELL TAKING INTO ACCOUNT PHASE TRANSITION

*The problem of definition of stress state and stress optimization of local heating for a circular shell made of titanium alloy BT-23 is posed and solved. The effect of the volume changes occurring during phase transition is taken into account.*



УДК 539.3

## УЗАГАЛЬНЕНІ УМОВИ ВЗАЄМОДІЇ ТОНКОГО СТРІЧКОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ З МАТРИЦЕЮ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

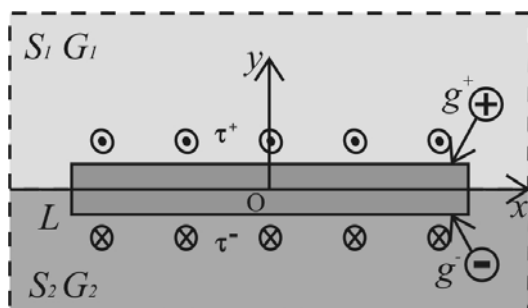
Васильєв Кирил<sup>1</sup>, Сулим Георгій<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача,

<sup>2</sup>Львівський національний університет ім. І.Франка, Львів

Під час розв'язування задач теорії тонких включень доволі часто використовується метод функцій стрибка [1–3]. Згідно цього методу включення вилучається з розгляду, а його вплив моделюється стрибками деяких фізико-механічних полів, зокрема стрибками напружень і переміщень на осевій лінії неоднорідності. Необхідною умовою визначення невідомих функцій стрибків є побудова належних умов взаємодії (УВ) матриці з включенням. Для навантаженої симетричними зусиллями  $\tau$  тріщини УВ є досить прості  $\{\sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^- = 0, \sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- = 2\tau\}$ . Складнішими є УВ для пружного включення [2], що у своїх граничних випадках дають УВ для ненавантаженої тріщини, чи абсолютно жорсткого включення без натягу.

Розглянемо тонке стрічкове включення  $L$ , розташоване на межі поділу матеріалів  $S_1$  та  $S_2$  з модулями зсувів  $G_1$  та  $G_2$  відповідно. Довжина включення  $2a$ , ширина  $2h$ , модуль зсуву  $G_B$ . У цій роботі на основі [2, 3] побудовані УВ для пружного включення  $L$  із заданими додатковими напруження-



ми  $\tau^\pm$  і переміщеннями (натягом)  $g^\pm$  верхнього і нижнього берегів неоднорідності. Досліджено також граничні випадки дуже податного і дуже жорсткого включення. Для апробації результатів досліджена задача для півпростору і смуги з пружним включенням.

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. Сулим Г. Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикл. матем. и механика. – 1981. – 45, № 2 – С. 308–318.
3. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.

**GENERALIZED INTERACTION CONDITIONS BETWEEN THIN RIBBON-LIKE INCLUSION AND MATRIX UNDER LONGITUDINAL SHEAR**

*Interaction conditions between thin ribbon-like inclusion and matrix under longitudinal shear are considered in this paper. Inclusion is affected by an additional tension  $\tau^\pm$  and moving of the edges  $g^\pm$ . Particular cases of a crack and very rigid inclusion are analysed. The problem for elastic inclusion in halfspace and strip is solved.*



УДК 539.3

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БЕЗМЕЖНОГО ЦИЛІНДРА ЗА СИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ ПОВЕРХНЕВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ**

**Галазюк О.В.**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

Класична математична модель осесиметричного скручування круглих циліндрів поверхневим навантаженням побудована [1] на основі системи рівнянь рівноваги в напруженнях та умов сумісності деформацій в напруженнях Бельтрамі–Мічела. Проте, як відомо, задача теорії пружності в напруженнях є некоректною, оскільки існує невідповідність між кількістю невідомих і рівнянь, з одного боку, та кількістю рівнянь і крайових умов – з іншого.

Нижче для побудови математичної моделі осесиметричного скручування циліндра поверхневим навантаженням за відсутності дилатації використані рівняння рівноваги у переміщеннях (рівняння Ляме), які у розглядуваному випадку зводяться до одного рівняння в частинних похідних відносно двох не рівних нулю компонент вектора локального жорсткого повороту  $\Omega = 0,5 \operatorname{rot} \mathbf{u}$ .

1. Пружний ізотропний циліндр з радіусом твірної  $R$  віднесемо до циліндричної системи координат  $(R\alpha, \beta, R\gamma)$  і за умови незмінюваності об'єму  $\theta(\alpha, \beta, \gamma) = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , яка має місце за відсутності дилатації, компоненти вектора пружного переміщення  $R\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  в циліндричній системі координат будуть такими:

$$u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad u_\beta = u_\beta(\alpha, \gamma).$$

За таких обставин рівняння Ляме

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$$

за відсутності масових сил та сил інерції зведеться до одного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\partial_\gamma \omega_\alpha - \partial_\alpha \omega_\gamma = 0 \quad (1)$$

відносно компонент  $\omega_\alpha(\alpha, \gamma)$  і  $\omega_\gamma(\alpha, \gamma)$  компонент вектора  $\mathbf{\Omega}$ , які визначаються компонентою  $u_\beta(\alpha, \gamma)$  вектора  $\mathbf{u}$  і у циліндричній системі координат мають наступні вирази:

$$2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = -\partial_\gamma u_\beta, \quad 2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) = \alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha u_\beta), \quad 2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) = 0. \quad (2)$$

Якщо ввести ключову функцію  $Q(\alpha, \gamma)$  таку, що  $u_\beta(\alpha, \gamma) = \partial_\alpha Q$ , то відповідно до подань (2) рівняння (1) набуде вигляду:

$$\partial_\alpha \left[ \alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha Q) + \partial_\gamma^2 Q \right] = 0$$

і для його виконання досить прийняти, що функція  $Q(\alpha, \gamma)$  є розв'язком рівняння Лапласа

$$\alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha Q) + \partial_\gamma^2 Q = 0 \quad (3)$$

в області  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq |\gamma| < \infty$ . Розв'язок рівняння (3) у заданій області по-дамо інтегралом Фур'є

$$Q(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty A(\xi) I_0(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi + \int_0^\infty B(\xi) I_0(\xi \alpha) \sin \xi \gamma d\xi,$$

тоді компонента  $u_\beta(\alpha, \gamma)$  визначатиметься так:

$$u_\beta(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \xi A(\xi) I_1(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi + \int_0^\infty \xi B(\xi) I_1(\xi \alpha) \sin \xi \gamma d\xi, \quad (4)$$

де  $I_k(\xi \alpha)$  - модифіковані функції Бесселя першого роду порядку  $k$ ;  $A(\xi)$  і  $B(\xi)$  - довільні функції, які забезпечують існування компоненти  $u_\beta(\alpha, \gamma)$  в класі функцій  $C^1$  аж до межі циліндра  $\alpha = 1$ .

За відомою компонентою  $u_\beta(\alpha, \gamma)$  можна віднайти усі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі. Зокрема, за формулами (2) знайдемо компоненти вектора  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} 2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) &= -\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_1(\xi \alpha) \sin \xi \gamma d\xi + \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_1(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi, \\ 2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) &= \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_0(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi + \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_0(\xi \alpha) \sin \xi \gamma d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

а за законом Гука знайдемо не рівні нулю у цьому випадку компоненти тензора напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) &= -\mu \int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi + \mu \int_0^{\infty} \xi^2 B(\xi) I_1(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi, \\ \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) &= -\mu \int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) I_2(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi + \mu \int_0^{\infty} \xi^2 B(\xi) I_2(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi.\end{aligned}\quad (6)$$

Отже, у випадку кручення циліндра поверхневим навантаженням без дилатації його напружений стан визначається тільки дотичними напруженнями, рівень яких уможлиблює появу пластичних деформацій або спричиняє крихке руйнування.

2. Для визначення невідомих функцій  $A(\xi)$  і  $B(\xi)$ , які формулами (4)-(6) визначають напружено-деформований стан в циліндрі необхідно сформулювати певну крайову задачу. Нехай під дією навантаження циліндр із зацімленими торцями на безмежності закручується на певний кут, в результаті чого виникає поле поворотів  $\omega_\beta(\alpha, \gamma)$ , розподіл якого на поверхні  $\alpha = 1$  циліндра є симетричним відносно площини  $\gamma = 0$ . При цьому одержимо таку крайову умову і умову на безмежності:

$$2\omega_\gamma(1, \gamma) = \omega_0 f(\gamma^2) \quad (0 \leq |\gamma| < \infty), \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} f(\gamma^2) = 0. \quad (7)$$

Оскільки основною вимогою коректного розв'язку крайової задачі математичної фізики є його неперервна залежність від крайових умов, то відповідно до подання (5) ця вимога буде виконана, якщо  $B(\xi) = 0$  і

$$\int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) I_0(\xi) \cos \xi\gamma d\xi = \omega_0 f(\gamma^2) \quad (0 \leq |\gamma| < \infty), \quad (8)$$

тобто для визначення функції  $A(\xi)$  необхідно розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

Оскільки функція  $A(\xi) \in [0, \infty)$ , то її подамо рядом за поліномами Ерміта, які утворюють повну і ортогональну систему функцій на проміжку  $0 \leq |\xi| < \infty$ . При цьому матимемо, що

$$\xi^2 A(\xi) I_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-p\xi^2} H_{2n}(q\xi) \quad (p > 0, \quad q > \sqrt{p}), \quad (9)$$

де  $a_n$  - невизначені наперед коефіцієнти.

Якщо ряд (9) підставити в інтегральне рівняння (8) і обчислити інтеграл, то одержимо знову такий ряд за поліномами Ерміта:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1 - \frac{q^2}{p}\right)^n e^{-\gamma^2/4p} H_{2n}(\lambda\gamma) = 2\omega_0 f(\gamma^2) \quad 0 \leq |\gamma| < \infty, \quad (10)$$

де параметр  $\lambda = q / 2\sqrt{p}\sqrt{q^2 - p}$  і  $H_{2n}(-\lambda\gamma) = H_{2n}(\lambda\gamma)$ . Якщо до ряду (10) застосувати формулу ортогональності поліномів Ерміта, то для коефіцієнтів  $a_n$  одержимо такий вираз:

$$a_n = \frac{(-1)^n \omega_0 p^n q}{\pi (q^2 - p)^{n+1/2} 2^{2n} (2n)!} \int_0^\infty f(\gamma^2) e^{-\sigma\gamma^2} H_{2n}(\lambda\gamma) d\gamma, \quad (11)$$

де параметр  $\sigma = [4(q^2 - p)]^{-1} > 0$ . Тепер за відомими коефіцієнтами  $a_n$  і поданням (9) визначимо функцію  $A(\xi)$ , що дає можливість за формулами (4)-(6) віднайти напружено-деформований стан в циліндрі, який відповідно до виразу (11) коефіцієнтів  $a_n$  буде залежати від двох параметрів. Ці параметри можуть слугувати зведеною характеристикою поверхневого шару [2], який виникає в результаті явища реставрації поверхні.

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. –М.: ФМ, 1963. - 686 с.
2. Наумовец А.Г. Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхности // Прогресивні матеріали і технології. К., - 2003. - Т. 2. - С. 319-350.

**INFINITE CYLINDER STRESSEDLY-DEFORMED STATE IN THE CONDITION OF SYMMETRICAL TORSION ACHIEVED BY THE HELP OF SURFACE LOADING**

*The stressedly-deformed mode problem of infinite cylinder with fastened ends torsion made by any continuously distributed surface loading is solved. And all the strained state characteristics are expressed with the help of Hermitian polynomial series, which provides their convergence in  $L^2$  norm.*



УДК 517.2

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСПЕРСІЇ ХВИЛЬОВОГО ПАКЕТУ

Гуртовий Ю.В.

Кіровоградський педагогічний університет ім. В.Винниченка, [hurtovyy@rambler.ru](mailto:hurtovyy@rambler.ru)

Поняття про дисперсію і групову швидкість є досить абстрактними, і складними для розуміння, тому що за математичними формулами не видно їх фізичної суті і яскравого наочного образу. Тому постає необхідність математичного моделювання і візуалізації цих важливих фізичних понять. Розглянемо хвильовий пакет як суперпозицію ста гармонійних хвиль, дискретний спектр яких зображений на рис. 1, і задається законом

$$a(k) = 0,07 e^{-(0,1k-3)^2}.$$

Сам хвильовий пакет можливо представити у вигляді суми гармонічних хвиль, у яких амплітуда змінюється по вище вказаному закону, тобто у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{100} 0,07 e^{-(0,1k-3)^2} \cos(0,1kx - \omega(k)t).$$

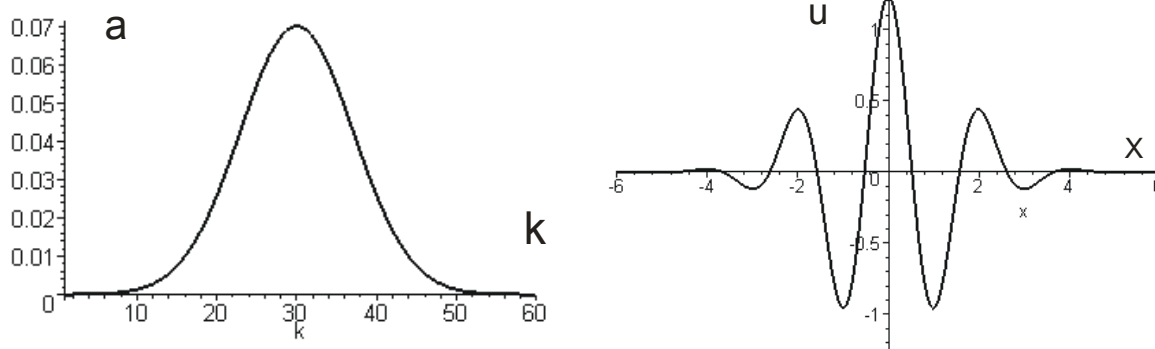


Рис. 1. Хвильовий пакет та його спектр

З використанням запропонованого математичного опису розглянуто поведінку хвильового пакету для різних законів дисперсії  $\omega(k)$ . Якщо частота залежить лінійно від хвильового числа, то хвиля буде бездисперсійною і хвильовий пакет буде розповсюджуватись без зміни форми. Якщо, наприклад, закон дисперсії задається формулою  $\omega = \sqrt{gk}$  (що має місце для коротких гравітаційних хвиль на поверхні рідини), то тут яскраво можна спостерігати нормальну дисперсію (рис. 2). Видно, що в процесі руху хвильовий пакет як би “розмазується” по простору, а його максимальна амплітуда зменшується.

Побудовано анімаційні математичні моделі, що дозволяють спостерігати рух хвильового пакету в різних дисперсійних середовищах. При цьому важливо, що візуально можна оцінити, коли фазова швидкість більша чи менша за групову.

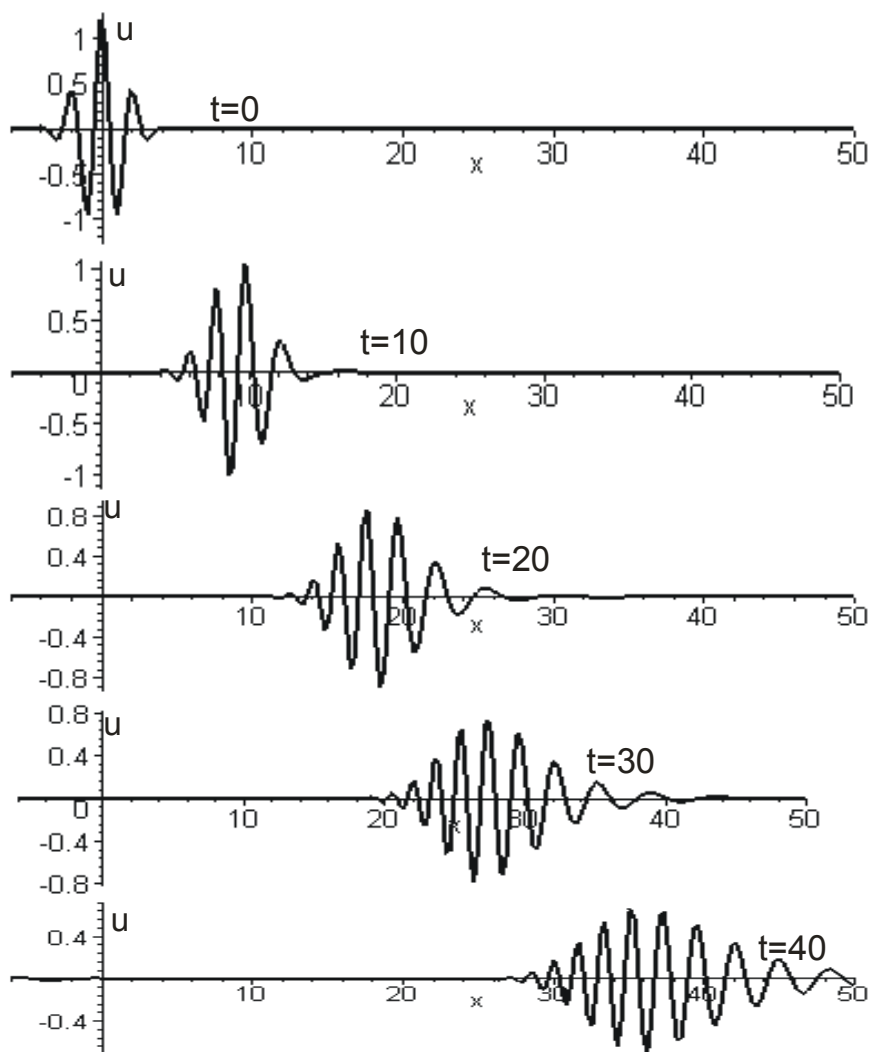


Рис. 2 Дисперсія хвильового пакету для коротких хвиль на поверхні рідини

Наприклад, при  $\omega = \sqrt{\sigma k^3 / \rho}$  (за опису дисперсії капілярних хвиль на поверхні рідини) отримуємо, що групова швидкість більша за фазову (явище аномальної дисперсії).

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 564 с.
2. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 400 с.



MATHEMATICAL MODELING OF DISPERSION OF WAVE PACKET

The method of mathematical modeling and visualization of the phenomenon of dispersion is described for different physical environments.



УДК 539.3

**РОЗРАХУНОК МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ НА ТРИПАРАМЕТРИЧНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА МЕТОДОМ КОНСТРУКЦІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**Здобіцька Н.В.<sup>1</sup>, Делявський М.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Луцький національний технічний університет, [andrijsd@rambler.ru](mailto:andrijsd@rambler.ru)

<sup>2</sup>Технологічно-природничий університет, м. Бидгощ, Польща, [delyavmv@mail.atr.bydgoszcz.pl](mailto:delyavmv@mail.atr.bydgoszcz.pl)

Метод конструкційних елементів є узагальненням методу скінченних елементів і полягає в розділенні конструкції на окремі однорідні макрочастини. На відміну від скінченного елемента конструкційний елемент є реальною частиною конструкції, а його математичним аналогом є математична модель конструкційного елемента. У випадку однорідних плит, конструкційним елементом є сама плита. Розроблений метод розрахунку механічної поведінки плит є близький до методу скінчених елементів і в той же час більш точніший, оскільки дозволяє точно задовольнити рівнянням рівноваги ортотропної плити а також із заданою точністю задовольнити всім статичним і кінематичним граничним умовам (що не є можливим за використання методу скінчених елементів). Зпропоновано математичну модель конструкційного елемента тонкої ортотропної плити покладеної на пружну трипараметричну основу Вінклера.

Модель опирається на диференціальне рівняння [1, 2]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w + K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = q(x_1, x_2) \tag{1}$$

що описує стан рівноваги такої плити. Тут  $D_{ij}$  – жорсткості плити на згин та кручення, а також побічна жорсткість  $D_{12}$ ;  $w$  – прогин плити,  $q(x_1, x_2)$  – по-

перечне навантаження, прикладене до верхньої сторони плити;  $K_i$  ( $i = \overline{0, 2}$ ) – коефіцієнти жорсткості основи на поперечне переміщення і повороти.

Щоб знайти напружений стан такої плити за допомогою методу скінченних елементів потрібно розділити її на тисячі, а може навіть на десятки тисяч скінченних елементів. Проте можна піти іншим шляхом: розглянути всю плиту як один скінченний елемент і побудувати відповідну йому математичну модель.

Розв'язок рівняння (1) отримано у вигляді:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{16} [R_{\nu k} W_{\nu k}] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [W_{mn}^*], \quad (2)$$

де  $R_{\nu k}$  – невідомі параметри;  $W_{\nu k}$  і  $W_{mn}^*$  – відповідно координатні функції і вільні частини прогину конструкційного елемента. Розв'язок (2) як правило подається в матричній формі:

$$w = [[W]]\{\{R\}\} + W^*. \quad (3)$$

Подібно записуються вирази для переміщень, моментів і поперечних сил:

$$u_1 = [[U]]\{\{R\}\} + U^*, \quad u_2 = [[V]]\{\{R\}\} + V^*, \quad (4)$$

$$M_{11} = [[X]]\{\{R\}\} + X^*, \quad M_{22} = [[Y]]\{\{R\}\} + Y^*, \quad M_{12} = [[Z]]\{\{R\}\} + Z^*, \quad (5)$$

$$Q_1 = [[T]]\{\{R\}\} + T^*, \quad Q_2 = [[G]]\{\{R\}\} + G^*. \quad (6)$$

Для кожної з цих величин вводяться власні координатні матриці і вільні частини. Наприклад,  $[[Y]]$  – координатна матриця,  $Y^*$  – вільна частина згинального моменту  $M_{22}$  і т. д. Сукупність виразів (3)-(6) становлять математичну модель конструкційного елемента тонкої ортотропної плити на пружній трипараметричній основі Вінклера. Вона доповнюється граничними умовами на зовнішніх краях окремих конструкційних елементів, а також умовами ідеального механічного контакту на їх спільному краю.

1. Здолбіцька Н.В., Ортотропна плита на пружній анізотропній основі // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка”). – Луцьк, 2007. – Вип. 19. – С. 130-138.
2. Delyavskyy M., Zdolbicka N., Zdolbicki A. Rozwiązanie płyty ortotropowej na podłożu sprężystym typu Pasternaka // Матеріали VI Польсько-Українського Наукового Симпозіуму “Актуальні Задачі Механіки Неоднорідних Середовищ”, Варшава. – 2005. – С. 35-36.

DESIGN OF ORTHOTROPIC PLATE RESTING ON THREEPARAMETRICAL FOUNDATION BY THE METHOD OF CONSTRUCTION ELEMENTS

The mathematical model of construction elements of thin orthotropic plates on the elastic foundation on Vinklers type with three parameters is offered.



УДК 539.3

ОСЕРЕДНЕННЯ МАГНІТНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГІБРИДНИХ ВОЛОКНИСТИХ ФЕРОМАГНІТНИХ КОМПОЗИТІВ

Коваленко Д.С., Молдаванова Н.О., Шрамко Ю.В.

Сумський державний університет

Розглянемо однорідне віднесене до декартової системи координат  $0x_1x_2x_3$ , ізотропне з точки зору магнітних властивостей середовище, армоване регулярною (двоперіодичною) системою однакових груп волокон (рис. 1). Будемо вважати, що поперечний переріз кожного волокна представляє однозв'язну область  $D_j$ , обмежену достатньо гладким замкненим контуром  $\Gamma_j$  ( $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ )  $j=1,2$ .

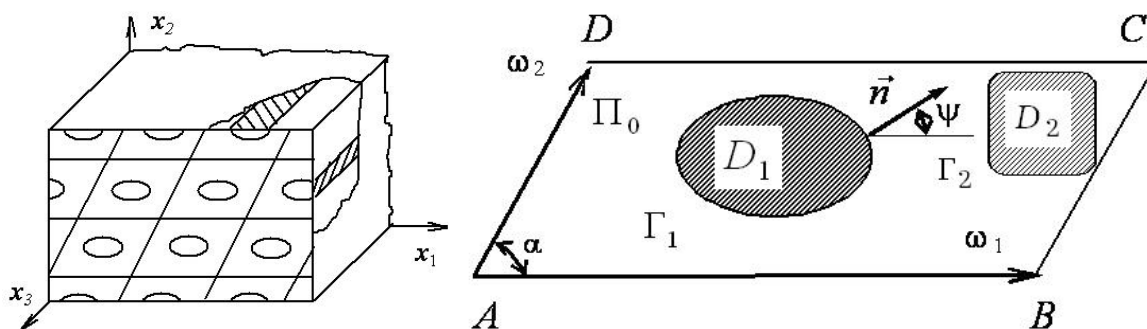


Рис. 1 Структура фундаментальної комірки.

Будемо вважати, що у структурі задані середні значення компонент вектора магнітної індукції  $\langle B_1 \rangle$  і  $\langle B_2 \rangle$ . Розглядаються феромагнітні композити з магнітом'яких матеріалів, які знаходяться у слабких магнітних полях, тоді мають місце рівняння магнітостатики [2].

Далі будемо слідувати методиці роботи [1]. Рівняння стану для макромоделі феромагнітного композита отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} \langle B_1 \rangle = \langle \mu_{11} \rangle \langle H_1 \rangle + \langle \mu_{12} \rangle \langle H_2 \rangle, \\ \langle B_2 \rangle = \langle \mu_{21} \rangle \langle H_1 \rangle + \langle \mu_{22} \rangle \langle H_2 \rangle. \end{cases} \quad (1)$$

Величини  $\langle \mu_{ik} \rangle$ , які фігурують в (1), є осередненими магнітними проникностями. Макропараметри визначаються точно у замкнутому вигляді через функціонали, що побудовані на розв'язках системи регулярних інтегральних рівнянь другого роду, та містять в собі повну інформацію про геометричні та фізичні властивості композита.

Розглянемо гібридний феромагнітний композит тетрагональної будови ( $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 2i$ ) з круговими волокнами першої групи, які виготовлені з технічного заліза ( $\mu_r^{(1)} = 2500$ ), та другої групи – з феромагнетику із відносною магнітною проникністю  $\mu_r^{(2)} = 5000$ . Матеріал матриці – ферит F-107 ( $\mu_r^{(0)} = 110$ ). Координати центра першого волокна у фундаментальній комірці  $(-0.3; 0)$ , другого –  $(0.7; 0)$ . На рис. 2 наведені відносні макропараметри  $\langle \mu_{22} \rangle / \mu^{(0)}$ ,  $\langle \mu_{11} \rangle / \mu^{(0)}$  у функції параметра  $\lambda = 2R^{(1)} / \omega_1$ : криві 2;4 та 3;5 відповідають композиту з волокнами другої групи еліптичного поперечного перетину ( $R_1^{(2)} = 0.2$ ,  $R_2^{(2)} = 0.5R_1^{(2)}$ ) і «квадратного» поперечного перетину ( $l = 0.4$ ) відповідно. Крива 1, наведена для порівняння, відповідає композиту з одним круговим волокном.

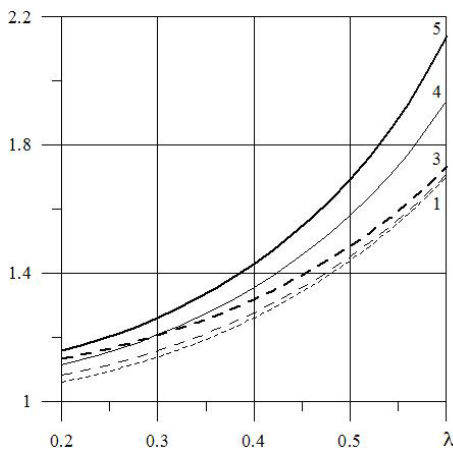


Рис.2

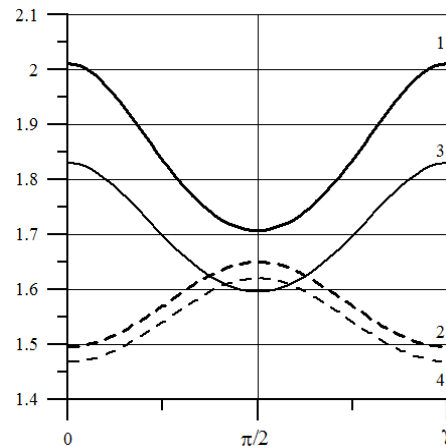


Рис.3

Для вище розглянутих композитів на рис. 3, у випадку коли розмір волокон першої групи фіксований ( $R_1^{(1)} = 0.6$ ,  $R_2^{(1)} = 0.8R_1^{(1)}$ ), наведені макропараметри  $\langle \mu_{11} \rangle / \mu^{(0)}$ ,  $\langle \mu_{22} \rangle / \mu^{(0)}$  (криві 3,4 та 1,2) у функції кута  $\gamma$  між більшою піввіссю еліпса та віссю  $0x_1$ .

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Периодические кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Физматлит, 1994. – 336 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.

**AVERAGING OF MAGNETIC PROPERTIES OF FIBROUS FERROMAGNETIC HYBRID COMPOSITE**

*In the framework of regular structure model, the averaging of magnetic properties of fibers ferromagnetic hybrid composite is done. The results of calculations are shown.*



УДК 539.5

**ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МЕХАНІКИ БІНАРНИХ ПРУЖНИХ ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМ З ВРАХУВАННЯМ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ЯВИЩ**

**Кузін М.О.**

*Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, [n\\_kuzin@mail.ru](mailto:n_kuzin@mail.ru)*

Бінарні металічні системи широко використовуються в сучасних транспортних системах в якості вузлів тертя. В умовах заданих інтенсивних зовнішніх навантажень і обмеженнях на геометричні характеристики деталей, внутрішня структура є основним фактором, який дозволяє змінювати в широких межах експлуатаційні параметри вузлів тертя [1].

Опис поведінки гетерогенних металічних систем проводили з використанням континуальних моделей механіки, які ґрунтуються на термодинамічних та структурно-феноменологічних підходах [2,3].

Використання феноменологічного підходу передбачає розгляд будови матеріалу на різних рівнях ієрархії: макроскопічному, що відображає поведінку матеріалу в цілому, мікроскопічному, що пов'язаний з елементами структури середовища. При цьому одним з апріорних припущень є те, що на кожному рівні опису працює математичний апарат механіки деформівного твердого тіла.

При описі поведінки матеріалу бінарних гетерогенних систем перехід від нижнього рівня до вищого відбувається за допомогою осереднення інформації про поведінку матеріалу на нижньому рівні або за допомогою осереднення властивостей представницького об'єму.

Оскільки реальна структура бінарна гетерогенних систем є стохастичною, тому для її опису застосували апарат випадкових функцій. За

стереометричні параметри, що однозначно визначають внутрішню будову цих систем в локальній області приймемо процентне співвідношення компонентів та їх розмірні величини. Тому обмежимося використанням для опису цих структур одно- і двоточкових моментних функцій.

Вважаємо, що на кожному рівні поведінка цих середовищ описується рівняннями координатно неоднорідних пружних систем з врахуванням релаксаційних процесів:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_0 \cdot \left( \left( K \left( \vec{r}_0 \right) - \frac{2}{3} G \left( \vec{r}_0 \right) \right) (\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) \cdot \hat{I} + 2G \left( \vec{r}_0 \right) (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^s + \right. \\ \left. + 2B \left( \vec{r}_0 \right) (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a + C \left( \vec{r}_0 \right) \vec{u} \cdot \hat{\epsilon} \right) - 2A \left( \vec{r}_0 \right) \vec{u} - 2C \left( \vec{r}_0 \right) (\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $K \left( \vec{r}_0 \right)$  - модуль об'ємного стиску,  $G \left( \vec{r}_0 \right)$  - модуль зсуву, функції  $A \left( \vec{r}_0 \right)$ ,  $B \left( \vec{r}_0 \right)$ ,  $C \left( \vec{r}_0 \right)$  - характеристики відповідних механізмів дисипації енергії

при пружному деформуванні. В якості фізичних співвідношень, що описують поведінку матеріалу в умовах дії зовнішніх навантажень приймемо закон Гука для ізотропного пружного тіла:

$$\hat{\sigma}^s = K \left( \vec{r}_0 \right) e \hat{I} + 2G \left( \vec{r}_0 \right) \left( \hat{\epsilon} - \frac{1}{3} e \hat{I} \right). \quad (2)$$

Тут  $\hat{\epsilon} = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^s$  - симетричний тензор деформації,  $e = \hat{\epsilon} \cdot \hat{I} = \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}$  - перший інваріант цього тензора,  $\hat{I}$  - одиничний тензор.

На макрорівні характеристики матеріалу в околі точок змінюються достатньо повільно, а на мікрорівні сталі матеріалу є випадковими функціями координат системи, що задаються відповідними розподілами.

При визначенні ефективних властивостей, перехід від мікрорівня до макрорівня відбувається за допомогою процедури узагальнення інформації на представницькому об'єму нижчого рівня ієрархії.

Розглянутий в роботі підхід, був використаний при побудові і дослідженні комп'ютерних моделей структури матеріалів, в яких присутні складові із різними механічними властивостями [4].

1. Бурак Я., Кузін М., Кузін О. Технологічне підвищення стійкості проти спрацювання підшипників ковзання шляхом оптимізації параметрів структури металічних систем // *Машинознавство*. – 2006. - № 4. – С. 106-110.

2. Бурак Я.Й. Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доповіді АН УРСР. Серія А. - 1987. - № 12. - С. 19-23.
3. Волков С.Д. Статистическая теория прочности. - М.: Машиностроение, 1961. - 320 с.
4. Кузін М. Імітаційні моделі структури для розрахунку параметрів ферито-перлітних сталей з підвищеною зносостійкістю // Українська академія друкарства. Наукові записки. Науково-технічний збірник. - 2007. - № 1 (11). - С. 15-22.

**THE USING OF CONTINUOUS MECHANICS MODELS FOR THE DESCRIPTION OF BEHAVIOR OF BINARY HETEROGENEOUS METALLIC SYSTEM.**

*Use possibility of continuous mechanics models for the description of behavior binary heterogeneous metallic system with their structure is shown.*

\* \* \* \* \*

УДК 539.3; 622.692

**РІВНОВАГА ТРУБОПРОВОДУ ПРИ ВЗАЄМНИХ ПЕРЕМІЩЕННЯХ ОСНОВИ ОБАБІЧ ПОВІТРЯНОГО ПЕРЕХОДУ**

**Струк А.Б.**

*Управління магістральних газопроводів “Прикарпаттрансгаз”, [andrij\\_struk@ukr.net](mailto:andrij_struk@ukr.net)*

Розглядається задача про напружений стан відкритої ділянки трубопроводу, спричинений взаємними рухами блоків основи по обидва боки від повітряного переходу. Трубопровід моделюється безмежно протяжним стержнем з трубчастим попереччям, основа – напівбезмежними жорсткими блоками, що взаємодіють з трубою через пружний прошарок Вінклера.

Сформулювали мішану крайову задачу для рівнянь рівноваги в переміщеннях:

$$\begin{aligned}
 EF \frac{d^2 u_z}{dz^2} &= 0, \quad |z| < l; & EF \frac{d^2 u_z}{dz^2} - \pi D k_\tau \left( u_z - \frac{\Delta_1}{2} \operatorname{sgn} z \right) &= 0, \quad |z| > l; \\
 EJ \frac{d^4 u_x}{dz^4} &= 0, \quad |z| < l; & EJ \frac{d^4 u_x}{dz^4} + D k_n \left( u_x - \frac{\Delta_2}{2} \operatorname{sgn} z \right) &= 0, \quad |z| > l; \\
 EJ \frac{d^4 u_y}{dz^4} &= q, \quad |z| < l; & EJ \frac{d^4 u_y}{dz^4} + D k_n \left( u_y - \frac{\Delta_3}{2} \operatorname{sgn} z \right) &= q, \quad |z| > l.
 \end{aligned}$$

Тут  $u_x, u_y, u_z$  – горизонтальне, вертикальне та осьове переміщення труби;  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  – взаємні переміщення основи;  $EF$  та  $EJ$  – жорсткості труби

на розтяг та згин;  $k_n$ ,  $k_\tau$  – нормальний та дотичний коефіцієнти постелі;  $q$  – питома вага трубопроводу;  $D$  – діаметр трубопроводу;  $2l$  – довжина повітряного переходу.

При  $|z| \rightarrow \infty$  зусилля та моменти в трубі відсутні.

За неперервно диференційованим розв'язком сформульованої задачі досліджено вплив напружень, викликаних кінематичними збуреннями, на напружений та граничний стан трубопроводу під внутрішнім тиском. При цьому використали безмоментну теорію оболонок та енергетичний критерій Мізеса.

#### EQUILIBRIUM OF PIPELINE AT MUTUAL DISPLACEMENTS OF GROUND ON BOTH SIDES OF AERIAL CROSSING

*The problem on the stressed state of open area of pipeline caused by mutual displacements of ground blocks on both sides of aerial crossing is considered.*



УДК 539.3

#### ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН В КРУГЛІЙ ПЛАСТИНІ З КОНЦЕНТРИЧНИМ ОТВОРОМ ЗА ЗАЛЕЖНИХ ВІД РАДІУСА КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОВІДДАЧІ З ЛИЦЕВИХ ПОВЕРХОНЬ

**Чиж А.І.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України  
ім. Я.С. Підстригача, [chyzh\\_tolik@ukr.net](mailto:chyzh_tolik@ukr.net)*

Розглядається задача про визначення термопружного стану в тонкому кільці товщиною  $2h$ , зовнішнього радіуса  $l$  та внутрішнього  $a_0$ , яке обмінюється теплом на лицевих поверхнях  $z = \pm h$  з довкіллям температури  $t_c^\pm$  за законом Ньютона. Відносні коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях  $z = \pm h$  рівні  $\mu_1^\pm$  на кільці  $[a_0, a)$  та  $\mu_2^\pm$  на кільці  $[a, l]$ . На торцях  $r = a_0, l$  кільце закріплене та задано конвективний теплообмін. Стационарне температурне поле в кільці визначається із системи диференціальних рівнянь з кусково-постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \Delta T_1(r) - \mu_1(r)(T_1(r) - t_1) - \mu_2(r)(T_2(r) - t_2) = 0, \\ \Delta T_2(r) - 3(1 + \mu_1(r))(T_2(r) - t_2) - 3\mu_2(r)(T_1(r) - t_1) = 3t_2; \end{cases}$$



$$\text{Тут } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad t_{1,2} = (t_c^+ \pm t_c^-) / 2; \quad \mu_{1,2}(r) = h(\mu^+(r) \pm \mu^-(r)) / 2,$$

$$h\mu^\pm(r) = \mu_1^\pm + (\mu_2^\pm - \mu_1^\pm) H(a, l; r), \quad H(a, l; r) = \begin{cases} 1, & r \in [a, l], \\ 0, & r \notin [a, l]. \end{cases}$$

Ввівши нові функції  $F_1 = T_1 - t_1 + \lambda_1(T_2 - t_2)$ ,  $\lambda_2 F_2 = T_1 - t_1 + \lambda_2(T_2 - t_2)$ , вихідну систему рівнянь, після деяких перетворень і врахування граничних умов зведемо до розв'язання системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами типу Фредгольма і Вольтерри другого роду

$$\begin{cases} F_1(r) = \psi_1(r) + \int_{a_0}^l f_1 \text{Ker}_4^1(r, s) ds + \int_{a_0}^r f_1 \text{Ker}_1^1(r, s) ds, \\ F_2(r) = \psi_2(r) + \int_{a_0}^l f_2 \text{Ker}_4^2(r, s) ds + \int_{a_0}^r f_2 \text{Ker}_1^2(r, s) ds. \end{cases} \quad (1)$$

Тут:

$$f_1(r) = (d_1 F_1 - d_2 F_2) H(a, l) + 3\lambda_1 t_2,$$

$$f_2(r) = (d_3 F_1 - d_4 F_2) H(a, l) + t_2,$$

$$\text{Ker}_4^i(r, s) = g_i I_0(\delta_i r) \text{Ker}_3^i(l, s) - \frac{K_0(\delta_i r)}{g} \text{Ker}_3^i(l, s),$$

$$\text{Ker}_3^i(r, s) = \text{Ker}_2^i(r, s) + b_2 \text{Ker}_1^i(r, s),$$

$$\text{Ker}_2^i(r, s) = \delta_i s [I_1(\delta_i r) K_0(\delta_i s) - I_0(\delta_i s) K_1(\delta_i r)],$$

$$\text{Ker}_1^i(r, s) = s [I_0(\delta_i r) K_0(\delta_i s) - I_0(\delta_i s) K_0(\delta_i r)], \quad (i = 1, 2).$$

$\psi_1(r)$ ,  $\psi_2(r)$  – відомі функції;  $d_j$ , ( $j = 1, \dots, 4$ ),  $\delta_i$ ,  $b_i$ ,  $g_i$ ,  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2$ ) – коефіцієнти, що вираховуються через вхідні параметри задачі.

Систему (1) розв'язано числово методом квадратурних формул.

Прогин закріпленої на торцях пластини, зумовлений температурним моментом  $T_2$ , визначається з рівняння

$$\Delta \Delta w = -\alpha_t (1 + \nu) \Delta T_2,$$

за граничних умов:  $w(a_0) = 0$ ,  $w'(a_0) = 0$  та  $w(l) = 0$ ,  $w'(l) = 0$ .

Тут  $\alpha_t$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Прогин матиме вигляд:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 - \frac{AD}{B} t_2 \frac{r^2}{4} + I_1(r) \ln r + I_2(r) - \frac{A}{B} (T_1 - CT_2),$$

де величини  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  та функції  $I_1(r)$ ,  $I_2(r)$  – відомі.

Числовий аналіз проведено для кільця при різних значеннях чотирьох коефіцієнтів тепловіддачі. Проаналізовано залежність температурних інтегральних характеристик та прогину від цих коефіцієнтів.

**THERMOELASTIC STATE IN THE CIRCULAR PLATE WITH CONCENTRIC OPENING  
WITH THE RADIUS-DEPENDENT HEAT EXCHANGE COEFFICIENT ON LATERAL SUR-  
FACES**

*The technique of reducing of the bending problem for a circular plate with concentric opening with the radius-dependent heat exchange coefficient on lateral surfaces to simultaneous Fredholm and Volterra integral equations is developed. The numerical analysis of bend function, radial displacement and temperature parameters is carried out.*



### СЕКЦІЯ 3. “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТІЛ З ТРИ- ЩИНАМИ, ВКЛЮЧЕННЯМИ”

УДК 539.3

#### РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РОЗСІЯННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ СФЕРИЧ- НИМ ВКЛЮЧЕННЯМ З ТОНКИМ ПРОШАРКОМ МЕТОДОМ ГРА- НИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Бутрак І.О.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
e-mail: [butrak@ukr.net](mailto:butrak@ukr.net)

У багатьох випадках в композитних матеріалах зустрічаються тонкі про-  
шарки між включеннями, волокнами та матрицею. Картини розсіяння пруж-  
них хвиль від включень без [4] та з прошарками достатньо різняться між со-  
бою. Це показано на прикладах двовимірних задач розсіяння для сферичних  
включень з міжфазними прошарками, зокрема, досліджено повні поперечні  
перерізи розсіяння падаючих Р-, S-хвиль [2], ефективні фазові швидкості [3].

Розглянемо тривимірну безмежну пружну матрицю та сферичне вклю-  
чення, які з’єднані через тонкий прошарок товщини  $h$ . Прошарок моделюєть-  
ся граничними умовами, які пов’язують неперервні зусилля  $\mathbf{p}$  зі стрибком пе-  
реміщень  $\mathbf{u}$  на поверхні з’єднання  $S$  співвідношеннями

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = f\mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + g(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n},$$

$$f = \frac{h}{\lambda + 2G}, \quad g = \frac{h}{G} \quad (1)$$

при переході через поверхню включення. Тут  $\mathbf{n}$  – одинична нормаль до повер-  
хні поділу, знак “+” відповідає поверхні зі сторони нормалі, знак “–” – про-  
тилежній,  $\lambda$ ,  $G$  – константи Ляме прошарку. В композиті поширюється пло-  
ска гармонічна поздовжня хвиля переміщень

$$\mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}) = u_0 e^{i\omega \mathbf{x}} \quad (2)$$

з амплітудою  $u_0$  та циклічною частотою  $\omega$ .

На основі подань [1] з використанням методу граничних елементів ви-  
хідна задача зводиться до системи шести граничних інтегральних рівнянь від-  
носно контактних значень переміщень  $\mathbf{u}^M$  у матриці та  $\mathbf{u}^I$  у включенні на  
поверхні  $S$ :

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^M(\mathbf{x}) + \iint_S \left[ \Omega^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - T^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \mathbf{u}^M(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \iint_S \Omega^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}^I(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^I(\mathbf{x}) + \iint_S \left[ \Omega^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \mathbf{u}^I(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \iint_S \Omega^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}^M(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (3)$$

де  $\Omega^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) A^{-1}$  ( $D = M, I$ );  $U^D, T^D$  ( $D = M, I$ ) – фундаментальні розв’язки динамічної теорії пружності;  $A^{-1}$  – матриця обернення співвідношень (1).

Для розв’язання інтегральних рівнянь (3) сформовано їх дискретний аналог методом колокацій для відшукування розв’язку в опорних вузлах криволінійних елементів, якими неперервно покривається поверхня поділу  $S$ . Отримано систему  $6 \times L$  ( $L$  – кількість опорних вузлів) лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень шуканих функцій в цих вузлах. Розроблено комплекс прикладних програм для розрахунку контактних переміщень та напружень з урахуванням присутності прошарку з різними фізико-механічними характеристиками. Програмування здійснювалось на базі алгоритмічного середовища FORTRAN.

1. *Михаськів В.В., Стасюк Б.М.* О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 4. – С. 27-35.
2. *Bostrom A., Bovik P., Olsson P.* A comparison of exact first order and spring boundary conditions for scattering by thin layers // J. Nondestructive Evaluation. – 1992. – 11, № 3/4. – P. 175-184.
3. *Bostrom A., Olsson P., Datta S.K.* Effective plane wave propagation through a medium with spheroidal inclusions surrounded by thin interface layers // Mechanics of Materials. – 1992. – 14. – P. 59-66.
4. *Kitahara K., Nakagawa K., Achenbach J.D.* Boundary-integral equation method for elastodynamic scattering by a compact inhomogeneity // Computational Mechanics. – 1989. – 5. – P. 129-144.

#### THE SOLUTION OF PROBLEMS OF ELASTIC WAVE SCATTERING ON THE SPHERICAL INCLUSION WITH THIN INTERLAYER BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

*The boundary element method is proposed for the numerical determination of dynamic displacements and stresses in three-dimensional matrix composite with the interlayer between an elastic matrix and spherical inclusion.*



УДК 534.26: 620.19

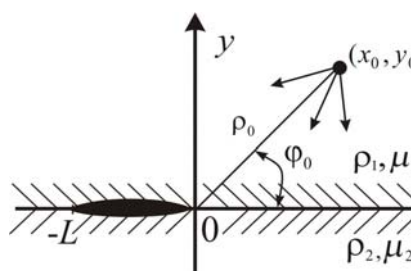
## ВЗАЄМОДІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ SH-ХВИЛІ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Войтко М.В.

Фізико-механічний інститут НАН України, [voytko@ipm.lviv.ua](mailto:voytko@ipm.lviv.ua)

Більшість моделей, які використовують для дослідження дифракції пружних хвиль на тріщинах у шаруватих середовищах базуються на припущенні, що фронт зондувальної хвилі є плоским. Мета цієї праці полягає у вивченні полів, розсіяних тріщиною за зондування шаруватого середовища більш реалістичним джерелом – гармонічним полем зосередженої сили [1].

Нехай міжфазна тріщина задана у декартовій системі координат (див. рис. 1):  $\{(x, y, z) \mid -L < x < 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ .



Цю тріщину опромінює SH-хвиля, збуджувана зосередженою силою прикладеною у точці з координатами  $x_0, y_0$ . Залежність поля від часу задаємо множником  $e^{-i\omega t}$ , який опускаємо. Хвильові числа для областей  $y > 0$  та

$y < 0$  визначаємо так:  $k_l (\equiv \omega \sqrt{\rho_l / \mu_l})$ , де

$\rho_l, \mu_l$  – густини та параметри Ламе середовищ,  $l = \overline{1, 2}$ .

Повне поле, що утворюється у результаті взаємодії поля точкового джерела з міжфазною тріщиною подамо так:

$$u^t(x, y) = u(x, y) + \begin{cases} u^{inc}(x, y; x_0, y_0) + u^\uparrow(x, y), & y \geq 0 \\ u^\downarrow(x, y), & y \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $u(x, y)$  – невідоме поле зміщень, розсіяне тріщиною ( $u \equiv u_z$ );  $u^{inc}$  – поле точкового джерела в однорідному середовищі;  $u^\uparrow, u^\downarrow$  – поля, розсіяні плоскою межею поділу у верхньому та нижньому півпросторах. Вирази для  $u^{inc}, u^\uparrow, u^\downarrow$  наведено в [1].

Поле зміщень  $u(x, y)$  шукаємо з розв'язку рівняння Гельмгольца

$$u_{xx}'' + u_{yy}'' + k_l^2 u = 0, \quad (2)$$

де  $l = 1$  для  $y > 0$  і  $l = 2$  для  $y < 0$ , крайовим умовам на берегах тріщини

$$\tau_{zy}(x, \pm 0) = 0, x \in (-L, 0), \quad (3)$$

умовам спряження на межі з'єднання, поза тріщиною

$$u^t(x, +0) = u^t(x, -0), \sigma_y(x, +0) = \sigma_y(x, -0) \text{ для } x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty), \quad (4)$$

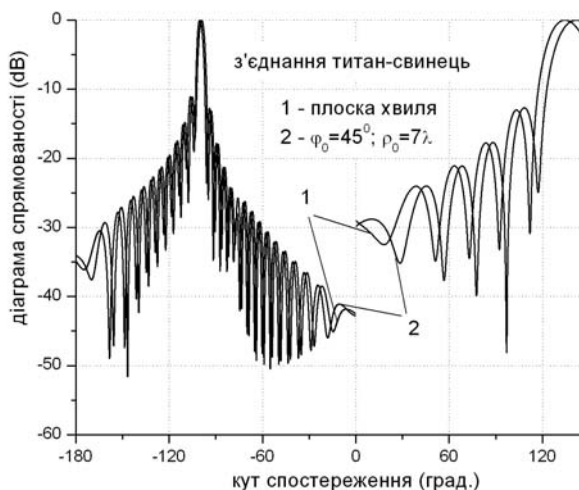
а також умовам на вершинах і умові випромінювання.

Застосовуючи перетворення Фур'є до крайової задачі (2–4), зводимо її до функціонального рівняння Вінера-Хопфа:

$$J_1(\alpha) + \frac{M(\alpha)}{\gamma_{1\alpha}} \left[ \Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L} \Psi^{(-)}(\alpha) \right] = 0. \quad (5)$$

З цього рівняння після проведення процедури факторизації та декомпозиції [1] знаходимо невідомі функції  $\Psi^{(\pm)}(\alpha)$  через які розсіяне поле виражаємо так

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Psi^{(+)}(\alpha) + \Psi^{(-)}(\alpha) e^{-i\alpha L} \right] \begin{cases} -\gamma_{1\alpha}^{-1} e^{-\gamma_{1\alpha} y - i\alpha x}, & y > 0 \\ \mu_1 \mu_2^{-1} \gamma_{2\alpha}^{-1} e^{\gamma_{2\alpha} y - i\alpha x}, & y < 0 \end{cases} d\alpha.$$



На рис. 2 наведено діаграми спрямованості міжфазної тріщини шириною  $L = 3\lambda$  за опромінення її плоскою хвилею під кутом  $\varphi_0 = 45^\circ$  (крива 1) та джерелом зосередженої сили (крива 2). Бачимо, що для  $\rho_0 = 7\lambda$  діаграми практично накладаються. Отже, за даних умов зондувальну хвилю точкового джерела можна замінити простішою – плоскою хвилею.

Рис. 2. Нормовані діаграми спрямованості дифрагованого поля зміщень тріщини у з'єднанні титан–свинець.  $\varphi_0, \rho_0$  – полярні координати джерела

1. Куриляк Д. Б., Назарчук З.Т., Войтко М.В. Дифракція SH-хвилі на міжфазній тріщині під дією зосередженої сили //Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44. – № 6. – С. 67–76.

#### INTERACTION OF CYLINDRICAL SH-WAVE WITH INTERPHASE CRACK

*The SH elastic wave diffraction by the finite crack located at the plane interface between two dissimilar elastic materials is analyzed. A point source wave incidence is considered. The problem is formulated in the terms of the Wiener-Hopf equation. This equation is solved rigorously via the factorization procedure. The comparison of the far field distributions for plane wave incident and different positions of point source are analyzed.*

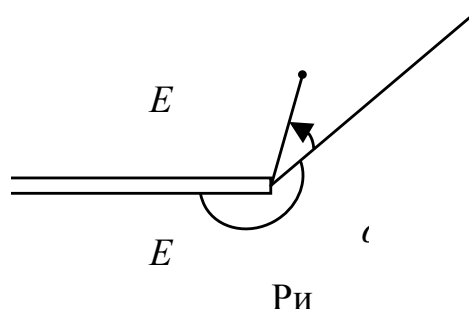
УДК 539.375

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЯКА СПІВПАДАЄ З КУТОВОЮ ТОЧКОЮ МЕЖІ РОЗДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Діхтяренко Ю.В.

Уманський державний педагогічний університет імені П.Г.Тичини,  
e-mail [dikhtiarenko\\_iu@mail.ru](mailto:dikhtiarenko_iu@mail.ru)

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі теорії пружності для



кусково-однорідного ізотропного тіла досліджується поведінка напружень поблизу кінця міжфазної тріщини, який співпадає з кутовою точкою межі розділу двох різних пружних середовищ. З цією метою, дотримуючись загальних положень про поведінку напружень поблизу куткових точок пружних тіл, розглядається однорідна зада-

ча теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею розділу середовищ у формі прямолінійних сторін кута, з вершини якого вздовж однієї з сторін виходить напівнескінченна тріщина (рис. 1).

Використавши рівняння рівноваги, умови сумісності деформацій, закон Гука та граничні умови, отримано вирази для напружень та характеристичне рівняння задачі відносно показника степеня сингулярності  $\lambda$  напружень, яке має вигляд:

$$D(\lambda) = 0,$$

$$D(\lambda) = (1 + \kappa_1)^2 t_1 + 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 + e^2 \cdot (1 + \kappa_2)^2 \cdot t_3 - \\ - 4(e - 1)^2 t_1 t_3 - 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 t_4 - e(1 + \kappa_2) \cdot (1 + \kappa_1) \cdot t_5,$$

$$t_1 = \lambda(\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin(\lambda + 2)\alpha \cdot \sin \lambda \alpha,$$

$$t_2 = \sin^2 \alpha + \sin \lambda(2\pi - \alpha) \cdot \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = \lambda(\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin \lambda(2\pi - \alpha) \cdot \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha),$$

$$t_4 = \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 2)\alpha \cdot \sin \lambda \alpha,$$

$$t_5 = 2 \sin^2 \alpha \left[ \lambda(\lambda + 2) - \sin(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda \alpha - \sin \lambda(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \right] +$$

$$+ \sin(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda(2\pi - \alpha) \cos[2(\lambda\pi - \alpha)] + \sin \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \cos 2(\lambda\pi + \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Дослідження кореня характеристичного рівняння показало, що кутова точка є концентратором напружень. При цьому, в залежності від пружних параметрів з'єднаних середовищ і величини кута розхилу їх межі розділу, найменший у смузі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  показник степеня сингулярності напружень може бути дійсним або комплексним. У першому випадку це означає, що кутова точка є концентратором напружень зі ступеневою особливістю, тоді як у випадку комплексного показника сингулярності на ступеневу особливість накладаються фізично некоректні просторові осциляції напружень.

Для випадку дійсного показника сингулярності досліджено залежність нормального напруження  $\sigma_\theta$  від полярного кута  $\theta$  і знайдено значення кута  $\theta_m$ , що відповідають максимуму розтягувальних напружень  $\sigma_\theta$  (Табл. 1).

Таблиця 1. Кут  $\theta_m$  максимуму нормального напруження  $\sigma_\theta$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ )

$\alpha$	$\theta_m$					
	$e_0=0,1$	$e_0=0,25$	$e_0=0,5$	$e_0=2$	$e_0=4$	$e_0=10$
10	87	94	99	0	0	0
20	79	84	89	0	0	0
30	74	77	81	-1	-1	-1
40	70	71	75	-3	-3	-3
50	69	67	69	-5	-5	-5
60		64	64	-9	-9	-8
70		72	62	-14	-14	-14
80			72	-23	-22	-21
90				-41	-36	-34
100					-83	-64

Результати розрахунків показують, що кут  $\theta_m$ , який за одним з критеріїв [1], визначає ймовірний напрямок подальшого розвитку тріщини, лежить у області матеріалу з меншим модулем Юнга і зростає із збільшенням кута розхилу середовищ.

1. Ярема С.Я., Иваницкая Г.С. Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // Физ.-хим. Механика материалов. – 1986. - № 1. – С. 45-57.

#### RESEARCH OF THE TENSE STATE NEAR TOP OF INTERFACIAL CRACK WHICH COINCIDES WITH ANGULAR POINT OF LIMIT OF SECTION OF TWO ENVIRONMENTS

*The solution of homogeneous boundary problem of elasticity theory is found for a piece-homogeneous isotropic plane with the media-separating boundary in the form of rectilinear sides of a corner from the top of which a semi-infinite crack goes out along one of the sides. Characteristic equation of problem for the degree of singularity tensions is obtained and the calculation of his roots is carried out. The behavior of tensions near the top of a crack is investigated and expected directions of further development of crack are certainied.*



УДК 539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ З СИСТЕМОЮ ПОВЕРХНЕВИХ ТРІЩИН

Довбня К.М., Гордієнко М.М.

Донецький національний університет, [dovbnya@matfak.dongu.donetsk.ua](mailto:dovbnya@matfak.dongu.donetsk.ua)

Задача про граничну рівновагу сферичної оболонки, виготовленої з функціонально-градієнтного матеріалу, з двома поверхневими тріщинами розглянута в роботі [3]. Для розв'язання цієї задачі застосовувався аналог  $\delta_c$ -моделі, який враховує пластичні деформації, що з'явилися в процесі навантаження на продовженні та над (під) фронтом тріщин. Нижче аналогічна задача розв'язана для пологої ортотропної оболонки довільної гауссової кривини сталої товщини  $h$ .

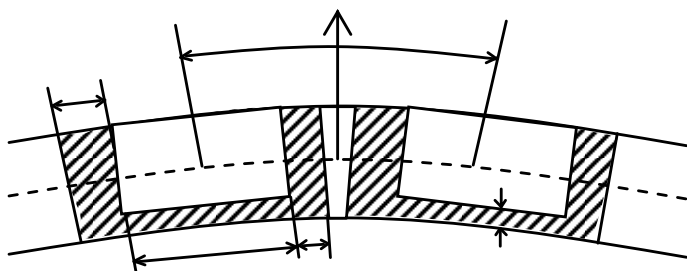


Рис.1

Віднесемо оболонку до системи ортогональних координат  $x, y$  з осями вздовж напрямів пружної і геометричної симетрії. Оболонка послаблена системою двох колінеарних тріщин однакової довжини  $2l$  та глибини  $h - d_1$ . Відстань між центрами

тріщин дорівнює  $2d$  (рис. 1). Тоді рівняння, які описують контур тріщин, мають вигляд:

$$L_i : x = ls \pm d, \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Згідно аналогу  $\delta_c$ -моделі, тривимірна задача дослідження міцності пружно-пластичної оболонки з поверхневими тріщинами однакової довжини зводиться до двовимірної задачі про напружений стан пружної оболонки з тріщинами невідомих розмірів. При цьому на берегах тріщин виконуються такі граничні умови:

$$\Phi_i(ls) = \begin{cases} \Phi^{(i)} - \Phi_i^*(ls), & d + l \leq |s| \leq d + l + l_p \\ \Phi^{l(i)} - \Phi_i^*(ls), & d - l \leq |s| \leq d + l \\ \Phi^{(i)} - \Phi_i^*(ls), & d + l + l^p \leq |s| \leq d - l \end{cases}, \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

де  $\Phi_1^* = T_2^*$ ,  $\Phi_2^* = M_2^*$  – зовнішні навантаження, які діють на оболонку;  $\Phi^{l(1)} = \sigma_\tau d_1$ ,  $\Phi^{l(2)} = \mp \sigma_\tau d_1 (h - d_1) / 2$  – зусилля і момент, що діють над (під)

фронтом тріщин («+» береться у тому випадку, коли поверхнева тріщина виходить на внутрішню поверхню оболонки, а «-» – коли на зовнішню);  $l_p$  і  $l^p$  – довжини зовнішньої та внутрішньої пластичних зон.  $\Phi^{(1)}$  і  $\Phi^{(2)}$  – невідомі розтягуюче зусилля і згинальний момент, які діють в пластичних зонах, і задовольняють умові пластичності для ортотропних тіл [1]:

$$((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_\tau^2)((\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_\tau^2)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_\tau^2) = 0, \quad (3)$$

де  $\sigma_i (i = \overline{1,3})$  - головні значення тензора напружень,  $\sigma_\tau$  - границя текучості матеріалу.

Будемо надалі вважати, що відстань між тріщинами настільки мала, що увесь проміжок  $|s| \leq d - l$  знаходиться в стані пластичної течії. Тоді замість тріщин довжиною  $2l$  можна ввести нову фіктивну тріщину довжиною  $2l_1$  ( $l_1 = d + l + l_p$ ) і розв'язувати задачу про напружений стан пружної оболонки з наскрізною тріщиною невідомої довжини [2].

Задача зводиться до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Для числового розв'язання системи використовується метод механічних квадратур для СІР типу Коші у випадку, коли невідомі функції обмежені на кінцях проміжку інтегрування.

Досліджено вплив рівня навантаження, геометричних і механічних параметрів оболонки, довжини тріщин та відстані між ними на основні характеристики напружено-деформованого стану оболонки.

1. Композиционные материалы // Под ред. Браутман Л., Крок Р., Т. 2. Механика композиционных материалов. Под ред. Сендецки Дж. - М.: Мир, 1978. – 564 с.
2. Концентрация напряжений // Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодемьянского, В.П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т.7).
3. Николишин Т.М., Ростун М.Й. Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з двома поверхневими тріщинами // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 76-78.

#### DEFINITION IS ELASTIC - DEFORMED STATE ORTHOTROPIC SHELL WITH SYSTEM OF SURFACE CRACKS

*The definition problem of the deflected mode elastic - plastic orthotropic shell of arbitrary curvature with system of two collinear cracks is solved. The system singular the integrated equations which is solved numerically by the mechanical quadratures method is received. Influence of elastic and geometrical parameters of the shell and cracks on the basic characteristics of a stress state is investigated.*



УДК 539.3

## РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТРІЩИНИ В ОБМЕЖЕНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

**Зарицький С.В.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів*

Над розробкою теорії та методів розв'язування задач про напружено-деформований стан оболонок з тріщинами працювало багато вітчизняних та зарубіжних вчених. Більшість результатів отримано на основі методу інтегральних рівнянь[1]. Тут пропонується аналітично-числовий підхід до таких досліджень.

Розглянемо замкнуту циліндричну оболонку, серединна поверхня якої віднесена до циліндричної системи координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Оболонка ослаблена поздовжньою тріщиною  $|\alpha| < \alpha_0, \beta = 0$  ( $\alpha_0 = l_0/R$ ;  $2l_0$  - довжина тріщини,  $R$  – радіус серединної поверхні оболонки). Оболонка знаходиться під дією зовнішнього навантаження, симетричного відносно поверхні тріщини і до її берегів можуть бути прикладені самозрівноважені зусилля та моменти. В процесі деформації береги тріщини не контактують.

Напружено-деформований стан такої оболонки описується системою неоднорідних диференціальних рівнянь в переміщеннях наступного вигляду [2]:

$$L_{i1}u + L_{i2}v + L_{i3}w = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $L_{ij}$  - диференціальні оператори не вище четвертого порядку;  $u, v, w$  - компоненти переміщення серединної поверхні оболонки;  $f_i$  - диференціальні оператори, що діють на стрибки переміщень та кутів повороту.

Враховуючи  $2\pi$ -періодичність напружено-деформованого стану оболонки з тріщиною та симетричність навантаження відносно лінії  $\beta = 0$ , розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^*(\alpha) \cos(n\beta); \quad v(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} v_n^*(\alpha) \sin(n\beta);$$

$$w(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} w_n^*(\alpha) \cos(n\beta). \quad (2)$$

Підставивши ці співвідношення в систему (1) і прирівнявши коефіцієнти при косинусах та синусах, одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь восьмого порядку.

Для розв'язування отриманої системи функції  $u_n^*$  і  $v_n^*$  – представимо у вигляді многочлена третього порядку, а  $w_n^*$  – п'ятого порядку. Стрибки переміщень і кутів повороту подамо так:

$$[v] = \sqrt{1 - (x/\alpha_0)^2} \phi_1(x), \quad [\theta_2] = \sqrt{1 - (x/\alpha_0)^2} \phi_2(x),$$

де  $\phi_i(\alpha)$  - інтерполяційні поліноми Лагранжа за чебишевськими вузлами.

Доповнивши систему звичайних диференціальних рівнянь граничними умовами на контурі тріщини та торцях оболонки, задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Таким методом отримано результати для таких випадків закріплення країв оболонки:

1. з вільним кінцем оболонки на якому:

$$N_1 = 0, \quad S_{12} + \frac{2}{R} H_{12} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad M_1 = 0$$

2. з умовою, яка відповідає закріпленню оболонки на торці жорсткими шпангоутами, які можуть вільно переміщуватись вздовж осі оболонки:

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dl} = 0, \quad N_1 = 0.$$

3. з жорстко защемленим кінцем:

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \nu = 0, \quad \theta_2 = 0.$$

За певних значень геометричних параметрів розподіл напружень біля вершини тріщини мало відрізняються від відомих.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М. Напружено-деформований стан і гранична рівновага кусково-однорідних циліндричних оболонок з тріщинами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 60–74.
2. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.

#### DISTRIBUTION STRESSES NEAR A CRACK IN A LIMITED CYLINDRICAL SHELL

*A problem on the stress-strain state of a closed isotropic cylindrical shell weakened by a longitudinal through crack is reduced to a system of linear algebraic equation using the analytical-numerical method and spline functions. The numerical analysis of disturbed efforts and moments in the vicinity of a crack tip versus boundary conditions is carried out.*



УДК 539.3

## РІВНОВАГА ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ З П'ЯТЬМА ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИМИ КОМПЛАНАРНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА УМОВ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Кундрат А.М.

*Національний університет водного господарства та природокористування,  
м. Рівне, [riy1@ua.fm](mailto:riy1@ua.fm)*

Для збільшення проектної несучої здатності та жорсткості композитних тіл елементи арматури зв'язують в єдиний каркас. При цьому напруження і деформації в тілі істотно залежать від кількості та від геометрії розташування жорстких елементів. З огляду на високий рівень концентрації напружень поблизу таких неоднорідностей та на особливості розподілу полів напружень їх урахування потребує розвитку методики дослідження напруженого стану композицій, які містять в собі системи зв'язаних включень [1].

Розглядаємо пружний простір, армований п'ятьма компланарними тонкими абсолютно жорсткими включеннями-стрічками однакової ширини, зв'язаними в єдиний каркас та ідеально зчепленими з матрицею. Композиція знає поздовжнього зсуву стосовно включень, який спричиняється трьома способами навантаження: а) зсувними зусиллями, що прикладені на безмежності; б) шляхом витягування стрічок погонними силами, прикладеними безпосередньо до контурів включень; в) заданим взаємним зміщенням включень між собою. Разом зі сформульованою задачею розглядали класичний випадок незв'язаних стрічок без заданих взаємних зміщень, оскільки такий аналіз у літературі відсутній. Крайові задачі зведено до систем сингулярних інтегральних рівнянь з різними умовами єдиності розв'язку. Їх розв'язки будували чисельно методом механічних квадратур.

Проаналізовано розподіл стрибків напружень по ширині рівновіддалених включень. Отримано значення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у вершинах стрічок, значення головного вектора зусиль на кожному зі зв'язаних включень та описано пружні переміщення точок масиву. Результати таких розрахунків порівнювали з раніше поданими дослідженнями для тіла, підсиленого меншою кількістю стрічок [2]. Незмінною лишається принципова відмінність картини напружено-деформованого стану матриці зі з'єднаною стрічковою арматурою в спільний каркас порівняно з випадком розмежованого армування.

У разі симетричного зсуву на безмежності перпендикулярно до площини розташування включень розподіл напружень поблизу паралельних незсунутих включень подібний до випадку ізольованого прямолінійного включення з незначною кількісною поправкою, яка зменшує КІН при зближенні стрічок.

При несиметричному зсуві в площинах розташування включень зв'язаність включень якісно впливає на розв'язок задачі. Рухомі включення не вносять збурення в однорідне поле напружень, в той час як з'єднані елементи спричиняють значну концентрацію напружень, яка істотно зростає при взаємному віддаленні включень.

За витягування погонними силами при зближенні незв'язаних стрічок напруження у вершинах ненавантажених включень швидше зростають порівняно з навантаженими. При зближенні нерухомих стрічок спостерігаємо незначне зростання КІН у вершинах всіх включень з максимальними їх значеннями на крайніх дефектах. Найбільші напруження і переміщення отримуємо в системах двох, п'яти вільних стрічок при витягуванні лише одного включення. В класичному випадку незв'язаних включень при сталому головному векторі зусиль, прикладеному до системи, зменшення кількості включень, до яких прикладені зусилля з пропорційним збільшенням головного вектора зусиль на кожному, призводить до росту максимальних стрибків напружень на них, незалежно від відстані між стрічками. Для зв'язаних стрічок знаходили розподіл головного вектора зусиль між включеннями, що змінюється по-різному: при зменшенні відстані між стрічками на внутрішніх він зменшується і завжди менший порівняно з крайніми, в яких він зростає.

Стосовно попередньої напруженості найбільш небезпечним випадком в сенсі КІН та максимальних переміщень масиву є монтажне зміщення центрального включення стосовно інших. Як і в інших задачах для тіл з меншою кількістю стрічок їх зближення взаємно зміщених включень призводить до прогнозованого зростання напружень.

1. *Шацький І. П., Кундрат А. М.* Деформування пружних тіл зі зв'язаними жорсткими включеннями // Сучасні проблеми механіки та математики. – В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 55–56.
2. *Шацький І. П., Кундрат А. М.* Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 55–60.

#### **EQUILIBRIUM OF ELASTIC SPACE WITH FIVE INTERCONNECTED COMPLANAR INCLUSIONS SUBJECTED TO THE LONGITUDINAL SHEAR**

*The article is devoted to research of the stressed-strained state of elastic body with the system of reciprocally unmoved thin rigid inclusions subjected to the longitudinal shear. New boundary-value problems for antiplane strain of elastic space with the system of the five rigid ribbon-like complanar and connected in one framework inclusions are formulated. Numerical-analytical solutions of the problem are obtained for by the homogeneous field of stress at infinity and linear forces on contours of inclusions. Erection stress induced by the reciprocally moving of inclusions is described. The influence of inclusions connection on the stressed-strained state of composition is investigated.*

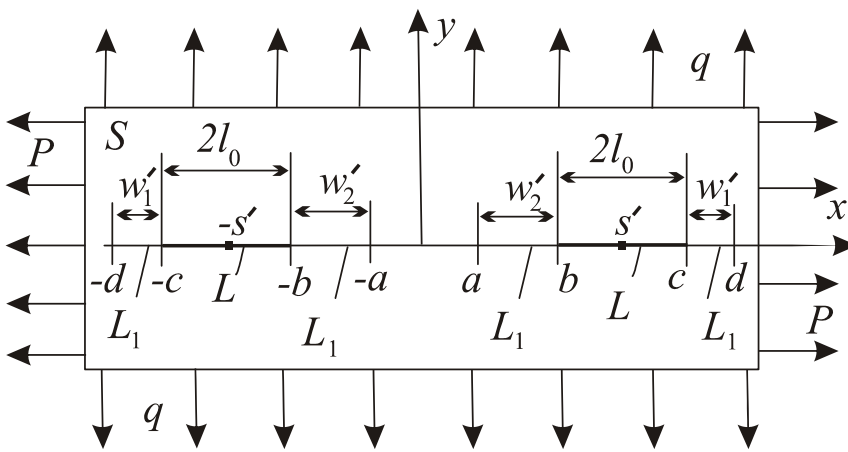
УДК 539.3

## ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇХ ВЕРШИН

Куротчин Л.Р.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ*

Розглянемо однорідну ізотропну пластину з двома рівними співвісними тріщинами завдовжки  $2l_0$ , береги яких вільні від навантаження, а біля їх вершин наявні пластичні зони  $w'_1$  та  $w'_2$  (рис. 1). Пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності  $P$ ,  $q$ . Згідно з  $\delta_c$ -моделлю заміни-



Рис

мо пластичні зони поверхніми розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на пружний об'єм –

нормальними напруженнями  $\sigma_0$ , які задовольняють певну умову пластичності.

Введемо декартову систему координат  $Oxy$  так, щоб тріщини були симетричні відносно початку координат і знаходилися на осі  $Ox$ . Области, де розміщені тріщини позначимо через  $L$ , а їх пластичні зони через  $L_1$ . Абсциси вершин правої тріщини позначимо через  $b$  і  $c$ , а пластичних зон біля неї – через  $a$  і  $d$  (рис. 1).

Згідно постановки задачі маємо такі крайові умови

$$\sigma_y^\pm = 0, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L_1, \quad (2)$$

де  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень.

За допомогою методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі сформульовану задачу зведено до задач лінійного спряження, на основі розв'язку яких отримано два

трансцендентні рівняння для знаходження довжин пластичних зон, які розв'язано числово за допомогою методу ітерації і досліджено залежність довжини пластичних зон та розкриття тріщин від віддалі між ними та навантаження. Також побудовано графічні залежності для розкриттів тріщин.

Згідно умови пластичності Треска-Сен-Венана знаходимо  $\sigma_0 = \sigma_T$ , коли  $P < q$ , і  $\sigma_0 = \sigma_T - P + q$  в протилежному випадку, тобто  $\sigma_0 < \sigma_T$ , де  $\sigma_T$  – границя текучості матеріалу. Якщо скористатися умовою пластичності Мізеса, то одержимо рівняння

$$\sigma_0^2 + \sigma_0(P - q) + (P - q)^2 = \sigma_T^2.$$

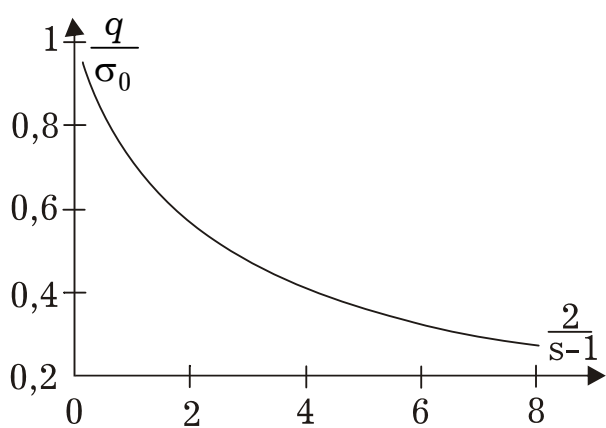


Рис. 2

На рис. 2 дається графічна залежність зведеного навантаження від приведеної відстані між центрами тріщин  $s = s'/l_0$ , за умови злиття внутрішніх пластичних зон. Ця графічна залежність співпадає з відповідними результатами праці Витвицького П. М., які отримані іншим шляхом, в припущенні, що комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі були необмежені на кінцях тріщини. Також співпадають відповідні аналітичні залежності.

1. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук І.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. - Киев: Наук. Думка, 1989. – 248 с.

#### TWO-AXIAL EXTENSION OF A PLATE WITH TWO SYMMETRIC CRACKS WITH ACCOUNT FOR PLASTIC ZONES NEAR THEIR TIPS

*The work studies a homogeneous isotropic plate with two equal cracks located on one straight line. The plate is extended by efforts at infinity, normal to the crack line. It is assumed that the crack edges are load-free and plastic zones originate near the crack tips. The solution of the problem is reduced to the problems of linear conjugation using the Kolosov-Muskhelishvili complex-potential method. The dependences to define the plastic zones and crack opening are found. The numerical analysis of dependence of the plastic zones and crack opening on the distance between the cracks is carried out.*





УДК 539.3

## МОДЕЛЮВАННЯ ЗАКРИТТЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН ПРИ ЗГІНІ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Маковійчук М.В.

*Івано-Франківський сектор ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
[makoviy@ua.fm](mailto:makoviy@ua.fm)*

Розглядається підкріплена пружною основою Вінклера ізотропна сферична оболонка з двома наскрізними прямолінійними тріщинами, що розташовані вздовж меридіана. До обидвох берегів тріщин прикладено самозрівноважене рівномірно розподілене згинальне навантаження. Решта поверхонь оболонки, включаючи безмежно віддалені точки, вільні від напружень. Досліджується вплив контакту берегів тріщин на напружено-деформований стан та граничну рівновагу оболонки залежно від параметра жорсткості основи та від взаємного розташування дефектів.

Задачі сформульовано у двовимірній постановці без урахування та з урахуванням закриття берегів тріщин на основі моделі контакту вздовж лінії на одній з лицьових поверхонь оболонки [1, 2].

Розв'язки крайових задач побудовано за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та числової процедури методу квадратур. За знайденими функціями стрибків переміщень та кутів повороту нормалі підраховано коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефектів та розподіл контактної реакції по довжині тріщин. Із енергетичного критерію руйнування при комбінованому розтязі-згині встановлено граничні значення навантажень, при яких розпочинається поширення тріщин. Для фіксованих значень параметра жорсткості основи побудовано графічні залежності отриманих результатів від параметрів кривини оболонки та відносної віддалі між колінеарними тріщинами.

1. *Шацький І. П.* Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 2. – С. 26–29.
2. *Маковійчук М. В.* Згин пологої сферичної оболонки на пружній основі з урахуванням контакту берегів тріщини // Машинознавство. – 2004. – № 10. – С. 12–15.

### MODELING OF COLLINEAR CRACKS CLOSURE UNDER BENDING OF SPHERICAL SHELL ON ELASTIC FOUNDATION

*The problem of bending of shallow spherical shell with two collinear cracks on elastic foundation in two-dimensional statement is considered. Crack closure is described using the model of contact along a line in one of two shell surfaces.*

УДК 539.3

## РОЗРІЗ З ШАРНІРНО З'ЄДНАНИМИ БЕРЕГАМИ У ПЛАСТИНІ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Маковічук М.В.<sup>1</sup>, Щербій А.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Івано-Франківський сектор ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, [makoviy@ua.fm](mailto:makoviy@ua.fm), <sup>2</sup>ВАТ „Івано-Франківський арматурний завод”, [shch\\_andrew@ukr.net](mailto:shch_andrew@ukr.net)

У двовимірній постановці досліджується напружено-деформований стан та гранична рівновага пластини з прямолінійним розрізом, яка підкріплена гнучким покриттям та контактує з пружною основою Вінклера. Тріщина в пластині з одностороннім гнучким покриттям моделюється розрізом з ексцентрично шарнірно з'єднаними берегами [1]. Сформулювали крайову задачу для рівнянь плоского напруженого стану та згину пластини на пружній основі із взаємозв'язаними умовами розтягу-згину на лінії розрізу:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\varphi &= 0, \quad D\Delta\Delta w + kw = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \\ [u_y] - sh[\theta_y] &= 0, \quad M_y - shN_y = 0, \quad x \in L; \\ N_x^\infty = N_{xy}^\infty &= 0, \quad N_y^\infty = p; \quad M_x^\infty = M_{xy}^\infty = M_y^\infty = 0.\end{aligned}$$

Тут  $\varphi$  – функція напружень,  $w$  – прогин пластини;  $[u_y]$ ,  $[\theta_y]$  – розриви переміщення та кута повороту нормалі;  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  – мембранні зусилля та згинні моменти;  $D$  – згинна жорсткість,  $h$  – півтовщина пластини;  $k$  – коефіцієнт постелі;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $L$  – контур тріщини;  $s=1$  або  $s=-1$ .

Поставлену задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння для функції стрибка переміщень на лінії розрізу. На підставі асимптотичних та числових розв'язків досліджено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефекту та розподілу зусиль у шарнірному з'єднанні від параметра жорсткості основи. Для оцінки впливу гнучкого покриття на граничний стан пластини з тріщиною використано комбінований критерій руйнування, який враховує порушення цілісності покриття та розповсюдження тріщини в пластині.

1. *Шацький І. П.* Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 42–47.

### CUT WITH THE SWING JOINT OF EDGES IN PLATE ON ELASTIC FOUNDATION

*The stressed state and limit equilibrium of cracked plate which is supported by flexible covering and contacted with Winkler foundation in two-dimensional statement has been investigated. Crack in a plate with flexible covering is designed by a cut with the eccentrically swing joint of edges.*

УДК 539.3

## КОНФІГУРАЦІЇ БАГАТОКЛИНОВИХ СИСТЕМ, ПРИ ЯКИХ МОЖЛИВЕ АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Махоркін М.І.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, [mahorkin@ukr.net](mailto:mahorkin@ukr.net)

При проектуванні різного роду споруд та механізмів часто трапляються випадки, коли декілька різнорідних елементів з'єднуються в одній точці. Як видно з практики, такі з'єднання переважно і стають осередками зародження тріщин, що в результаті призводять до виходу з експлуатації механізмів та руйнування систем в цілому. Саме тому такою важливою є задача з'ясування характеристик напруженого стану в околі точок сходження декілька матеріалів (в подальшому називатимемо їх особливими) та прогнозування міцності механічних систем, що містять ці точки.

Дослідження поведінки сингулярного поля напружень в околі особливих точок здійснюють, як правило, на модельних областях, переважно на багатоклинових системах (див. огляд [1]). При вивченні напружено-деформованого стану в околі особливих точок багатоклинових систем виникає необхідність розв'язування так званого характеристичного рівняння. Корені цього рівняння дають змогу записати асимптотики поля напружень в згаданому околі та визначити порядок сингулярності. Якщо в дослідженнях для розв'язування диференціальних рівнянь використовують перетворення Мелліна ці ж корені необхідні для знаходження оригіналів розв'язків.

Оскільки характеристичні рівняння є в загальному випадку трансцендентними, то визначити всі їхні корені (включаючи і комплексні) є доволі проблематично. Саме тому значний інтерес становлять ті конфігурації систем, за яких можливим є аналітичний розв'язок характеристичного рівняння.

Використовуючи методику постановки узагальненої задачі спряження для багатоклинових систем [1], записано загальний вигляд характеристичних рівнянь для складеного з довільної кількості елементів багатоклинового композиту, що перебуває за умов антиплоскої деформації, залежно від типу крайової задачі. Внаслідок аналізу загального вигляду характеристичних рівнянь з'ясовано, що в низці випадків вони значно спрощуються і є можливим знайти їх розв'язок аналітично і при цьому визначити усі корені як дійсні так і уявні. Наприклад, у випадку системи, складеної із трьох клинів з кутами розхилу  $\alpha_i = 2\pi/3$  та тонкого дефекту типу тріщини, що виходить у точку сходження клинів (рис. 1а), одержано таке рівняння для першої крайової задачі теорії пружності:

$$q \sin \frac{2\pi q}{3} \left[ 1 + k_1 + k_3(1 - k_1) + (1 + k_1)(1 + k_3) \cos \frac{4\pi q}{3} \right] = 0,$$

$$k_1 = \mu_1 / \mu_2, \quad k_3 = \mu_3 / \mu_2,$$

дійсні корені якого визначаються співвідношеннями

$$q_{1n} = \pm \frac{3}{4\pi} \arccos \left( \frac{(k_1 - 1)k_3 - k_1 - 1}{(1 + k_1)(1 + k_3)} \right) + \frac{3n}{2}, \quad q_{2n} = \frac{3n}{2};$$

Аналогічні вирази отримано для конфігурацій поданих на рис. 1 а-в за умов основних задач теорії пружності на поверхнях системи та за умов ідеального контакту цих поверхонь (для систем поданих на рис. 1 а, в).

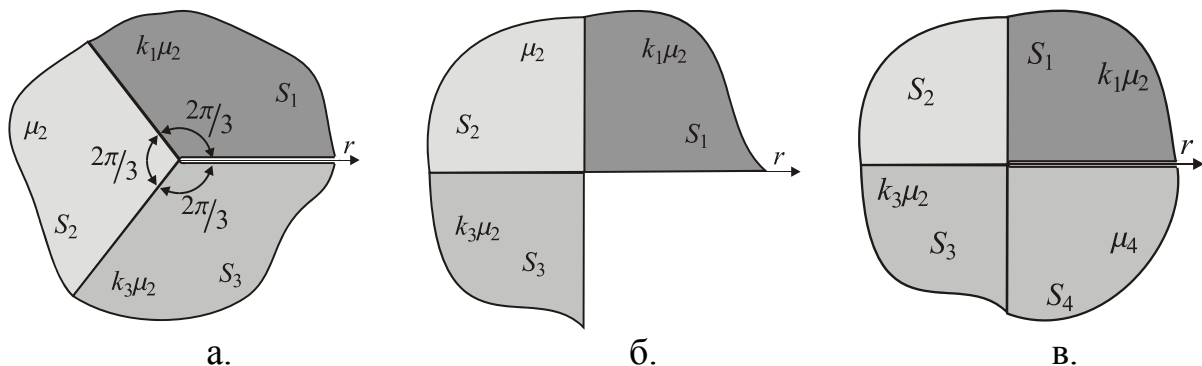


Рис. 1. Приклади систем для яких можливе аналітичне розв'язування характеристичного рівняння

На основі отриманих результатів проаналізовано сингулярну поведінку напружень поблизу дефекту в системі зображеній на рис. 1а. Вивчено розподіл потенціальної енергії деформації, що дало змогу застосовувати енергетичні критерії руйнування щодо цієї системи. Окрім того, коли відоме зображення за Мелліном поля напружень у котрійсь із систем рис. 1 а-в, використання отриманих результатів та теореми про лишки дає змогу з'ясувати точну картину розподілу поля напружень у всій клиновій системі.

1. Сулим Г.Т., Махоркін М.І. Асимптотики полів напружень і переміщень у клинових системах при плоскому напруженому стані // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2007. – 50, № 1. – С. 140–148.

#### CONFIGURATIONS OF MULTIWEDGE SYSTEMS FOR WHICH ANALITIC SOLUTION OF CHARACTERISTIC EQUATIONS IS POSSIBLE

*Configurations of multiwedge systems the geometric characteristics of which make it possible to find the analitic solutions of characteristic equation are described.*

УДК 621.319:519.22

## МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ

Мацько І.Й., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Яворський І.М.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, м. Львів,  
 Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, м. Бидгощ,  
 Польща, [ivanmatsko@ipm.lviv.ua](mailto:ivanmatsko@ipm.lviv.ua), [kravets@ipm.lviv.ua](mailto:kravets@ipm.lviv.ua), [abzac@ipm.lviv.ua](mailto:abzac@ipm.lviv.ua)

При дослідженні вібраційного відгуку складних механічних вузлів обертових та коливних систем елементи системи розглядають як сукупність елементарних частин, які взаємодіють між собою. Причому в першому наближенні для опису їх взаємодії достатньо використати диференційні рівняння 2-го порядку [1]. Наявність дефектів у системі призводить до зміни параметрів цих диференційних рівнянь і, як результат, до зміни вібраційного відгуку.

Впродовж дії зовнішньої сили тріщина періодично відкривається та закривається. У випадку закритої тріщини деталь поводить себе так, ніби тріщина відсутня, і її жорсткість є такою ж, як і у випадку бездефектної деталі. Проте, коли тріщина відкрита, то жорсткість деталі зменшується (рис. 1).

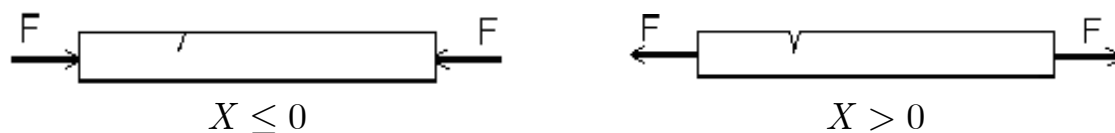


Рис. 1. Поведінка прямокутної деталі з тріщиною при циклічному навантаженні.

Враховуючи це, таку коливну систему можна описати з допомогою системи диференціальних рівнянь другого порядку [1, 2]:

$$\begin{cases} X'' + 2\beta_c X' + \omega_c^2 X = f(t), X \leq 0, \\ X'' + 2\beta_s X' + \omega_s^2 X = f(t), X > 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\beta_c = k_c / 2m$ ,  $\beta_s = k_s / 2m$ , де  $k_c$ ,  $k_s$  – коефіцієнти жорсткості деталі, коли тріщина замкнута та відкрита відповідно.  $\omega_c$ ,  $\omega_s$  – власні частоти коливань деталі в моменти часу, коли тріщина замкнута та відкрита відповідно,  $m$  – зведена маса деталі. Тобто, тріщина в елементі системи призводить до моделі вібрації, побудованої на системі нелінійних диференційних рівнянь.

Метою даної роботи є дослідження впливу наявності тріщини на характеристики вібраційного відгуку від прямокутної балки, на яку діє сума гармонічної і стохастичної сил. Легко отримати співвідношення, що зв'язує відносну довжину тріщини зі зміною жорсткості балки:

$$\frac{\Delta k}{k_c} \approx \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

де  $\Delta l$  – довжина тріщини,  $l$  – розмір деталі в напрямку росту тріщини. Жорсткість деталі в момент, коли тріщина є відкритою, рівна  $k_s = k_c - \Delta k$ .

Власна частота коливань деталі без тріщини обчислюється за відомою формулою

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m}}. \quad (3)$$

Власну частоту коливань деталі при відкритій тріщині можна виразити через власну частоту коливань не тріснутої деталі наступним чином

$$\omega_s = \omega_c \frac{2\sqrt{1 - \frac{\Delta k}{k}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta k}{k}}}. \quad (4)$$

Використовуючи методи математичного моделювання та значення власних частот (3) і (4), симульовано ряд вібраційних відгуків від деталі з різною відносною довжиною тріщини, яка вибиралась в межах  $\Delta l / l = 0 \dots 0,90$ . Аналізуючи отримані симульовані сигнали методами періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) [3] було показано, що з ростом тріщини змінюються їх імовірнісні характеристики. Причому вібраційний відгук від дефектної деталі, на яку діє змінна сила, можна описати моделлю у вигляді періодично корельованого випадкового процесу.

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.
2. Гельман Л.М., Зиньковський Ю.Ф., Петрунин И.В. Эффективность использования действительной и мнимой составляющих преобразования Фурье для диагностики усталостных трещин // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. - № 3, – 2001, - с. 21-23.
3. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворський И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 319 с.

#### THE MODELING OF CRACKED ELASTIC PLATE OSCILATION

*The numbers of cracked detail vibration responses with different relative crack size were simulated using mathematical modeling methods and natural frequencies values. The obtained simulated signals analysis using periodically correlated random processes (PCRP) methods shows their probabilistic characteristics change if crack size increases.*



УДК 539.3

## ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ НАСКРІЗНИХ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Опанасович В.К., Яцик І.М.

Львівський національний університет імені Івана Франка, [IhorYatsyk@i.ua](mailto:IhorYatsyk@i.ua)

Досліджується задача про згин рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини завтовшки  $2h$  з періодичною системою тріщин завдовжки  $2l$ , які розміщені на спільній прямій. Відстань між центрами сусідніх тріщин дорівнює  $2d$  (див. рис. 1). Вважається, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщин зазнають гладкого контакту за всією довжиною вздовж двовимірної області постійної ширини  $h_1$  поблизу верхньої основи пластини, причому до деформування пластини береги тріщин були вільними від зовнішнього навантаження.

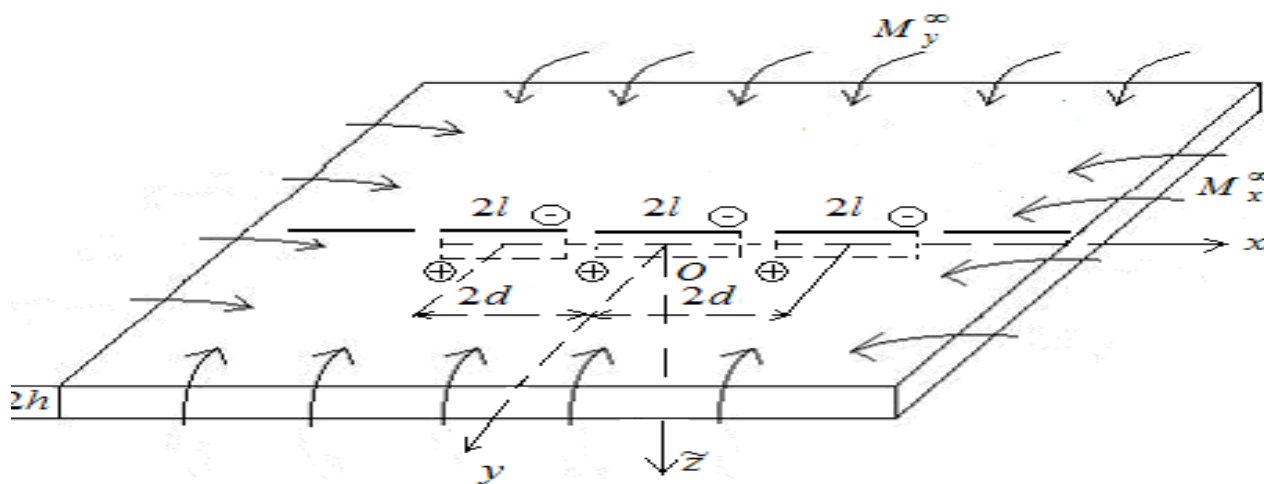


Рис. 1. Пластина з тріщинами

Виберемо декартову систему координат  $Oxyz$  з координатною площиною  $Oxy$  у серединній площині пластини з початком координат  $O$  у центрі однієї з тріщин, спрямувавши вісь  $Ox$  вздовж тріщин. Відрізки дійсної осі  $Ox$   $[-l - 2dk, l + 2dk]$  позначимо відповідно через  $L_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), контактне зусилля між берегами  $k$ -ої тріщини – через  $N_k$  ( $N_k > 0$ ), а розподілені згинальні моменти на нескінченності, прикладені до пластини, – через  $M_x^\infty$ ,  $M_y^\infty$ .



З урахуванням контакту берегів тріщин розв'язок задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно постановки задачі на берегах  $k$ -ої тріщини маємо такі крайові умови

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N_k / (2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k,$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_k, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k,$$

$$M_k = \beta h N_k, \quad \partial_x [v_{II}] + \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad x \in L_k,$$

де  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  та  $v_{II}$  – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь  $Oy$  у плоскій задачі,  $\varphi_y$  – усереднений по товщині пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину;  $M_y$  – згинальний момент,  $Q_y$  і  $H_{xy}$  – поперечна сила і крутний момент відповідно;  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $[f] = f^+ - f^-$ ; значками «+» і «-» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщин при  $y \rightarrow \pm 0$ ;  $\alpha = \{1 + (1 - \gamma)^2\} / 2$ ,  $\beta = 1 - \gamma/3$  і  $\gamma = h_1/h$  – приведена ширина області контакту.

На основі методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно усередненого по товщині пластини кута повороту нормалі до серединної площини пластини, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. У часткових випадках отримано відомі в літературі результати розв'язку задач згину пластин з паралельною системою тріщин, коли контакт відбувається по лінії на одній з основ пластини. Проведено числовий аналіз випадків задачі та побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності моментів при різних параметрах задачі.

#### **BENDING OF THE REYSSNER'S PLATE WITH THROUGH-THE-THICKNESS COLLINEAR CRACKS PERIODIC SYSTEM TAKING INTO ACCOUNT CONTACT REGION WIDTH OF THEIR FACES**

*In the paper stressedly-deformed state of the boundless isotropic plate with collinear cracks periodic system is investigated which faces are free of the external loading. The plate is under the loading by the evenly distributed bending moments on the infinity. It is assumed that the cracks faces come in the smooth contact on all cracks length on a two-dimensional region on overhead basis of plate. The numerical analysis of the problem solution is conducted and is built graphic dependences for the contact effort and moment intensity factors.*



УДК 539.375

## РОЗВИТОК ПОЧАТКОВОЇ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ КУТОВОЇ ТОЧКИ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА

Поліщук Т.В.

Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,  
*polischuk\_t@ukr.net*

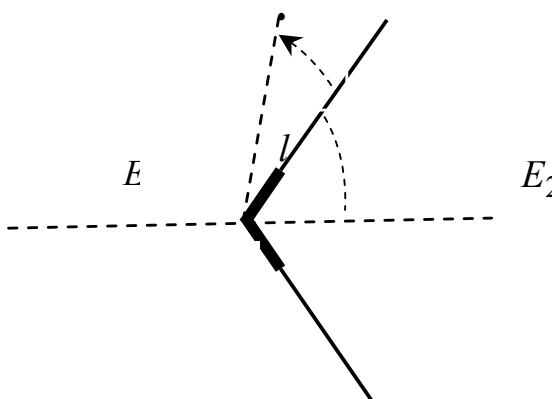
Здійснюється розрахунок зони передруйнування в кусково-однорідному ізотропному пружному тілі у кутівій точці межі поділу двох середовищ в умовах симетричної задачі.

Кусково-однорідне тіло, що знаходиться в умовах плоскої деформації, складене з різних однорідних частин, які з'єднані між собою тонким шаром. Пружний матеріал шару є більш крихким, ніж матеріали вказаних частин.

Зі зростанням зовнішнього навантаження біля кутівій точки межі поділу середовищ, з'являється і розвивається зона передруйнування у вигляді пари вузьких смужок, які виходять з даної точки і розташовані на цій межі. Будемо вивчати лише початкову стадію розвитку зони передруйнування. Тоді її розмір є значно меншим, ніж розміри тіла.

Оскільки з'єднуючий матеріал є пружним, переважні деформації у зоні передруйнування розвиваються за механізмом відриву. Тому смужку-зону моделюватимемо лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює заданій сталій з'єднуючого матеріалу  $\sigma$ .

З урахуванням малості зони передруйнування з метою визначення її довжини приходимо до задачі лінійної теорії пружності для кусково-однорідної площини з розрізами (рисунок).



На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без розрізів, що породжується єдиним на інтервалі  $]-1;0[$  коренем  $\lambda$  її характеристичного рівняння. Довільна стала  $C$ , яка входить в указаний розв'язок, вважається заданою.

Для побудови розв'язку задачі (рисунок) використовується метод Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [1-3]. Вона зводиться до функціонального рівняння Вінера-Хопфа у смужі комплексної площини, яка містить уявну вісь, що має вигляд:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+\lambda+1} = G(p)\Phi^-(p), \quad (1)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$\sigma_1 = -Cg(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) l^{\lambda(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)}, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}$$

( $\langle a \rangle$  - стрибок  $a$ ;  $g$  - відома функція).

Факторизація коефіцієнта  $G(p)$  рівняння (1) на уявній осі здійснюється шляхом розщеплення цього коефіцієнта на функцію, яка факторизується за допомогою гамма-функцій, і функцію, яка факторизується за формулою Гахова.

З використанням цих факторизацій, принципу аналітичного продовження, теореми Ліувілля, деяких інших положень теорії функцій комплексної змінної будується точний розв'язок рівняння (1), який виражається через інтеграли типу Коші і гамма-функції. Виводиться формула для коефіцієнта інтенсивності напружень в кінці розрізу.

Довжина зони передруйнування визначається з умови обмеженості напружень біля кінця лінії розриву нормального переміщення, тобто з умови рівності нулю коефіцієнта інтенсивності напружень.

Має місце наступна формула для визначення довжини  $2l$  зони передруйнування:

$$l = L(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \left( \frac{|C|}{\sigma} \right)^{-1/\lambda(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)} \quad (2)$$

( $L$  - відома функція). Формула (2) встановлює закон розвитку початкової зони передруйнування біля кутової точки кусково-однорідного пружного тіла.

1. Кипнис Л. А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, № 2. – С. 334-336.
2. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

#### DEVELOPMENT OF INITIAL PREFRACTURE ZONE NEAR THE CORNER POINT OF PIECE-HOMOGENEOUS ELASTIC BODY

*The symmetric problem on calculation of a prefracture zone at the corner point of piece-homogeneous isotropic body is considered. An exact solution of the corresponding problem of linear theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method.*

УДК 539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ З В'ЯЗКО-ПРУЖНИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Ревенко Андріан

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів*

Розв'язано задачу визначення напружено-деформованого стану (НДС) для ізотропної пружної пластини з тонким в'язко-пружним включенням. Загальний НДС пластини з включенням подано у вигляді суми основного і збуреного станів. Основний напружений стан пластини визначається заданим розподілом напружень на нескінченості, збурений враховує наявність включення. Врахувавши малу товщину включення, крайову задачу зведено до розв'язування сингулярного інтегро-диференційного рівняння відносно переміщень точок поверхні включення. Аналітичний розв'язок одержаного рівняння отримано у випадку включення еліптичної форми.

Детально досліджено НДС пластинки з еліптичним включенням, реологічні властивості якого описуються матеріалом Максвелла.

### CALCULATION OF STRESSES IN AN ELASTIC BODY WITH VISCO-ELASTIC THIN INCLUSION

*The problem of determination of the stress-strain state (SSS) in an elastic plate with visco-elastic thin inclusion is solved. The stress-strain state is determined in the form of a sum of the principal and perturbed states. The principal state of plate is determined by main stress distribution on the infinity, perturbed is accounted existence thin inclusion. It is considered small thickness of the inclusion. Boundary condition is reduced by solve singular integro-differential equation relative displacement point of the surface inclusion. Analytical solution of this equation is received for ellipse-like inclusion. The stress-strain state (SSS) of a plate with ellipse-like thin inclusion is investigated in details. Flow characteristics of the inclusion are described by a material of Maxwell.*



УДК 539.3

## ОСЕСИМЕТРИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ТІЛА З ДИСКОПОДІБНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Юхим Р.Я.

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів,  
e-mail : [romashka@ipm.lviv.ua](mailto:romashka@ipm.lviv.ua)

Розглядається задача про розтяг на нескінченності зусиллями інтенсивності  $p$  необмеженого пружно-пластичного тіла, що містить тонке пружне включення, яке характеризується модулем пружності  $E_1$  та геометричними параметрами  $2a, 2c$  ( $a \gg c$ ).

З ростом навантаження в околі включення формується зона, де матеріал деформується за межі пружності. Враховуючи симетрію задачі припускаємо, що пластична зона буде мати форму, проекція якої на площину  $z = 0$  є кільцем з радіусами  $a$  та  $R$ .

Розв'язок задачі про включення з пластичною зоною в його околі зводимо до наступної крайової задачі для півпростору  $z > 0$ :

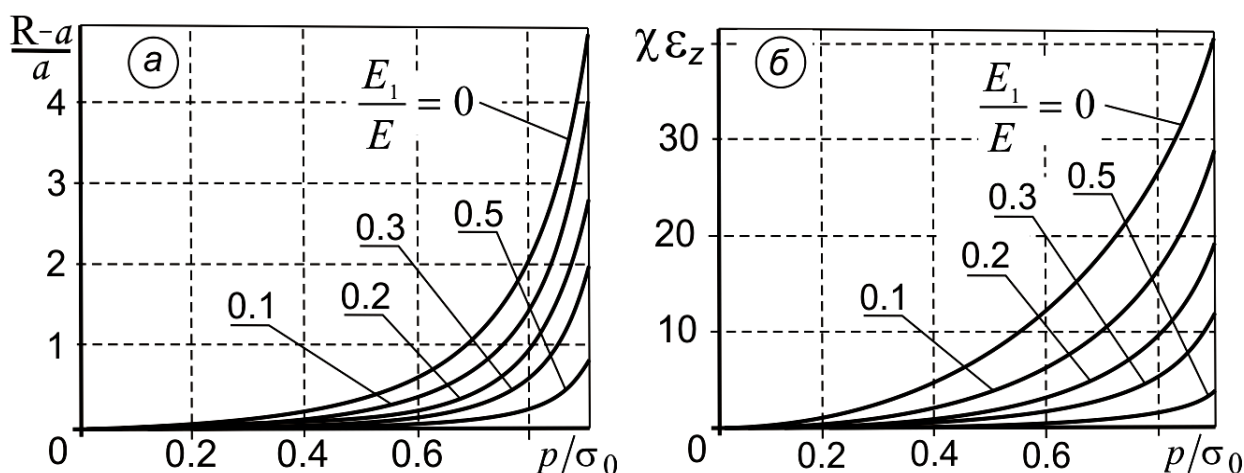
$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= 0, \quad 0 \leq r < \infty; \\ \sigma_{zz} &= -p + \left( p\varepsilon + u_z E_1 / h(r) \right) \cdot H(a - r) + \sigma_0 \cdot H(r - a), \quad 0 \leq r < R; \\ u_z &= 0, \quad R < r < \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\varepsilon = E_1/E$  – відносна жорсткість включення,  $E$  – модуль пружності основного матеріалу;  $H(r)$  – функція Гевісайда;  $\sigma_0 = (\sigma_T + \sigma_B)/2$ ;  $\sigma_T$  – границя текучості;  $\sigma_B$  – границя міцності;  $2h(r)$  – товщина включення.

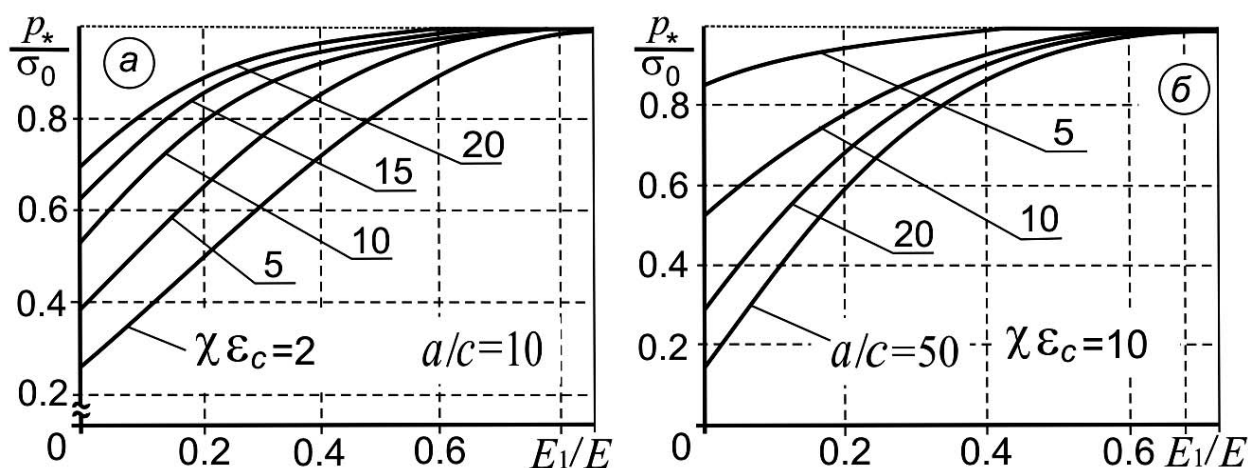
З використанням гармонічних функцій та інтегральних перетворень Ганкеля крайова задача зводиться до розв'язування наступного сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля відносно невідомих переміщень поверхонь включення  $u_z$

$$\int_{-R}^R \frac{u'_z(t) dt}{t-r} = \frac{\pi(1-\nu^2)}{4E} \left[ -p + \left( p\varepsilon + \frac{u_z(r)}{h(r)} E_1 \right) \cdot H(a - |r|) + \sigma_0 \cdot H(|r| - a) \right], \quad |r| < R. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння здійснюємо чисельно методом механічних квадратур. Нижче у вигляді графіків наведені результати числового аналізу обчислень рівняння (2). Встановлено розміри пластичної зони біля включення (а), деформацію у включенні та в пластичній зоні в околі включення (б) ( $a/c = 10$ ,  $\chi = E/\sigma_0$ ).



На основі деформаційного критерію  $\varepsilon_z = \varepsilon_c$  встановлено граничне навантаження, що приводить до руйнування в околі включення.



**Висновки.** Встановлено параметри, від яких залежить міцність пружно-пластичного тіла з включенням. Виявлено, що такими є геометричні параметри дефектів та їх відносна жорсткість. Побудовано графічні залежності міцності тіла з включеннями різної жорсткості та форми.

**AXISYMMETRICAL DEFORMATION ELASTIC-PLASTIC BODY WITH DISC-LIKE ELASTIC INCLUSION**

*The model of deforming and fracture of elastic-plastic body with elastic disc-like inclusion is proposed. A problem is taken to decision singular integral-differential equation with the kernel Koshi. The numeral decision of equation is got. The set basic parameters which influence on the process of local destruction has been established.*



## СЕКЦІЯ 4. “ПРОБЛЕМИ КОНТАКТНОЇ МЕХАНІКИ ТА КОНТАКТНО-ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА”

УДК 539.3

### ПРО НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖОВИХ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

**Бобик Богдан**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, [bodiagajata@gmail.com](mailto:bodiagajata@gmail.com)*

Розвиток методів розв’язування задач параметричної ідентифікації теплових процесів в деформівних твердих тілах є складною і водночас актуальною проблемою [1]. Додаткові труднощі розв’язування таких задач зумовлюються дискретністю вимірів за часом температури і неминучістю їх похибок. Як відомо, обернені задачі теплопровідності, до яких належать задачі параметричної ідентифікації, є чутливими до похибок вимірювань, що в математичному плані проявляється у їх нестійкості щодо вхідних даних [1, 2]. Намагання покращити ситуацію збільшенням об’єму вхідної інформації за допомогою подрібнення часових інтервалів часто спричинює зворотній ефект – посилює нестійкість розв’язків [2]. Для розв’язування обернених задач запропоновано різні методи [1, 2, 3, 4], значну частину яких складають числові. Однак має свою перевагу поєднання аналітичних і числових методів [3, 4].

На основі методики [5, 6] розщеплення гранично-контактних умов і побудови спеціальних структур розв’язків крайових задач з подальшим зведенням їх до інтегральних рівнянь Вольтерри на невідомі межові функції запропоновано наближений метод знаходження розв’язків задач теплопровідності в циліндричних тілах. Для розв’язання інтегральних рівнянь використовується наближення операційного числення, що дає змогу одержати доволі прості вирази для шуканих межових функцій. Вважаючи ці функції відомими, за допомогою одержаних наближених співвідношень можна знайти невідомі межові параметри. Вигляд цих співвідношень, зокрема явне входження в них теплофізичних параметрів, дає можливість обчислювати значення невідомих характеристик тіла безпосередньо в режимі „реального часу”, а не після закінчення теплових процесів.

Визначення в такий спосіб межових теплофізичних параметрів проілюстровано на прикладі задачі про нагрів довгого циліндра довкіллям. На температуру поверхні циліндра  $\Phi(\tau)$  одержано інтегральне рівняння Воль-

терри другого роду [6]. Його наближений розв'язок, за використання наближень інтегралу типу згортки, має вигляд

$$\Phi(\tau) = 1 - \frac{Bi}{2} \cdot \left( \frac{Bi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma_k^2 \tau} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Тут  $Bi$  – критерій Біо,  $\gamma_k$  – нулі функції Бесселя  $J_0(x)$ .

Проаналізовано похибку обчислення  $\Phi(\tau)$  за наближеним виразом (1) в залежності від значень  $Bi$ . Встановлено проміжки зміни  $Bi$ , коли наближені значення температури перевищують такі, що отримані з аналітичного розв'язку, чи є меншими за них. Далі за знайденою з прямої задачі температурою поверхні циліндра, яку обчислюємо в окремі моменти часу, здійснюємо ідентифікацію параметра  $Bi$ . Одержані значення порівнюються з точним, яке використовувалось під час розв'язання прямої задачі.

Вираз, аналогічний до (1), отримано також для температури поверхні довгого циліндричного валу, який обертається в обоймі за тепловиділення від тертя на поверхні контакту. Досліджено зміну з часом температури поверхні. Вважаючи межову температуру виміряною в окремі моменти часу, знайдено коефіцієнт тепловіддачі з поверхні циліндра та коефіцієнт тертя. Здійснено порівняльний аналіз одержаних значень з точними, які обчислено під час комп'ютерної симуляції.

Наведене наближене обчислення температури тіл, що контактують, і їх межових теплофізичних характеристик можна застосовувати для випадку зміни останніх з часом.

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей // 4-й Минский междуна. форум по тепло- и массообмену, Минск 22-26 мая 2000. – Минск, 2000. – 3. – С. 3–13.
2. *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
3. *Кушнір Р.М., Ясінський А.В.* Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 55–61.
4. *Чекурін В.Ф., Процюк Б.В.* До ідентифікації параметрів багатошарових покривів за термопружними переміщеннями поверхні нагрівання // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 1. – С. 7–15.
5. *Швець Р.М., Яцків О.І.* Побудова розв'язку задачі механодифузії про двокомпонентне дифузійне насичення та напружений стан у шаруватому циліндрі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 3. – С. 91–102.
6. *Яцків О.І., Швець Р.М., Бобик Б.Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2007. – Вип. 5. – С. 186–194.

ABOUT APPROXIMATE IDENTIFICATION OF THE THERMAL BOUNDARY PARAMETERS OF CYLINDRICAL BODIES

*Approximate solutions to direct problems for cylinder that is heated by environment and for cylinder heated by the heat generation due to friction are obtained. When temperatures of the cylinder's boundaries are known at discrete moments of time identification of boundary thermal parameters and friction coefficient is performed.*



УДК 539.3

## **ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМУ УДЗАВИ ЗІ ЗМІННИМ ПАРАМЕТРОМ У ПЛОСКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ З ТЕРТЯМ**

**Бобильов О.О., Дробишева О.А.**

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, [abobylov@gmail.com](mailto:abobylov@gmail.com)*

Контактні задачі теорії пружності з односторонніми в'язями та врахуванням сил тертя є нелінійними задачами внаслідок наявності в їх формулюванні граничних умов у вигляді нерівностей. При постановці задач невідомими вважаються як області фактичного дотику тіл, так і ділянки їх зчеплення та взаємного проковзування.

Розповсюдженим підходом до розв'язання даного класу задач для тіл скінченних розмірів є використання варіаційного методу. В [1] показано, що розв'язання контактної задачі з тертям Амонтона у загальному випадку зводиться до розв'язання квазіваріаційної нерівності. Для її чисельного розв'язання використовується ітераційний алгоритм, який дозволяє звести розв'язання вихідної задачі до розв'язання послідовності варіаційних нерівностей з недиференційовними доданками, що зумовлені силами тертя. Отримано еквівалентні цим варіаційним нерівностям задачі мінімізації відповідного недиференційовного функціоналу на множині полів переміщень, що задовольняють умови непроникнення. В [2] задачі мінімізації зведено до проблеми відшукування сідлової точки, для розв'язання якої, як правило, використовується алгоритм Удзави. Застосування алгоритму Удзави дозволяє звести розв'язання вихідної контактної задачі з односторонніми в'язями за врахування сил тертя до розв'язання послідовності мішаних граничних задач теорії пружності, для чисельного розв'язання яких можуть бути використані різні обчислювальні методи, наприклад методи скінченних або граничних елементів.

Теоретична збіжність алгоритму Удзави при фіксованому значенні параметру (кроку) докладно досліджено в літературі, отримано оцінки для вибору значення параметру, що забезпечує збіжність алгоритму. Однак ці оцінки не дозволяють визначити оптимальне значення параметру. Враховуючи, що швидкість збіжності алгоритму з фіксованим параметром істотно залежить



від його обраного значення, при практичному використанні алгоритму Удзави вибір параметру провадиться переважно шляхом підбору. В [3] запропоновано алгоритм вибору послідовності значень параметру, що забезпечує збіжність алгоритму Удзави при розв'язанні контактних задач теорії пружності з ідеальними односторонніми в'язями незалежно від вибору початкового значення параметру. При цьому кінцеве значення параметру досить близько до його оптимального фіксованого значення.

В поданій роботі цей алгоритм узагальнено для контактних задач з односторонніми в'язями за наявності сил тертя. При його практичному застосуванні не потрібно проводити додаткових обчислювальних експериментів для підбору значення параметру алгоритму Удзави, що забезпечує прийнятну швидкість збіжності обчислювального алгоритму.

Розроблений обчислювальний алгоритм реалізовано у вигляді пакету прикладних програм. Для чисельного розв'язання мішаних граничних задач теорії пружності із заданими контактними зусиллями, що виникають на кожному кроці ітераційного алгоритму Удзави, використовувався метод скінченних елементів. Застосовувалися трикутні та чотирикутні елементи першого і другого порядків.

Для верифікації розробленого обчислювального алгоритму та програмного забезпечення проведено порівняння чисельних розв'язків модельних задач з результатами, отриманими за допомогою обчислювального алгоритму, запропонованого в [4]. Надано рекомендації практичного використання обчислювальних алгоритмів.

1. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с.
2. *Кравчук А. С.* Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Трение и износ. – 1981. – 2, № 4. – С. 589–595.
3. *Бобылёв А. А.* Применение алгоритма Удзавы с переменным параметром в задачах теории упругости с односторонними связями // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – № 6, вип. 8, Т. 1. – С. 130–137.
4. *Бобылёв А. А.* Алгоритм решения методом конечных элементов плоских контактных задач с трением Кулона // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 79–84.

APPLICATION OF UDZAWA'S ALGORITHM WITH THE VARIABLE PARAMETER IN  
PLANE CONTACT PROBLEMS WITH FRICTION

*The approach to numerical solving of unilateral plane elastic contact problems with friction is discussed. The computational procedure is based on Uzawa's algorithm with variable parameter. The algorithm for choice of parameter sequence is proposed which provides the convergence of Uzawa's algorithm for any initial value of parameter. Mixed elastic problems are solved by the finite element method on each step of Uzawa's algorithm.*



УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКИХ  
КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРУЖНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ НА  
ОСНОВІ КВАДРАТИЧНИХ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**Бобильов О.О., Іщук М.О.**

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, [abobylov@gmail.com](mailto:abobylov@gmail.com)*

Розповсюдженим підходом до розв'язання контактних задач з односторонніми в'язями є застосування варіаційних методів. Відомі формулювання варіаційних принципів для тіл скінченних розмірів, наприклад принципу мінімуму потенціальної енергії, містять інтеграли від шуканих функцій по всій області, що займає тіло. Такі варіаційні формулювання називають внутрішніми. Для їх дискретизації, як правило, використовується метод скінченних елементів (МСЕ). Недоліком використання МСЕ при розв'язанні задач для тіл з тріщинами є складність побудови нерівномірної сітки із згущенням елементів поблизу вершин криволінійних тріщин.

Альтернативний підхід до чисельної реалізації варіаційних методів полягає у використанні граничних варіаційних формулювань. Відмінність граничних формулювань від внутрішніх полягає у тому, що всі інтеграли від шуканих функцій обчислюються по границі області, що займає тіло, а множина допустимих функцій задовольняє всередині цієї області диференціальним рівнянням задачі.

Для дискретизації граничних варіаційних формулювань використовується метод граничних розв'язків. Ідея методу полягає у використанні координатних функцій інтегрованих фундаментальних розв'язків (ІФР), що точно задовольняють диференціальні рівняння задачі. Скінченновимірні простори ІФР можуть бути побудовані з використанням інтегральних подань розв'язку і методу граничних елементів (МГЕ). В поданій роботі використано два

підходи до побудови просторів ІФР для граничних формулювань як у переміщеннях [1], так і напруженнях [2].

В першому з них, що відповідає непрямим формулюванням МГЕ, як ІФР використовуються пружні потенціали простого чи подвійного шару. Другий підхід заснований на використанні формули Сомільяни та відповідає прямим формулюванням МГЕ. Відзначимо, що у всіх інтегральних поданнях розв'язку на тріщині розміщувався потенціал подвійного шару.

При чисельній реалізації МГЕ для дискретизації граничних інтегральних рівнянь застосовувався метод колокації та квадратичні трьохвузлові граничні елементи. На кожному елементі вибиралися дві точки колокації, розташовані симетрично між вузлами елемента. Обчислення регулярних інтегралів проводилося чисельно за допомогою квадратурних формул Гаусса, а для інтегралів, що мають особливості, побудовано спеціальні квадратурні формули, що враховують порядок особливості [3]. Розглянуто інтеграли зі слабкою особливістю логарифмічного типу, що обчислюються як невластиві, інтеграли із сильною особливістю, що визначаються у сенсі головного значення за Коші, та гіперсингулярні інтеграли, розглянуті у сенсі скінченної частини за Адамом.

Для чисельного розв'язання задач квадратичного програмування, отриманих в результаті дискретизації граничних варіаційних формулювань, застосовувався модифікований алгоритм методу спряжених градієнтів.

Розроблені обчислювальні алгоритми реалізовано у вигляді пакету прикладних програм для розв'язання контактних задач механіки руйнування. Для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) використовувались прямий та енергетичні методи. Досліджено вплив параметрів гранично-елементної сітки на точність визначення КІН.

Отримано чисельні розв'язки задач про контактну взаємодію пружних тіл з поверхневими та внутрішніми криволінійними тріщинами. Проведено порівняльний аналіз обчислювальної ефективності використання граничних елементів з постійною та квадратичною апроксимацією шуканих функцій. Надано рекомендації з практичного використання розроблених обчислювальних алгоритмів.

1. *Бобылёв А. А.* Граничные вариационные формулировки в перемещениях контактных задач для тел конечных размеров с трещинами // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д.: Навчальна книга, 1999.– Т. 5 – С. 16–29.
2. *Бобылёв А. А.* Граничные вариационные формулировки в напряжениях контактных задач для тел конечных размеров с трещинами // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д.: Навчальна книга, 1999.– Т. 6 – С. 35–49.
3. *Довгий С. О., Ліфанов І. К.* Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. – К.: Наукова думка, 2004. – 510 с.

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE ALGORITHMS OF SOLVING PLANE CONTACT PROBLEMS FOR ELASTIC BODIES WITH CRACKS ON THE BASE OF THE QUADRATIC BOUNDARY ELEMENTS

Plane contact problems for elastic finite bodies with cracks are considered. The boundary variational formulations are used for developing computational algorithms based on the quadratic boundary elements. Numerical results and recommendations for application of these algorithms are presented.

\* \* \* \* \*

УДК 539.3

ОСОБЛИВОСТІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ  
НЕОДНОРІДНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ ЗА КОНТАКТУ З  
ГЛАДКИМ ШТАМПОМ

Дмитрів М.І.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
НАН України, [mdmytriv@gmail.com](mailto:mdmytriv@gmail.com)

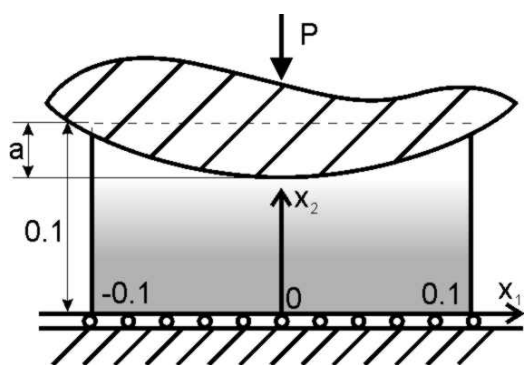


Рис. 1

Досліджується безфрикційна взаємодія абсолютно жорсткого параболичного штампа з пружним прямокутним тілом довжини 0.2 м і висоти 0.1 м (рис. 1) з ізотропно функціонально градієнтного матеріалу [1], в якого модуль Юнга є функцією однієї з координат, а коефіцієнт Пуассона сталий. Нижня грань прямокутника гладкозащемлена, бічні –

ненавантажені. Задається просідання штампа під дією прикладеної сили на глибину  $a$ . Розглядається випадок, коли штамп контактує з прямокутником вздовж всієї верхньої грані.

Поставлену задачу розв'язано методом скінченних елементів з використання неоднорідних елементів [2, 3].

Проведено аналіз розподілу напружень для чотирьох типів функціонально градієнтного матеріалу, модуль Юнга якого задано у вигляді:

$$E(x_1, x_2) = [2 + 3(x_2 / 0.1)^2] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (1)$$

$$E(x_1, x_2) = [2 + 3(1 - (x_2 / 0.1)^2)] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (2)$$

$$E(x_1, x_2) = [2 + 3(2x_1 / 0.1)^2] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (3)$$

$$E(x_1, x_2) = [2 + 3(1 - (2x_1 / 0.1)^2)] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (4)$$

при втисканні штампа на різну глибину.

Результати числових експериментів показали, що для випадків модуля Юнга (2)-(4) максимальні і мінімальні напруження не змінюють свого розташування в залежності від глибини просідання штампа. Якщо модуль Юнга має вигляд (1), то спостерігаються три різних випадки розташування екстремумів напружень у тілі в залежності від глибини просідання штампа.

Проаналізовано розподіл контактних напружень на верхній (рис. 2) та нижній гранях (рис. 3) для різної величини просідання штампа  $a$ , коли модуль Юнга задано формулою (1) і форма штампа описана кривою  $0.01x_1^2$  (суцільна лінія –  $a = 1.0 \cdot 10^{-4}$  м, штрихова –  $a = 5.0 \cdot 10^{-4}$  м, штрих-пунктирна  $a = 10.0 \cdot 10^{-4}$  м). При збільшенні просідання штампа максимальні за модулем напруження  $\sigma_{22}$  на верхній грані переміщуються з середини грані на її кінці.

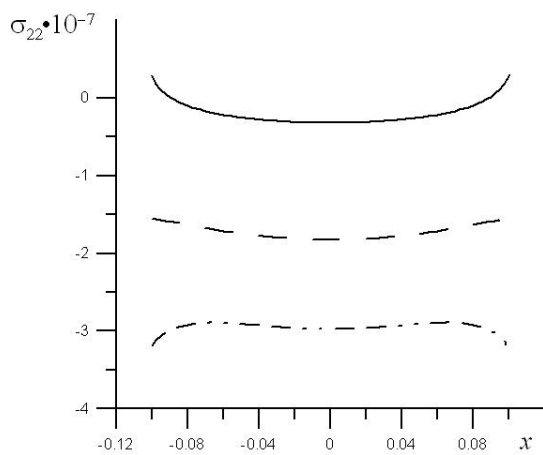


Рис. 2

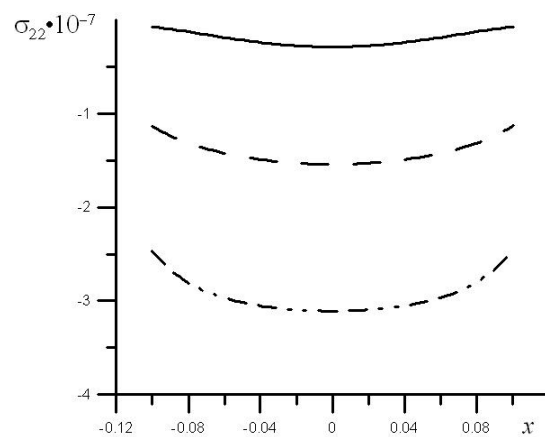


Рис. 3

1. *P. M. Мартиняк, М. І. Дмитрів* Скінченноеlementне дослідження напружено-деформованого стану неоднорідної прямокутної пластини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – 52, № 1.
2. *Kim J.-H., Paulino G. H.* Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2002. – 69. – P. 502–514.
3. *Paulino G. H., Kim J.-H.* The weak patch test for nonhomogeneous materials modeled with graded finite elements // *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. and Eng.* – 2007. – 29. – P. 63–81.

#### FEATURES OF STRESS- STRAIN STATE OF INHOMOGENEOUS RECTANGULAR PLATE UNDER A CONTACT WITH SMOOTHED STAMP

*A contact of rectangular plate with smooth rigid stamp is considered. Young modulus of plate material depends on coordinates. Main features of stress strain state of the plate depending on Young modulus and stamp subsidence is analyzed. Dependence between subsidences of smooth and plane stamps is discovered.*

УДК 539.3

## ВПЛИВ СИЛ ТЕРТЯ НА КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПУ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ТА НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З ОТВОРОМ

Коцюба А.Ю.

Луцький національний технічний університет, [akaerKAJ@rambler.ru](mailto:akaerKAJ@rambler.ru)

Розглядається задача про тиск жорсткого штампу складної форми на границю довільного отвору в нескінченній пластинці. Вважається, що під штампом разом із нормальними виникають і дотичні напруження та задано головний вектор всіх прикладених до штампу зусиль. Дотичні напруження пов'язані з нормальними законом Кулона-Амонтона ( $\tau = k\sigma$ , де  $k$  – коефіцієнт тертя). В літературі така задача достатньо повно вивчена, коли штамп є близький за розмірами до отвору, який має кругову форму [1].

В даній роботі розроблено алгоритм дослідження впливу сил тертя на розподіл контактних напружень під штампом довільної форми, в тому числі при розділенні області контакту на декілька ділянок. Цей алгоритм ґрунтується на методах конформного відображення, інтегральних рівнянь, механічних квадратур та квадратичного програмування.

Щоб уникнути безпосереднього знаходження меж областей контакту (які є наперед невідомими), відповідні умови втискання штампу в отвір записано у вигляді альтернативної системи рівнянь-нерівностей. Замінивши в цих співвідношеннях інтеграли відповідними квадратурними формулами, отримано систему алгебраїчних рівнянь-нерівностей відносно невідомих контактних напружень у певних вузлових точках, які покривають область контакту. Отримана система зведена до відомої задачі квадратичного програмування, для розв'язування якої в літературі розроблені ефективні чисельні методи.

Виконане тестування чисельного алгоритму на задачах, що розв'язані в літературі іншими методами, вказує на його достатньо високу точність і ефективність. Проведено розрахунки контактних напружень для штампів складної форми. Досліджено вплив коефіцієнта тертя на напруження під штампами різної форми.

1. Панасюк В. В., Теплий М. Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – К.: Наукова думка, 1975. – 196 с.

**THE INFLUENCE OF RUBBING STRENGTH ON DISTRIBUTION OF TENSION WITHIN THE CONTACT INTERACTION OF COMPLEX HARD STAMP AND OF DIFFICULT FORM AND ENDLESS PLATE WITH OPENING**

*The task is examined about the pressure of the hard stamp of the difficult form of the arbitrary opening in an endless plate. Accepted, that the stamp is smooth and the main vector of all efforts which are added to the stamp are set. Influencing of forces of friction is examined. The testing of the numerical algorithm for the stamp free forms has been mode. The examples for the investigation of the contact tensions for the stamp free forms and for the stamps of the elliptical and difficult forms are given.*



УДК 539.3

**ТИСК ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ НА ШАР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ**

**Максимчук Д.М.**

*Хмельницький національний університет*

В доповіді у рамках лінеаризованої теорії пружності [1,2] розглянуто постановку змішаної задачі про тиск пружних циліндричних співосьових штампів з початковими (залишковими) напруженнями на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження виконано в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна. Всі дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану  $y_i$ , що пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану) відношеннями  $y_i = \lambda_i x_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), де  $\lambda_i$  - коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану. Крім того, припускається, що дія штампів викликає в шарі мале збурення основного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

Розглянемо пружний шар з початковими напруженнями (що виникають до контакту), в який втискаються пружні циліндричні штампи радіуса  $R$  і висотою  $H$  під дією сили  $P$ . Припускається, що пружні (скінченні) циліндричні штампи та шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. В випадку ортотропного тіла будемо вважати, що пружно-еквівалентні напруження співпадають з напрямками

координатних осей. В системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$  такій постановці відповідають граничні умови:

на торці пружних штампів

$$u_z^{(1)} = -\varepsilon_+; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad \forall(r) \in [0, R_1], \quad y_3 = h + H_1, \quad (1)$$

$$u_z^{(2)} = \varepsilon_-; \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad \forall(r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h - H_2, \quad (2)$$

на боковій поверхні пружних штампів

$$\sigma_z^{(1)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0, H_1], \quad r = R_1, \quad (3)$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0, H_2], \quad r = R_2, \quad (4)$$

на границі пружного шару в області контакту

$$u_3 = W^{(1)}; \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(1)}; \quad \tilde{Q}_{3r} = t_{rz}^{(1)} = 0, \quad \forall(r) \in [0, R_1], \quad y_3 = -h_1, \quad (5)$$

$$u_3 = W^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r} = t_{rz}^{(2)} = 0, \quad \forall(r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h_2, \quad (6)$$

на границі пружного шару поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{33} = \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad \forall(r) \in [r, +\infty], \quad y_3 = \pm h. \quad (7)$$

В розв'язку лінеаризованих рівнянь одержимо значення компоненти тензора напружень і вектора переміщень у вигляді

$$u_3 = \frac{1}{\omega_2 \chi} \int_0^\infty Q_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi; \quad u_3 = \frac{1}{\omega_2 \chi} \int_0^\infty Q_2'(\xi) J_0(\xi r) d\xi;$$

$$Q_{33}' = \omega_3 \int_0^\infty q_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi; \quad Q_{33}' = \omega_3 \int_0^\infty q_2(\xi) J_0(\xi r) d\xi.$$

Функції  $A(\xi)$ ,  $B(\xi)$ ,  $\chi_k^{(i)}$  визначимо з системи парних інтегральних рівнянь, які отримуємо з граничних умов. Задовольнивши граничні умови, одержимо систему парних інтегральних рівнянь, які зведено до двох квазірегулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь

$$l_k^{(1)} \chi_n^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} l_{kn}^{(i)} \chi_n^{(i)} = d_k^{(i)}. \quad (8)$$

Систему (8) розв'язано методом редукції, тому що коефіцієнти системи (8) зменшуються зі зростанням  $n$ .

Визначивши сталі  $\chi_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), можна обчислити напруження і переміщення в пружних штампах і шарі з початковими напруженнями. Відмітимо, що з отриманого розв'язку, у випадку потенціалів простої структури (потенціали гармонічний, Бартенева-Хазановича), можна отримати ряд частинних випадків. На основі аналізу і числових підрахунків зроблено відповідні висновки. Виявлено новий механічний ефект, який характеризується тим, що при прямуванні початкових (залишкових) напружень до значень, що відповідають поверхневій нестійкості шару, проявляються ефекти



“резонансного” характеру не тільки в шарі, але і в пружних штампах, які полягають у тому, що напруження і переміщення в взаємодіючих тілах різко змінюються (напруження прямують до нуля, переміщення нескінченно зростають).

1. Рудницький В.Б. Контактное взаимодействие предварительно напряженного слоя с двумя упругими штампами // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1987. - № 2. - С. 56-61.
2. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький, ПП Мельник "Научные издания". – 2004. – 682 с.

#### CONTACT INTERACTION OF RESILIENT RECTANGULAR DIE AND A HALF PLANE WITH INITIAL (RESIDUAL) TENSION

*The article the frameworks of linearized theory of elasticity the decision of the combined problem of pressure of elastic cylindrical coaxial punches with residual stresses on an elastic layer with residual stresses is suggested.*



УДК 539.3

#### ЛОКАЛЬНЕ ВІДШАРУВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ВІД ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ПІД ДІЄЮ СТОКУ ТЕПЛА

Монастирський Б.Є.<sup>1</sup>, Микитин М.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, [bmonast@iapmm.lviv.ua](mailto:bmonast@iapmm.lviv.ua),

<sup>2</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка, [marjan-ka@mail.ru](mailto:marjan-ka@mail.ru)

У роботі вивчається явище локального відшарування в контактних парах з узгодженими поверхнями під дією теплових чинників.

Розглядається контакт безмежного пружного ізотропного півпростору, у якому діє точкове джерело охолодження, та жорсткої основи під дією рівномірного тиску, прикладеного на безмежності. Вважається, що поверхня контакту термоізована. Крім того, виконуються умови одностороннього безфриційного контакту, що передбачають неможливість появи на поверхні спряження дотичних напружень та нормальних напружень розтягу.

Відповідна осесиметрична контактна задача формулюється в рамках лінійної теорії термопружності.

Методика розв'язання передбачає на першому етапі постановку задачі про повний контакт тіл, розв'язок якої знайдено з використанням фундаментального розв'язку задачі термопружності про дію точкового джерела тепла у безмежному просторі [1]. Аналіз отриманого розв'язку дозволив встановити

діапазони вихідних параметрів задачі, за яких реалізується повний контакт тіл та за яких відбувається відшарування.

Контактна задача з урахуванням ділянки відшарування формулюється на другому етапі. З використанням методу міжконтактних зазорів вона зводиться до парних інтегральних рівнянь, асоційованих із інтегральним перетворенням Ханкеля, з яких в свою чергу спеціальною підстановкою [2] отримано рівняння Абеля. Розв'язок останнього знайдено в аналітичному вигляді.

На основі побудованого розв'язку проаналізовано залежність розмірів ділянки зазору та його висоти від механічного та теплового навантаження; вивчено особливості розподілу контактних напружень.

1. *Новацкій В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962 – 364 с.
2. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977 – 220 с.

#### LOCAL SEPARATION OF AN ELASTIC HALF-SPACE AND A RIGID FOUNDATION DUE TO A HEAT SINK

*The contribution presents the analytical solution to the axially symmetric contact problem of linear thermoelasticity of local separation between semi-infinite isotropic half-space and rigid foundation due to heat sink.*



УДК 359.3

#### КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ, ОДИН З ЯКИХ МАЄ ПОЧАТКОВІ (ЗАЛИШКОВІ) НАПРУЖЕННЯ

**Рудницький В. Б., Луньо Н.Б.**

*Хмельницький національний університет*

Розглядається статична контактна взаємодія двох співосних циліндрів однакового діаметру (в одному з яких діють початкові напруження) скінченної довжини, виготовлених з різних матеріалів. Циліндри контактують між собою торцями; до вільного торця нижнього циліндра прикладене зовнішнє стискуєче навантаження таким чином, що область контакту є кругом. На бічній поверхні циліндрів нормальні переміщення та дотичні напруження рівні нулю. Контакт між циліндрами вважається гладким, тобто, без зчеплення, а бокові поверхні циліндрів вільні від напружень. Задача полягає у визначенні розмірів невідомої області контакту та напружень в області контакту й на бокових поверхнях циліндрів.

В [1, 2] були розглянуті контактні осесиметричні задачі з визначенням площадки контакту для двох однорідних циліндрів з різними пружними властивостями, що мають скінченну довжину і однакові діаметри без урахування початкових (залишкових) напружень (класична теорія пружності). В поданій доповіді для двох скінчених циліндрів, один з яких із початковими (залишковими) напруженнями, в рамках лінеаризованої теорії пружності дано постановку вказаних задач в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл у випадку довільної структури пружного потенціалу [3–5].

Граничні умови задачі, що розглядається, мають вигляд (надалі всі величини, що відносяться до верхнього циліндра, будемо позначати індексом (1), а до нижнього – індексом (2)):

на торці нижнього циліндра з початковими напруженнями при  $y_3 = \pm h_i$ :

$$Q_{33}^{(i)} = \begin{cases} -q_i; & 0 \leq r < a \\ 0; & a < r < R \end{cases}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(i)} = 0 \quad \forall \theta \in [0; 2\pi], \quad (1)$$

в області контакту при  $y_3 = 0$ :

$$Q_{33}^{(1)}(r; 0) = Q_{33}^{(2)}(r; 0); \quad Q_{3r}^{(1)}(r; 0) = Q_{3r}^{(2)}(r; 0), \quad (2)$$

$$u_3^{(1)}(r; 0) = -u_3^{(2)}(r; 0); \quad 0 \leq r < c, \quad (3)$$

$$Q_{33}^{(1)}(r; 0) = 0; \quad c < r < R; \quad (4)$$

на боковій поверхні пружних циліндрів при  $r = R$ :

$$Q_{3r}^{(i)}(R; y_3) = 0; \quad u_3^{(i)}(R; y_3) = 0. \quad (5)$$

Задача зводиться до розв'язання лінеаризованих рівнянь для стисливих і нестисливих тіл [5, ф-ли (2.1), (2.72)] при граничних умовах (1) – (5). Початковий (залишковий) напружено-деформований стан в пружних циліндрах визначаємо за формулами [4, ф-ли (2.12), (2.85)].

У випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$u_r^{(2)} = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_2;$$

$$u_3^{(2)} = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1 + z_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_2 \right) + \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1};$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{33}^{(2)} &= C_{44} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left[ (1+m_1)l_1\varphi_1 + (1+m_2)l_2\varphi_2 \right] + (1+m_1)l_1z_1 \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z_1^3} \right\}; \\ \tilde{Q}_{3r}^{(2)} &= C_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \left[ (1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2 \right] + \frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial r \partial z_1^2} \right\}; \\ \tilde{Q}_{rr}^{(2)} &= C_{44} \left\{ \left[ C_0\Delta_1 + (1-C_0)\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] (\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \left[ C_0 \frac{\partial}{\partial z_1} \Delta_1 + (1-C_0)\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \varphi_2 \right\}.\end{aligned}\quad (6)$$

Тут

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k I_0(\gamma_k n_1 r) + B_k r I_0(\gamma_k n_1 r) \right] S_1(\gamma_k z_1); \\ \varphi_2^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_1) \right] J_0(\alpha_k r).\end{aligned}\quad (7)$$

У випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\begin{aligned}u_r^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2); \\ u_3^{(2)} &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}; \\ \tilde{Q}_{33}^{(2)} &= C_{44} \left[ (1+m_1)l_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + (1+m_2)l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right]; \\ \tilde{Q}_{3r}^{(2)} &= C_{44} \left[ \frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} \right]; \\ \tilde{Q}_{rr}^{(i)} &= C_{44} \left\{ \left[ C_0\Delta_1 + (1-C_0)\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} (C_1 n_1 \varphi_1 + C_2 n_2 \varphi_2) \right\}.\end{aligned}\quad (8)$$

Тут

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k I_0(\gamma_k n_1 r) + B_k r I_0(\gamma_k n_1 r) \right] S_1(\gamma_k y_3); \\ \varphi_2^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_2) \right] J_0(\alpha_k r);\end{aligned}\quad (9)$$

де

$$S_2 = E_k sh \left( \frac{\alpha_k z_1}{n_1} \right) + F_k ch \left( \frac{\alpha_k z_2}{n_2} \right);$$

$$S_3 = N_k sh \left( \frac{\alpha_k z_1}{n_1} \right) + M_k ch \left( \frac{\alpha_k z_2}{n_2} \right).$$
(10)

Напружено-деформований стан циліндра, в якому відсутні початкові (залишкові) напруження, визначається за формулами [2, ф-ли (1.8)].

Розв'язки задачі при граничних умовах (1) – (5) подано у вигляді рядів Фур'є-Діні для коефіцієнтів яких рядів отримано парні ряди-рівняння. Розв'язання парних рядів - рівнянь зводиться до розв'язання квазі – регулярних систем нескінчених алгебраїчних рівнянь. Кінцеві аналітичні вирази для контактних напружень отримані з виділеною особливістю. Для конкретних значень зовнішнього навантаження і розмірів контактуючих циліндрів обчислено розміри області контакту і напруження в області контакту і на бокових поверхнях циліндрів.

Аналіз отриманих числових результатів показує, що наявність початкових (залишкових) напружень в одному з циліндрів призводить до суттєвої зміни величини області контакту та характеру розподілу напружень і переміщень в пружних циліндрах, при цьому:

а) контактні напруження в області контакту зменшуються у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ), при розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ) – збільшуються; область контакту при  $\lambda_1 < 1$  збільшується, при  $\lambda_1 > 1$  – зменшується.

б) при спрямуванні початкових (залишкових) напружень до величин, що відповідають поверхневій нестійкості циліндрів ( $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp}$ ), проявляються елементи механічного ефекту, виявленого академіком Гузем А.Н. в механіці руйнування матеріалів [6], а саме: напруження в пружних циліндрах рівні нулю, переміщення різко зростають і циліндри переміщуються як жорстке ціле, тобто, контактні напруження прямують до нуля, а переміщення під циліндрами співпадають з переміщеннями торців циліндрів.

1. *Мартирисян З.А.* О двух контактных задачах для круглых упругих цилиндров конечной длины // Изд. АН Арм. ССР. Механика. – 1978. – Т. **31**, № 5. – С. 36–47.
2. *Мартирисян З.А.* Осесимметричная контактная задача для двух цилиндров // Изд. АН Арм. ССР. Механика. – 1979. – Т. **32**, № 2. – С. 14–25.
3. *Guz A.N., Rudnitsky V.B.* Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2004. – 682 p.
4. *Guz A.N., Rudnitsky V.B.* Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2006. – 700 p.

5. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. - С. 3–11.
6. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.

*The article deals with axis-symmetrical problems for two cylinders, one of which is with initial (residual) stresses. Cylinders of finite length and equal diameters contact at end faces. Normal movings and tangent stresses on the lateral surfaces of cylinders are equal to zero. It is supposed, that contact between cylinders is smooth, and the area of contact is a circle of unknown radius. Decisions of problems have been received in the form of Fourier - Dini series; their coefficients are double series-equations containing Bessel-functions. For concrete values of external loadings values of stresses have been received.*



УДК 539.3

## ПРОСТОРОВА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА ТА ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

Рудницький В.Б., Ярецька Н.О.

*Хмельницький національний університет*

В статті у рамках лінеаризованої теорії пружності [1-3] розглянуто розв'язок просторової задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Розглянуто випадки, коли шар лежить на жорсткій основі без тертя і коли шар з'єднаний із основою після виникнення в ньому початкового деформованого стану.

Дослідження виконані в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна. Дослідження проведені у координатах початкового деформованого стану  $Oy_i$ , які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), де  $\lambda_i$  - коефіцієнти видовження, що визначають переміщення в початковому (залишковому) стані.

Крім того, припускається, що дія штампа викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Нехай пружний циліндричний штамп радіуса  $R$  і висотою  $H$  з початковими (залишковими) напруженнями втискається у пружний шар після виникнення там початкового деформованого стану,  $h_1$  - товщина шара у початковому деформованому стані, яка пов'язана з товщиною  $h_2$  у недеформованому стані відношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Збурення під дією сили  $P$ , що прикладена до вільного торця циліндричного штампа, викликають його переміщення на величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил. У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, y_3)$  такій постановці відповідають граничні умови:

на торці пружного штампу  $y_3 = h_2$

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{r3}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1)$$

в області контакту на границі пружного шару  $y_3 = 0$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (2)$$

поза областю контакту на границі пружного шару  $y_3 = 0$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (3)$$

на боковій поверхні пружного штампа  $r = R$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(2)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq y_3 \leq H). \quad (4)$$

на нижній поверхні шару  $y_3 = h_2$ , що лежить на жорсткій основі або з'єднаний з основою,

$$u_3^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad \text{або} \quad u_3^{(2)} = 0 \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (5)$$

Для розв'язання даної задачі використовуються перетворення Ханкеля, що дозволяють звести її до інтегральних рівнянь типу Фредгольма, які в свою чергу допускають ефективне використання методу послідовних наближень. Чисельний підрахунок виконано для потенціалів конкретної структури, що описують поведінку матеріалів у випадку рівних та нерівних коренів. Результати чисельного аналізу представлені у вигляді таблиць та графіків, з яких слідує що: наявність ідентичних початкових (залишкових) напружень у пружному шарі та циліндричному штампі призводить до суттєвої зміни закону розподілу контактних напружень, при цьому у випадку стиснення ( $\lambda_1 < 1$ ) контактні напруження значно зменшуються, у випадку розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ) – збільшуються, переміщення ж – навпаки; при наближенні початкових (залишкових) напружень до величин, що відповідають поверхневій нестійкості шару, з'являються ефекти резонансного характеру не тільки у шарі, але й у пружному штампі.

1. *Guz A.N., Rudnitsky V.B.* Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. - Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2004. – 682 p.
2. *Guz A.N., Rudnitsky V.B.* Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. – Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2006. – 700 p.
3. *Guz A.N., Babich S. Y., Rudnitsky V.B.* Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mechanics Rev. - 1998. – Vol. SI.US. - 343-371 pp.

### THREE-DIMENSIONAL CONTACT INTERACTION OF RESILIENT DIE AND CYLINDRICAL DIE WITH INITIAL (RESIDUAL) TENSION

*The article deals with the mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinder die upon a layer with initial stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.*



УДК 359.3

### ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ (ЗАЛИШКОВИХ) НАПРУЖЕНЬ НА КОНТАКТНІ ЗУСИЛЛЯ В ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ПРУЖНОГО ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ

**Рудницький Т.В.**

*Хмельницький національний університет*

В рамках лінеаризованої постановки розглядається просторова статична задача про взаємодію скінченого пружного штампа з початковими (залишковими) напруженнями. Наведено загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченої циліндричної області. Поставлені задачі розв'язані єдиним методом, і в підсумку розв'язки подано у вигляді рядів через невідомі константи, для визначення яких отримані нескінченні квазі – регулярні системи алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив початкових напружень на розподіл напружень і переміщень в області контакту півпростору з початковими напруженнями та пружного штампа.

Розглянемо пружний скінченний циліндричний з початковими (залишковими) напруженнями штамп радіуса  $R$  і висоти  $H$ , що втискується в пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями під дією прикладе-



ного до вільного торця штампа навантаження, за якого всі точки цього торця переміщуються в напрямку осі симетрії на однакову величину  $\varepsilon$ .

Це відповідає наступним граничним умовам:

на торці штампа при  $z_3 = H$  :

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3\theta}^{(1)} = 0; \quad \forall(r; \theta) \in \Omega; \quad (1)$$

в області контакту пружного штампа і півпростору при  $y_3 = 0$  :

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0; \quad Q_{3\theta}^{(2)} = 0; \quad \forall(r; \theta) \in \Omega; \quad (2)$$

на боковій поверхні пружного штампа при  $r = R$  :

$$\tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{rr} = 0; \quad \tilde{Q}_{r\theta} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0; H]. \quad (3)$$

Граничні умови разом з умовою рівноваги

$$P = \iint_{\Omega} [Q_{33}^{(1)}]_{y_3=0} d\Omega \quad (4)$$

завершують постановку лінеаризованої контактної задачі.

На основі аналітичного і числового аналізу розв'язку поставленої задачі можна зробити такі висновки про характер і величину впливу початкових напружень в півпросторі і пружному штампі на напружено-деформований стан системи “пружний штамп–півпростір з початковими напруженнями”:

1. Наявність початкових напружень в півпросторі і пружному штампі призводить до суттєвої зміни величини і характеру розподілу напружень і переміщень в пружному штампі, при цьому:

а) найбільш суттєвий вплив здійснюється на величину напружень в точках, близьких до бокової поверхні штампа;

б) найбільший вплив початкових напружень відмічений поблизу основи штампа і значущий тільки в зоні  $\xi < 1$  для штампів розглянутої геометрії [1];

в) для перерізів пружного штампа  $\xi < 1$  при визначенні напружень і переміщень з достатньою для практики точністю можна користуватися формулами [2,3].

2. Початкові напруження в пружному півпросторі і штампі суттєво впливають на розподіл контактних зусиль і переміщень, що призводить до:

а) зменшення контактних напружень у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) та їх збільшенню у випадку розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ).

б) суттєвого збільшення переміщень у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) та їх зменшенню у випадку розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ).

3. На границі області контакту нормальні напруження мають особливість виду  $(1 - p)^\gamma$ , де  $\gamma$  – параметр, який визначається із трансцендентних рівнянь і залежать від структури пружного потенціалу і величини  $\delta$ . При  $\delta=0$

отримуємо часткові випадки задачі, а саме, розв'язки задач відповідно про стиск пружного циліндра і тиск жорсткого кругового штампа на півпростір.

4. Якщо відношення  $\delta$  більше двадцяти чотирьох ( $\delta > 24$ ), то пружний штамп можна вважати жорстким.

5. Результат впливу початкових напружень на величину і характер напружено-деформованого стану системи “пружний штамп–півпростір з початковими напруженнями” в значній мірі залежать від виду пружного потенціалу. Більш суттєвий вплив кількісного характеру початкові напруження здійснюють у високоеластичних матеріалах; якісний вплив має ідентичний характер.

6. При прямуванні початкових напружень до величин, які відповідають поверхневій нестійкості півпростору проявляються механічні ефекти “резонансного характеру” [4]:

а) напруження в пружному штампі рівні нулю, переміщення різко зростають і штамп переміщується як жорстке ціле;

б) контактні напруження також прямують до нуля, а переміщення під штампом співпадають з переміщенням його торця. Вказаний ефект виявлений в рамках лінеаризованої теорії пружності і являється наслідком того, що в розглянутому випадку система (штамп + основа) знаходиться у стані нейтральної рівноваги.

1. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Контактная задача о давлении упруго штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. - С. 3–11.
2. Guz A.N., Rudnitsky V.B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. - Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A, 2006. – 700 p.
3. Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. - Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2004. – 682 p.
4. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses; Focus on Ukrainian research // Appl. Mechanics Rev. - 1998. - Vol. S1.US. – 343– 371 pp.

*The influencing of initial (residual) stresses on the contact efforts in the area of contact of elastic stamp and semi-space has been explored. For concrete values of external loadings values of stresses have been received.*



УДК 539.3

## ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА СПРЯЖЕНИХ ТІЛ ЗА ЛОКАЛЬНОЇ НЕДОСКОНАЛОСТІ ТЕПЛОВОГО КОНТАКТУ

Чумак К.А., Нагалка С.П.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, [labmtd@iapmm.lviv.ua](mailto:labmtd@iapmm.lviv.ua)*

У праці висвітлено контактні ефекти у півплощинах, що взаємодіють під силовим і тепловим навантаженням за недосконалого теплового контакту на локальній ділянці. Аналіз проведено на двох прикладах: коли контактний термоопір фіксований, і коли залежить від тиску поверхонь.

1. Розглянуто термопружну взаємодію двох ізотропних півплощин під дією заданих на нескінченності стискальних однорідних зусиль  $p$  і стаціонарного теплового потоку  $q$ , перпендикулярних до поверхні розмежування. Механічний контакт відбувається без тертя вздовж всієї лінії спряження тіл. На ділянці  $|x| < l$  відбувається тепловий контакт з термоопором  $r_q(x) = r_q^0 \sqrt{1 - (x/l)^2}$ , поза нею – ідеальний тепловий контакт. За теплового потоку в бік матеріалу з більшою термічною дистортивністю і перевищенні ним деякого критичного значення  $q_{cr}$  неідеальність контакту зумовлює розшарування тіл на частині ділянки з термоопором [1]. Термічна дистортивність визначається за формулою  $\delta_k = \alpha_k (1 + \nu_k) / \lambda_k$  (тут  $\nu_k, \alpha_k, \lambda_k$  – коефіцієнти Пуассона, лінійного теплового розширення і теплопровідності півплощини  $D_k$ ,  $k = 1, 2$ ). Вважаємо, що утворений зазор заповнюється теплопроникним середовищем, вплив якого на теплопередачу між тілами враховується контактним термоопором  $r_\lambda(x) = h(x) / \lambda_3$ , де  $h(x)$  – висота зазору,  $\lambda_3$  – коефіцієнт теплопровідності заповнювача.

На основі методу функцій міжконтактних зазорів [2] задачу про термічне розшарування зведено до системи двох нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно висоти зазору  $h(x)$  і перепаду температури  $\gamma(x)$  між поверхнями на ділянці термоопору

$$\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \lambda (\delta_2 - \delta_1) \gamma(x) = Kp, \quad |x| < a; \quad h(\pm a) = h'(\pm a) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\gamma(x)}{r_q(x) + r_\lambda(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < l; \quad \gamma(\pm l) = 0. \quad (2)$$

Для розв'язання СІДР (1)-(2) використано метод послідовних наближень. На основі числового дослідження проаналізовано вплив заповнювача про-світу на контактні параметри спряжених тіл.

2. Досліджено термопружну поведінку кусково-однорідної площини з міжфазним дефектом на ділянці  $|x| < l$ , закритим під дією навантаження. Внаслідок шорсткості берегів дефекту його термічна провідність  $\lambda_n(x)$  залежить від контактного тиску  $P(x)$ :  $\lambda_n(x) = kP(x)$ , де  $k$  – коефіцієнт, залежний від геометричних параметрів шорстких поверхонь. Вважаємо, що матеріали спряжених півплощин відрізняються термічними характеристиками, а їх пружні сталі – однакові. Тертя поверхонь дефекту не враховуємо. Поза дефектом виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин.

Сформульована задача зведена до нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно перепаду температури

$$k \left[ p - 2\lambda G(\delta_2 - \delta_1)\gamma(x) \right] \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < l. \quad (3)$$

На кінцях міжфазного дефекту функція  $\gamma(x)$  задовольняє умову

$$\gamma(\pm l) = 0.$$

Для розв'язання рівняння (3) застосовано метод послідовних наближень. Проаналізовано залежність перепаду температури між берегами дефекту та їх контактного тиску від прикладеного навантаження  $p$ , теплового потоку  $q$  і його напрямку та співвідношення між термічними дистортивностями матеріалів.

1. Швець Р. Н., Мартыняк Р. М. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23–28.
2. Мартыняк Р. М. Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – 36, № 2. – С. 124-126.

#### **THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF CONJUGATED SOLIDS WITH ALLOWANCE FOR LOCAL IRREGULARITY OF THERMAL CONTACT**

*Contact effects in half-spaces under mechanical load and thermal load with allowance for local irregularity of thermal contact are considered. The research is provided for constant and variable with external pressure thermal resistance.*

**СЕКЦІЯ 5. “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ”**

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧНО ТОЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ  
ТОНКОГО КРИВОЛІНІЙНОГО П’ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО  
ВКЛЮЧЕННЯ З ПРУЖНОЮ МАТРИЦЕЮ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО  
ЗСУВУ**

**Рабош Р.В.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, e-mail: [RomanRabosh@gmail.com](mailto:RomanRabosh@gmail.com)*

Дослідження взаємодії тонких пружних включень з пружним середовищем широко представлені в сучасній науковій літературі [1–3]. Проте більшість таких публікацій не враховують впливу електричних властивостей складових композиту. Використовуючи метод зрощування асимптотичних розкладів, у даній роботі було отримано моделі динамічної взаємодії тонкого криволінійного п’єзоелектричного включення змінної товщини з пружним середовищем при різних випадках електричних граничних умов. Випадок тонкого прямолінійного п’єзоелектричного включення в пружній матриці розглянуто в [4].

Нехай у пружному ізотропному середовищі в умовах ідеального механічного контакту знаходиться тонке криволінійне п’єзоелектричне включення змінної товщини, що займає область  $W_\varepsilon = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in W_0, \quad 2 | \alpha_2 | \leq h(\alpha_1)\}$ . Тут  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  – ортогональна система координат, що зв’язана із серединною лінією включення  $W_0 = [\alpha_-, \alpha_+]$  за допомогою рівності  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\alpha_1) + \alpha_2 \mathbf{n}(\alpha_1)$ ;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – декартові координати;  $\mathbf{r}(\alpha_1)$  – радіус-вектор серединної лінії;  $\mathbf{n}(\alpha_1)$  – нормаль до  $W_0$ ;  $h(\alpha_1)$  – товщина неоднорідності. Припускається, що відносна товщина включення мала, тобто  $\varepsilon = a^{-1} \max_{\alpha_1 \in W_0} h(\alpha_1) \ll 1$  ( $a$  – характерний розмір  $W_0$ ). Крім цього вважаємо, що довжини поздовжніх хвиль у складових композиту набагато більші від товщини включення:  $(k, k_0) \max_{\alpha_1 \in W_0} |h(\alpha_1)| \ll 1$  ( $k$  і  $k_0$  – хвильові числа у матриці і включенні). Матеріал включення належить до кристалграфічного

класу  $btt$ , а вісь симетрії шостого порядку перпендикулярна до площини  $x_1x_2$ .

Розглянуто два випадки граничних електричних умов: рівність нулю електричного потенціалу або рівність нулю нормальної компоненти вектора електричної індукції.

Згідно із методом зрощування асимптотичних розкладів невідомі функції зміщень в композиті та електричний потенціал подаються у вигляді асимптотичних розкладів за степенями  $\varepsilon$ . Оскільки параметр  $\gamma = c_{44}^0/\mu$  ( $c_{44}^0$  та  $\mu$  – модулі пружності та зсуву матеріалів включення і матриці) міняється в межах  $0 \leq \gamma < \infty$ , то розглянуто три діапазони зміни  $\gamma$  [2], в кожному із яких побудовано відповідну модель взаємодії і пограншарові поправки. Крім цього було отримано моделі включення довільної жорсткості.

Отримані результати використано при аналізі амплітуд випромінювання SH-хвиль із центру тонкої циліндричної п'єзоелектричної оболонки.

1. *Emets V. F., Kunets Ya. I., Matus V. V.* Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // *Archive of Applied Mechanics*. – 2004. – 73 – P. 769–780.
2. *Kim G. S., Ємець В. Ф., Кунець Я. І.* Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 1998. – 41, № 1 – С. 54–61.
3. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. *Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В.* Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // *Вісн. Дон. університету*. – 2008. – № 1 – С. 137–141.

#### ASYMPTOTICALLY EXACT MODELS OF DYNAMIC INTERACTION BETWEEN THIN CURVED PIEZOELECTRIC INCLUSION AND ELASTIC MATRIX UNDER THE ANTI-PLANE STRESS

*The method of matched asymptotic expansions is used to obtain models of antiplane dynamic interaction between thin curved piezoelectric inclusion and elastic matrix for different cases of electric boundary conditions. Boundary layer corrections were constructed to refine stress and displacement fields near the tip of inclusion of variable shape.*



УДК 539.3

**ЕЛЕКТРОСЕЙСМІЧНИЙ ЕФЕКТ В ПОРИСТИХ НАСИЧЕНИХ ТІЛАХ****Твардовська С.Р.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
НАН України, [sofi.lviv@gmail.com](mailto:sofi.lviv@gmail.com)*

Електросейсмічний ефект (ЕСЕ), який полягає у збудженні механічних коливань пористих тіл зовнішнім періодичним за часом електричним полем, вперше спостерігав М.С. Анциферов [1]. Надалі вивченню цього ефекту в науковій літературі приділялося мало уваги. Відзначити можна хіба лише роботу [2], де вивчався відносний вклад різних фізичних механізмів в ЕСЕ. Зазначимо, що ЕСЕ, параметри якого залежать від структурних та фізико-механічних характеристик пористого тіла, може бути використаний, зокрема, в практиці лабораторних досліджень зразків гірських порід. У зв'язку з цим представляє інтерес вивчення пов'язаності параметрів збуджуваних зовнішнім електричним полем коливань зразків з їх фізико-механічними та структурними характеристиками.

Зроблено постановку і отримано наближений розв'язок задачі про механічні коливання насиченого розчином електроліту пористого шару, до поверхонь якого прикладена гармонічно змінна за часом різниця електричних потенціалів. У випадку заземлених поверхонь шару визначальний вклад в колильний процес дають хвилі основної гармоніки. Для вільного від силового навантаження шару вагомий вклад можуть давати також і хвилі другої гармоніки. Встановлено аналітичні зв'язки між амплітудою і фазою коливань та характеристиками середовища, такими як пористість, проникність, звивистість, концентрація розчину тощо, які можуть бути корисними в практиці лабораторних досліджень гірських порід. Проведені кількісні дослідження цих аналітичних співвідношень.

1. *Анциферов М. С. Электро-сейсмический эффект // Доклады Академии Наук СССР. – 1962. - 144, № 6. – С. 1295 – 1297.*
2. *Основы сейсмоэлектроразведки. Потапов О. А., Лизун С.А., Кондрат В. Ф. и др.– М.: Недра, 1995. – 268 с.*

**ELECTROSEISMIC EFFECT IN THE POROUS SATURATED BODIES**

*A problem of the mechanical vibration of the porous layer in the external electrical field is being formulated. The approximate solution of this problem is derived. Analytical relations for the parameters of vibration according to the structural and physical–mechanical characteristic of the body are analyzed.*

УДК 539.3

## КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНИ З МАСИВНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЧЕРЕЗ ПРУЖНИЙ ПРОШАРОК ТИПУ ВІНКЛЕРА

Шопа Т.В.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача,  
[tetyana.sh@gmail.com](mailto:tetyana.sh@gmail.com)*

В межах модифікованої теорії пластин Тимошенка розглядається задача про частоти власних коливань шарнірно опертої ортотропної прямокутної пластини з масивним включенням [2,3]. Включення з'єднане з пластиною пружним прошарком вздовж краю отвору. Числовий розв'язок задачі ґрунтується на послідовнісному підході до побудови функції Гріна [1] і зведенні відповідної крайової задачі до системи інтегральних рівнянь. Результат узагальнюється на випадок довільного типу навантаження, конфігурації включення та його розташування.

Розглянемо шарнірно оперту ортотропну прямокутну пластину, що взаємодіє через тонкий шар вздовж кривої  $L$  (край отвору) з масивним включенням. На включення діє вимушуюча сила  $P = P_0 \sin(\theta_0 t)$ . Серединна поверхня пластини - прямокутник  $\Pi$ . Рівняння модифікованої теорії пластин Тимошенка за відсутності нормальних жорстких поворотів такі:

$$\frac{\Delta}{D} \Delta_2 (w - \gamma) - \frac{2h\delta}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{D} q; \quad \Delta_4 \gamma + \frac{\Delta}{D} \Delta_2 (w - \gamma) = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2} \right);$$

$$\text{де} \quad \Delta_4 = d_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2d_{12} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + d_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}, \quad \Delta_2 = b_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2},$$

$$d_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}, \quad b_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda}, \quad \gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}, \quad \Lambda_i, D_{ij} - \text{пружно-геометричні}$$

сталі матеріалу пластини;  $\alpha_1, \alpha_2$  - прямокутні координати;  $\rho$  - густина матеріалу;  $w, \gamma_1, \gamma_2$  - прогин і кути повороту нормалі до серединної площини;  $q, m_i$  - зовнішнє навантаження.

Рівняння руху включення:

$$-m_0 \theta_0 w_0 = P_0 - \int_L p(\xi) d(\xi),$$



де  $m_0$  - маса включення,  $p(\xi)$  - сила взаємодії тіла з пластиною,  $\theta_0$  - частота коливань,  $w_0$  - переміщення включення.

Граничні умови на  $\partial\Pi$  відповідають шарнірному закріпленню пластини при  $\alpha_1 = 0, \alpha_1 = l_1$  та  $\alpha_2 = 0, \alpha_2 = l_2$ :

$$w = 0, \gamma_n = 0, M_n = 0, \gamma_\tau = 0, M_\tau = 0.$$

Граничні умови на контурі включення  $L \subset \Pi$  мають вигляд:

$$M(\alpha, t) = 0, Q_n(\alpha, t) = p(\alpha) \sin(\theta_0 t),$$

$$p(\alpha) = k(w_n(\alpha) - w_0),$$

де  $k$  - коефіцієнт пружності прошарку,  $w_n(\alpha)$  - прогин краю отвору.

Розв'язок задачі шукаємо методом сингулярних інтегральних рівнянь, що ґрунтується на послідовнісному підході до побудови узагальнених функцій. Для моделювання навантажень використаємо дельтаподібні фінітні функції. Наближений розв'язок одержаної системи інтегральних рівнянь шукаємо методом колокацій.

Досліджено власні частоти коливань шарнірно опертої трансверсально-ізоτροпної пластинки з масивним включенням в залежності від маси включення.

1. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
2. Sukhorolsky M., Shopa T. The vibration of rectangular orthotropic plate with massive inclusions // CAMES journal. – 2008. – 15, № 3–4 – P. 369–376.
3. Сухорольський М., Шона Т. Згинні коливання ортотропної пластини з масивним включенням // Фізико-хімічна механіка матеріалів, Фіз.-мех. інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів – 2008. - № 6 – С. 41–46.

#### THE VIBRATION OF THE PLATE WITH THE MASSIVE INCLUSION THROUGH THE ELASTIC LAYER OF THE WINKLER'S TYPE

*The problem on eigen frequencies of the simply supported rectangular plate with a massive circular inclusion is considered in the paper. Inclusion interacts with the plate by the thin elastic layer of the Winkler's type. The flexure of the plate is described by modified equations of Timoshenko's theory of plates. Numerical solution of the problem is found by the indirect method of boundary elements based on the sequential approach to constructing generalized functions and on collocation method.*



UDC 539.3

## THICKNESS RESONANCE IN RECTANGULAR PLATES

**Bondarenko A.O.**

*Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NAS Ukraine,  
[anastasiya.bondarenko@gmail.com](mailto:anastasiya.bondarenko@gmail.com)*

Ultrasonic transducers and linear arrays are widely used in imaging applications such as medical diagnosis and nondestructive evaluation [1]. As resonators in acoustic imaging devices, long rectangular piezoceramic bars polarized across the thickness are often used. Their operating frequency is in the vicinity of the fundamental thickness resonance frequency in order to excite piston-type motions at the plane faces of resonators. However, experimental reports show the presence of a large number of parasitic modes and considerable complication of vibration patterns due to the influence of bar finite boundaries.

The aim of this talk is to analyze theoretically the phenomenon of thickness resonance in rectangular bars. The structure of frequency spectra is explained, and the influence of mechanical and geometrical parameters of the bar on the excitation efficiency for thickness vibrations is evaluated.

Taking into account that the bar length is quite larger than two other dimensions, the bar can be considered as infinite and the plain strain approximation is assumed. Then the problem on two-dimensional vibrations of elastic rectangle  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$  is solved analytically by means of the superposition method [2].

Figs. 1 and 2 present the frequency spectra for symmetric vibrations of rectangular plates near the thickness resonance frequency for the values of Poisson's ratio  $\nu = 0$  and  $\nu = 0.1$ , respectively. The explanation of the frequency spectrum structure is based on the analysis of dispersion relations for the propagation modes in an infinite plate. One of the characteristic frequencies of the infinite plate is the frequency of thickness resonance  $\Omega_T = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ .

In the case of  $\nu = 0$ ,  $\Omega_T = \sqrt{2}$  is determined exactly analytically and corresponds to the straight line in Fig. 1. Below this frequency, the spectrum is characterized by the presence of regions of interaction, where the curves approach to each other and then diverge without intersection. Each mode is formed by a set of descending or ascending segments belonging to different frequency curves. The existence of such types of motion cannot be explained with the framework of the theories for rods and plates. A correct classification of modes is based on the analysis of the vibration forms [3].

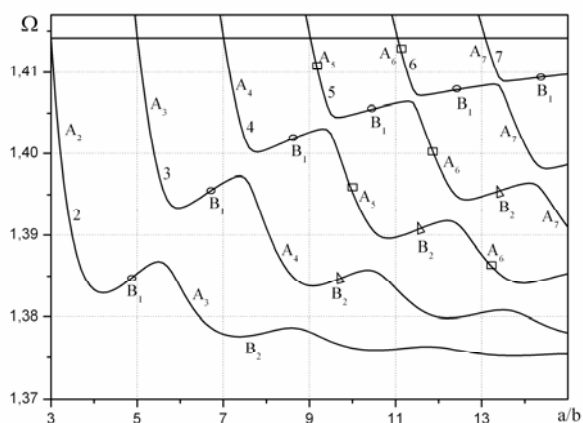


Fig. 1.

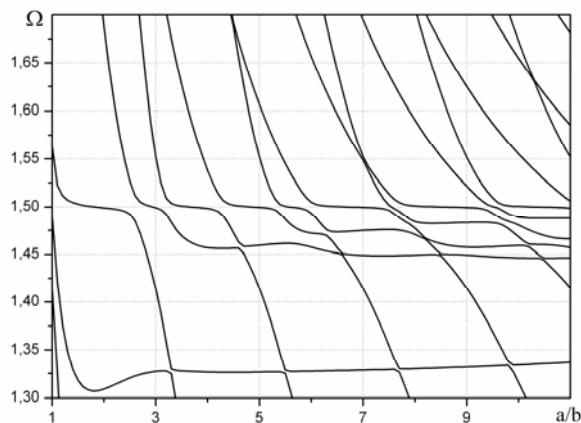


Fig. 2.

Coupling between thickness and plane types of motion when  $\nu \neq 0$  results in the disappearance of degenerating frequencies and the complication of the frequency structure. The thickness-resonance mode is formed by a set of horizontal plateau at the frequency  $\Omega_T = 1.5$ . However, additional plateaus below this frequency are presented. They correspond to parasitic resonances in the vicinity of the thickness resonance and are often observed experimentally by excitation of thickness vibrations of plates. The number of these plateaus increases while  $a/b$  is increased.

To reduce the excitation of parasitic modes two alternatives are available. One is to decrease the ratio  $a/b$ . However, the minimum value of  $a/b$  at which the thickness resonance is clearly observed increases on increasing  $\nu$ . Calculations show that, for example, for  $\nu = 0.4$  it equals to 9. Another alternative is to arrange the electrode design in order to increase the excitation efficiency for weak modes and to suppress the parasitic ones. The question on optimal electrode design is closely related to the analysis of the vibration patterns for the rectangle.

1. Cugnet B., Assaad J., Hladky-Hennion A. C. Characterization of matched piezoelectric transducer bars // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – 115, No. 6 – С. 2904-2913.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 6 – С. 3-19.

### ТОВЩИНИЙ РЕЗОНАНС У ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНАХ

На основі аналітичного розв'язку двовимірної задачі про коливання прямокутника проаналізовано вплив механічних та геометричних параметрів резонатора на ефективність збудження коливань в околі основної частоти товщинного резонансу.



UDC 678.7

## SIMPLIFIED METHOD FOR OBTAINING BASIC FREQUENCY OF AXI-SYMMETRICAL VIBRATIONS OF IN-PLANE LAMINATE CIRCULAR CLAMPED PLATE

**Katunin A.**

*Department of Fundamentals of Machinery Design, Faculty of Mechanical Engineering,  
Silesian University of Technology, Gliwice, Poland, e-mail: [andrzej.katunin@polsl.pl](mailto:andrzej.katunin@polsl.pl)*

Axisymmetrical transverse vibrations of in-plane laminate circular clamped plate were discussed. For obtaining the basic frequency of vibrations the well-known expression was applied:

$$\omega = \frac{\gamma}{R^2} \left( \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \right), \quad (1)$$

where  $\gamma$  is a coefficient of the basic frequency obtained by Cauchy's influence function method, and for constant thickness it is equal to 10,214 [1]. If transversal isotropic model is investigated, the rigidity  $D$  becomes a symmetrical matrix:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad \{D_{ij}\}_k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (2)$$

After several transformations and taking into consideration the cosine matrix (3) for interpretation the orientation of plies of laminate the simplified rigidity expression (4) can be presented.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$D = \sum_{k=1}^n \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{6(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left[ 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (E_2 \nu_{21} + 2G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})) + (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)(E_1 + E_2) \right]. \quad (4)$$

The simplification is in obtaining rigidity for the laminate by averaging elements of the rigidity matrix in main directions in each ply and summing it [2].

The accuracy of the method was considered. The epoxy GRP laminate circular plate (Table 1.) was taken into consideration and FEM model with high accuracy mesh was used for comparison.

Table 1. Material properties of laminate and plate geometry

$E_1$ , GPa	$E_2$ , GPa	$G_{12}$ , GPa	$\nu_{12}$	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	R, m	h, m	$h_0$ , m
38,283	10,141	3,533	0,366	1794	0,19	0,00528	0,00022

In Table 2. the comparison of basic frequencies depend on quantity of layers was presented, results of comparison of basic frequencies depend on different types of laminates presented in Table 3.

Table 2. Comparison of basic frequencies depend on quantity of plies

No.	Structural formula	S.M. [Hz]	FEM [Hz]	Error [%]
6	[0/60/ - 60/ - 60/60/0]	60,669	59,446	2,05
12	[0/60/ - 60/ - 60/60/0] <sub>S</sub>	114,35	118,88	3,81
18	[0/60/ - 60/ - 60/60/0] <sub>3S</sub>	169,51	178,28	4,92
24	[0/60/ - 60/ - 60/60/0] <sub>4S</sub>	225,07	237,63	5,28
30	[0/60/ - 60/ - 60/60/0] <sub>5S</sub>	280,79	296,93	5,44
36	[0/60/ - 60/ - 60/60/0] <sub>6S</sub>	336,59	356,15	5,49

Table 3. Comparison of basic frequencies depend on type of laminate

Type	Structural formula	S.M. [Hz]	FEM [Hz]	Error[%]
Unsymmetrical	[0/60/ - 60/0/ - 60/0/60] <sub>T</sub>	76,567	79,823	4,09
Mid-ply symm.	[0/60/ - 60/0̄] <sub>S</sub>	69,844	70,730	1,25
Antisymm.	[0/60/ - 60/0] <sub>A</sub>	79,080	81,827	3,36

Results presented in tables shows, that proposed simplified method can be applied for preliminary engineering calculations with high accuracy.

1. *Jaroszewicz J., Zoryj L., Katunin A.* Double estimators of basic frequencies of axisymmetrical vibrations of circular plates with variable thickness, 3rd Conference "Energy in Science and Technique", Suwalki 2004, p. 45-56 (in polish).
2. *Katunin A.* Modeling of natural frequency vibrations of circular transversal isotropic plate, 2nd Scientific Conference "Computer Methods – 2008", Gliwice 2008, p. 17-20 (in polish).

#### СПРОЩЕНИЙ МЕТОД ОТРИМАННЯ ОСНОВНОЇ ЧАСТОТИ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ЛАМІНАТНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ЗАКРІПЛЕНОЇ ПО КРАЮ

Запропонована трансформація матриці жорсткості, дає змогу спрощення обчислень основної частоти вісесиметричних коливань круглої ламінатної пластини з врахуванням орієнтації слоїв. Як показали дослідження, він може бути використаний для інженерних обчислень при довільній кількості слоїв та їх типу укладення з високою точністю.

## СЕКЦІЯ 6. “АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ БІОМЕХАНІКИ ТА РОБОТОТЕХНІКИ”

УДК 539.3

### ТРИВИМІРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТАЛОКЕРАМІЧНИХ ЗУБНИХ ПРОТЕЗІВ

Даляк Т.М.<sup>1</sup>, Кривенький Т.П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Івано-Франківський сектор ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
[opt@nung.edu.ua](mailto:opt@nung.edu.ua), <sup>2</sup> Івано-Франківський національний медичний університет,  
[Kryvenyj-T@yandex.ru](mailto:Kryvenyj-T@yandex.ru)

Суцільнолітні металокерамічні протези вважаються на сьогодні найдосконалішими із усіх видів зубних конструкцій, тому набули широкого вжитку в клініці ортопедичної стоматології. Однак, як показала клінічна практика, в процесі використання протезів одним із найпоширеніших ускладнень є порушення цілісності металокерамічного протезу – поява тріщин та відколів керамічного облицювання, переважно із вестибулярної поверхні конструкцій.

Вирішення проблеми розтріскування і відколів керамічного облицювання в металокерамічних конструкціях переводить з площини ортопедичної стоматології в площину механіки деформівного твердого тіла. Одним із способів запобігання розтріскування покриття є збільшення несучої здатності протезу за рахунок потовщення металеві основи. Це підтверджують результати механіко-математичного моделювання товщини каркасів металокерамічних зубних протезів [1] та клінічні спостереження [2].

Для дослідження напружено-деформованого стану металокерамічних конструкцій побудовано тривимірні моделі простих (одиничних) та складних (мостоподібних) протезів при різних клінічних ситуаціях. Методом скінченних елементів отримано розподіл еквівалентних напружень Мізеса у розглянутих конструкціях для випадків різної товщини металевого каркасу. Досліджено розподіл напружень у конструкціях залежно від геометричних форм протезів, від виду дефекту зубного ряду та від способу прикладання зовнішнього навантаження.

1. Кривенький Т. П., Рожко М. М., Даляк Т. М., та ін, Механіко-математичне обґрунтування товщини каркасів металокерамічних зубних протезів // Галицький лікарський вісник. – 2007. – № 1. – С. 48–50.
2. Чудинов К. В., Лавров А. А. Особенности быстрого восстановления сколов металлокерамики // Клиническая стоматология. – 2006. – № 3. – С. 32–34.

### 3-D MODELING OF METALOCERAMIC DENTAL PROSTHESIS

*The stress-strain state of tree-dimensional metaloceramic structures is investigated using finite element method. The equivalent von Mises stress is obtained in case of different metal foundation thickness.*



УДК 517.958:531.33

### КОМП'ЮТЕРНА МОДЕЛЬ МОВНОГО АПАРАТУ ЛЮДИНИ ДЛЯ СИСТЕМ СИНТЕЗУ МОВИ

**Крак Ю.В., Стеля І.О.**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
[yuri.krak@gmail.com](mailto:yuri.krak@gmail.com) [igor.stelia@gmail.com](mailto:igor.stelia@gmail.com)*

Розроблено математичне та програмне забезпечення для моделювання і аналізу звуків мови людини, що утворюються за допомогою голосових зв'язок та мовного тракту. Моделі голосових зв'язок, які є джерелом звуків, спільно з моделями мовного тракту складають основу для систем синтезу мови. Таким чином, створення комп'ютерних моделей та відповідного програмного забезпечення є актуальним для вивчення мовотворення.

В роботі за математичну модель голосових зв'язок обрана двомасова модель, відповідно до якої кожна з голосових зв'язок описується двома масами, що здійснюють автоколивання під впливом потоку повітря в голосовій щілині. В основу алгоритму для реалізації моделі голосових зв'язок покладений метод Кутта-Мерсона, який об'єднується в єдину ітераційну процедуру з методом послідовної верхньої релаксації для розв'язування нелінійної системи для змін тиску.

Для моделювання розповсюдження акустичних хвиль у мовному тракті як у неоднорідній акустичній трубі, що починається від голосових зв'язок та закінчується губами, використовується система рівнянь акустики, яка розв'язується методом „чехарда”. В якості вихідних даних для моделі тракту використовується потік, утворений голосовими зв'язками.

Розроблено графічний інтерфейс користувача моделі для зручного введення та редагування вихідних параметрів моделей, зокрема, завдання параметрів голосових зв'язок і геометричної форми тракту та відображення результатів моделювання голосового джерела і вихідного мовного сигналу у цифровому та графічному вигляді.

COMPUTER MODEL OF HUMAN ORGANS OF ARTICULATION FOR SPEECH SYNTHESIS SYSTEMS

*Mathematical facilities and software for human vocal folds and vocal tract models are developed. The models constitute a basis for speech synthesis systems.*



УДК 519.3

**ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ ПЕРІОДОНТУ НА ПОВЕДІНКУ ЗУБА  
ЛЮДИНИ В УМОВАХ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**Мандзюк Т.С.**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра інформаційних систем, [kis@franko.lviv.ua](mailto:kis@franko.lviv.ua)*

У стоматології при вивченні біомеханіки зуба людини одним із головних об'єктів дискусій є періодонт, який внаслідок своєї фіброволоконної будови на відміну від інших шарів зуба володіє сильно вираженою властивістю анізотропії.

Крім анізотропії, механічні властивості періодонта за показниками твердості та пружності сильно відрізняються від решти складових елементів конструкції зуб – щелепа і погано відповідають співвідношенням лінійної теорії пружності. Тому моделювання шару періодонта пов'язане зі значними математичними та обчислювальними труднощами, через що в багатьох дослідженнях механічні властивості пародонта у різний спосіб намагаються адаптувати до ізотропних моделей.

У даній роботі виконано аналіз числової моделі зуба із врахуванням ортотропності періодонту. Здійснено порівняльний аналіз головних характеристик поведінки шару періодонту у широкому діапазоні зміни його фізико-механічних параметрів.

За математичну модель вибрано тривимірні рівняння статичної теорії пружності. Побудову чисельних схем розв'язування даної задачі виконано із застосуванням методу Гальоркіна з просторовою ізопараметричною апроксимацією за методом скінчених елементів.

1. Мандзюк Т., Вовк В. Огляд проблем комп'ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології // Вісник Львівського університету. Серія прикл. матем. та інформ. – 2008. - 14. – С. 105–122



**NUMERICAL ANALYSIS OF PERIODONTAL LIGAMENT INFLUENCE ON HUMAN TOOTH BEHAVIOR UNDER FUNCTIONAL LOAD CONDITIONS**

*In this paper the analysis of the behavior of numerical human tooth model under functional load conditions taking into consideration anisotropy of periodontal ligaments (PDL) was carried out. The comparative analysis of the main characteristics of PDL behavior in the wide change range of its physical and mechanical parameters was performed.*



УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЛІВОГО ШЛУНОЧКА СЕРЦЯ. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН**

**Місюра Є.Ю.<sup>1</sup>, Місюра С.Ю.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Харківський національний економічний університет, e-mail: [misuraeu@mail.ru](mailto:misuraeu@mail.ru).

<sup>2</sup>Національний технічний університет "ХПІ", e-mail: [misurasu@mail.ru](mailto:misurasu@mail.ru)

Інтерес до фізично і геометрично нелінійних задач механіки деформівного твердого тіла пов'язаний з їх великим теоретичним та практичним значенням для розвитку нелінійної механіки. Широкою галуззю застосування зазначеної постановки проблеми є задачі біомеханіки – одного з порівняно нових та перспективних напрямів механіки деформівного твердого тіла. Так, багато досягнень є в галузі моделювання серцево-судинної системи людини та дослідження різних захворювань серця з точки зору механіки. Особливий інтерес становить аналіз напружено-деформованого стану (НДС) стінок серця, зокрема стінок його лівого шлуночка (ЛШ). Матеріал серця має нелінійні властивості, трансверсальну ізотропію, велику піддатливість та кускову однорідність при різних захворюваннях.

Доповідь присвячено прийнятій в сучасній науковій літературі методиці розв'язання задач механіки деформування серця, побудуванню математичної моделі ЛШ у вигляді зрізаного і замкнутого кусково-однорідного складених товстостінних еліпсоїдів, проведенню аналізу впливу на НДС моделі ЛШ чотирьох видів жорстких включень.

При побудові моделі ЛШ серця прийнято такі припущення:

– ЛШ апроксимовано складеним товстостінним еліпсоїдом (тілом обертання) та віднесено його до циліндричної системи координат;

– геометричні параметри моделі прийнято рівними середнім розмірам ЛШ людини;

– матеріал стінки задано однорідним або кусково-однорідним, ізотропним або трансверсально-ізотропним, майже нестисливим, гіперпружним;

– у стінці розташовано два жорстких включення: перше моделює основу серця (куполоподібна структура, в якій розміщено його клапани), друге – зону одного з чотирьох видів інфаркту міокарда (ендокардіальний, інтрамуральний, епікардіальний або трансмуральний), яку розташовано у вершині. Обидва включення моделюються ділянками стінки з підвищеною жорсткістю (модуль пружності включень у 5-8 разів більше, ніж в основної (здорової) частини [1]).

Розв'язуємо осесиметричну квазістатичну фізично і геометрично нелінійну задачу [1, 2] деформування ЛШ під дією заданого внутрішнього тиску, що змінюється від нуля до кінцево-діастолічного. Вводимо кінематичні граничні умови: на осі обертання  $u_r = 0$ ,  $u_\varphi = 0$  (у зоні основи) і  $u_z = 0$  на зовнішній поверхні основи.

При визначенні НДС моделі ЛШ враховано неоднорідність анізотропії матеріалу стінки, тобто залежність кута м'язових волокон від нормальної координати до товщини стінки [1]. Це пов'язано з тим, що матеріал ЛШ можна розглядати як однорідну сполучну тканину, армовану більш жорсткими спірално розташованими м'язовими волокнами. Тому матеріал стінки приймають трансверсально-ізотропним з віссю ізотропії, яка є дотичною в кожній точці до напрямку м'язового волокна. Кут спіралі змінюється по товщині стінки ЛШ серця за лінійним законом від  $-60^\circ$  на внутрішній поверхні стінки до  $+60^\circ$  на зовнішній.

Розрахунки показали, що модель ЛШ з умовно відсіченою основою і жорстким закріпленням зрізу, яку часто використовують в літературі, призводить до нереально великих напружень на зрізі [1, 2]. Для усунення цього недоліку застосовується розрахункова схема моделі ЛШ у вигляді замкненого кусково-однорідного складеного товстостінного еліпсоїда. Внутрішню поверхню моделі ЛШ утворено одним еліпсоїдом, а зовнішню – двома еліпсоїдами з різними великими піввісями.

Проведено чисельне дослідження впливу ступеня анізотропії, аналіз НДС і внутрішньопорожнинного об'єму моделі ЛШ за наявності жорстких включень у залежності від їхнього розташування і розмірів, а також геометричних і механічних параметрів стінки.

Отримані результати дозволили визначити вплив геометричних і механічних параметрів ЛШ на якість кровообігу.

1. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Нелинейное моделирование напряженно-деформированного состояния левого желудочка сердца в хронической стадии инфаркта миокарда // Пробл. машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 79–87.
2. Кантор Б.Я., Кунделев А.Ю., Мисюра Е.Ю. Биомеханика гиперупругих тел вращения. – Харьков: Форт. – 2007. – 192 с.

## THE MATHEMATICAL MODEL OF THE HEART LEFT VENTRICLE. THE STRESS-STRAIN STATE

*The mathematical model of the heart left ventricle as nearly incompressible piecewise-homogeneous transversely isotropic hyperelastic compound thick-wall ellipsoid with the account of the nonhomogeneous transverse isotropy of wall's material was constructed. The numerical investigation of the influence of the anisotropy degree, the analysis of the stress-strain state and the inside cavity volume of the model with the account of the relatively stiff inclusions depending upon their disposition and sizes as well as, geometrical and mechanical parameters of the wall were carried out.*



УДК 616.071; 616.005.6; 616.145

## ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРОТИЕМБОЛІЧНИХ ФІЛЬТРІВ НА ФІЗИЧНІЙ МОДЕЛІ КАВА-ВЕНИ

**Попадюк О.Я.**

*Івано-Франківський національний медичний університет, [olegpopadyuk@yandex.ru](mailto:olegpopadyuk@yandex.ru)*

Одним із методів ендоваскулярної профілактики тромбоемболії легеневої артерії є інтравенозна імплантація механічних пристроїв для затримки тромбоемболів – кава-фільтрів.

Мета пошуку – експериментально порівняти тромбовловлюючі властивості кава-фільтрів „Грінфілд” та „Осот”, що найчастіше застосовуються в клініці, та удосконаленого протиемболічного фільтра „Антел” [1, 2].

Фізичною моделлю кава-вени слугувала пластикова трубка з внутрішнім діаметром 30 мм, через яку помпували транспортну рідину, насичену різномірно розмірними тромбоімітантами, виготовленими з поролону та зі згустків бичачої крові. Бомбардування тромбами кожного пристрою, імплантованого у просвіт вени, повторювали тричі для більшої достовірності результатів.

У жодному випадку не вдалося встановити кава-фільтри „Грінфілд” та „Осот” без відхилення від осі порожнистої вени. Натомість пристрій для ендоваскулярної профілактики "Антел" завжди займав центральне положення вздовж осі кава-вени.

Тромбовловлюючі властивості фільтрів „Грінфілд” та „Осот” знижуються внаслідок збільшення відстані між ніжками, обумовленого перекосом пристроїв після імплантації. Траплялися випадки пропуску тромбоімітантів з розмірами 3 та 5 мм. Тромбозахоплюючі можливості кава-фільтра „Антел” однаково високі на усіх етапах експерименту через відсутності ануляції, яка неможлива в принципі завдяки центруючій дистальній та вловлюючій просимальній частинам фільтра з обмежувально-фіксуєчими елементами на

кінцях ніжок. Відцентрований фільтр уловлює тромботичні елементи з розмірами від 3 мм.

1. Патент UA № 22818, МПК А61F2/00, А61F2/01. Інтравенозний протиіемболічний фільтр „Антел” / О. Я. Попадюк, С. М. Генік. – Опубл. 25.04.2007. Бюл. № 5.
2. Попадюк О. Я., Шацький І. П. Удосконалення конструкції cava-фільтра // Сучасні проблеми механіки та математики. В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 200–201.

#### STUDY OF ANTIEMBOLIC FILTERS PROPERTIES ON THE PHYSICAL MODEL OF CAVA-VENA

*The experimental comparison of the antiembolic filters property to catch blood clots is made on the physical model of cava-vena.*



**СЕКЦІЯ 7. “ЧИСЛОВІ ТА АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ”**

УДК 539.3

**МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**Бобилєв Д.Є.**

*Криворізький державний педагогічний університет, [bob\\_d@i.ua](mailto:bob_d@i.ua)*

Розглядається кусково-однорідне тіло, яке складається із трьох областей  $S_1, S_2, S_3$ . Пружні характеристики яких, відповідно,  $E_i, n_i$ , та  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Задачу можна представити як три окремі крайові задачі, по одній для кожної фази  $S^{[n]}$ . Ці задачі пов'язані умовами неперервності на поверхнях контактів суміжних фаз. Переміщення й напруга фази  $S^{[n]}$  залежить тільки від функцій  $f_k^{[n]}$  на  $N^{[n]}$  елементах контуру  $\partial S^{[n]}$ ,  $k = x, y$ . Отже, завдання по-

лягає в побудові функцій  $f_k^{[n]}$  на кожному із  $\sum_{n=1}^M N^{[n]} = N$  граничних елементів так, щоб задовольнити граничним умовам і умовам неперервності на межах контакту областей.

При побудові системи алгебраїчних рівнянь для даної задачі, граничні елементи для фаз нумеруються послідовно, починаючи з фази  $S^{[1]}$ . Тоді елементи з номерами від 1 до  $N^{[1]}$  лежать на контурі  $\partial S^{[1]}$ , а елементи з номерами від  $N^{[1]} + 1$  до  $N^{[2]}$  – на контурі  $\partial S^{[2]}$  і т.д. Зусилля на межі  $\partial S^{[k]}$  фази  $S^{[k]}$  можна записані у вигляді ( $k = \overline{1, M}$ )

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xi}^{*[k]} &= \sum_{j=1}^{N_k} (T_{xx}^{[k]} f_{xj}^{[k]}) + \sum_{j=1}^{N_k} (T_{xy}^{[k]} f_{yj}^{[k]}) \\ \sigma_{yi}^{*[k]} &= \sum_{j=1}^{N_k} (T_{yx}^{[k]} f_{xj}^{[k]}) + \sum_{j=1}^{N_k} (T_{yy}^{[k]} f_{yj}^{[k]}) \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, N^{[k]}.$$

Це вирази можна використати для утворення системи  $2N$  алгебраїчних рівнянь із  $2N$  невідомими функціями  $f_{xi}$  й  $f_{yi}$ , розв'язання якої дозволить обчислити напруження.

**CALCULATION PROCEDURE OF STRESS-STRAIN STATE OF NONHOMOGENEOUS BODIES OF THE METHOD OF BOUNDARY ELEMENTS**

*The numerical calculation of elastic bodies with incommensurably thin and small elements of structure is usually integrated to the very high order and poor conditionality of an appropriate system of algebraic equations.*

УДК 519.63.4.001.57+517.54

## МЕТОД «ФІКТИВНИХ ОБЛАСТЕЙ» РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ОБЛАСТЯХ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ДІЛЯНКАМИ МЕЖ

Бомба А.Я., Гаврилюк В.І.

Рівненський державний гуманітарний університет, [abomba@ukr.net](mailto:abomba@ukr.net), [im\\_vova@ukr.net](mailto:im_vova@ukr.net)

Для деякої криволінійної області  $G_z = A'B'CD$  (див. рис. 1а), ( $A'B'CD \in ABCD$ ) обмеженої двома лініями течії  $A'D$  та  $B'D$ , екіпотенціальною лінією  $CD$  та вільною кривою  $A'B'$  розглядається модельна задача на знаходження потенціалу  $\varphi$ , положення вільної кривої, та інших характеристик фільтраційного процесу. Особливість задачі полягає в тому, що відповідна область комплексного потенціалу  $G_\omega$  (див. рис. 1б), не є канонічною. Однією із ділянок її границі є деяка (невідома) крива  $A'B'$ . Доповнивши дану область  $G_\omega$  до відповідного прямокутника  $G_\omega^*$  та умовно відобразивши даний прямокутник за допомогою аналітичної функції  $z = z(\omega)$  – характеристичної функції течії, у результаті, в площині  $(z)$  матимемо деяку область  $G_z^*$  як аналітичне продовження  $G_z$ . При цьому відповідна задача на конформне відображення матиме вигляд [1, 2]:

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi^*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad h|_{A'B'} = g(y), \quad \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2)$$

де перше рівняння є наслідком рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa \text{grad } h$  (закон Дарсі) та рівняння нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$ ,  $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$  – швидкість фільтрації,  $\varphi = \varphi(x, y)$  – потенціал у точці  $(x, y)$ ,  $\varphi = \kappa \cdot h(x, y)$ ,  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації,  $h(x, y)$  – напір у точці  $(x, y)$ ,  $g(y)$  – обмежена неперервно-диференційована функція,  $\psi = \psi(x, y)$  – функція течії комплексно спряжена до  $\varphi = \varphi(x, y)$ ,  $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$  – повна фільтраційна витрата. Тут

параметри  $Q$  та  $\varphi^*$ , рівняння кривих  $AD$ ,  $BC$ ,  $DC$ , функція  $g(y)$  є заданими,  $\varphi_*$  – шукається в процесі розв'язку задачі.

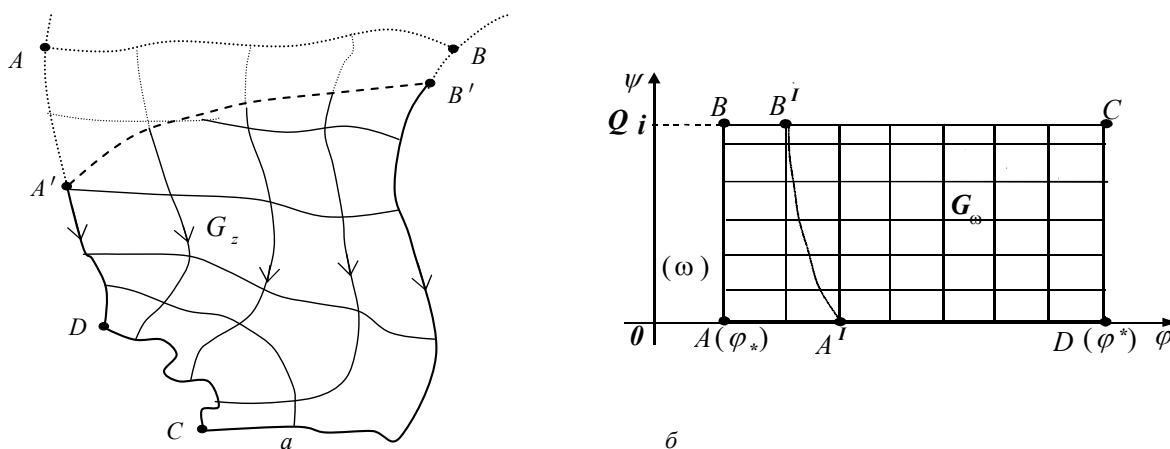


Рис. 1. Область фільтрації  $G_z$  з вільною кривою  $A'B'$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_\omega$  (б)

При побудові (а також обґрунтуванні) відповідного алгоритму, що ґрунтується на почерговому «замороженні» шуканих параметрів конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, тощо, використовувались ідеї методу блочної ітерації [1]. Проведено ряд тестових розрахунків при конкретних значеннях параметрів, при цьому побудовано динамічну сітку, знайдено положення вільної кривої та інші характеристики процесу.

1. Бомба А. Я., Гаврилюк В. И., Скопецкий В. В. Метод „фигтивных областей” и квазиконформных отображений решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С. 91–101.
2. Бомба А.Я., Булавацький В. М., Скопецкий В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.

**THE „FICTITIOUS REGIONS” METHOD TO THE SOLVING OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS IN ENVIRONMENTS WITH FREE BORDERS**

*To offered by the authors works variant of the “fictitious regions” method and methodology of conformal mappings for solving of boundary-value problems are transferred on a case of modelling tasks in environments with free borders.*



УДК 519.6

## ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ НЕГЛАДКИХ І РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Глебена М.І.<sup>1</sup>, Цегелик Г.Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ужгородський національний університет, <sup>2</sup>Львівський національний університет  
імені Івана Франка, e-mail: [kafmmsep@franko.lviv.ua](mailto:kafmmsep@franko.lviv.ua)

При розв'язанні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшукуванням екстремуму негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів відшукування абсолютного екстремуму як довільних неперервно-диференційованих, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами розглядається підхід до побудови чисельних методів відшукування абсолютного екстремуму довільних негладких і розривних функцій, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично [1]. В [2] такий метод побудовано для довільних функцій однієї змінної, в [3] – для функцій двох дійсних змінних. В доповіді розглядається побудова такого методу для функцій багатьох змінних.

1. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. №9 – С. 1273-1276.
2. Глебена М. І., Цегелик Г.Г. Модифікований чисельний метод відшукування абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 57–61.
3. Глебена М. І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод відшукування екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14-15. – С. 18–21.

### THE NUMERICAL METHOD OF FINDING OF THE EXTREMUM NON-DIFFERENTIAL AND DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF MANY REAL VARIABLES

*The numerical method of finding of the extremum non-differential and discontinuous functions of many real variables is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely.*



УДК 539.3

**ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАНЬ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ЗБУРЮЮЧИХ  
МОМЕНТІВ****Зінкевич Я.С., Козаченко Т.О.***Одеська державна академія будівництва та архітектури, [yaninaz@mail.ru](mailto:yaninaz@mail.ru)*

Досліджуємо швидкий обертальний рух відносно центру мас динамічно несиметричного супутника з порожниною, цілком заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса під дією моменту сил світлового тиску в гравітаційному полі. Обертальні рухи розглядаються в рамках моделі динаміки квазітвердого тіла, центр мас якого рухається по заданій фіксованій еліптичній орбіті довкола Сонця. Орбітальні рухи навколо Сонця з довільним ексцентриситетом передбачаються заданими. Проаналізовано систему, отриману після усереднення по руху Ейлера-Пуансо. Встановлено ефект убування кінетичної енергії обертальних рухів супутника. Еволюція осцилюючих змінних відбувається з різними середніми швидкостями по відношенню до мір малого параметра. Застосовано схему усереднення, запропоновану в [1]. Ця схема дозволяє розв'язати задачу на інтервалі часу, довжина якого пропорційна квадрату малого параметра. Визначено орієнтацію вектора кінетичного моменту в орбітальній системі координат. Проведено чисельний аналіз в загальному випадку і аналітичне дослідження в околі осьового обертання. Розглянуто рух в окремому випадку динамічно симетричного супутника.

Досліджено збурені рухи твердого тіла, близькі до регулярної прецесії у випадку Лагранжа, при вертикальних коливаннях точки опори, під дією відновлюючого моменту, залежного від повільного часу  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$  – малий параметр,  $t$  – час), а також збурюючого моменту, який повільно змінюється з часом. Припускається, що прискорення точки опори  $a(\tau)$  містить періодичну та випадкову складову:  $a(\tau) = g(\xi(\tau) + \rho \cos \eta \tau)$ , де  $\xi(\tau)$  – стаціонарний нормальний процес з нульовим середнім,  $\rho$  та  $\eta$  – амплітуда та частота коливань. Припускається, що кутова швидкість достатньо велика, її напрямок близький до осі динамічної симетрії тіла, а збурюючі моменти малі порівняно з відновлюючим моментом. Введено малий параметр, застосовано метод усереднення.

Отримано усереднену систему рівнянь руху в першому наближенні для суттєво нелінійної двочастотної системи. Однак відзначимо, що у виразах для кутів нутації та прецесії в першому наближенні не враховується вплив збурень. Тому для вказаних кутів знайдено вирази в другому наближенні. Вираз для кута нутації містить обмежений осцилюючий доданок з ненульовими вихідними даними. Для кута прецесії додаткові доданки, один з яких

залежить від  $\xi$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ , уточнюють формулу для кутової швидкості прецесії  $\omega_p = KC^{-1}r_0^{-1}$ , відому з наближеної теорії гіроскопів.

1. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней с быстрой и медленной фазами // ПММ. – 2002. - Т. 66. Вып. 2 – С.165-176.

#### EVOLUTION OF ROTATIONS OF SOLID IS UNDER THE ACTION OF PERTURBATION TORQUE

*We investigate fast rotational motion of dynamically asymmetric satellite with cavity filled with viscous fluid under the action of gravitational and light pressure torque. This problem is similar to the motion of the planet composed of a liquid core and rigid mantle. The system obtained after averaging with respect to Euler--Poinsot motion is analyzed. Numerical analysis shows that the kinetic energy is monotonically decreasing. Analytical analysis is conducted in neighboring of axial motion. Perturbed rotational motions of a rigid body, similar to regular precession in the Lagrange case, under stochastic vertical oscillations of point of support are investigated. The averaged system of equations of motion is obtained in the first and second approximations.*



УДК 531.38

#### ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПЕРЕРІЗУ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ГІРОСКОПУ ГЕССА

**Кириченко В.В.**

*Інститут прикладної математики і механіки НАНУ, [vkir@i.ua](mailto:vkir@i.ua)*

Динаміка твердого тіла, яка була сформульована працями Л. Ейлера в середині 18-го сторіччя, є теоретичною основою багатьох досліджень з нелінійної динаміки в сучасній науці і техніці (від космодинаміки до біомеханіки). Над задачею інтегрування рівнянь динаміки твердого тіла працювали, починаючи з Л. Ейлера, Ж.Л.Лагранж, С.В.Ковалевська, В.Гесс, С.А.Чаплигін та інші видатні вчені. Проте, незважаючи на всі зусилля, рух тіла в загальному випадку залишається усе ще мало вивченим. Ф.Клейн і А.Зоммерфельд висловили думку, що, певно, єдина можливість дослідити особливості руху тіла в загальному випадку пов'язана з аналізом часткових розв'язків.

Особливий інтерес у дослідників викликає вивчення руху гіроскопа Гесса [1] – твердого тіла, центр мас якого знаходиться на перпендикулярі до кругового перерізу гіраційного еліпсоїда (умова Гесса). Для гіроскопа Гесса отримано розв'язок Докшевича [2], розглянуті області хаотичного руху, вив-

чено поведження сепаратрисних багатovidів. На основі останніх результатів зроблений висновок щодо неінтегрованості рівнянь Ейлера-Пуассона за умов Гесса.

В даній роботі побудовано переріз Пуанкаре і за його допомогою чисельно вивчено рух гіроскопа Гесса в околі розв'язку Гесса. Вивчено збурений рух локсодромічного маятника Гесса. Введені канонічні змінні, що спрощують аналіз гетероклінічних траєкторій. Обчислено інтеграл Мельникова, який характеризує перетин сепаратрис. Дано якісний опис асимптотично маятникових рухів твердого тіла.

Ефективним інструментом комп'ютерного вивчення гамільтонових систем з двома ступенями вільності є розроблений А. Пуанкаре метод фазових перерізів. Для динамічної системи Ейлера-Пуассона за умов Гесса оберемо січну поверхню, трансверсальну до фазового потоку на інваріантному підпросторі, який задається співвідношенням  $x = 0$ . За таку поверхню в просторі  $\mathbf{R}^3(x, y, z)$  можна взяти прямий круговий циліндр  $y^2 + z^2 = R^2$ , вісь якого колінеарна до вектора  $\mathbf{r}$ , а напрямне коло радіуса  $R$  розташоване в площині  $x = 0$ . Величина  $R$  залежить від параметрів тіла, її можна підібрати таким чином, щоб усі траєкторії розв'язку Гесса трансверсально перетинали циліндр.

Фазові портрети розділені на два шари здвоєною сепаратрисою Гесса – точки із одного шару не переходять в інший.

В роботі за допомогою перерізу Пуанкаре докладно вивчені фазові портрети локсодромічного маятника, гіроскопа Гесса у випадку залежності інтегралів енергії і площин, в загальному випадку Гесса і розв'язку Докшевича. Для фіксованих інтегральних сталих  $h, k$  визначена і вивчена область точок перетину усіх траєкторій системи з поверхнею перерізу.

Вивчено і описано механізм виникнення хаотичних рухів в околі розв'язку Гесса.

1. *Hess W.* Uber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und uber eine partikulare Losung der Bewegung eines Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. - 1890. - 37, H.2. - S. 153-181.
2. *Докшевич А.И.* Об новом частном решении задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР. – 1966, 167, № 6, – С. 1251-1252.
3. *Ковалев А.М., Гашененко И.Н., Кириченко В.В.* О хаотических движениях и расщеплении сепаратрис возмущенного движения Гесса // Механика твердого тела. - 2005. - Вып. 35. - С. 19-30.

APPLICATION OF POINCARÉ MAPPING METHOD FOR INVESTIGATION OF HESS GYROSCOPE MOTIONS

*In the abstract properties of Hess gyroscope motions are investigated. Analytical investigations and computer experiments based on the numerical study of two-dimensional Poincaré mapping are realized. Special type of Poincaré cut is proposed. By means of this cut, phase portrait of motions is constructed and studied. The mechanism of chaotic motions appearing in the neighborhood of Hess solution has been studied and described. The principal properties of the perturbed motion in the stationary basis are given.*

\* \* \* \* \*

УДК 534.015.1

СТІЙКІСТЬ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Клименко А.О.

Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»,  
[klimann89@mail.ru](mailto:klimann89@mail.ru)

Розглядається модель пружинного маятника з двома степенями вільності (рис. 1). Модель складається з точкової маси  $m$ , закріпленої на одному із кінців лінійної пружини, другий кінець за допомогою циліндричного шарніра закріплено у нерухомій точці підвісу. Довжина пружини у ненапруженому стані рівна  $l$ , жорсткість пружини  $c$ . Досліджуються вільні коливання системи у вертикальній площині, які будемо описувати двома узагальненими координатами  $\rho$  і  $\varphi$ .

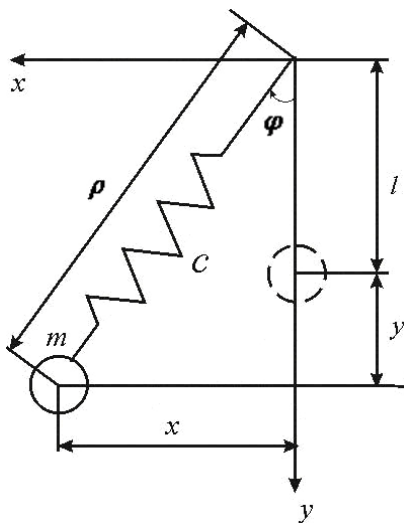


Рис. 1

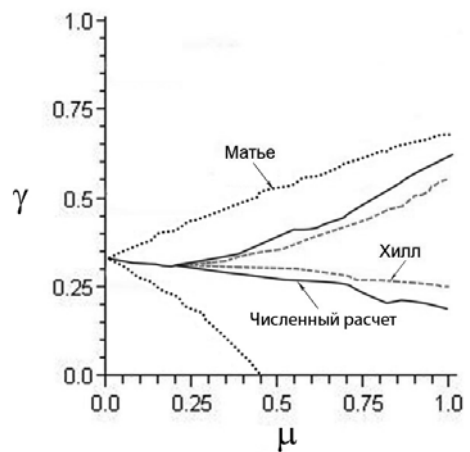


Рис. 2

Коливання системи можна представити у вигляді таких форм:

а) повздовжні коливання  $\varphi = 0$ ,  $z = z(t)$ ;

б) зв'язані коливання  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Стійкість першої форми коливань досліджувалась за допомогою рівнянь Мат'є і Хілла, а також чисельним інтегруванням. На рис. 2 показані границі областей стійкості та нестійкості першої форми коливань пружинного маятника ( $\mu$  – малий параметр,  $\gamma = mg / cl$ ). Области, обмежені цими границями, відповідають нестійким рухам маятника; поза їх межами знаходяться області стійких коливань маятника.

Стійкість другої форми коливань пружинного маятника досліджувалась чисельним методом, при цьому використовувалась наступна умова стійкості руху [1]:

$$\sqrt{(\Delta z(t))^2 + (\Delta \varphi(t))^2} \leq \xi \sqrt{(\Delta z(0))^2 + (\Delta \varphi(0))^2}, \quad (1)$$

де позначено:  $\Delta z(t) = z(t) - z_0$ ,  $\Delta \varphi(t) = \varphi(t) - \varphi_0$ ,  $\Delta z(0) = \frac{z_0}{k}$ ,  $\Delta \varphi(0) = \frac{\varphi_0}{k}$ ,

$z_0$  – початковий розтяг пружини,  $\varphi_0$  – початковий кут відхилення маятника від вертикалі,  $\xi \approx 10$ ,  $k \approx 100$ .

Стійкість коливань маятника означає те, що на всьому проміжку інтегрування рівнянь руху механічної системи повинна виконуватися умова (1). У разі, якщо умова (1) не виконується (хоча б один раз в процесі інтегрування), то коливання маятника є нестійкими. Границі областей стійкості і нестійкості для другої форми коливань побудовані на площині параметрів  $\omega^2$  та  $A$ , де  $\omega^2$  - квадрат частоти,  $A$  - амплітуда кутових коливань (рис.3). В області, яка обмежена цими границями, спостерігаються нестійкі коливання, поза ними коливання пружинного маятника є стійким.

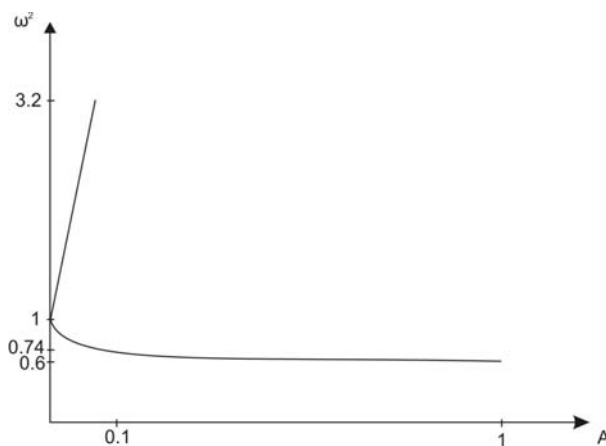


Рис.3.

Таким чином, у результаті проведених досліджень за допомогою числових розрахунків визначено області конструкційних параметрів пружинного маятника, при яких його коливання є стійкими.

1. *Mikhlin Yu.V., Shmatko T.V., Manucharyan G.V.* Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions // *Computers&Structures*. – 2004.- № 82. - p. 2735-2737.

### STABILITY OF THE NORMALIZED FORMS OF OSCILLATIONS OF THE SPRING PENDULUM

*The nonlinear normalized forms of oscillations of the spring pendulum were investigated. Through asymptotic methods analytical decisions and areas of stability motion are got. All calculations were tested by numerical methods.*

\* \* \* \* \*

УДК 517.95

### ОБЕРНЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ПРОСТОРОВІ КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ ІЗ РОЗРІЗОМ НА ПРЯМОКУТНІ ПАРАЛЕЛЕПЕДИ

Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О.

*Рівненський державний гуманітарний університет, [klimyuk@ukr.net](mailto:klimyuk@ukr.net),  
[dmitry@prigornitsky.com](mailto:dmitry@prigornitsky.com)*

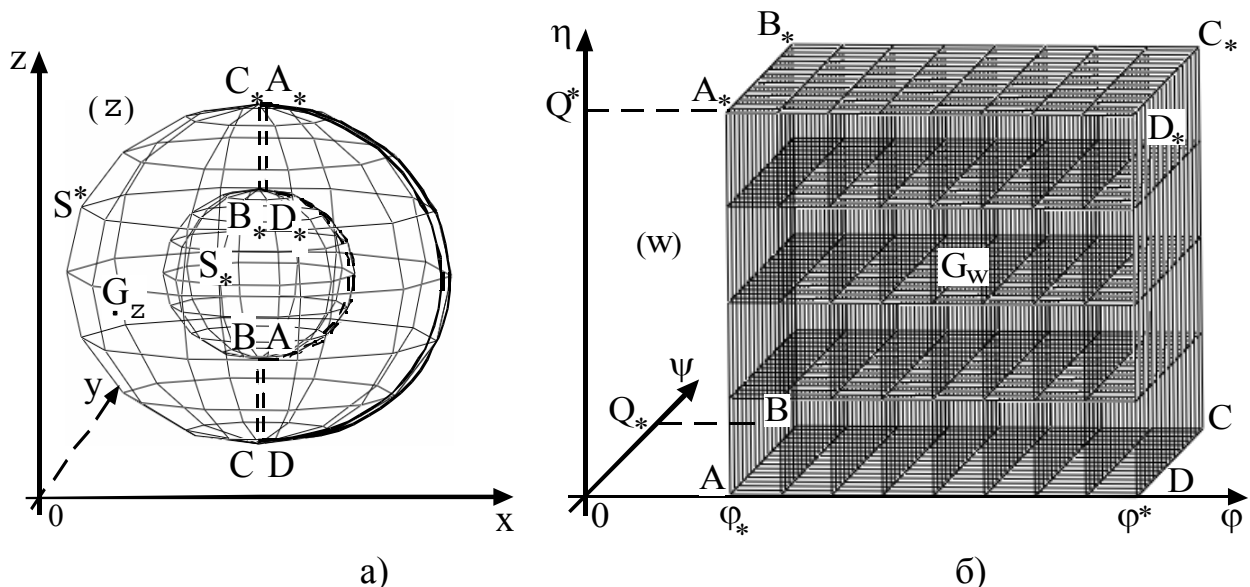


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

Для двозв'язної криволінійної області  $G_z$ , обмеженої двома екіпотенціальними гладкими поверхнями  $S_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$ ,  $S^* = \{z :$

$f^*(x, y, z) = 0$  (рис. 1), розглядається модельна задача, яка описує процес фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad (1)$$

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad (2)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  та  $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$  – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ,  $|\vec{v}| > v_* \gg 0$ ),  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації ( $\kappa = \text{const}$ , для зручності викладок покладемо  $\kappa = 1$ ).

Шляхом введення функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) і  $\mu = \mu(x, y, z)$  таких, що  $\text{grad } \varphi(x, y, z) = \mu(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) \times \text{grad } \eta(x, y, z)$  [1], фіксації на поверхні  $S_*$  деякої точки  $A$ , що належить лінії течії  $AD = \{z: \psi(x, y, z) = \bar{\psi}, \eta(x, y, z) = \bar{\eta}\}$  та виконання умовного розрізу  $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$  (рис. 1 а) вздовж відповідної поверхні течії  $ADD_*A_* = \{z: \psi(x, y, z) = \bar{\psi}, \eta(x, y, z) = \tilde{\eta}, 0 \leq \tilde{\eta} \leq Q^*\}$  (через  $ADD_*A_*$  та  $BCC_*B_*$  позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задачу (1)–(2) замінюємо більш загальною задачею (3)–(4) на просторове конформне відображення однозв'язної області  $G_z \setminus \Gamma$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta): \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$  (рис. 1б), де  $Q = Q_*Q^*$  – потік через довільний поперечний переріз течії:

$$\begin{cases} \varphi_x = \mu(x, y, z) \cdot (\psi_y \eta_z - \psi_z \eta_y), \\ \varphi_y = \mu(x, y, z) \cdot (\psi_z \eta_x - \psi_x \eta_z), \\ \varphi_z = \mu(x, y, z) \cdot (\psi_x \eta_y - \psi_y \eta_x), \\ \Delta \varphi = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \\ \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, \quad \eta|_{ABCD} = 0, \quad \eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*. \end{cases} \quad (4)$$

Для розв'язання оберненої задачі до (3) – (4) нами адаптовано числовий алгоритм розв'язання обернених крайових задач на конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на відповідні прямокутні [2], перевагою якого



є паралельне знаходження координат вузлів гідродинамічної сітки руху та фільтраційної витрати  $Q$ .

1. Рауз Х. Механика жидкости. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.
2. Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2008. – Вип. 5 (14). – С. 104-143.

**INVERSIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON SPATIAL CONFORMAL MAPPINGS OF DOUBLY-CONNECTED AREAS WITH THE CUT ONTO RECTANGULAR PARALLELEPIPEDS**

*Algorithm of solving of problem on spatial conformal mapping of doubly-connected area bounded by two equipotential surfaces with the cut onto the corresponding rectangular parallelepiped is designed.*



УДК 532.543

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СТОКУ РІДИНИ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ**

**Коковська Я.В.**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
кафедра інформаційних систем, e-mail: [yaryna.kokovska@gmail.com](mailto:yaryna.kokovska@gmail.com)*

На сучасному етапі життєдіяльності людство зіштовхнулося із проблемою раціонального використання природних ресурсів взагалі і водних, зокрема. Гідрологічні системи, до яких відносяться водозбори, річки, озера, піддаються сильним антропогенним впливам. Саме господарська діяльність людини при використанні водних ресурсів, регіональні і глобальні зміни клімату можуть мати значний вплив на гідрологічний цикл і процеси формування річкового стоку.

Виникає необхідність оцінювати ці зміни і, по можливості, передбачити стан гідрологічних систем в майбутньому. Деколи такі оцінки можна зробити на основі експериментальних даних шляхом порівняння гідрологічних характеристик до і після антропогенного впливу. Однак можливості таких оцінок дуже обмежені, тому що гідрометеорологічні умови швидко змінюються. Одними з основних перспектив досліджень поведінки природних



систем на даний час є використання чисельних методів математичного моделювання.

В задачах моделювання стоку рідини в руслах для знаходження швидкості  $U$  та площі поперечного перерізу  $F$  використовується в [1] система рівнянь наступного виду:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho u \frac{\partial q}{\partial x} = \rho \bar{u} BR - g \cos \theta F \frac{\partial H}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} F \\ \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = BR \end{cases} \quad (1)$$

де  $q = UF$  – розхід потоку,  $H=H(x,t)$  – глибина потоку,  $R$  – інтенсивність крапель дощу,  $B=b(x,y)-a(x,y)$  – ширина русла,  $g=9,8 \text{ м/с}^2$  – прискорення сили тяжіння,  $\rho = \rho(x,t) > 0$ ,  $\mu = \mu(x) > 0$  – відповідно густина маси та коефіцієнт в'язкості рідини в точці  $x$ .

Для опису руху нестисливої рідини в псевдопризматичному руслі з вертикальною площиною симетрії [2] отримана наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{g} \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(\alpha-1) U}{g} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{U^2}{C^2 R} + \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система рівнянь (2) описує одновимірний нестановлений, повільно-змінний рух рідини у руслі, де  $\alpha$  - відомий в гідродинаміці коректив середньої швидкості, який використовують для врахування нерівномірності розподілу швидкостей по живому перерізу потоку. Значення коефіцієнта знаходиться в межах (1, 6) в залежності від характеру потоку [3].

У плоскому рівномірному потоці з логарифмічним розподілом усереднених швидкостей величина  $\alpha$  визначена за формулою [4]:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\chi^2} \frac{g}{C^2},$$

де  $\chi$  та  $C$  відповідно параметр Кармана та коефіцієнт Шезі.

Вплив коефіцієнта  $\alpha$  на значення швидкості зображено на Рис.1.

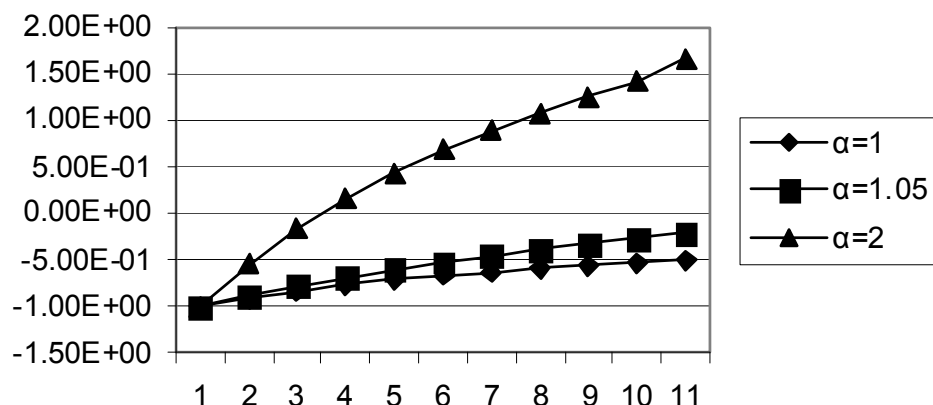


Рис. 1. Значення швидкості при різних значеннях коефіцієнта  $\alpha$

Для системи рівнянь (2) побудована варіаційна задача, проведена дискретизація по часу та по просторовій змінній з використанням методу скінченних елементів. Розроблена програма, яка апробувалася на різних тестових прикладах.

1. Венгерський П.С. Побудова математичної моделі стоку рідини у відкритих руслах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2009.
2. Венгерський П.С., Коковська Я.В. Математичне моделювання руслового стоку вологи // International Conference „Dynamical System Modeling and Stability Investigation”-“DSMSI-2007”. Theses of conference reports. May 22-25. Kyiv. 2007. - P. 174.
3. Виноградов Ю.Б. Математическое моделирование процессов формирования стока. - Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 312 с.
4. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 311 с.

#### APPLICATION OF THE FINITE ELEMENTS METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF PROBLEMS OF FLUID FLOW IN OPEN CHANNELS

*One of the fundamental prospects of the behavior of natural systems at the moment is to use numerical methods of mathematical modeling. In the given report the approach is considered to the modeling of flow of incompressible fluid in a pseudoprismatic river-bed with the vertical plane of symmetry. The conditions of stability are described for the set flow. It is entered and the value of corrective of medium speed is analysed for different types of flows in rivers. The variation problem description which was solved by the finite-elements method is formulated. Results are tested on an example, that has the analytical solution, and also congruences of results of calculations is done with laboratory experimentations of other authors.*



УДК 51-74:622.24.05

## МОДЕЛЮВАННЯ З'ЄДНАННЯ З НАТЯГОМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Корнута В.А.**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, 76019, [ikg@nung.edu.ua](mailto:ikg@nung.edu.ua)*

Для виконання задач енергетичної стратегії України [1] по забезпеченню населення та промисловості нафтою та газом необхідно проводити значний об'єм розвідувального та експлуатаційного буріння. Понад 80% проходки здійснюється з використанням шарошкових доліт, більше половини яких складають долота, оснащені вставним твердосплавним озброєнням. Широке впровадження прогресивних типів опор шарошок бурових доліт вивело на перший план відому проблему випадання та сколювання робочих поверхонь твердосплавних зубців озброєння шарошок.

Аналіз експериментальних та промислових даних літературних джерел з [2, 3] дає можливість зробити висновок, що при забезпеченні відповідності матеріалів інструменту та режимів роботи породам, які розбурюють, однією з головних причин, що можуть спричинити випадання зубців, є зміна натягу внаслідок пластичної деформації матеріалу корпусу шарошки при складанні з'єднання “зубець-шарошка” за прийнятою на вітчизняному долотному виробництві технологією.

Для оцінки впливу способу складання на надійність утримання використовуємо величину роботи, необхідної для випресування зубця. Значення роботи оцінюємо використовуючи скінченно-елементні моделі з'єднання, утвореного термічним та пресовим способом. Досліджено параметри напружено-деформованого стану деталей з'єднання та відношення величини роботи для різних способів складання.

1. Енергетична стратегія України на період до 2030 року [Електрон. ресурс] / КМУ, №145-р від 15.03.06. <http://zakon1.rada.gov.ua/signal/kr06145a.doc>
2. *Крылов К. А.* Повышение эффективности и долговечности буровых долот / К. А. Крылов, О. А. Стрельцова. –М. : Недра, 1983. – 206с.
3. Совершенствование методов технологического обеспечения качества изготовления шарошечных долот / [Н. А. Болотова, А. Л. Бровер, В. С. Кантор и др.]. — М. : ВНИИБТ, 1980. — 134 с. — (Тема № 58)

## FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR PRESSURE COUPLING

*This article is devoted “tungsten carbide insert-roller cone” pressure coupling simulation for the exposure fall and splitting off indents reasons.*



УДК 531.8+62-50

## МОДИФІКАЦІЯ ГІБРИДНОГО ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ЗАДАЧ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

**Литвин Б.А.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН  
України, [dept25@iapmm.lviv.ua](mailto:dept25@iapmm.lviv.ua)*

Запропоновано модифікацію гібридного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням для розв’язування задач мінімізації функцій  $n$ -змінних з областю визначення у вигляді гіперкуба. У запропонованій модифікації поєднано низку відомих операторів схрещування і мутації: а) оператори схрещування – Unimodal Normal Distributed Crossover (UNDX), одноточкове, Simulated Binary Crossover, BLX- $\alpha$ , двоточкове, арифметичне; б) оператори мутації – неоднорідна, Гаусова, Мугленбейна, числовий зсув [1-3]. Відзначимо, що оператор схрещування UNDX використовує 3 особини для генерації потомків і також використовується як оператор мутації [2]. Особливістю запропонованої модифікації є послідовне застосування операторів схрещування і мутації, при якому заміна хромосом предків на хромосоми потомків відбувалась лише у випадку покращення пристосованості особин у популяції. Працездатність та ефективність запропонованого алгоритму випробувано для таких тестових функцій: узагальнена сфера, Растрігіна, Акля, Розенброка [1] (функції Акля і Растрігіна є багатоекстремальними). Розмірність вектора оптимізації для кожної з тестових функцій становила 5, 10, 25, 50, 100, 200 і 300. На прикладі функції Розенброка досліджено вплив параметрів числової схеми розробленого генетичного алгоритму на його ефективність.

1. *Herrera F., Lozano M., Sánchez A. M.* Hybrid crossover operators for real-coded genetic algorithms: an experimental study // *Soft Comput.* – 2005. – No 9. P. 280-298.
2. *Nakanishi H., Kinjo H., Oshiro N.* Searching performance of a real-coded genetic algorithm using biased probability distribution function and mutation // *Artif. Life Robotics.* – 2007. – No. 11. - P. 37-41.
3. *Michalewicz Z.* Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. 3rd // Springer-Verlag: New York, 1998. – 387 p.

MODIFICATION OF HYBRID GENETICS ALGORITHM FOR REAL PARAMETER FUNCTIONS MINIMIZATION PROBLEMS

The modification of hybrid real-coded genetic algorithm in which in consecutive order combined some well-known crossover and mutation operators is developed. Effectiveness of the developed algorithm is tested on some generally used test functions.

\* \* \* \* \*

УДК 519.6

ТОЧНА ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НА ПІВОСІ

Паздрій О.І.

Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12,  
79013, м. Львів, Україна [oksanapazdriy@gmail.com](mailto:oksanapazdriy@gmail.com)

Точні триточкові різницеві схеми (ТТРС) та триточкові різницеві схеми (ТРС) високого порядку точності для нелінійної крайової задачі

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2u = -f(x,u), \quad x \in (0, \infty), \quad m = \text{const} > 0,$$

$$u(0) = \mu_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

розроблено в [1].

У цій роботі розглядається крайова задача

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m^2 \frac{du}{dx} = -e^{-m^2x} f(x,u), \quad x \in (0, \infty), \quad m = \text{const} > 0,$$

$$u(0) = \mu_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Для чисельного розв'язування задачі на скінченній нерівномірній сітці  $\bar{\omega}_N = \{x_j \in [0, \infty), j = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, h_j = x_j - x_{j-1} > 0, h_1 + h_2 + \dots + h_N = x_N\}$  побудовано ТТРС з точною нелінійною крайовою умовою на правому граничному кінці сітки  $x_N$ .

$$(au_{\bar{x}})_{x,j} = -T^{x_j} (f(\xi, u(\xi))), \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0 = \mu_1, \quad -a(x_N)u_{\bar{x},N} = \beta_2 u_N - \tilde{T}^{x_N} (f(\xi, u(\xi))),$$

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \quad u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j}, \quad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$a(x_j) = \frac{m^2 h_j}{e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\beta_2 = m^2 e^{m^2 x_N},$$

$$T^{x_j}(f(\xi, u(\xi))) = \frac{1}{\hbar_j \left( e^{-m^2 x_j} - e^{-m^2 x_{j+1}} \right)} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( e^{-m^2 \xi} - e^{-m^2 x_{j+1}} \right) f(\xi, u(\xi)) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_j \left( e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 x_j} \right)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( e^{-m^2 x_{j-1}} - e^{-m^2 \xi} \right) f(\xi, u(\xi)) d\xi,$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\tilde{T}^{x_N}(f(\xi, u(\xi))) = \frac{1}{e^{-m^2 x_{N-1}} - e^{-m^2 x_N}} \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left( e^{-m^2 x_{N-1}} - e^{-m^2 \xi} \right) f(\xi, u(\xi)) d\xi +$$

$$+ e^{m^2 x_N} \int_{x_N}^{\infty} e^{-m^2 \xi} f(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

Доведено існування та єдиність розв'язку ТТРС, а також збіжність ітераційного методу послідовних наближень для її розв'язування. Для побудови ТТРС в кожному вузлі сітки необхідно розв'язати за один крок дві допоміжні задачі Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на відрізках  $[x_{j-1}, x_j]$  (вперед) та  $[x_j, x_{j+1}]$  (назад), а також нелінійну крайову задачу на відрізку  $[x_N, \infty)$ .

1. Gavriilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., and Makarov V. L. Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2007. – Vol. 7, No. 1. – P. 25–47.

#### EXACT DIFFERENCE SCHEM FOR NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM ON THE SEMIAXIS

*For a boundary value problem for a nonlinear second order differential equation on the semiaxis an exact three-point difference schem (EDS) is built. Existence and uniqueness of the solution of EDS and convergence of iterative method of successive approximation for its solution is proved.*

УДК 519.7

## ПРО ЗАДАЧУ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗАЛІЗНИЧНОЇ СИСТЕМИ УКРАЇНИ

Поліщук Д.О.

*Інформаційно-обчислювальний центр Львівської залізниці,  
[iocpsdmyro@railway.lviv.ua](mailto:iocpsdmyro@railway.lviv.ua), [dept25@iapmm.lviv.ua](mailto:dept25@iapmm.lviv.ua)*

Укрзалізниця, як цілісний промислово-виробничий комплекс є прикладом реально функціонуючої складної динамічної системи (СДС). В її структурі налічується [1] 1684 станції, серед яких 126 основних вокзалів, пов'язаних між собою коліями, експлуатаційною протяжністю понад 22 тис. км, більше 250 обслуговуючих підприємств, парк з 26 тисяч вантажних та пасажирських вагонів та 6 тисяч рухомих засобів, функціонування яких забезпечується колективом працівників чисельністю 375 тис. чол. Елементи даної системи розрізняються по типу, призначенню, структурі та способу опису. Властивості цієї системи визначаються не лише властивостями її елементів, але й постійною взаємодією між ними. Остання забезпечується відповідною багаторівневою ієрархічною системою управління, структура якої побудована за територіальним принципом (Укрзалізниця складається з 6 регіональних залізниць, кожна з яких містить певну кількість підсистем нижчого рівня – дирекцій залізничних перевезень, що відповідають одиницям адміністративно-територіального поділу України). Укрзалізниця є відкритою системою. Вона взаємодіє із залізницями 7 сусідніх країн. Територією України проходять три залізничні міжнародні панєвропейські транспортні коридори і п'ять коридорів Організації співпраці залізниць (ОСЗ).

Очевидно, що побудувати достатньо адекватний класичний опис функціонування такої СДС як цілісного об'єкту, особливо з урахуванням впливу великої кількості внутрішніх і зовнішніх, об'єктивних та суб'єктивних чинників у вигляді певної системи звичайних диференціальних рівнянь чи у варіаційній постановці – надскладна проблема.

Залізнична галузь України щорічно забезпечує перевезення понад 85,1% (300 млн. т.) всього обсягу вантажів та біля 54,5% (500 млн.) пасажирів, тобто є основою всієї транспортної системи країни. Звідси випливає актуальність розробки засобів неперервного автоматизованого моніторингу функціонування Укрзалізниці, тобто методів об'єктивної оцінки її поточного стану, а також підходів до коротко- та довгострокового прогнозування поведінки як окремих елементів, так і системи загалом. Така оцінка надасть корисну інформацію для розробки способів оптимізації елементів залізничної транспортної системи, резерв підвищення ефективності якої за деякими оцінками [2] сягає 20%.

Серед основних задач оцінювання можна назвати порівняння поточного стану системи з попередніми її станами в сенсі «покращення» чи «погіршення», визначення якості функціонування досліджуваної СДС порівняно з іншими системами аналогічного типу та призначення тощо [3]. Не менш важливою є задача знаходження незадовільно функціонуючих елементів системи, збій у роботі яких може призвести до виходу з ладу всієї СДС чи окремих її підсистем. Це, насамперед, стосується систем з лінійною структурою до яких відносяться вітки залізничних колій без галужень. Дійсно, якість функціонування окремого транспортного коридору чи його ділянки залежить від надійності та безперебійності роботи кожного елемента цього коридору – станцій, ділянок колій, обслуговуючих підприємств, елементів системи управління тощо. Тому оцінювання системи проводитимемо шляхом багатопараметричної, багатокритеріальної та різнобічної оцінки якості функціонування кожного її елемента та міжелементних взаємодій з подальшою агрегацією отриманих на елементному рівні оцінок.

На підставі знання історії попередніх оцінювань поведінки системи, її підсистем та елементів у певний період часу можна визначити якість її функціонування на заданий наступний період. Прогнозування поведінки елементів залізничної системи може бути коротко- та довготерміновим. Короткотермінове прогнозування здійснюється на період доби, тижня, місяця і зводиться загалом до оцінки наслідків введення у встановлений графік руху додаткових поїздів. Довгострокове прогнозування проводиться для кількомісячного чи кількарічного періоду і спрямоване на аналіз наслідків більш глобальних процесів, зокрема, постійного збільшення об'ємів пасажирських та вантажних перевезень тощо.

Відзначимо, що ефективне функціонування транспортної системи залежить від надійності роботи станцій та колій, що їх поєднують. Тому оперативне оцінювання стану елементів залізниці та прогнозування їх поведінки надасть можливість уникати кризових ситуацій.

1. Офіційний веб-сайт Укрзалізниці: <http://www.uz.gov.ua/>
2. *Притула М., Шпакович Р.* Моделювання та розрахунок оптимальних параметрів руху поїздів // Фізико-матем. моделювання та інф. технології. – 2007, вип. 5. – С. 139–145.
3. *Polishchuk D., Polishchuk O., Yadzhak M.* Solution of some problems of evaluation of the complex systems: I. Methods // Зб. наук. праць 15-ї Міжн. конф. з автоматичного управління АВТОМАТИКА–2008, Одеса, 23–26 вересня 2008 р. – С. 968–971.

#### ABOUT EVALUATING PROBLEM OF STRUCTURAL ELEMENTS FUNCTION OF UKRAINIAN RAILWAY SYSTEM

*Ukrainian railway is considered as complex dynamical system. Evaluating and forecasting problems are formulated for structural elements of railroad like stations and tracks are formulated.*



УДК 539.3:519.6

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНИМ ВАРІАНТОМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Рябокоть Сергій Андрійович

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, [sorg1@mail.ru](mailto:sorg1@mail.ru)

Дослідженню напружено-деформованого стану пластин з отворами при різних зовнішніх навантаженнях присвячена велика кількість робіт, зокрема [1–3]. Знаходження точного розв'язку крайових задач в аналітичному виді можливо лише в деяких окремих випадках навантаження тіл та при окремих умовах їх закріплення. Так в [2] методом мультипольного розкладу отримано розв'язок задачі про два взаємодіючі отвори в нескінченій напруженій площині. Одним із найбільш ефективних чисельних методів дослідження напружено-деформованого стану тонких пластин з отворами є проекційно-ітераційний варіант методу скінченних елементів [4–6], який дозволяє зменшити затрати машинного часу порівняно з традиційним методом скінченних елементів (МСЕ). В задачах, в яких має місце концентрація напружень, доцільно використовувати адаптивні сітки. В даній роботі проводиться дослідження напружено-деформованого стану пластини з двома круговими отворами проекційно-ітераційним варіантом МСЕ на послідовності адаптивних сіток.

**Постановка задачі.** Задана прямокутна пластинка з двома однаковими

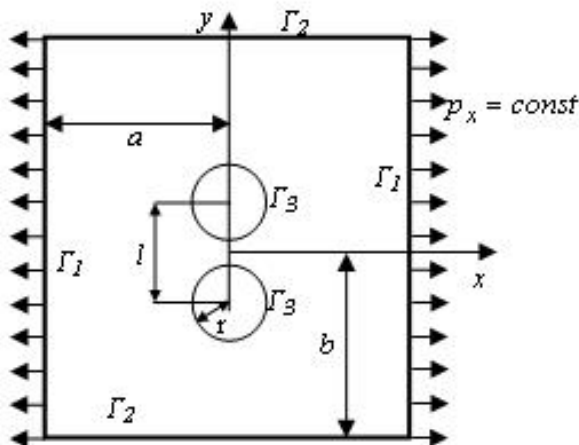


Рис. 1. Схема навантаження пластини

круговими отворами, які розташовані симетрично відносно центру пластини (рис. 1). Відрізок, що сполучає центри отворів, позначимо  $l$ , а кут між цим відрізком і віссю  $Ox$  —  $\varphi$ . На частині зовнішньої межі  $\Gamma_1$  задані зусилля  $p_x = const$ , а на іншій частині зовнішньої  $\Gamma_2$  і внутрішній  $\Gamma_3$  межі пластини нормальні і дотичні напруження дорівнюють нулю. Необхідно визначити поля переміщень і напружень у пластині.

Задачу будемо розв'язувати у варіаційній постановці за допомогою проекційно-ітераційного варіанту МСЕ на послідовності адаптивних сіток [6] при використанні методу послідовної верхньої релаксації.

Результати отримано для квадратної сталюї пластинки при  $a=b=0,5$  м,  $l = 0,02$  м,  $r = 0,02$  м,  $\varphi = 90^\circ$ . Розв'язок задачі знайдено проєкційно-ітераційним варіантом МСЕ на послідовності 6-ти адаптивних сіток за 14 хв, а традиційним МСЕ – за 15 год 10 хв. При цьому знайдені чисельно  $\sigma_\varphi$  відрізняються від аналітичного розв'язку [2] не більше ніж на 5%.

На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

- 1) розв'язок задачі, отриманий проєкційно-ітераційним варіантом МСЕ, має високий ступінь вірогідності (похибка не більше 5% порівняно з аналітичним розв'язком);
- 2) проєкційно-ітераційний варіант МСЕ потребує у 65 раз менше часу розрахунку на ПК порівняно з традиційним МСЕ;
- 3) проєкційно-ітераційний варіант МСЕ можна застосовувати до розв'язання широкого класу задач теорії пружності, зокрема, для пластин з отворами, не накладаючи обмеження на розміри пластини та отворів і взаємне розташування отворів.

1. Максимович О.В. Определения и оптимизация напряженного состояния анизотропных пластинок с отверстиями и трещинами. - Автореф. дис. канд. техн. наук. – Луцк, 2002. – 19 с.
2. Мокряков В.В. Метод мультиполюных разложений в задачах теории упругости для плоскости с круговым отверстием: - Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. наук, Москва, 2008. – 136 с.
3. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
4. Балашова С. Д., Тавадзе Э. Л. О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д.: Вид-во ДГУ, 1996. – С. 128–134.
5. Гарт Э. Л., Гудрамович В. С., Рябокоть С. А. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Вип. 12. – Дніпропетровськ, 2008. – С. 34–42.
6. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов на последовательности адаптивных сеток // Техническая механика. – № 2. – 2007. – С. 92–100.

#### RESEARCH ON DEFLECTED MODE OF THE PLATE WITH TWO CIRCULAR HOLES BY PROJECTIVE-ITERATIVE VARIANT OF THE FINITE ELEMENT METHOD

*Numerical research of stress fields distribution in a thin isotropic rectangular plate with two circular holes under tension is developed. The algorithm of construction adaptive grids is proposed. Efficiency comparison of a projective-iterative variant of the finite element method for sequence of adaptive grids with the traditional one is given. The obtained numerical results with analytical solution are compared.*

УДК 539.3

## АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Смирнова Н.О., Дадаян З.Ю.

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, [dadayan.zy@gmail.com](mailto:dadayan.zy@gmail.com)

В роботі реалізовано та проаналізовано 4 нелінійних методи оцінки параметрів ВФ: метод Ньютона-Гаусса, Хартлі, Левенберга і Марквардта. Програми, що реалізують алгоритми методів, написані мовою Turbo C.

Чисельний експеримент проводився для виробничих функцій Кобба-Дугласа (1) і функції з постійною еластичністю заміни CES (2):

$$Y(K, L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, \quad (1)$$

$$Y(K, L) = (\alpha \cdot K^\beta + (1 - \alpha) \cdot L^\beta)^\gamma, \quad (2)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, A$  – параметри, що підлягають оцінюванню,  $K$  і  $L$  – фактори виробництва,  $Y$  – показник випуску продукції.

Критерієм задачі є мінімізація суми квадратів відхилень:

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{t=1}^n (Y_t - (\alpha \cdot K_t^\beta + (1 - \alpha) \cdot L_t^\beta)^\gamma)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta, \gamma} \quad (3)$$

$$Q_2(A, \alpha, \beta) = \sum_{t=1}^n (Y_t - A \cdot K_t^\alpha \cdot L_t^\beta)^2 \rightarrow \min_{A, \alpha, \beta} \quad (4)$$

де  $K_t, L_t$  – фактори виробництва у момент часу  $t$ ,  $Y_t$  – випуск у момент  $t$ ,  $n$  – довжина часового ряду.

Був проведений великий чисельний експеримент на часових рядах різної довжини. Отримані наступні висновки:

- а) швидкість збіжності залежить від вибору початкового наближення;
- б) якщо необхідно отримати оцінку параметрів ВФ (2) за мінімальну кількість ітерацій, то краще використовувати метод Марквардта, якщо ж потрібна більш точна оцінка, то переважніше використовувати один з інших методів;
- в) якщо довжина часового ряду не дуже велика, то всі методи працюють приблизно однаково;
- г) чим більше довжина часового ряду, тим більші відмінності спостерігаються. Перевагу можна віддати методам Ньютона-Гаусса та Хартлі.

2. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. – М.: ГУ ВШЭ, 2001.

NONLINEAR METHODS OF ESTIMATION THE PARAMETERS OF PRODUCTION FUNCTIONS ANALYSIS

\* \* \* \* \*

УДК 517.938

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА НА ПРУЖНІЙ ОПОРІ

Успенський Б.В.

Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»,  
[Uspensky.kubes@gmail.com](mailto:Uspensky.kubes@gmail.com)

Досліджується обертовий рух однодискового ротора на пружному валі з малим ексцентриситетом диску (рис. 1). Ротор закріплено на двох опорах, одна з яких є пружною (з кубічною характеристикою пружності). Ексцентриситет диска ротора  $\varepsilon$  вважаємо малим у порівнянні з його радіусом. Диск закріплено посередині валу перпендикулярно до нього. Ротор здійснює обертовий рух з постійною кутовою швидкістю.

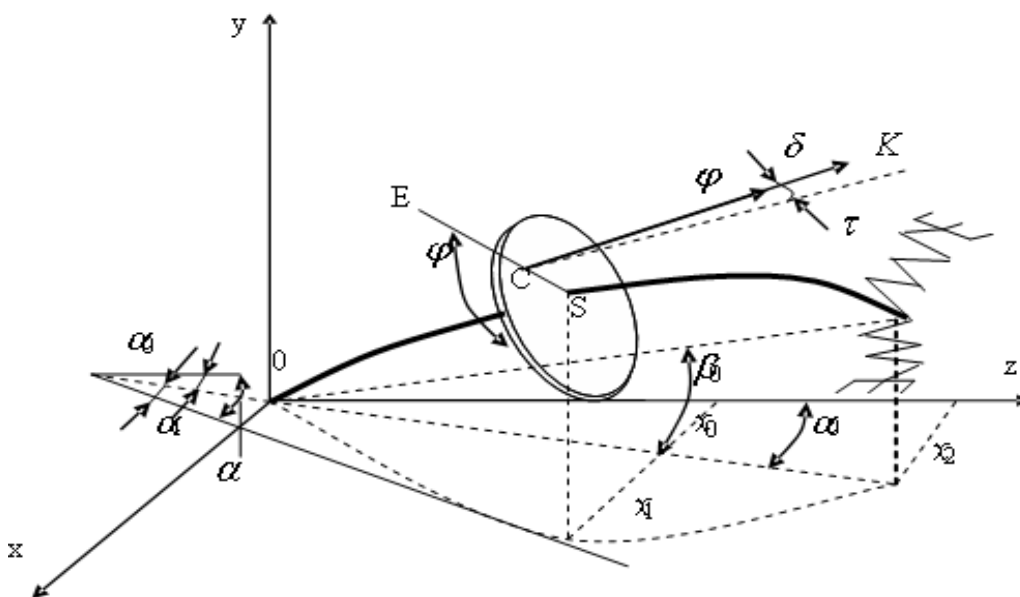


Рис. 1

Математичну модель руху ротора було побудовано у формі рівнянь Лагранжа II роду [1]. У безрозмірних змінних ці рівняння можна представити у такій формі:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -Ax + N\mu(x + Q\alpha)^3 + \Omega^2\chi\mu \cos \Omega\tau \\ \ddot{y} = -Ay + N\mu(y + Q\beta)^3 + \Omega^2\chi\mu \sin \Omega\tau \\ \ddot{\alpha} = -I\Omega\dot{\beta} - v^2\alpha + Mx + \mu(x + Q\alpha)^3 \\ \ddot{\beta} = I\Omega\dot{\alpha} - v^2\beta + My + \mu(y + Q\beta)^3 \end{cases}, \quad (1)$$

де  $\mu$  – малий параметр. Співвідношення (1) є системою нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з кубічною нелінійністю.

Результати чисельного інтегрування системи (1) наведено на рис. 1.

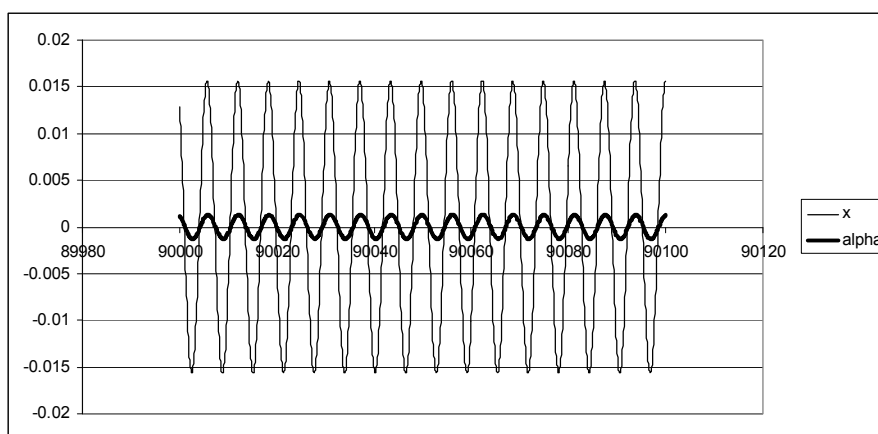


Рис. 2.

Координати  $y$ ,  $\beta$  поведуть себе аналогічно до  $x$ ,  $\alpha$ . Як бачимо, система здійснює гармонічні коливання, при цьому частота коливань кутових координат не відрізняється від частоти коливань лінійних координат.

Для аналізу системи (1) було використано також метод багатьох масштабів [1]. Узагальнені координати  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , а також час  $\tau$  було розкладено в асимптотичний ряд

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu\tau_1 + \dots; x = x_0 + \mu x_1 + \dots; y = y_0 + \mu y_1 + \dots; \\ \alpha &= \alpha_0 + \mu\alpha_1 + \dots; \beta = \beta_0 + \mu\beta_1 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

У результаті система (1) розпадається на дві системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь з правими частинами спеціального вигляду. Розв'язок системи нульового наближення має такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 e^{i\sqrt{A}\tau_0} + \bar{C}_1 e^{-i\sqrt{A}\tau_0}, \quad y_0 = C_2 e^{i\sqrt{A}\tau_0} + \bar{C}_2 e^{-i\sqrt{A}\tau_0} \\ \alpha_0 &= \xi_1 e^{i\omega_1\tau_0} + \bar{\xi}_1 e^{-i\omega_1\tau_0} + \xi_2 e^{i\omega_2\tau_0} + \bar{\xi}_2 e^{-i\omega_2\tau_0} + \xi_H e^{i\sqrt{A}\tau_0} + \bar{\xi}_H e^{-i\sqrt{A}\tau_0}; \\ \beta_0 &= \zeta_1 e^{i\omega_1\tau_0} + \bar{\zeta}_1 e^{-i\omega_1\tau_0} + \zeta_2 e^{i\omega_2\tau_0} + \bar{\zeta}_2 e^{-i\omega_2\tau_0} + \zeta_H e^{i\sqrt{A}\tau_0} + \bar{\zeta}_H e^{-i\sqrt{A}\tau_0}. \end{aligned}$$

Тут  $C_1, C_2, \xi_1, \xi_2$  – комплексні модуляційні змінні. Зауважимо, що ці величини є незмінними відносно масштабу часу  $\tau_0$ , однак, у загальному випадку, вони є функціями масштабу часу  $\tau_1$ .

Для побудови модуляційних рівнянь, тобто, для встановлення залежності між модуляційними змінними  $C_1, C_2, \xi_1, \xi_2$  і часом  $\tau_1$ , було виключено секулярні члени з рівнянь першого наближення. Побудова модуляційних рівнянь проводилася в умовах зовнішнього та внутрішнього резонансів:

$$\Omega = \sqrt{A} - \mu \frac{\sigma}{2}; \quad 2\sqrt{A} = \omega_1 - \omega_2 + \mu\sigma, \quad (3)$$

де  $\sigma$  – параметр розбалансування, що характеризує наближеність власних частот коливань системи до частоти зовнішньої сили. Після переходу від комплексних змінних  $C_1, C_2, \xi_1, \xi_2$  до дійсних  $x_i, y_i, i = 1, \dots, 4$ , отримуємо стаціонарну систему модуляційних рівнянь (8 нелінійних диференційних рівнянь першого порядку).

За допомогою чисельних методів було здійснено пошук нерухомих точок системи модуляційних рівнянь на прикладі конкретної системи. Залежність розташування цих точок від значення параметру  $\sigma$  представлено на рис. 3.

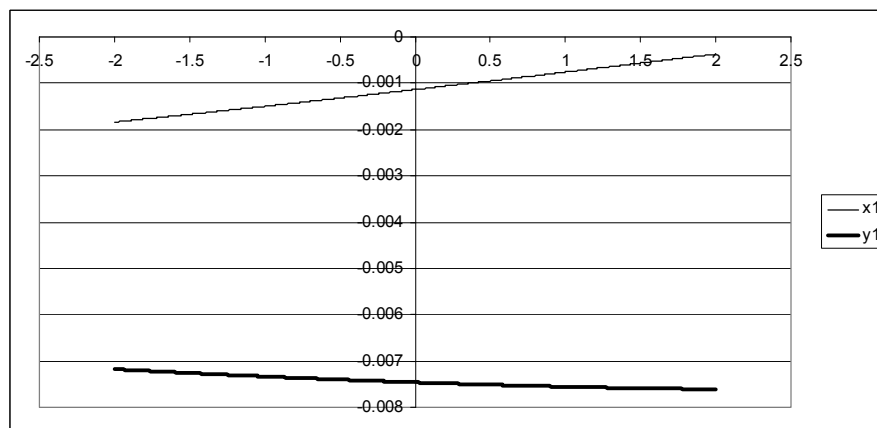


Рис. 3

Залежності на рис. 3 відповідають коливанням координати  $x$  при різних значеннях параметру  $\sigma$ . Для координати  $y$  залежності мають аналогічний вигляд. Всі нерухомі точки, що відповідають кутовим координатам, розташовані на осі абсцис. Нерухомі точки є стійкими, що відповідає гармонічним коливанням системи. Розв'язок, що ґрунтується на результатах аналітичного дослідження за допомогою метода багатьох масштабів, дає частоту і амплітуду коливань, близькі до відповідних характеристик, отриманих за допомогою чисельного інтегрування рівнянь руху (2).

1. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
2. Филиппов А.П. Колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1965. – 716 с.

NONLINEAR OSCILLATIONS OF SOME DISC ROTOR ON FLEXIBLE BASEMENT

The equations of some disc elastic rotor on nonlinear flexible base are developed. The multiple scales method is applied to analyze nonlinear dynamic of such system in case of internal and external resonances. Periodic motions of the rotor are analyzed.



УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ h-АДАПТИВНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ ОКОЛІВ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ П'ЄЗОЕЛЕКТРИКА

Чабан Ф.В.

Львівський національний університет імені Івана Франка, [cfedir@gmail.com](mailto:cfedir@gmail.com)

У роботі розглянуто побудову h-адаптивної схеми МСЕ для варіаційних задач про вимушені усталені коливання п'єзоелектрика [1,4]. Особливу увагу приділено пошуку та дослідженню резонансних частот. В ролі індикаторів адаптування використовуємо АОП [2], які сконструйовані з використання задачі про похибку апроксимації МСЕ та спеціальних функцій бульбашок.

**Постановка задачі.** Розглянемо варіаційну задачу про вимушені усталені коливання п'єзоелектрика, що займає обмежену область  $\Omega \subset R^d$  точок  $x = (x_1, \dots, x_d)$  [3]

$$\begin{cases} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0, \ell = (l_*, r_*) \in \Phi' = V' \times Q', \\ \text{знайти вектор амплітуд } \psi = (u_*, p_*) \in \Phi = V \times Q \text{ такий, що} \\ -\omega^2 m(u_*, v) + i\omega a(u_*, v) + c(u_*, v) - e(p_*, v) = \langle l_*, v \rangle, \forall v \in V, \\ i\omega g(p_*, q) + i\omega e(q, u_*) + z(p_*, q) = \langle r_*, q \rangle, \forall q \in Q, \end{cases} \quad (1)$$

де простори допустимих переміщень та потенціалів визначаються як  $V = \{v \in [H^1(\Omega)]^d : v = 0 \text{ на } \dot{\Gamma}_u\}$ ,  $Q = \{q \in H^1(\Omega) : q = 0 \text{ на } \dot{\Gamma}_p\}$ , амплітуди навантажень як  $l_* = l_1 + il_2$ ,  $r_* = r_1 + ir_2$  та амплітуди переміщення та потенціалу як  $u_* = u_1 + iu_2$  та  $p_* = p_1 + ip_2$  відповідно.

**Дискретизація варіаційної задачі.** Підставивши розклади амплітуди в рівняння (1) та виконавши низку перетворень, просумуємо білінійні форми

правої частини у форму  $\Pi(\omega; \phi, \varphi)$ , а лінійні функціонали лівої частин у функціонал  $\langle \chi, \varphi \rangle$ . Отримаємо спрощене рівняння задачі (1) у вигляді

$$\Pi(\omega; \phi, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi = (v_1, q_1, v_2, q_2) \in W = \Phi \times \Phi \quad (2)$$

Застосувавши метод Гальоркіна, перенесемо знаходження розв'язку з простору  $W$  до його певним чином вибраного скінченновимірною підпростору  $W_h := \Phi_h \times \Phi_h$ ,  $\Phi_h \subset \Phi$ ,  $\dim W_h = N(h) < +\infty$ . Таким чином, дискретизована за Гальоркіним задача має вигляд

$$\begin{cases} \text{задано частоту } \omega = \text{const} > 0, \chi \in W' \\ \text{знайти вектор } \phi_h = (u_1^h, p_1^h, u_2^h, p_2^h) \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi(\omega; \phi_h, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W_h. \end{cases} \quad (3)$$

**Задача про похибку.** Застосувавши МСЕ до побудови простору  $W_h$  задачі (3), знайдемо наближення  $\phi_h$ , яке використаємо для формулювання варіаційної задачі про похибку

$$\begin{cases} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0 \text{ та апроксимацію } \phi_h \in W_h; \\ \text{знайти похибку } e := \phi - \phi_h = (e^1, \xi^1, e^2, \xi^2) \in E := W \setminus W_h \text{ таку, що} \\ \Pi(\omega, e, \varphi) = \langle \rho(\omega, \phi_h), \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle - \Pi(\omega, \phi_h, \varphi) \quad \forall \varphi \in E. \end{cases} \quad (4)$$

Дискретизацією задачі (4) формулюємо задачу про оцінювач похибки

$$\begin{cases} \text{задано частоту } \omega = \text{const} > 0, \text{ апроксимацію } \phi_h \in W_h \text{ та } E_h \subset E, \dim E_h < +\infty; \\ \text{знайти оцінювач похибки } e_h := (e_h^1, \xi_h^1, e_h^2, \xi_h^2) \in E_h \text{ такий, що} \\ \Pi(\omega; e_h, \varphi) = \langle \rho(\omega; \phi_h), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in E_h. \end{cases} \quad (5)$$

**Критерій резонансної частоти.** Будемо вважати частоту резонансною, якщо вона характеризується збуреннями енергетичних характеристик в порівнянні з іншими частотами околу частот, що досліджується.

1. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – К.:Выща шк., - 1989. – 184 с.
2. Квасниця Г., Остапов О., Хапко Т., Чабан Ф. Апостеріорний оцінювач похибок апроксимацій МСЕ в задачах про вимушені усталені коливання // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. - 2008. - с. 69.
3. Шинкаренко Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний // Дифференц. уравнения. -1993. - Т. 29, №.7. - с. 1252-1260.
4. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. - Киев: Наук.думка, - 1989. – 228 с.

PIEZOELECTRIC RESONANCE FREQUENCIES NEIGHBORHOODS ANALYSING USING  
H-ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD



*It was proposed piezoelectric resonance frequency search algorithm, witch performs forced steady –state vibrations and built h-adaptive finite element schema to find approximate solutions of the variation problem that models such process. To select frequency as resonance it is used strategy based on the comparison of the energy characteristics values on the different vibration frequencies. As an indicator of adaptation need it is used a posteriori errors estimator values built using approximation error problem and its approximation using special bubble function on triangle finite element. The efficiency and reliability of proposed algorithms is illustrated by numeric results of the solved model problems.*



УДК 519.62

## МОДИФІКОВАНА АДИТИВНО-УСЕРЕДНЕНА СХЕМА РОЗЩЕПЛЕННЯ

**Черниш Р.І.**

Український науково-дослідний гідрометеорологічний інститут, [chernysh@uhmi.org.ua](mailto:chernysh@uhmi.org.ua)

**Вступ.** Застосування сучасних комп'ютерних технологій для ефективного розв'язання прикладних задач потребує використання чисельних алгоритмів, що реалізуються паралельним чином. Для цього не обов'язково розробляти абсолютно новий алгоритм; у більшості випадків достатньо звести до паралельної форми існуючий метод. Адитивно-усереднений метод (АУМ) [1] вже має структуру, яка забезпечує його паралельну реалізацію на рівні чисельного алгоритму. Проте його програмне втілення має певні труднощі, які пов'язані із наявністю тісних інформаційних зв'язків між окремими підзадачами. Відтак, очікувана ефективність паралельної реалізації втрачається внаслідок інтенсивного обміну даними. Пропонується модифікувати АУМ із метою покращення часових характеристик паралельної реалізації за рахунок поступок у точності розв'язку.

**Модифікований адитивно-усереднений метод (МАУМ).** Розглянемо на проміжку  $[0; T]$  задачу із однорідними крайовими умовами вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^r \Lambda_k u = f, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} \equiv 0, \quad u(0) = u^0, \tag{2}$$

де  $f = \sum_{k=1}^r f_k$  та всі  $f_k$  належать до того ж класу функцій, що і  $f$ .

МАУМ для задачі (1) – (2) має такий вигляд [2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial y_k}{\partial t} + \Lambda_k y_k = f_k, \quad t \in [qm\tau; (q+1)m\tau], \quad k = \overline{1, r}, \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r y_k, \quad t = (q+1)m\tau, \quad (4)$$

де  $q = \overline{0, Q-1}$ ,  $m\tau Q = T$ ,  $\tau$  – часовий крок,  $m \in \mathbb{N}$  – параметр схеми.

На етапі (3) здійснюється незалежне (паралельне) розв’язання усіх підзадач на протязі  $m$  кроків. Початковою умовою для них є значення  $y^{qm}$ . На етапі (4) здійснюється усереднення розв’язків цих підзадач. Параметр  $m$  регулює частоту застосування процедури усереднення (4). Зокрема при  $m = 1$  МАУМ зводиться до АУМ.

Для розв’язку, що отриманий за схемою (3) – (4), має місце оцінка

$$\|y^{mQ}\| \leq \exp(crT) \left( \|u^0\| + T \sum_{k=1}^r \|f_k\| \right),$$

де  $\|f_k\| = \max_{n=1, \dots, mQ} \|f_k^n\|$ ,  $c = \text{const} > 0$ .

**Параметр МАУМ.** Кількісна оцінка впливу параметра  $m$  на точність виражається відстанню між розв’язками, що отримані за АУМ  $y_{(1)}$  та за МАУМ  $y_{(m)}$ :

$$\|y_{(m)} - y_{(1)}\| \leq c_1 T \tau (m-1).$$

Кількісна оцінка впливу параметра  $m$  на загальний час розв’язання задачі у випадку паралельної реалізації етапу (3) має вигляд:

$$\theta(m, \tau) = T(a + b/m)/\tau.$$

Проте більш інформативною є безрозмірна функція відносних часових витрат

$$\theta_1(m) = (\theta(1, \tau) - \theta(m, \tau)) / (\theta(1, \tau) - \theta(+\infty, \tau)).$$

Аналіз цієї функції свідчить про її монотонне зростання та обмеженість зверху. Тому існує таке значення  $m_0$ , що при  $m > m_0$  функція  $\theta_1$  змінюється мало. Практично доцільно обмежитися множиною  $m \in \{1, \dots, 10\}$ , яка забезпечує до 90% теоретично можливого зменшення часу розв’язання.

Таким чином, МАУМ є узагальненням АУМ. Він забезпечує можливість адаптування алгоритму до потреб конкретної задачі шляхом вибору оптимального параметру за критерієм „якість – витрати”.

1. Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными

уравнениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – 14, № 1 – С. 246–250.

2. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1 – С. 100–107.

#### MODIFIED ADDITIVELY-AVERAGED SPLITTING SCHEME

*The modification of additively-averaged scheme is suggested. The improvement consists in averaging at each  $m$ -th time step of numerical integration. The estimation of solution is given. The solving accuracy and problem time dependences of the scheme parameter are given too. The practical set of the parameter value is defined. It is noticed that the modified scheme is a generalization of additively-averaged scheme.*

\* \* \* \* \*

УДК 539.3

### ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ДВОКРОКОВОГО МЕТОДУ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Яровий А.Т., Страхов Є.М.

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, кафедра оптимального керування та економічної кібернетики, [ouek@onu.edu.ua](mailto:ouek@onu.edu.ua), [swebus86@mail.ru](mailto:swebus86@mail.ru)

Розглядається задача мінімізації функції багатьох змінних без обмежень:

$$\min \varphi(x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

Для її розв'язування використовується двокроковий метод з наступним алгоритмом:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \beta_k s^k, \\ s^0 &= -\varphi'(x^0), \\ s^k &= -H_k \varphi'(x^k) + \xi_k s^{k-1}, \\ \xi_k &= \frac{\|\varphi'(x^k)\|^2}{\|\varphi'(x^{k-1})\|^2}, \end{aligned}$$

де  $\beta_k$  - довжина кроку у напрямку спуску  $s^k$ , а матриці  $H_k$  перераховуються рекурентним способом, як у методах змінної метрики, наприклад, методі ДФП:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x^k (\Delta x^k)^T}{(\Delta x^k)^T \Delta g^k} - \frac{H_k \Delta g^k [H_k \Delta g^k]^T}{(\Delta g^k)^T H_k \Delta g^k},$$

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k,$$
$$\Delta g^k = \varphi'(x^{k+1}) - \varphi'(x^k)$$

Алгоритм опробований на великій кількості тестових прикладів. Результати вказують на те, що даний алгоритм у більшості випадків працює краще, ніж метод спряжених градієнтів, тобто дає краще наближення до точки мінімуму за меншу кількість ітерацій.

Доводиться теорема про збіжність методу.

**Теорема.** Якщо

- 1) функція  $\varphi(x)$  опукла, диференційована,
- 2) множина точок  $R = \{x | \varphi(x) \leq \varphi(x^0)\}$  обмежена:  $\text{diam } R = \eta(x^0) = \eta < \infty$ ;
- 3) процес  $\{x^k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  релаксаційний, то

$$\varphi(x^m) - \varphi(x^*) \leq \mu_0 \left[ 1 + \mu_0 \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x^k) - \varphi(x^{k+1})}{\|\varphi'(x^k)\|^2} \right]^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

де  $x^*$  - точний розв'язок задачі (1),  $\mu_0 = \varphi(x^0) - \varphi(x^*)$ .

При більш жорстких умовах на функцію  $\varphi(x)$  отримані більш точні оцінки.

1. Карманов В.Г. Математическое программирование. М., Наука, 1986, 285 с.
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М., Наука, 1980, 384 с.
3. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, 1975, 319 с.

#### STUDYING OF CONVERGENCE OF MINIMIZING METHOD OF MULTIVARIABLE FUNCTION

Consider the problem of unconditional minimization of multivariable functions, proposed an algorithm for its solution.



UDC 519.676

## NUMERICAL METHODS FOR UNCERTAINTY OF MEASUREMENTS' RESULTS CALCULATION

Novikov V.V.

ESC "IASA" NTUU "KPI", [vovan@novikov.biz.ua](mailto:vovan@novikov.biz.ua)

Any measurement result is incomplete without a clear statement of uncertainty in the value obtained. Only when uncertainties are known and evaluated can measurement results be used for practical purposes. The growth and importance of quantitative measurement underpinning trade and commerce, in addition to the traditional fields of science and technology, has made it essential for an increasingly broad audience to understand uncertainty calculations for measurements results.

Several approaches can be used to provide an estimate of the measurand and the associated uncertainty, and a coverage interval for the measurand for a prescribed coverage probability. These include Principle of Maximum Entropy, Bayesian treatment (probabilistic modeling), Propagation of distributions (functional modeling) [1]. The latter is used to relate the measurand to model input quantities about which information is available, and is the basis of obtaining the probability density function (PDF) for the measurand from the PDFs assigned to the input quantities. In some simplest cases the PDF for the measurand can be obtained analytically. Otherwise, approximate and numerical implementations of the propagation of distributions are available, such as the ISO Guide's uncertainty framework [2] and a Monte Carlo method (MCM)[1,3]. In a number of studies, the preferred use of a MCM is shown comparing to approximate analytical methods [3,4].

For practical problems, applying MCM can take a lot of time to compute the results due to computing complexity of the method and inefficient choice of the number of model realizations (trials of the method,  $M$ ). That may be unacceptable in concrete circumstances the result of the measurement is needed.

Several works [5] state to make a choice of  $M=10^5..10^6$  for practical problems, arguing that for "most problems" the accuracy of modeling will be enough and computing won't take a lot of time for "most problems" on most "modern PCs". To choose any  $M$  a prior may bring risks [3,4]. Firstly, it may come out, that accuracy of modeling won't be enough for concrete problem and that fact stays unknown for the researcher because of the stochastic nature of the method. Secondly, chosen  $M$  a prior brings enough accuracy but many unnecessary calculations may arise (and that fact is also unknown).

It is obvious, that a prior choice of  $M$  should be avoided for solving practical problems. In order to complete that task, the algorithm is proposed as a modifica-

tion of MCM with adaptive optimum choice of  $M$  for the required accuracy that takes into account the stochastic nature of the method.

The basis of the method lies in next steps: 1) choose small  $M (< 10^5)$ ; 2) generate all quantities and evaluate the model; 3) calculate coverage interval (measure of uncertainty) for desired probability and width of coverage interval for the limits of the coverage interval; 4) compare the latter width with required accuracy for the prescribed probability; 5) increase  $M$  by some number if required accuracy is not met and go to step 2 for the added number of trials for  $M$ ; 6) if width is not bigger than the required accuracy, then take the coverage interval and other statistics as results of the method, calculated for that accuracy.

Comparison of the presented modification and the original MCM was made for the theoretical abstract measurement model with different accuracies required and for real measurement model with accuracy required for that measurement in practice. Results of comparison showed high effectiveness of the modification, which will allow to implement the method in practice. Moreover, modification can guarantee the required accuracy will be always met.

Future work will include further improvement of the MCM and implementation of the modified MCM on distributed and multiple processors systems.

1. *Cox M., Forbes A., and others.* Accounting for physical knowledge in obtaining measurements results and associated uncertainties // *Metrology for a Sustainable Development.* – 2006. – № 2 – P. 171-175.
2. *Захаров И.П., Кукуш В.Д.* Теория неопределенности в измерениях. – Х.:Консум, 2002. – 256 с.
3. *Новиков В.В.* Вычисление расширенной неопределенности // *Системы обробки інформації.* – Харків. – 2007. – Вип. 6(64). – С. 73–77.
4. *Новиков В.В.* Численные методы в вычислении неопределенности // *Системы обробки інформації.* – Харків. – 2008. – Вип. 4(71). – С. 126-128.
5. *Walter Bich, Maurice G. Cox, Peter M. Harris.* Evolution of the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ // *Metrologia* – 2006. – № 43. – P. 161–166.

#### ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

*В роботі розглянуто застосування методу моделювання Монте-Карло для оцінювання точності результатів вимірювань в рамках концепції невизначеності. Запропоновано варіант модифікації методу, що полягає в оптимальному виборі кількості реалізацій методу в рамках заданої точності. Проведене порівняння запропонованої модифікації з основним методом показало ефективність модифікації, що дозволить впровадити метод в практику.*



## СЕКЦІЯ 8. “ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ”

УДК 517.5

НАЙКРАЩІ  $M$ -ЧЛЕННІ ТРИНОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ  
КЛАСІВ  $B_{p,\theta}^\Omega$  ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Войтенко С.П.

Інститут математики НАН України, [svmath@mail.ru](mailto:svmath@mail.ru)

Досліджуються класи  $B_{p,\theta}^\Omega$  періодичних функцій багатьох змінних [1], де  $\Omega(t)$  – задана функція типу модуля неперервності порядку  $l$ , яка задовольняє так звані умови  $(S)$  і  $(S_l)$ , які називають умовами Барі-Стечка (див., наприклад, [2]).

Нехай  $L_q$  – простір  $2\pi$ -періодичних за кожною змінною функцій  $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$  зі стандартною нормою. Одержано точні за порядком оцінки найкращого  $M$ -членного тригонометричного наближення класів  $B_{p,\theta}^\Omega$  в просторі  $L_q$ , яке визначається наступним чином:

$$e_M(B_{p,\theta}^\Omega)_q = \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega} \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_q,$$

де  $\{k^j\}_{j=1}^M$  – набір векторів  $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$  з цілочисловими координатами,  $c_j$  – довільні числа,  $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \dots + k_d^j x_d$ .

Справедливе таке твердження.

**Теорема.** Нехай  $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$  і  $\Omega(t)$  задовольняє умову  $(S)$  з деяким  $\alpha > \alpha(p, q)$ , а також умову  $(S_l)$ , де

$$\alpha(p, q) = \begin{cases} d(1/p - 1/q)_+, & 1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ або } 1 \leq q \leq p \leq \infty, \\ \max\{d/p; d/2\}_+, & 2 \leq p \leq q \leq \infty \text{ або } 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty. \end{cases} \quad \text{Тоді}$$

для будь-яких  $M \in \mathbb{N}$ , виконується оцінка

$$C_1 \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p - \max\{1/q; 1/2\})_+} \leq e_M(B_{p,\theta}^\Omega)_q \leq C_2 \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p - \max\{1/q; 1/2\})_+},$$

де  $a_+ = \max\{a; 0\}$ ,  $C_1, C_2 > 0$  – сталі, які можуть залежати лише від  $\Omega$ ,  $p$ ,  $q$  і  $d$ .

Зауважимо, що при  $\Omega(t) = t^r$  класи  $B_{p,\theta}^\Omega$  співпадають з відомими класами Бєсова  $B_{p,\theta}^r$  (див., наприклад, [3]), для яких відповідний результат був отриманий в роботі [4].

1. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // Journal of Complexity. – 2002. – **18**. – P. 815–832.
2. *Барн Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
4. *De Vore R.A., Temlyakov V.N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29–48.

**BEST  $M$ -TERM TRIGONOMETRIC APPROXIMATIONS OF CLASSES  $B_{p,\theta}^\Omega$  OF PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES**

*We obtain exact order estimates for the best  $M$ -term trigonometric approximations of classes  $B_{p,\theta}^\Omega$  of periodic functions of several variables in the space  $L_q$  under the condition  $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ .*





УДК 517.5

## АПРОКСИМАЦІЯ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНОЮ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ

Гнатюк Ю.В., Гудима У.В., Гнатюк В.О.

*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
[gnatyuk\\_yu\\_v@mail.ru](mailto:gnatyuk_yu_v@mail.ru)*

Нехай  $S$  – компакт,  $X$  - лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір,  $C(S, X)$  - лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту  $S$  в  $X$ , неперервних на  $S$ , з нормою  $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$ ,  $K(X)$  - сукупність непорожніх компактів простору  $X$ ,  $C(S, K(X))$  - множина багатозначних відображень  $a$  компакту  $S$  в  $X$  таких, що для кожного  $s \in S$   $a(s) = K_s \in K(X)$  і вони неперервні на  $S$  відносно метрики Гаусдорфа,  $V \subset C(S, X)$ ,  $u \in C(S, X)$ ,  $r \in C(S, R)$ ,  $r(s) > 0$ ,

$$b(s) = \{x \in X : \|x - u(s)\| \leq r(s)\}, s \in S,$$

$$D = \{g \in C(S, X) : g(s) \in b(s), s \in S\}.$$

Припускається, що  $V \cap D \neq \emptyset$ .

Задачею найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнoзначного відображення  $a$  множиною однозначних неперервних відображень  $g \in V$ , які задовольняють додатковому обмеженню  $g \in D$ , будемо називати задачу

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \inf_{g \in D \cap V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|. \quad (1)$$

Якщо існує відображення  $g^* \in V \cap D$  таке, що

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Нехай  $X^*$  – простір, спряжений до  $X$ ,  $B^*$  – замкнена одинична куля в  $X^*$ ,  $E(B^*)$  – множина крайніх точок  $B^*$ ,  $\Gamma^*(M, y^*)$  – конус граничних напрямків для множини  $M$  лінійного нормованого простору  $Y$  з  $y^* \in Y$ .

Множину  $M$  будемо називати  $\Gamma^*$  - множиною відносно  $y^* \in M$ , якщо  $y - y^* \in \Gamma^*(M, y^*)$  для всіх  $y \in M$ . Множину  $M$  будемо називати  $\Gamma$  - множиною відносно  $y^* \in M$ , якщо для всіх  $y \in M$  та всіх  $\varepsilon > 0$  існує  $\alpha \in (0, \varepsilon)$  таке, що  $y^* + \alpha(y - y^*) \in M$ .

**Теорема 1.** Якщо  $g^* \in V \cap D$  є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого  $z \in \Gamma^*(V, g^*)$  існують елементи  $s_z \in S$ ,  $y_z \in a(s_z)$ ,  $f_z \in E(B^*)$  такі, що

$$f_z(g^*(s_z) - y_z) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\|, \operatorname{Re} f_z(z(s_z)) \geq 0,$$

або існують елементи  $s'_z \in S$ ,  $f'_z \in E(B^*)$  такі, що

$$f'_z(g^*(s'_z) - u(s'_z)) = \|g^*(s'_z) - u(s'_z)\| = r(s'_z), \operatorname{Re} f'_z(z(s'_z)) \geq 0.$$

**Теорема 2.** Нехай  $g^* \in V \cap D$  і  $V \in \Gamma^*$  - множиною відносно  $g^*$ . Якщо  $g^*$  є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого  $g \in V$  існують елементи  $s_g \in S$ ,  $y_g \in a(s_g)$ ,  $f_g \in E(B^*)$  такі, що

$$f_g(g^*(s_g) - y_g) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\|, \operatorname{Re} f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) \geq 0, \quad (2)$$

або існують елементи  $s'_g \in S$ ,  $f'_g \in E(B^*)$  такі, що

$$f'_g(g^*(s'_g) - u(s'_g)) = \|g^*(s'_g) - u(s'_g)\| = r(s'_g), \operatorname{Re} f'_g(g(s'_g) - g^*(s'_g)) \geq 0. \quad (3)$$

**Теорема 3.** Нехай  $V \in \Gamma$  -множиною відносно кожного свого елемента, зокрема, опуклою множиною, і нехай існує елемент  $g_0 \in V$ , для якого  $g_0(s) \in \operatorname{Int} b(s)$  для всіх  $s \in S$ . В цьому випадку, для того щоб елемент  $g^* \in V \cap D$  був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і

досить, щоб для кожного  $g \in V$  існували елементи  $s_g \in S$ ,  $y_g \in a(s_g)$ ,  $f_g \in E(B^*)$ , для яких виконуються умови (2), або існували елементи  $s'_g \in S$ ,  $f'_g \in E(B^*)$ , для яких виконуються умови (3).

**THE APPROXIMATION OF COMPACT-VALUED MAP BY SETS OF CONTINUOUS SINGLE-VALUED MAPS, WITH ADDITIONAL RESTRICTE**

*We established the necessary and sufficient conditions and criteria of the element of the best uniform approximation of continuous compact-valued map by sets of continuous single-valued maps, which satisfy to additional restrictions.*



УДК 517.5

**МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ РЕМЕЗА НА ВИПАДОК АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ**

**Гудима У.В., Гнатюк Ю.В.**

*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
[gnatyuk\\_yu\\_v@mail.ru](mailto:gnatyuk_yu_v@mail.ru)*

Нехай  $S$  – метричний компакт,  $X$  - лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір,  $C(S, X)$  - лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту  $S$  в  $X$ , неперервних на  $S$ , з нормою  $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$ ,  $K(X)$  - сукупність непорожніх компактів простору  $X$ ,  $C(S, K(X))$  - множина багатозначних відображень  $a$  компакту  $S$  в  $X$  таких, що для кожного  $s \in S$   $a(s) = K_s \in K(X)$ ,  $V$  – лінійний підпростір простору  $C(S, X)$ , породжений лінійно незалежними відображеннями  $g_i \in C(S, X)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $u \in C(S, X)$ ,  $r \in C(S, R)$ ,  $r(s) > 0$ ,

$$b(s) = \{x : x \in X, \|x - u(s)\| \leq r(s)\}, \quad s \in S,$$

$$D = \{g : g \in C(S, X), \quad g(s) \in b(s), \quad s \in S\}.$$

Припускаємо, що існує елемент  $g_0 \in V$ , для якого  $g_0(s) \in \text{int } b(s)$  для всіх  $s \in S$ .

Розглянемо задачу про відшукування величини

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \inf_{g \in V \cap D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|. \quad (1)$$

Існує елемент  $g^* \in V \cap D$  такий, що  $\alpha_a^*(V \cap D) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\|$ .

Цей елемент називатимемо екстремальним елементом для величини (1).

Нехай  $X^*$  – простір, спряжений до  $X$ ,  $B^*$  – замкнена одинична куля в  $X^*$ ,  $E(B^*)$  – множина крайніх точок  $B^*$ . Припускаємо, що

$\alpha_a^*(D) < \alpha_a^*(V \cap D)$ , де  $\alpha_a^*(D) = \inf_{g \in D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|$ . Вважаємо, що викону-

ється умова (H): для будь-яких  $s_j \in S$ ,  $f_j \in \overline{E(B^*)}$ , де

$\overline{E(B^*)} = \left\{ f : f \in X^*, \exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty}, f_k \in E(B^*), k=1, \infty, f_k \xrightarrow{cn} f \right\}$ , таких, що лінійні непе-

рервні на  $C(S, X)$  функціонали  $g \rightarrow \text{Re } f_j(g(s_j))$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $g \in C(S, X)$ , є

лінійно незалежними, визначник  $\det \left\| \varphi_{(s_j, f_j)}(g_i) \right\|_{i, j=1}^n$  є відмінним від нуля.

На  $q$ -му кроці ( $q \geq 1$ ) алгоритму знаходимо розв'язок  $(\alpha^q; \theta^q) = (\alpha_1^q, \dots, \alpha_n^q, \theta^q)$  системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Re} \left( -f_j^q(g_i(s_j^q)) \right) + \theta = \text{Re} \left( -f_j^q(y_j^q) \right), \quad j = \overline{1, k_1^q},$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Re} \left( -\varphi_j^q(g_i(t_j^q)) \right) = \text{Re} \left( -\varphi_j^q(u(t_j^q)) \right) - r(t_j^q), \quad j = \overline{1, k_2^q},$$

де  $s_j^q \in S$ ,  $y_j^q \in a(s_j^q)$ ,  $f_j^q \in E(B^*)$ ,  $j = \overline{1, k_1^q}$ ,  $k_1^q \geq 1$ ,  $t_j^q \in S$ ,

$\varphi_j^q \in E(B^*)$ ,  $j = \overline{1, k_2^q}$ ,  $k_2^q \geq 0$ ,  $k_1^q + k_2^q = n + 1$ , такі, що  $\theta^q > \alpha_a^*(D)$ . Для век-

тора  $g^q = \sum_{i=1}^n \alpha_i^q g_i$  знаходимо

$$\varepsilon^q = \max \left\{ \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^q(s) - y\| - \theta^q, \max_{t \in S} \left( \|g^q(t) - u(t)\| - r(t) \right) \right\}.$$

Якщо  $\varepsilon^q \leq 0$ , то  $g^q$  є екстремальним для величини (1), а  $\theta^q = \alpha_a^*(V \cap D)$ .

Якщо ж  $\varepsilon^q > 0$ , то окремі елементи множини  $\left\{ s_j^q, y_j^q, f_j^q, j=1, k_1^q, t_j^q, \phi_j^q, j=1, k_2^q \right\}$  замінюємо на інші, які визначаються  $g^q$ .

**Теорема.** Виконуються такі співвідношення

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \theta^q = \alpha_a^*(V \cap D), \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \varepsilon^q = 0,$$

$$\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \max_{t \in S} \left( \|g^q(t) - u(t)\| - r(t) \right) = 0, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} g^q = g^*,$$

де  $g^*$  - екстремальний елемент для величини (1).

**MODIFICATION REMEZ'S ALGORITHM ON THE CASE OF PROBLEM OF THE BEST UNIFORM APPROXIMATION CONTINUOUS COMPACT-VALUED MAPS BY FINITE DIMENSIONAL CHEBYSHEV SPACE WITH ADDITIONAL RESTRICTION**

*In this article the Remez's algorithm is generalized to the case of the problem of the best uniform approximation of continuous compact-valued maps by finite dimensional Chebyshev space of continuous single-valued maps with additional restriction.*



УДК 517.5

**ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ МЕТРИКИ ГАУСДОРФА НАБЛИЖЕННЯ ОПУКЛОГО КОМПАКТА ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ МНОЖИНОЮ ІНШИХ ОПУКЛИХ КОМПАКТІВ ЦЬОГО ПРОСТОРУ**

**Гудима У.В., Гнатюк Ю.В., Гнатюк В.О.**

*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка*

Нехай  $X$  - лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір,  $K_o(X)$  - сукупність непорожніх опуклих компактів простору

$X$ ,  $H(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} \|x - y\|, \max_{y \in B} \min_{x \in A} \|x - y\| \right\}$  - гаусдорфова відстань

між  $A, B$  із  $K_o(X)$ ,  $V \subset K_o(X)$ . Для  $A \in K_o(X)$  поставимо задачу про відшукування величини

$$\alpha_A^*(V) = \inf_{B \in V} H(B, A) = \inf_{B \in V} \max \left\{ \max_{y \in B} \min_{x \in A} \|x - y\|, \max_{x \in A} \min_{y \in B} \|x - y\| \right\}. \quad (1)$$

Якщо існує елемент  $B^* \in V$  такий, що  $\alpha_A^*(V) = H(B^*, A)$ , то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Нехай  $X^*$  – простір, спряжений до  $X$ ,  $S^*$  – замкнена одинична куля в  $X^*$ .

**Твердження 1.** Для будь-яких  $A, B$  із  $K_o(X)$

$$H(A, B) = \max_{f \in S^*} \left| \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in B} \operatorname{Re} f(y) \right|.$$

Означимо в  $(K_o(X))^2 = K_o(X) \times K_o(X)$  алгебричні операції таким чином:

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, B_1 + B_2), \quad (A_1, B_1), (A_2, B_2) \in (K_o(X))^2;$$

$$\alpha(A, B) = (\alpha A, \alpha B), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \quad (A, B) \in (K_o(X))^2;$$

$$\alpha(A, B) = (\alpha B, \alpha A), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0, \quad (A, B) \in (K_o(X))^2.$$

Введемо у  $(K_o(X))^2$  відношення еквівалентності  $\approx$ , вважаючи, що  $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$ , де  $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in (K_o(X))^2$ , якщо  $A_1 - B_2 = A_2 - B_1$ .

Позначимо через  $M_{(A,B)}$  клас елементів із  $(K_o(X))^2$ , які є еквівалентними до пари  $(A, B) \in (K_o(X))^2$ , і покладемо

$$\|M_{(A,B)}\| = \max_{f \in S^*} \left| \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) + \min_{y \in A} \operatorname{Re} f(y) \right|.$$

Тоді  $M_{(K_o(X))^2}$  є лінійним нормованим простором. Нехай

$$M_V = \left\{ M_{(B,0)} : B \in V \right\}.$$

**Теорема 1.** Справедлива рівність  $\alpha_A^*(V) = \inf_{M_{(B,0)} \in M_V} \|M_{(B,0)} - M_{(A,0)}\|$ .

Для того щоб елемент  $B^* \in V$  був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і досить, щоб елемент  $M_{(B^*,0)}$  був екстремальним еле-

ментом для величини  $\inf_{M_{(B,0)} \in M_V} \|M_{(B,0)} - M_{(A,0)}\|$ .

Множину  $V \subset K_o(X)$  будемо називати  $\Gamma^*$ -множиною відносно  $B^* \in V$ , якщо  $M_V \in \Gamma^*$ -множиною простору  $M_{(K_o(X))^2}$  відносно  $M_{(B^*,0)}$ ,

тобто, якщо  $M_{(B,0)} - M_{(B^*,0)} \in \Gamma^*\left(M_V, M_{(B^*,0)}\right)$  для всіх  $B \in V$ , де

$\Gamma^*\left(M_V, M_{(B^*,0)}\right)$  – конус граничних напрямків для  $M_V$  з  $M_{(B^*,0)}$ .

**Теорема 2.** Нехай  $V \subset K_o(X)$ ,  $B^* \in V$  і  $V \in \Gamma^*$ -множиною відносно  $B^*$ , в тому числі зірковою відносно  $B^*$  або опуклою множиною. Для того, щоб елемент  $B^*$  був екстремальним для величини (1), необхідно і досить, щоб для кожного  $B \in V$  існував функціонал  $f_B \in S^*$ , для якого виконуються умови

$$\left| \max_{x \in B^*} \operatorname{Re} f_B(x) - \max_{y \in A} \operatorname{Re} f_B(y) \right| = H(B^*, A),$$

$$\operatorname{sign} \left( \max_{x \in B^*} \operatorname{Re} f_B(x) - \max_{y \in A} \operatorname{Re} f_B(y) \right) \left( \max_{x \in B} \operatorname{Re} f_B(x) - \max_{y \in B^*} \operatorname{Re} f_B(y) \right) \geq 0.$$

**THE PROBLEM OF THE BEST IN UNDERSTANDING HAUSDORFF METRIC APPROXIMATION OF CONVEX COMPACT OF LINEAR NORMED SPACE BY SETS OF OTHER CONVEX COMPACTS**

*We established the criteria of the element of the best in understanding Hausdorff metric approximation of convex compact of linear normed space by sets of other convex compacts.*



УДК 539.3; УДК 512.548

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОБОРОТНИМИ БІНАРНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Крайнічук Г.В.<sup>1</sup>, Сохацький Ф.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Вінницький кооперативний інститут, [kraynichuk@ukr.net](mailto:kraynichuk@ukr.net)

<sup>2</sup>Вінницький соціально-економічний інститут університету «Україна»,  
[fedir@vinnitsa.com](mailto:fedir@vinnitsa.com)

Об'єктом досліджень є функційні рівняння, які розглядаються над множиною оборотних функцій довільної множини, як скінченої так і нескінченної. Це спричинено різноманітними застосуваннями в таких галузях математики, як математична логіка, теорія кодування, універсальна алгебра тощо (див. [1,2,3]).

Нагадаємо, що двомісна функція (бінарна операція)  $f$  називається *оборотною* (квазігрупою), якщо вона оборотна за кожною своєю змінною, тобто якщо кожне з рівнянь  $f(x; a) = b$  та  $f(a; y) = b$  має єдиний розв'язок для всіх елементів  $a, b \in Q$ . Наприклад, на множині дійсних чисел оборотною буде функція, яка монотонна і необмежена за кожною своєю змінною для довільних значень інших змінних.

Розглянемо функційні рівняння, які є бінарними, тобто всі функційні змінні набувають значень в множині двомісних функцій, а також не містять ні предметних, ні функційних сталих. Якщо функційне рівняння має лише одну появу однієї із предметних змінних і таке рівняння має розв'язок на множині оборотних операцій деякої множини  $Q$ , то множина  $Q$  є одноелементною. Тому вважаємо, що кожна предметна змінна має принаймні дві появи. Функційні рівняння, в яких кожна предметна змінна має рівно дві появи, називаються *квадратичними* [4]. До квадратичних належать функційні рівняння асоціативності, медіальності, транзитивності тощо [1-4].

Одне із застосувань теорії функційних рівнянь – це аналіз тотожностей в алгебрі [3]. Проте, значна кількість тотожностей є неквадратичними, наприклад, в тотожностях дистрибутивності, Бола, Муфанг, F-квазігрупи та інших є три предметні змінні, дві з яких повторюються двічі, а третя – три або чотири рази [5,6].

Парастрофними перетвореннями [7] вивчення всіх бінарних функційних рівнянь від трьох предметних змінних, в яких дві предметні змінні мають дві появи, а третя – три, зведено до вивчення таких п'яти рівнянь:

$$F_1(x; F_2(y; z)) = F_2(F_4(x; y); F_5(x; z)), \quad (1)$$



$$F_1(y; F_2(x; z)) = F_2(x; F_4(y; F_5(x; z))), \quad (2)$$

$$F_1(y; F_2(x; z)) = F_2(x; F_4(F_5(x; z); z)), \quad (3)$$

$$F_1(y; F_2(x; y)) = F_2(F_4(x; z); F_5(x; z)), \quad (4)$$

$$F_1(y; F_2(x; z)) = F_2(y; F_4(x; F_5(x; z))). \quad (5)$$

Перше рівняння називається функційним рівнянням лівої дистрибутивності і знаходження всіх його розв'язків над множиною оборотних функцій є однією і з відомих проблем в теорії функційних рівнянь та в теорії квазігруп. Розв'язки інших чотирьох рівнянь нами знайдено.

Щоб сформулювати відповідні теореми про опис множини всіх розв'язків цих рівнянь нагадаємо, що дві функції  $f$  та  $g$  називаються *ортогональними*, якщо система рівнянь  $f(x; y) = a$ ,  $g(x; y) = b$  має єдиний розв'язок. Якщо операція  $f$  є оборотною, то операції  $f^l$  та  $f^r$  визначаються такими співвідношеннями  $f(x; y) = z \Leftrightarrow f^l(z; y) = x \Leftrightarrow f^r(x; z) = y$ .

**Теорема 1.** П'ятірка  $(f_1; \dots; f_5)$  оборотних функцій, що визначені на множині  $Q$ , є розв'язком функційного рівняння (3) тоді і тільки тоді, коли на множині  $Q$  існують підстановки  $v$  і  $\theta$  такі, що виконуються рівності:

$$f_2(x; \theta x) = vx, \quad f_2(x; y) = f_1^l(vx; y), \quad f_5(x; y) = f_4^l(\theta x; y).$$

**Теорема 2.** П'ятірка  $(f_1; \dots; f_5)$  оборотних функцій, що визначені на множині  $Q$ , є розв'язком функційного рівняння (5) тоді і тільки тоді, коли функції  $f_2$  і  $f_5$  ортогональні та існує підстановка  $\alpha$  множини  $Q$  такі, що виконуються рівності  $f_1(x; y) = f_2(x; \alpha y)$ ,  $f_4(x; y) = \alpha f_2(x; f_5^r(x; y))$ .

Такі ж результати отримані для рівнянь (2) та (4).

1. Aczel J., Functional Equations and their applications, New York: Acad. press, 1966, 510.
2. Ацел Я., Домбр Ж., Функциональные уравнения с несколькими переменными. (перевод с англ.) Москва: Физматлит, 2003.– 432 с.
3. Taylor M.A. A generalization of a theorem of Belousov // Bull. London Math. Soc. – 1978. – 10, №3.– P. 285-286.
4. Krapež A. Strictly quadratic functional equations on quasigroups // Publ. Inst. Math.– 1979/– №29(43).– P.1-17.
5. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М: Наука.– 1967.– 222 с.
6. Белоусов В.Д. n-Арные квазигруппы. Кишинев: Штиинца.– 1973.– 220 с.
7. Сохацький Ф.М. Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Укр. мат. журн. – 2004.– 56, №9.– С.1259-1266.

## SOLUTION OF SOME FUNCTIONAL EQUATIONS ON INVERTIBLE BINARY FUNCTIONS

Binary functional equations on the set of invertible functions, defined on an arbitrary set, are under consideration. It is shown that the equations, having three subject variables with 2,2,3 occurrences, are reduced to the given five equations. The sets of all solutions of four of them are found, but the finding of all solutions of the left distributivity equation is a well-known problem and is still open.



УДК 517.98

## ПРО ЗГОРТКОВУ АЛГЕБРУ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ

**Лозинська В.Я.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
НАН України, [vlozynska@yahoo.com](mailto:vlozynska@yahoo.com)*

У роботі описано властивості просторів ультрадиференційованих функцій з компактним носієм та досліджено згорткову алгебру ультрарозподілів з компактним носієм.

Нехай  $\omega(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\omega|_{[0,1]} \equiv 0$  - неперервна парна функція, що зростає на  $[0, \infty)$  і задовольняє наступні умови:

( $\alpha$ ) існує таке  $C \geq 1$ , що  $\omega(2t) \leq C(1 + \omega(t))$  для всіх  $t \geq 0$ ,

( $\beta$ )  $\int_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < \infty$ ,

( $\gamma$ )  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(1+t)}{\omega(t)} = 0$ .

Розглянемо простори ультрадиференційованих функцій з компактним носієм [1]. Нехай  $\omega$  задовольняє умови ( $\alpha$ ) – ( $\gamma$ ) і нехай  $K \in \mathbf{R}^n$  - компактна множина.

(1) Для  $\lambda > 0$  визначимо простір

$$D_{\lambda}(K) = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \mid \text{Supp}(\varphi) \subset K, \|\varphi\|_{\lambda} := \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\varphi}(t)| e^{\lambda\omega(t)} dt < \infty \right\},$$

де  $\hat{\varphi}$  - перетворення Фур'є функції  $\varphi$ .

(2) Простір  $D_{\{\omega\}}(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{ind } D_{\lambda}(K)$  наділимо топологією індуктивної границі,  $D_{(\omega)}(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{pr } D_{\lambda}(K)$  наділимо топологією проективної границі.

(3) Для відкритої множини  $\Omega \in \mathbf{R}^n$  визначимо  $D_{\{\omega\}}(\Omega) = \lim_{K} \text{ind } D_{\{\omega\}}(K)$  і  $D_{(\omega)}(\Omega) = \lim_{K} \text{pr } D_{(\omega)}(K)$ , де індуктивні границі беруться за всіма компактними підмножинами з  $\Omega$ .  $D_{\{\omega\}}(\Omega)$  і  $D_{(\omega)}(\Omega)$  наділяємо відповідно топологіями індуктивної границі.

Елементи простору  $D_{\{\omega\}}(\Omega)$  називаємо основними функціями типу Бьорлінга, елементи простору  $D_{(\omega)}(\Omega)$  основними функціями типу Рум'є. Пишемо  $D_*$ , якщо твердження будуть справедливі одночасно для двох просторів  $D_{\{\omega\}}$  і  $D_{(\omega)}$ . Елементи простору  $D_{\{\omega\}}(\Omega)'$  називаємо ультрарозподілами типу Бьорлінга, елементи  $D_{(\omega)}(\Omega)'$  - ультрарозподілами типу Рум'є. Для ультрарозподілу  $f \in D_*(\Omega)'$  з носієм  $\text{Supp}(f)$  існує множина таких точок, для якої для довільного відкритого околу  $U$  існує  $\varphi \in D_*(U)$ , що виконується  $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$ .

Для ультрарозподілу  $f \in D_*(\mathbf{R}^n)'$  та функції  $\varphi \in D_*(\mathbf{R}^n)$  визначимо згортку

$$(f * \varphi)(x) := \langle f(y) | \varphi(x - y) \rangle = \langle f(y) | T_y \varphi(x) \rangle.$$

**Теорема 1.** Для довільного ультрарозподілу  $f \in D_*(\mathbf{R}^n)'$  оператор згортки

$$K_f : D_*(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \rightarrow f * \varphi \tag{1}$$

Належить до простору лінійних неперервних відображень  $L(D_*(\mathbf{R}^n))$  і задовольняє співвідношення

$$K_f T_y \varphi = T_y K_f \varphi \quad \text{для всіх } \varphi \in D_*(\mathbf{R}^n) \tag{2}$$

Навпаки, якщо оператор  $K_f \in L(D_*(\mathbf{R}^n))$  задовольняє умову (2), то існує єдиний ультрарозподіл  $f \in D_*(\mathbf{R}^n)'$  такий, що оператор  $K_f$  має вигляд (1).

**Теорема 2.** Нехай  $f, g \in D_*(\mathbf{R}^n)'$  і  $\varphi \in D_*(\mathbf{R}^n)$ . Простір  $D_*(\mathbf{R}^n)'$  є комутативною алгеброю відносно згортки, визначеної співвідношенням

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle g, \check{f} * \varphi \rangle, \quad \text{де } \langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f_x, \varphi(-x) \rangle.$$

Згортка має такі властивості для будь-якого  $k \in \mathbb{Z}_+$

$$D^k (f * \varphi) = f * (D^k \varphi) = (-1)^k (D^k f) * \varphi,$$

$$D^k (f * g) = (D^k f) * g = f * (D^k g).$$

1. Braun R. W., Meise R., Taylor B.A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Mathematics. - Vol. 17. – 1990. - P. 206 – 237.

#### ON A CONVOLUTION ALGEBRA OF ULTRADISTRIBUTIONS

*The properties of spaces of ultradifferentiable functions with compact support are described. The convolution algebra of ultradistributions with compact support is investigated.*

\* \* \* \* \*

УДК 517.98

#### ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО АНАЛІТИЧНИХ І РОЗДІЛЯЮЧИХ ФУНКЦІЙ

**Митрофанов М.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, м. Львів*

В даній роботі розглядаються рівномірно аналітичні розділяючі відображення, які використовуються для апроксимації неперервних відображень аналітичними у дійсних банахових просторах (детально питання апроксимації неперервних відображень аналітичними у банахових просторах висвітлено у багатьох працях, див. зокрема [1], [2], [3]).

Нагадаємо означення рівномірно аналітичного і розділяючого відображення, введеного у статті [2].

**Означення 1.** Нехай  $X$  є дійсним банаховим простором. Будемо говорити, що дійсна функція  $f$ , визначена на  $X$ , є рівномірно аналітичною і розділяючою, якщо вона задовольняє наступні умови:

1. Функція  $f$  є дійсною аналітичною функцією на  $X$  з радіусом збіжності  $R_{f_x}$  в кожній точці  $x \in X$  більшим або рівним за  $R_f$  для деякого  $R_f > 0$ .

2. Існує дійсне число  $\alpha$  таке, що для всіх  $x \in X$  множина  $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$  є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі.

Зауважимо, що з умови 2, враховуючи аналітичність, випливає, що існує дійсне число  $\alpha$  таке, що для всіх  $x \in X$  множина  $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$  не належить одиничній кулі.

Наступна теорема показує, що рівномірно аналітичне і розділяюче відображення при певних додаткових умовах витримує дію однорідного поліноміального відображення.

**Теорема 1.** Нехай  $X, Y$  – дійсні банахові простори,  $f: Y \rightarrow \mathfrak{R}$  (поле дійсних чисел), є рівномірно аналітичною розділяючою функцією,  $g: X \rightarrow Y$  – однорідне поліноміальне сюр'єктивне відображення, яке має наступну властивість:

для довільних  $y_1 \in g(S_X)$  та  $y_2 \in S_Y$  виконується нерівність  $\|y_1\| \geq \|y_2\|$ , де  $S_X$  та  $S_Y$  – одиничні сфери в просторах  $X$  та  $Y$  відповідно.

Тоді існує відображення  $\tilde{g}: X \rightarrow \mathfrak{R}$  ( $\tilde{g} = f \circ g$ ), яке буде рівномірно аналітичним і розділяючим.

Розглянемо простір  $X$ , який є нескінченною прямою сумою просторів  $l_{2k}$ , тобто  $X = \bigoplus_{k=1}^{\infty} l_{2k}$ . Виявляється, що існування рівномірно-аналітичної функції на  $X$  залежить від способу задання норми на цьому просторі.

**Твердження 1.** Якщо на  $X$  задати  $l_p$ -норму  $\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{l_{2k}}^p \right)^{1/p}$ , то

- для непарного  $p$  простір  $X$  з такою нормою не буде допускати ні розділяючого полінома (детальніше про розділяючі поліноми див. статті [2], [3]), ні розділяючої рівномірно аналітичної функції,

- для парного  $p$  простір  $X$  допускає розділяючу аналітичну функцію

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{l_{2k}}^{2kp}.$$

У статті [2, с. 93-94] показано, що задана на просторі  $c_0$  функція  $f$ , така, що  $f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^{2n}$  для елемента  $(x_n)$  з простору  $c_0$ , є аналітичною і розділяючою.

**Твердження 2.** Якщо на просторі  $X$  ввести  $c_0$ -норму, поклавши  $\|x\| = \sup_k \|x_k\|_{l_{2k}}$ , то задана на  $X$  функція  $H$  така, що

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{l_{2k}}^{2k}, \text{ є рівномірно аналітичною і розділяючою.}$$

Для доведення Твердження 2 використовується Теорема 1.

1. *Mujica J.* Complex Analysis in Banach Spaces. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1986. – 434 p.
2. *Boiso M. C., H'ajek P.* Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001. – Vol. 256. – P. 80 – 98.
3. Митрофанов М.А. Апроксимація неперервних функцій на дійсних банахових просторах // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2007. – Вип. 5. – С. 48 – 51.

#### SOME PROPERTIES OF UNIFORMLY ANALYTIC AND SEPARATING FUNCTIONS

*In the paper we investigate some properties of uniformly analytic and separating functions. Some examples are given.*



УДК 517.5

### ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ГОЛОМОРФНОЇ В ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ З НУЛЯМИ НА СКІНЧЕННІЙ СИСТЕМІ ПРОМЕНІВ

**Юрків М. І.**

*Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка*  
[yurkiv.maryana@gmail.com](mailto:yurkiv.maryana@gmail.com)

Нехай голоморфна в  $\mathbb{C}^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$  функція  $f$  має цілий формальний порядок  $\rho \in (0; +\infty)$  і її нулі розміщені на скінченній системі променів  $\{z : \arg z = \psi_j\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $0 < \psi_1 < \dots < \psi_m < \pi$ ,  $n_j(t)$  - кількість нулів функції  $f$  з півкруга  $\{z : |z| \leq t, \text{Im } z \geq 0\}$ , які належать променю  $\{z : \arg z = \psi_j\}$ ,  $f_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , - кутові межові значення функції  $f$  на дійсній осі,  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  - незростаюча функція, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь (сингулярна межова функція),

$$\tau_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_1^t \frac{\ln|f_0(x)|}{x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_1^t \frac{ds(x)}{x},$$

$$\tau_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_1^t \frac{\ln|f_0(-x)|}{x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_1^t \frac{ds(-x)}{x}.$$

Наступне твердження є аналогом деяких результатів Говорова М.В. та Хаця Р. В.

**Теорема 1.** Якщо для деяких  $l_1 \in \mathbb{R}$ ,  $l_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_1 \in (0; \rho)$ ,  $\rho_3 \in (0; \rho)$ ,  $\sigma_f \in [0; +\infty)$  та кожного  $j \in \{1, \dots, m\}$  при  $r \rightarrow +\infty$  виконується

$$\tau_1(r) = l_1 r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad \tau_2(r) = l_2 r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad (1)$$

$$n_j(r) = \Delta_j r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho} \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \frac{\sin \rho \varphi_n}{|\lambda_n|^\rho} - \frac{1}{2\pi} \int_{1 \leq |t| \leq r} \frac{\ln|f(t)| dt}{t^{\rho+1}} - \frac{1}{2\pi} \int_{1 \leq |t| \leq r} \frac{ds(t)}{t^{\rho+1}} = \sigma_f + O(r^{\rho_3 - \rho}), \quad (3)$$

то для деякого  $\rho_2 \in (0; \rho)$  знайдеться така множина  $U$ , яка міститься в об'єднанні кругів зі скінченною сумою радіусів  $S$ , що

$$\ln|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + O\left(\frac{|z|^{\rho_2}}{\sin \varphi}\right), \quad \mathbb{C}^+ \setminus U \ni z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де

$$h(\varphi) = \sum_{i=1}^m h_i(\varphi) + 2 \sin \rho \varphi \left( \sigma - \frac{b_\rho}{2} \right) - 2l_1 \rho (\varphi - \pi) \cos \rho \varphi + (-1)^\rho 2l_2 \rho \varphi \cos \rho \varphi, \quad (5)$$

$$h_i(\varphi) = \hat{h}_i(\varphi) - \tilde{h}_i(\varphi), \quad (6)$$

$$\tilde{h}_i(\varphi) = \Delta_i (\pi - \varphi - \psi_i) \sin \rho (\varphi + \psi_i) - \frac{\Delta_i}{\rho} \cos \rho (\varphi + \psi_i),$$

$$\hat{h}_i(\varphi) = \begin{cases} \Delta_i (\pi - \varphi + \psi_i) \sin \rho (\varphi - \psi_i) - \frac{\Delta_i}{\rho} \cos \rho (\varphi - \psi_i), \psi_i < \varphi, \\ \Delta_i (\psi_i - \varphi - \pi) \sin \rho (\varphi - \psi_i) - \frac{\Delta_i}{\rho} \cos \rho (\varphi - \psi_i), \psi_i > \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Навпаки, якщо нулі голоморфної в  $\mathbb{C}^+$  функції  $f$  цілого формального порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  лежать на вище вказаній скінченній системі променів  $i$  для деякого  $\rho_2 \in (0; \rho)$  знайдеться така множина  $U$ , яка міститься в об'єднанні кругів зі скінченною сумою радіусів  $S$ , що виконується (4) з

функцією,  $h$  визначеною (5)–(7), то для деяких,  $\rho_1 \in (0; \rho)$ ,  $\rho_3 \in (0; \rho)$  і кожного  $j \in \{1, \dots, m\}$  виконуються (1) - (3).

1. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
2. *Хаць Р. В.* Про асимптотичне поведіння канонічного добутку цілого порядку // Матем. студії. – 2004. – **22**, № 1. – С. 105–110.
3. *Khats` R. V.* On entire functions of improved regular growth of integer order with zeroes on a finite system of rays // Mat. studii. – 2006. – **26**, № 1. – P. 17–24.

**ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF HOLOMORPHIC FUNCTION IN THE HALF – PLANE  
OF INTEGER ORDER WITH ZEROES ON A FINITE SYSTEM OF RAYS**

*In order that for a holomorphic function  $f$  in the half – plane  $\mathbb{C}^+$  of integer formal order  $\rho \in (0; +\infty)$  with zeroes on a finite system of rays with some,  $\rho_2 \in (0; \rho)$  the relation (1) be true outside some exceptional set  $U$ , that can be covered by system of disk with finite sum of radii, it is necessary and sufficient that for some  $\rho_1 \in (0; \rho)$ ,  $\rho_3 \in (0; \rho)$ ,  $\sigma_f \in [0; +\infty)$  and every  $j \in \{1, \dots, m\}$  (1) - (3) hold.*





## СЕКЦІЯ 9. “АЛГЕБРА І ТОПОЛОГІЯ”

УДК 512.552.12

## СТАБІЛЬНИЙ РАНГ АДЕКВАТНОГО КІЛЬЦЯ

Білявська С.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
кафедра алгебри і логіки, [zosia\\_meliss@yahoo.co.uk](mailto:zosia_meliss@yahoo.co.uk)

Під кільцем  $R$  розумітимемо комутативне кільце з  $1 \neq 0$ . Нагадаємо, що кільце Безу – це кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним.

**Означення 1.** Кільце  $R$  називають адекватним, якщо воно є кільцем Безу, в якому для довільних елементів  $a, b \in R$ ,  $a \neq 0$  існують елементи  $r, s \in R$ , такі що  $a = r \cdot s$ , де  $rR + bR = R$  і  $s'R + bR \neq R$  для довільного необоротного дільника  $s'$  елемента  $s$  [1].

Скажемо, що рядок  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , де  $a_i \in R$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  є унімодулярним, якщо  $a_1R + a_2R + \dots + a_nR = R$ .

**Означення 2.** Найменше натуральне число  $n$  називається стабільним рангом кільця  $R$ , якщо для довільного унімодулярного рядка довжини  $n + 1$  існують такі елементи  $b_1, \dots, b_n \in R$ , що рядок  $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \dots, a_n + a_{n+1}b_n)$  є унімодулярним [2]. Позначають  $st.p.(R) = n$ .

Тобто, кільце  $R$  є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів  $a, b \in R$  таких, що  $aR + bR = R$  існує елемент  $t \in R$ , що  $a + bt$  - зворотній елемент кільця  $R$  [3]. Подібно, кільце  $R$  є кільцем стабільного рангу 2, якщо для довільних елементів  $a, b, c \in R$  таких, що  $aR + bR + cR = R$  виконується рівність  $(a + cx)R + (b + cy)R = R$  для деяких елементів  $x, y \in R$  [4].

**Теорема 1.** Нехай  $R$  - адекватне кільце, тоді стабільний ранг  $R$  дорівнює 2.

Нагадаємо, що комутативне кільце  $R$  є кільцем Ерміта, якщо для довільних  $a, b \in R$  існує оборотна матриця  $P$  порядку 2 і елемент  $d \in R$  такі, що  $(a, b)P = (d, 0)$  [2].

**Теорема 2.** Адекватне кільце є кільцем Ерміта.

**Теорема 3.** Нехай  $R$  таке адекватне кільце, що його радикал Джексона  $J(R)$  є ненульовим, тоді стабільний ранг  $R$  дорівнює 1.

**Означення 3.** Комутативне кільце Безу називається всюди адекватним, якщо для довільних елементів  $a, b \in R$  (зокрема  $a = 0$ ) існують такі елементи  $r, s \in R$ , що  $a = r \cdot s$ , де  $rR + bR = R$  і  $s'R + bR \neq R$  для довільного дільника  $s'$  елемента  $s$ , такого що  $sR \subset s'R \neq R$  [5]. Прикладами всюди адекватних кілець можуть бути регулярні кільця та кільця нормування.

**Теорема 4.** Нехай  $R$  - всюди адекватне кільце, тоді стабільний ранг  $R$  дорівнює 1.

1. Kaplansky I. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math.Soc. - 1949. – 66. – 464-491 с.
2. Vaserstein L.N. The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Functional.Anal. Appl. – 1971. – 5. – 102-110 с.
3. Vaserstein L.N. Bass's first stable range condition // J. Pure. Appl. Alg. – 1984. – 34. – 319-330 с.
4. Menal P., Mongasi J. On regular rings with stable range 2 // J. Pure. Appl. Alg. – 1982. – 24. – 25-40 с.
5. Забавський Б.В. Адекватні кільця елементарних дільників зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів // Алгебра і топологія. – 1996. – 74-79 с.

#### STABLE RANGE OF ADEQUATE RING

*It is showed that the stable range of adequate ring equals 2 and adequate ring is the Hermite ring. Besides, it is proved that everywhere adequate ring has stable range 1. Also it is showed, that the stable range of adequate ring with nonzero Jacobson radical is equal 1.*



УДК 512.64

### ДІЛЬНИКИ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ З УМОВОЮ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ РОЗКЛАДІВ

Джалюк Н.С.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, [nataliya.dzhalyuk@gmail.com](mailto:nataliya.dzhalyuk@gmail.com)*

Нехай  $P[x]$  – кільце многочленів над полем  $P$ ,  $M(m, n, P)$  та  $M(m, n, P[x])$  – множини  $(m \times n)$ -матриць над  $P$  і  $P[x]$ , відповідно;  $D^A(x)$  – канонічна діагональна форма (к.д.ф.) матриці  $A(x) \in M(m, n, P[x])$ ,  $m \leq n$ ,

$\text{rang } A(x) = m$ , тобто  $D^A(x) = U_i(x)A(x)V_i(x)$ , де  $U_i(x) \in GL(m, P[x])$ ,  $V_i(x) \in GL(n, P[x])$ . Матриці  $U_i(x)$  та  $V_i(x)$  називають, відповідно, лівими та правими перетворювальними матрицями матриці  $A(x)$  до її к.д.ф.

Відомо, що задача про опис дільників многочленних матриць пов'язана із описом всіх лівих перетворювальних матриць до к.д.ф [1]. Структура таких перетворювальних матриць вивчалась в [2].

Якщо  $P$  – нескінченне поле, то відомо [3], що кожна матриця  $A(x)$  напівскалярними еквівалентними перетвореннями зводиться до нижньої трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі, тобто існують матриці  $Q_i \in GL(m, P)$  та  $R_i(x) \in GL(n, P[x])$  такі, що

$$T_i^A(x) = Q_i A(x) R_i(x). \quad (1)$$

Якщо ж поле  $P$  – скінченне, то у цій же праці вказані умови, за яких таке зведення матриці  $A(x)$  можливе. Надалі неособливі матриці  $Q_i$ , які задовольняють співвідношення (1), будемо називати лівими перетворювальними матрицями матриці  $A(x)$  до її трикутної форми  $T_i^A(x)$ . Через  $\{Q\}_A$  позначимо множину всіх таких перетворювальних матриць  $Q_i$ .

Нехай  $D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \cdot \text{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_m(x))$ , де  $\varphi_j(x) \mid \varphi_{j+1}(x)$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , і  $\sum_{j=1}^m \deg \varphi_j(x) = sm$ . Факторизацію  $A(x) = B(x)C(x)$  матриці  $A(x)$  називають паралельною до факторизації  $D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x)$  її к.д.ф.  $D^A(x)$ , якщо  $D^B(x) = \Phi(x)$  і матриця  $C(x)$  еквівалентна до  $\Psi(x)$ .

З множини  $\{Q\}_A$  виберемо деяку матрицю  $Q_k$ . Тобто  $Q_k A(x) R_k(x) = T_k^A(x)$  – нижня трикутна матриця з головною діагоналлю  $D^A(x)$ ,  $R_k(x) \in GL(n, P[x])$ . Тоді  $T_k^A(x) = U_k^A(x) D^A(x)$ , де  $U_k^A(x)$  – нижня унітрикутна матриця. Далі, використовуючи методику, запропоновану в [4], побудуємо нижню трикутну матрицю  $T_k(x) = U_k^A(x) K(x) \Phi(x) S_k(x)$  з головною діагоналлю  $\Phi(x)$ , в якій під діагоналлю нулі або многочлени степеня меншого ніж степінь  $(\varphi_i(x)/\varphi_j(x))$ ,  $i > j$ ;  $K(x)$  – нижня унітрикутна многочленна матриця з незалежними змінними  $k_{ij}^{(r)}$ ,  $i > j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , які приєднуються до поля

$P [2, 4]$ ;  $S_k(x) \in GL(n, P[x])$ . Матричному многочлену  $T_k(x) = \sum_{l=0}^{sm} T_l x^l$  зіставимо квадратну матрицю  $M_{T_k}$  [5].

Відомо [4, 5], що матриця  $A(x)$  має ліві унітальні дільники  $B_p(x)$  степеня  $s$  з к.д.ф.  $\Phi(x)$  та умовою паралельності розкладів, тобто  $A(x) = B_p(x)C_p(x)$ , де  $C_p(x)$  еквівалентна до  $\Psi(x)$ , тоді і тільки тоді, коли існують такі значення змінних  $k_{ij}^{(r_{ij})}$  з поля  $P$ , що матриця  $M_{T_k}$  є неособливою. Причому  $B_p(x) = Q_k^{-1}L(x)Q_k$ , де  $L(x) = Ex^s + \sum_{t=0}^{s-1} L_t x^t$ ,  $L_t = \sum_{l=0}^t T_l M_{(s-t)+l,s}$ ,  $M_{T_k}^{-1} = \|M_{ij}\|$ ,  $M_{ij} \in M(m, P)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, s-1$ . Надаючи змінним  $k_{ij}^{(r_{ij})}$  допустимих значень з поля  $P$  отримаємо множину  $\mathbf{M}_{Q_k} = \{B_p(x), p = 1, 2, \dots\}$  лівих унітальних дільників матриці  $A(x)$  з к.д.ф.  $D^{B_p}(x) = \Phi(x)$ .

**Теорема.** Множина матриць  $\bigcup_i \mathbf{M}_{Q_i}$ , де  $Q_i$  пробігають всі елементи з  $\{Q\}_A$ , складається з усіх лівих унітальних дільників  $B_p(x)$  степеня  $s$  матриці  $A(x)$  з к.д.ф.  $D^{B_p}(x) = \Phi(x)$  та умовою паралельності розкладів, тобто  $A(x) = B_p(x)C_p(x)$ , де  $C_p(x)$  еквівалентна до  $\Psi(x)$ .

1. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. Зеліско В. Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
3. Петричкович В. М. Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 5. – С. 644–649.
4. Петричкович В. М. Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – 44, № 9. – С. 1228–1233.
5. Петричкович В. М. Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників // Алгебра і топологія. – Львів: Львів. держ. ун-т. - 1996. – С. 112–124.

#### THE DIVISORS OF POLYNOMIAL MATRICES WITH A CONDITION OF PARALLELNESS

*It is established the connection between the left monic divisors of the polynomial matrices over an arbitrary field with a condition of parallelness and the left transformable matrices to the triangular form with respect to semiscalar equivalence.*

УДК 539.3

## РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД $n$ -ПРОСТИМИ КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ БЕЗ ДІЛЬНИКІВ НУЛЯ

Домша О.В.

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
кафедра алгебри і логіки, [olya.domsha@mail.ru](mailto:olya.domsha@mail.ru)*

В [1] доведено, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою. У цій роботі показана “можлива” діагональна редукція матриць над  $n$ -простою областю Безу ( $n > 2$ ) [2,3].

Нехай  $R$  - просте кільце. Тоді для довільного ненульового елемента  $a \in R$  маємо  $RaR = R$ . Звідси існують елементи  $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k \in R$  такі, що  $u_1av_1 + u_2av_2 + \dots + u_kav_k = 1$ .

Якщо для всіх ненульових  $a \in R$  існує натуральне  $n$  таке, що

$$u_1av_1 + u_2av_2 + \dots + u_nav_n = 1$$

для деяких елементів  $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n \in R$ , причому число  $n$  є найменше зі всіх можливих, тоді  $R$  називається  $n$ -простим кільцем.

**Теорема.** *Нехай  $R$   $n$ -просте кільце Безу без дільників нуля, а  $A$  — довільна квадратна матриця порядку  $n$  ( $n > 2$ ) над кільцем  $R$ . Тоді існують такі унімодулярні матриці  $P, Q \in GL_n(R)$ , що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де  $A_1, \dots, A_k$  — деякі трикутні матриці порядку  $n$ .

1. *Забавский Б. В.* Простые кольца элементарных делителей // Математичні студії. – 2004. – 22, № 2 – С. 129–133.
2. *Zabavsky B. V.* Almost diagonal matrices over  $n$ -simple Bezout domains. - Groups and rings XI, Bedlevo, Poland, June 4-11, 2005. – 22 p.

3. *Cohn P M.* A construction of simple principal right ideal domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – 66, № 2 – P. 217–222.

**REDUCTION OF MATRICES OVER  $n$ -SIMPLE BEZOUT RINGS WITHOUT ZERO DIVIZOR**

*We show the possibility of diagonal reduction of matrices over  $n$ -simple Bezout domain ( $n > 2$ ).*



УДК 513.6

**ІНДЕКС ТА ПЕРІОД КРИВИХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ТА ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ**

**Здомська Л.М.**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, [lesyazdom@rambler.ru](mailto:lesyazdom@rambler.ru)*

Нехай  $X$  - проективна геометрично незвідна алгебраїчна крива над полем  $K$ . Крива  $X$  може не мати точок над  $K$ , тому означають дві величини, *період* і *індекс*, щоб виміряти відхилення від властивості мати точки. За означенням, індекс та період дорівнюють найменшому додатньому порядку дивізора на  $X_K$  та найменшому додатньому порядку класу дивізорів в  $(Pic X_{\bar{K}})^{G_K}$ , відповідно. Інакше кажучи, індекс кривої  $X$  - це найбільший спільний дільник степенів скінченних розширень  $L/K$ , для яких  $X(L) \neq \emptyset$ . Звідси випливають точні послідовності

$$0 \rightarrow Pic^0 X \rightarrow Pic X \rightarrow IZ \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow (Pic^0 \bar{X})^{G_K} \rightarrow (Pic \bar{X})^{G_K} \rightarrow PZ \rightarrow 0,$$

де друге відображення - це відображення степеня,  $I$  та  $P$ , відповідно, індекс та період,  $\bar{X}$  означає  $X \otimes_K \bar{K}$  для кожного сепарабельного замикання  $\bar{K}$  поля  $K$  і  $G_K$  абсолютна група Галуа  $Gal(\bar{K}/K)$ .

Мета цієї роботи - доведення аналогу теореми Ліхтенбаума [1] про період та індекс кривих довільного роду, визначених над псевдолокальним полем, тобто над повним дискретно нормованим полем з псевдоскінченним полем лишків [2].

**Теорема.** *Нехай  $X$  - крива роду  $g$  над псевдолокальним полем  $K$ . Якщо  $P$  і  $I$  - період і індекс, відповідно, кривої  $X$ , то*

- a)  $P \mid (g-1)$ ,  
 b)  $I = P$  або  $I = 2P$ ,  $i$   
 c) якщо  $I = 2P$ , то  $(g-1)/P$  непарне.

У випадку кривої роду 1 з теореми випливає що  $I = P$ . Цей випадок був початково доведений П. Роккетом і С. Ліхтенбаумом у випадку локального основного поля та В. Андрійчуком [3] для псевдолокального поля.

Зауважимо, що коли крива  $X$  визначена над псевдоскінченним полем  $k$ , то для неї  $I = P = 1$ . В останні роки проблема періоду-індексу інтенсивно вивчається для алгебраїчних многовидів, визначених над полями скінченно породженими над простим полем або їх поповненнями, зокрема над глобальними та над багатовимірними локальними полями. Цікаво було б виявити можливі аналоги, одержаних у цьому напрямку результатів для псевдоглобальних полів, тобто полів функцій від однієї змінної з псевдоскінченним полем констант та  $n$ -вимірних загальних локальних полів. Деякі з цих результатів сформульовані у термінах когомологічної розмірності або розмірності Брауера (див., наприклад, [4]). Зокрема, нехай  $K$  псевдоглобальне поле, і  $X$  - проєктивна геометрично незвідна алгебраїчна крива над полем  $K$ . Припустимо, що крива  $X$  має точки скрізь локально, крім, можливо, одного нормування. Тоді індекс кривої  $X$  дорівнює її періоду. Доведення ґрунтується на тому факті, що елемент групи Брауера поля  $K$  всюди локально тривіальний, крім, можливо, одного нормування, тривіальний.

З іншого боку, І. Шаріф довів, що існують криві роду 1, визначені над числовими полями, які мають індекс  $I$  та період  $P$  для довільних натуральних чисел  $I$  та  $P$ , що задовольняють умову  $P \mid I \mid P^2$ . Крім цього, для довільної трійки чисел  $(g, I, P)$ , які задовольняють умови  $I \mid 2(g-1)$ ,  $P \mid I \mid 2P^2$  і  $P \mid I \mid P^2$ , якщо  $2(g-1)/I$  парне, існує числове поле  $K$  і проєктивна незвідна алгебраїчна крива роду  $g$  над полем  $K$ , яка має індекс  $I$  та період  $P$ . Цікаво було б дослідити аналогічні питання у випадку псевдоглобального основного поля.

1. *Lichtenbaum S.* Duality theorems for curves over p-adic fields // *Invent. Math.* – 1969. – 7. – P. 1209–1223.
2. *Ax J.* The elementary theory of finite fields // *Ann. Math.* – 1968. – 88, № 2. – P. 239–271.
3. *Андрійчук В.* Деякі питання, зв'язані з добутком Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальними полями // *Вісник ЛДУ, сер. мех-мат.* – 1985. – 24. – С. 74–78.
4. *Lieblich M.* Period and index in the Brauer group of an arithmetic surface, arXiv: [arXiv:0702240v1](https://arxiv.org/abs/0702240v1) [Math.NT] 9 Feb. 2007.

## INDEX AND PERIOD OF CURVES OVER PSEUDOLocal AND PSEUDOGLOBAL FIELDS

*In this note we present a generalization of a result of Lichtenbaum [1] concerning period and index of a curve with arbitrary genus  $g$  over a local field onto the class of all pseudolocal fields. Also we discuss some results on the period-index problem for curves over an algebraic function field in one variable with pseudofinite constant field.*



УДК 512:519+517.938.5

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІЇ ЕЙЛЕРА ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

**Кадубовський О.А.**

Слов'янський державний педагогічний університет, [kadubovs@ukr.net](mailto:kadubovs@ukr.net)

Встановлено мультиплікативність функції, яка є узагальненням функції Ейлера. Наведено її застосування до розв'язування певних задач на перелік.

**1. Основна частина.** Позначимо через  $(h, m)$  найбільший спільний дільник натуральних чисел  $h$  і  $m$ . Нехай  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $k < m$ . Функцію  $\phi_k(m)$ , яка визначається за правилом  $\phi_k(m) = |M|$ , де

$$M = \{h = 1, 2, \dots, m - k \mid (h, m) = (h + 1, m) = \dots = (h + k - 1, m) = 1\}, \quad (1)$$

будемо називати  $k$  разів ейлеровою.

Наприклад,  $\phi_2(15) = 3$ , бо існує лише три числа 1, 7 і 13, які задовольняють умовам  $(1, 15) = (2, 15) = 1$ ,  $(7, 15) = (8, 15) = 1$ ,  $(13, 15) = (14, 15) = 1$ .

З визначень функції Ейлера  $\varphi(\cdot)$  та функції  $\phi_k(\cdot)$  маємо, що  $\phi_1(m) = \varphi(m)$ .

Очевидно, що для довільного парного числа  $m$  значення функції  $\phi_k(m) = 0$ ,  $k > 1$ .

**Твердження 1.** Нехай  $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_l^{\alpha_l}$  ( $p_i < p_{i+1}$ ) – канонічний розклад натурального непарного числа  $m$  (за простими дільниками). Тоді для довільного натурального  $k \geq p_1$  значення функції  $\phi_k(m) = 0$ .

**Теорема 1.** Для довільного простого  $p$ , натурального  $\alpha$  і фіксованого  $k \in \{1, \dots, p - 1\}$  має місце рівність



$$\phi_k(p^\alpha) = p^{\alpha-1} \cdot \phi_k(p) = p^{\alpha-1} \cdot (p-k) = p^\alpha \cdot \left(1 - \frac{k}{p}\right). \quad (2)$$

**Лема 1.** Нехай  $x, k, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p > q$ , а  $k \in \{1, \dots, q-1\}$ . Тоді

$$(x, pq) = \dots = (x+k-1, pq) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x, p) = (x+1, p) = \dots = (x+k-1, p) = 1 \\ (x, q) = (x+1, q) = \dots = (x+k-1, q) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

**Теорема 2.** Для натуральних взаємно простих  $p$  і  $q$  та фіксованого  $k \in \{1, \dots, q-1\}$  має місце рівність

$$\phi_k(p \cdot q) = \phi_k(p) \cdot \phi_k(q). \quad (4)$$

**Наслідок 1.** Нехай  $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_l^{\alpha_l}$  ( $p_i < p_{i+1}$ ) – канонічний розклад непарного натурального числа  $m$  за простими дільниками а  $k \in \{1, \dots, p_1-1\}$ . Тоді значення функції  $\phi_k(m)$  може бути обчислене за формулою

$$\phi_k(m) = m \left(1 - \frac{k}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{k}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k}{p_l}\right). \quad (5)$$

**2. Застосування функції  $\phi_2(\cdot)$ .** Нехай  $S_n$  – симетрична група,  $CS_n \subset S_n$  – множина циклів довжини  $n$ ,  $\pi = (1, 2, \dots, n) \in CS_n$ . Нехай далі  $CS_n^* = \{c \in CS_n \mid (\pi \circ c) \in CS_n\}$ ,  $CS_n^*/nZ$  – фактор-множина за відповідним відношенням еквівалентності. Тоді, як випливає з роботи [1], величину  $\varphi_n = |CS_n^*/nZ|$  можна обчислити за допомогою співвідношення

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \left( \frac{2(n-1)!}{n+1} + \sum_{i:n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \phi_2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \frac{2(i-1)!}{i+1} \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \right). \quad (6)$$

Більше того, за допомогою функції  $\phi_2(n)$  є можливим не лише обчислення вказаної вище величини  $\varphi_n$ , а й підрахунок числа

- 1) неізоморфних двокольорових хордових  $n$ -діаграм максимального роду;
- 2) топологічно нееквівалентних гладких функцій з одною (виродженою) сідловою критичною точкою, одним максимумом і одним мінімумом на замкненій орієнтованій поверхні довільного роду  $g = (n-1)/2$ .

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад, у роботах [1–2].

1. *Кадубовський О.А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Український математичний журнал. – 2006. – **58**, № 3. – С. 343-351.

2. *Кадубовський О.А.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17-27.

#### GENERALIZATION OF EULER FUNCTION AND ITS APPLICATIONS

*In this paper we proved multiplicativity of function that is generalization of Euler function. Are also obtained application of this function to calculation of the number of nonisomorphic 2-color chord diagrams of special kind and number of topologically nonequivalent smooth functions with one (degenerate) saddle critical point, one minimum and one maximum on closed oriented surface of genus  $g \geq 1$ .*



УДК 512.64

#### ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ ЕВКЛІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

**Ладзоришин Н.Б.**

*ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, [natalja.ladzoryshyn@gmail.com](mailto:natalja.ladzoryshyn@gmail.com)*

Нехай  $\mathbb{Z}$  - кільце цілих чисел і нехай  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k$  відмінне від одиниці і не ділиться на квадрат простого числа. Тоді  $K = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$  - квадратичне евклідове кільце [1].

У роботі [2] було введено поняття напівскалярної еквівалентності многочленних матриць і встановлено спеціальну трикутну форму для цих матриць над алгебраїчно замкнутим полем характеристики нуль. У роботі [3] встановлено аналог такої еквівалентності для матриць над евклідовим квадратичним кільцем  $K$ . Доведено, що для матриці  $A$  повного рангу над евклідовим квадратичним кільцем, існують верхня унітрикутна матриця  $U$  над  $\mathbb{Z}$  і оборотна матриця  $Q$  над  $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$  такі, що  $UAQ = T^A$  є нижньою трикутною матрицею з інваріантними множниками на головній діагоналі.

**Теорема.** *Нехай  $A, B$  -  $(n \times m)$  матриці над евклідовим квадратичним кільцем  $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ ,  $n \leq m$ ,  $\text{rang}A = \text{rang}B = n$ . Нехай найбільший спільний дільник мінорів максимальних порядків матриць  $A$  і  $B$  є степенями простих*

чисел, тобто  $d_n^A = p^t$ ,  $d_n^B = q^s$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ . Тоді існують матриці  $U \in GL(n, \mathbb{Z})$  і  $V_1, V_2 \in GL(m, \mathbb{Z}[\sqrt{k}])$  такі, що

$$\begin{aligned}
 UAV_1 &= \begin{vmatrix} p^{t_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}p^{t_1} & p^{t_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}p^{t_1} & a_{n2}p^{t_2} & \dots & p^{t_n} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \\
 UB_2 &= \begin{vmatrix} q^{s_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21}q^{s_1} & q^{s_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}q^{s_1} & b_{n2}q^{s_2} & \dots & q^{s_n} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

де  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ,  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ .

1. Родосский К. А. Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
2. Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
3. Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М. Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 16–21.

#### ON EQUIVALENCE OF TWO MATRICES OVER EUCLIDEAN QUADRATIC RINGS

It is proved, that for two  $(n \times m)$  – matrices  $A$  and  $B$ ,  $n \leq m$ ,  $\text{rank}A = \text{rank}B = n$ ,  $d_n^A = p^t$ ,  $d_n^B = q^s$ , where  $d_n^A$  and  $d_n^B$  are the greatest common divisor of the minor maximal order of matrices  $A$  and  $B$ , correspondingly,  $p, s$  are prime numbers of  $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ . Exist on matrix  $U$  over a ring  $\mathbb{Z}$  and invertible matrices  $V_1, V_2$  over a ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$  such, that  $UAV_1 = T^A$  and  $UBV_2 = T^B$ , where  $T^A$  and  $T^B$  are lower triangular matrices with invariant factors on a main diagonal.

УДК 512.552.1

## ПРО УЛЬТРАДОБУТКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО ПЕРВИННИХ МОДУЛІВ

Мельник І. О.

Львівський національний університет імені Івана Франка, [ivannamelnyk@yahoo.com](mailto:ivannamelnyk@yahoo.com)

Нехай  $(R, \delta)$  – асоціативне диференціальне кільце з ненульовою одиницею,  $(M, d)$  – лівий диференціальний  $R$ -модуль.

Диференціальний підмодуль  $N$ ,  $N \neq M$ , лівого  $R$ -модуля  $M$  називатимемо *диференціально первинним* [1], якщо  $M/N$  є диференціально первинним модулем.

Нехай  $N_i$  – підмодуль лівого диференціального  $R_i$ -модуля  $M_i$ , для кожного  $i \in I$ . Тоді можна побудувати індукований підмодуль  $N^* = \prod_{i \in I} N_i / \mathcal{F}$  фільтрованого добутку  $\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$  сім'ї лівих модулів  $\{M_i\}_{i \in I}$  стосовно фільтру  $\mathcal{F}$ . Він складається з елементів виду  $(m_i)_{i \in I}$ , де  $m_i \in M_i$ , для  $\mathcal{F}$ -майже всіх  $i \in I$ . Тобто

$$N^* = \left\{ (m_i)_{i \in I} \mid \{i \mid m_i \in N_i, i \in I\} \in \mathcal{F} \right\}.$$

Індукований підмодуль  $\prod_{i \in I} N_i / \mathcal{F}$  диференціального модуля  $\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$  є диференціальним підмодулем тоді і тільки тоді, коли  $N_i$  є диференціальним підмодулем в  $M_i$  для  $\mathcal{F}$ -майже всіх  $i \in I$ .

Нехай  $S_i$  –  $dm$ -система диференціального кільця  $R_i$  [3],  $X_i$  –  $Sdm$ -система [1] диференціального модуля  $M_i$ , для кожного  $i \in I$ .

**Твердження.** *Фільтрований добуток*

$$X^* = \prod_{i \in I} X_i / \mathcal{F} = \left\{ (x_i)_{i \in I} \mid \{i \mid x_i \in X_i, i \in I\} \in \mathcal{F} \right\}$$

сім'ї  $Sdm$ -систем  $\{X_i\}_{i \in I}$  є  $Sdm$ -системою.

**Твердження.** *Будь-яка  $Sdm$ -система диференціального модуля  $M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$  утворюється як (внутрішній) ультрадобуток деякої сім'ї  $Sdm$ -систем  $\{X_i\}_{i \in I}$  в  $M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$ .*

**Теорема.** Якщо  $N_i$  – диференціально первинний підмодуль диференціального  $R_i$ -модуля  $M_i$ ,  $i \in I$ ,  $\mathcal{U}$  – неголовний ультрафільтр над множиною  $I$ , то ультрадобуток  $P^* = \prod_{i \in I} P_i / \mathcal{U}$  сім'ї  $\{P_i\}_{i \in I}$  диференціально первинних підмодулів є диференціально первинним підмодулем в  $M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{U}$ .

Будь-який диференціально первинний підмодуль диференціального модуля  $M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$  можна записати у вигляді (внутрішнього) ультрадобутку деякої сім'ї диференціально первинних підмодулів  $\{N_i\}_{i \in J}$  в  $M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$ .

Такі диференціально первинні підмодулі  $P^*$  називатимемо ультрадобутками диференціально первинних модулів, або головними диференціально первинними модулями.

1. Мельник І. О. Sdm-системи, диференціально первинні та диференціально примарні модулі // Наук. вісник Ужгородського університету. Серія “Математика і інформатика”. – 2008. – Вип. 16. – С. 110-118.
2. Eklof P. Ultraproducts for algebraists: Handbook of Mathematical Logic. Ed. J. Barwise, North-Holland, 1977. – P. 109-140.
3. Khadjiev Dj., Çallıalp F. On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings // Tr. J. of Math. – 1996. – 20, No. 4. – P. 571-582.

#### ON ULTRAPRODUCTS OF DIFFERENTIALLY PRIME MODULES

*The ultraproducts of Sdm-systems and differentially prime submodules of differential modules are investigated.*



УДК 513.6

## ПРО НЕВИРОДЖЕНІСТЬ ДОБУТКУ ТЕЙТА ДЛЯ КРИВИХ НАД ПСЕВДОСКІНЧЕННИМИ ПОЛЯМИ

Нестерук В.І.

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

Нехай  $C$  - абсолютно незвідна проєктивна крива, визначена над псевдоскінченним полем  $k$ ,  $K$  - алгебраїчне розширення поля  $k$ ,  $(m, \text{char}(k)) = 1$ .

Для класів дивізорів  $x \in Cl^0(K(C))$  і  $y \in Cl^0(K(C))/mCl^0(K(C))$  існують взаємно прості дивізори  $D$  і  $R$  такі, що  $x = [D]$  і  $y = [R] + mCl^0(C)$ ,  $f \in K(C)$ ,  $(f) = mD$ .

Добуток Тейта — це білінійне відображення

$$t_m : Cl^0(K(C))[m] \times Cl^0(K(C))/mCl^0(K(C)) \rightarrow K^*/K^{*m},$$

де  $t_m(x, y) = f(R)$ .

Ф. Гесс у роботі [1] навів елементарне доведення невідженості добутку  $t_m$  для випадку кривих, визначених над скінченним полем.

Мета цієї роботи — доведення аналогічного результату для кривих, визначених над псевдоскінченним полем [2].

**Теорема.** Добуток Тейта  $t_m$  — невіджений у випадку кривих, визначених над псевдоскінченним полем  $K$ .

1. Hess F. A Note on the Tate Pairing of Curves over Finite Fields. - Computer Science Department, Woodland Road, University of Bristol (preprint).
2. Fried M., Jarden M. Field arithmetic. - Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2005. — 818 p.

ON NONDEGENERACY OF TATE PAIRING FOR CURVES OVER PSEUDOFINITE FIELDS

*A proof for the nondegeneracy of the Tate pairing of curves over pseudofinite fields is given.*



УДК 512.553.2

## ПРО 1-ФІЛЬТРИ ЧАСТОК В КАТЕГОРІЇ КОМУТАТИВНИХ МОНОЇДІВ

Олійник Р.М.

*Львівський національний університет імені Івана Франка, forward-or.ukr.net*

Нехай  $(S, \cdot)$  – комутативний моноїд, який містить 0 і 1. Розглядаємо лише полігони унітарні та центровані. Позначатимемо категорію комутативних полігонів та їх гомоморфізмів, через  $S-Act$ . Терміни та використовувані факти, яких тут не нагадудься, можна знайти в [1, 3].

Напередрадикал – це підфунктор тотожного функтора. Напередскрут – це спадковий напередрадикал. Ці означення цілком аналогічно до тих, що інтенсивно вивчалися в категорії модулів.

**Твердження.** *Нехай  $S$  – моноїд. Тоді такі твердження еквівалентні:*

- a. *В категорії  $S-Act$  всі напередскрути тривіальні;*
- b. *В категорії  $S-Act$  всі напередрадикали тривіальні;*
- c.  *$S$  – група;*
- d.  *$S$  – проста напівгрупа.*

Фільтри часток розглядались в [2].

Нехай  $K$  – підмоноїд  $S$  та  $B_K = \{kS \mid k \in K\}$ . Розглянемо  $E_K$  – фільтр часток, який має базу  $B_K$ . Такі фільтри часток називаємо 1-фільтри часток.

**Твердження.** *Всі 1-фільтри часток будуть тривіальні в моноїді  $S$  тоді і тільки тоді, коли  $S$  – досконалий моноїд.*

**Теорема.** *В категорії  $S-Act$ , з обмеженнями, накладеними в [3] всі 1-скрути тривіальні тоді і тільки тоді, коли  $S$  – досконалий моноїд.*

1. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Monoids, Acts and Categories. - Valter de Gruyter, Berlin - New York, 2000. – P. 529.*
2. *Luedeman J. K. Torsion theories and semigroup of quotients. - Lecture Notes in Mathematics 998. - Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983. - 350–373 p.*
3. *Wiegandt R. Radicals and Torsion Theory for Acts // Semigroup Forum – 2006. - 72. – P. 312-328.*

### TO 1-QUOTIENT FILTERS IN THE CATEGORY COMMUTATIVE MONOIDS

*The main result give a characterization of monoids under some naturale condition, over which 1-quotient filters are trivial.*

УДК 512.546

## ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Пирч Н.М.

Українська академія друкарства, м. Львів, [pnazar@ukr.net](mailto:pnazar@ukr.net)

Паратопологічною групою називається пара  $(G, \tau)$ , де  $G$  - група,  $\tau$  - топологія на  $G$ , причому відображення множення  $m : G \times G \rightarrow G$ ,  $m(x, y) \mapsto xy$  є неперервним.

**Означення.** Нехай  $\{G_i : i \in I\}$  – сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу  $G$  ми будемо називати *вільним топологічним добутком груп*  $G_i$  (позн.  $\prod_{i \in I} *G_i$ ), якщо виконано умови:

- 1) група  $G$  містить групи  $G_i$  в якості своїх підгруп;
- 2) мінімальна підгрупа групи  $G$ , що містить в собі всі підгрупи  $G_i$  співпадає з  $G$ ;
- 3) якщо для кожного  $i \in I$  існує неперервний гомоморфізм  $f_i : G_i \rightarrow H$  з паратопологічної групи  $G_i$  у паратопологічну групу  $H$ , то існує неперервний гомоморфізм  $f$  з паратопологічної групи  $G$  у паратопологічну групу  $H$  такий, що  $f|_{G_i} = f_i$  для всіх  $i \in I$ .

Як було встановлено у [1], для кожної сім'ї паратопологічних груп вільний добуток існує, єдиний з точністю до ізоморфізму, що залишає на місці всі елементи груп і є алгебраїчно ізоморфний вільному добутку абстрактних груп  $G_i$ .

Поняття вільного добутку паратопологічних груп є узагальненням поняття вільного добутку топологічних груп (див. [2]). Це впливає з наступної теореми.

**Теорема 1.** *Нехай  $\{G_i : i \in I\}$  – сім'я топологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток  $\prod_{i \in I} *G_i$  у категорії паратопологічних груп є топологічною групою. Ця група є топологічно ізоморфною топологічній групі, яка є вільним добутком цієї ж сім'ї у категорії топологічних груп.*

Наступні теореми подають тополого-алгебраїчні властивості вільних добутків паратопологічних груп.



**Теорема 2.** Нехай  $\{G_i : i \in I\}$  – сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток  $\prod_{i \in I} *G_i \in$  (лінійно) зв'язною паратопологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники  $\in$  (лінійно) зв'язними паратопологічними групами.

Нагадаємо, що топологічний простір  $X$  називається  $\sigma$ -компактним простором, якщо він може бути представлений у вигляді зліченного об'єднання  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  своїх компактних підпросторів  $K_n$ .

**Теорема 3.** Нехай  $\{G_i : i \in I\}$  – зліченна сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток  $\prod_{i \in I} *G_i \in \sigma$ -компактним простором тоді і тільки тоді, коли усі співмножники  $G_i \in \sigma$ -компактними просторами.

Нагадаємо, що топологічний простір  $X$  має властивість Бера, якщо він не може бути зображеним у вигляді зліченного об'єднання своїх ніде не щільних підпросторів.

**Теорема 4.** Нехай  $G \neq \{e\}$  і  $H \neq \{e\}$  – паратопологічні групи. Тоді вільний топологічний добуток  $G * H$  має властивість Бера тоді і тільки тоді, коли групи  $G$  і  $H$  - дискретні.

По аналогії до випадку топологічних груп (див. [2]) скажемо, що паратопологічна група  $G \in$  MAP-групою (maximally almost periodic), якщо  $G$  допускає неперервний гомоморфізм в компакту гаусдорфову групу.

**Теорема 5.** Нехай  $\{G_i : i \in I\}$  – сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток  $\prod_{i \in I} *G_i \in$  MAP-групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники  $\in$  MAP-групами.

1. Пирч Н.М. Вільні добутки паратопологічних груп // Математичні студії (у друці).
2. Morris S.A. Free products of topological groups // Bull. Austr. Math. Soc. – 1971. – 4. – P. 17–29.

#### FREE PRODUCTS OF PARATOPOLOGICAL GROUPS

*We consider topologically-algebraic properties of the free products of paratopological groups.*



УДК 512.64

## ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ МАТРИЦІ

Романів А.М.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, [romaniv\\_a@ukr.net](mailto:romaniv_a@ukr.net)

Нехай  $P$  – поле,  $A(x)$  – неособлива  $n \times n$  матриця,  $n \in \{2, 3, 4\}$ , над  $P[x]$ . Для неї існують такі оборотні матриці  $P(x), Q(x)$ , що

$$P(x)A(x)Q(x) = \Psi(x) = \text{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \quad \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$\Psi(x)$  – канонічна діагональна форма матриці  $A(x)$ . Запишемо матрицю  $\Psi(x)$  у вигляді добутку

$$\Psi(x) = \Phi(x)\Delta(x),$$

де  $\Phi(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ ,  $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\deg \det \Phi(x) = nr$ .

П.С. Казімірський, розглядаючи питання існування та опису унітальних дільників многочленної матриці  $A(x)$  з канонічною діагональною формою  $\Phi(x)$ , у випадку, коли  $P = \mathbb{C}$ , запровадив поняття визначальної матриці [1]:

$$V(\Psi, \Phi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} k_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} k_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} k_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} k_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

де

$$k_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} = 1; \\ k_{ij0} + k_{ij1}x + \dots + k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}, & \text{якщо } \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} \neq 1, \text{ де } h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1, \end{cases}$$

і  $k_{ijl}$  – незалежні змінні,  $i = 2, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $i > j$ . На основі цієї матриці він розробив метод факторизації многочленних матриць. Згідно результатів роботи [2], визначальна матриця відіграє важливу роль в описі неасоційованих дільників многочленних матриць і у випадку, коли  $P$  – довільне

поле. У пропонованій роботі досліджуються властивості визначальної матриці відносно дії на неї матриць із певних матричних груп [3].

Позначимо через  $P(k_{ij})[x]$  – трансцендентне розширення поля  $P[x]$ , одержане приєднанням незалежних змінних  $k_{ij}$ , а через  $(V(\Psi, \Phi)T(x))_i$  – підматрицю матриці  $V(\Psi, \Phi)T(x)$ , отриману внаслідок викреслення її перших  $i$  рядків та перших  $i$  стовпців.

Розглянемо мультиплікативні групи:

$$\mathbf{G}_\Phi = \left\{ H(x) \in GL_n(P(k_{ij})[x]) \mid H(x)\Phi(x) = \Phi(x)H_1(x), \text{ де } H_1(x) \in GL_n(P(k_{ij})[x]) \right\},$$

$$\mathbf{G}_\Psi = \left\{ T(x) \in GL_n(P[x]) \mid T(x)\Psi(x) = \Psi(x)T_1(x), \text{ де } T_1(x) \in GL_n(P[x]) \right\}.$$

**Теорема 1.** Нехай  $T(x) \in \mathbf{G}_\Psi$ . Тоді

$$\left( \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det(V(\Psi, \Phi)T(x))_i \right) = 1, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

**Теорема 2.** Нехай  $T(x) \in \mathbf{G}_\Psi$ . Тоді в групі  $\mathbf{G}_\Phi$  існує така матриця  $H(x)$ , що  $H(x)V(\Psi, \Phi)T(x)$  є нижньою унітрикутною матрицею.

1. Казимирский П.С. Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр.мат. журн. – 1980. – **32**, №4. – С. 483-498.
2. Щедрик В.П. Про один клас дільників матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, №3. – С. 13-19.
3. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. **12**. – С. 14-21.

#### ON SOME PROPERTIES OF A DETERMINANT MATRIX

*Some properties of a determinant matrix over an arbitrary field have been suggested.*



УДК 515.12

## ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКТОРА СИМЕТРИЧНОГО СТЕПЕНЯ В АСИМПТОТИЧНІЙ КАТЕГОРІЇ

Шукель О.Б.

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
[oshukel@gmail.com](mailto:oshukel@gmail.com)*

Асимптотична топологія — порівняно новий розділ математики, який досліджує властивості метричних просторів, а також більш загальних структур — так званих грубих просторів — “на нескінченності”. Основи асимптотичної топології викладено в статті А. Дранішнікова [1].

Функтор симетричного степеня відіграє особливу роль серед функторів скінченного степеня. Зокрема, задача продовження відображень зі значеннями в симетричних степенях пов'язана з результатами Альмгрена [2], які стосуються геометричних варіаційних проблем у ковимірі, вищому, ніж 1. Крім того, функтор симетричного степеня є важливим у алгебраїчній топології у зв'язку з теоремою Дольда-Тома [3]. У [4] доведено, що цей функтор зберігає клас просторів скінченного асимптотичного виміру.

Поняття абсолютного екстензора (для заданого класу об'єктів) носить категорний характер. Розглядаємо абсолютні екстензори в асимптотичній категорії Дранішнікова і досліджуємо проблему збереження класу абсолютних екстензорів функтором симетричного степеня в цій категорії.

Метричний простір  $(X, d)$  називають *абсолютним екстензором* у категорії  $\mathcal{A}$  (позначається  $X \in \text{AE}(\mathcal{A})$ ), якщо для кожного метричного простору  $(Y, \rho)$  і кожного грубо власного асимптотично ліпшицевого відображення  $f: A \rightarrow X$ , означеного на довільній замкненій підмножині  $A$  простору  $Y$ , існує продовження  $\bar{f}: Y \rightarrow X$ , що є грубо власним асимптотично ліпшицевим відображенням.

В асимптотичній категорії М. Громов наводить декілька еквівалентних означень асимптотичного виміру. Використовуємо означення асимптотичного виміру в термінах абсолютних екстензорів. Згідно з теоремою Дранішнікова [1], максимальний клас  $\mathcal{C}_n$  метричних просторів, у якому евклідовий простір  $\mathbb{R}^{n+1} \in \text{AE}(\mathcal{C}_n)$ , ідентичний класові метричних просторів з *асимптотичним виміром*  $\leq n$ , означеним М. Громовим [5].

Нагадаємо означення  $n$ -го симетричного степеня метричного простору  $(X, d)$ . Нехай  $\sim$  - відношення еквівалентності на степені  $X^n$ , що задається

умовою:  $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$  тоді і тільки тоді, коли існує перестановка  $\sigma$  множини  $\{1, \dots, n\}$  така, що  $x_i = y_{\sigma(i)}$  для кожного  $i = 1, \dots, n$ . Факторпростір простору  $X$  за таким відношенням еквівалентності називають *симетричним степенем* простору  $X$  і позначають  $SP^n(X)$ .

Клас еквівалентності відношення  $\sim$ , що містить точку  $(x_1, \dots, x_n)$ , позначають  $[x_1, \dots, x_n]$ . Кожне відображення  $f: X \rightarrow Y$  індукує відображення  $SP^n(f): SP^n(X) \rightarrow SP^n(Y)$ , що задається формулою:

$$SP^n(f)([x_1, \dots, x_n]) = [f(x_1), \dots, f(x_n)].$$

Метрику  $\hat{d}$  на  $SP^n(X)$  задають формулою:

$$\hat{d}([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \min_{\sigma} \max_i d(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

*Вимір Ассуада-Нагати* простору  $X$  — це мінімальне число  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , що має властивість: існує стала  $C > 0$  така, що для кожного  $s > 0$  існує покриття  $\mathcal{A}$  простору  $X$  таке, що  $\text{mesh}(\mathcal{A}) \leq Cs$  і  $s$ -кратність покриття  $\mathcal{A}$  не більша, ніж  $n$  (Позначення  $\dim_{AN}(X) = n$ ).

Через  $\mathcal{AN}(\omega)$  позначатимемо клас метричних просторів, вимір Ассуада-Нагати яких скінченний.

*Асимптотичний вимір Ассуада-Нагати* простору  $X$  — це мінімальне число  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , що має властивість: існує  $s_0 \geq 0$  та існує стала  $C > 0$  така, що для кожного  $s \geq s_0$  існує покриття  $\mathcal{A}$  простору  $X$  таке, що  $\text{mesh}(\mathcal{A}) \leq Cs$  і  $s$ -кратність  $\mathcal{A}$  не більша, ніж  $n$  (Позначення  $\text{asdim}_{AN}(X) = n$ ).

**Теорема 1.** Нехай  $X$  — власний метричний простір і  $X \in \text{AE}(\mathcal{AN}(\omega))$ . Тоді  $SP^n(X) \in \text{AE}(\mathcal{AN}(\omega))$ .

**Теорема 2.** Нехай для кожного  $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  клас  $\mathcal{AC}(t)$  складається з власних метричних просторів скінченного асимптотичного виміру Ассуада-Нагати і асимптотичного виміру  $\leq t$ . Нехай  $X$  - власний метричний простір і  $X \in \text{AE}(\mathcal{AC}(t))$ . Тоді для кожного  $n \in \mathbb{N}$  маємо  $SP^n(X) \in \text{AE}(\mathcal{AC}(t))$ .

1. *Dranishnikov A.* Asymptotic topology // Russian Math. Surveys. - 2000. — 55, No 6. — P. 71-116.

2. *Almgren F.J.Jr.* Dirichlet's problem for multiple-valued functions and the regularity of mass minimizing integral currents // Minimal submanifolds and geodesics. — Tokyo: (Proc. Japan-United States sem., 1977). — North-Holland, Amsterdam, New York, 1979. — P. 1-6.
3. *Dold A., Thom R.* Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte // Ann.Math. - 1958. - **67**. - P. 239-281.
4. *Shukel' O., Zarichnyi M.* Asymptotic dimension of symmetric powers // Mathematical bulletin of the Shevchenko Scientific Society. - 2008. - **5**. - P. 304-311.
5. *Gromov M.* Asymptotic invariants for infinite groups // LMS Lecture Notes. - 1993. - **182**, № 2. - P. 1-295.

#### SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF SYMMETRIC POWER FUNCTOR IN ASYMPTOTIC CATEGORY

*It is proved that the symmetric power functor in the asymptotic category preserves the class of absolute extensors for the class of proper metric spaces of finite asymptotic Assouad-Nagata dimension.*



УДК 515.12

#### CHARACTERIZING MEAGER PARATOPOLOGICAL GROUPS

**Banakh T.O.<sup>1</sup>, Guran I.Yo.<sup>1</sup>, Ravsky O.V.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ivan Franko Lviv National University, [tbanakh@yahoo.com](mailto:tbanakh@yahoo.com).*

<sup>2</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, [oravsky@mail.ru](mailto:oravsky@mail.ru)*

Trying to find a counterpart of the Lindelöf property in the category of topological groups I. Guran [2] introduced the notion of an  $\omega$ -bounded group, which turned out to be very fruitful in topological algebra, see [3]. We recall that a topological group  $G$  is  $\omega$ -bounded if for each non-empty open subset  $U \subset G$  there is a countable subset  $C \subset G$  such that  $CU = G = UC$ .

A similar approach to the Baire category leads us to the notion of a *shift-meager* (shift-Baire) group. This is a topological group that can(not) be written as the union of countably many translation copies of some fixed nowhere dense subset.

The notion of a shift-meager (shift-Baire) group can be defined in a more general context of semitopological groups, that is, groups  $G$  endowed with a shift-invariant topology  $\tau$ . The latter is equivalent to saying that the group operation

$\cdot : G \times G \rightarrow G$  is separately continuous. If this operation is jointly continuous, then  $(G, \tau)$  is called a *paratopological group*.

A semitopological group  $G$  is defined to be

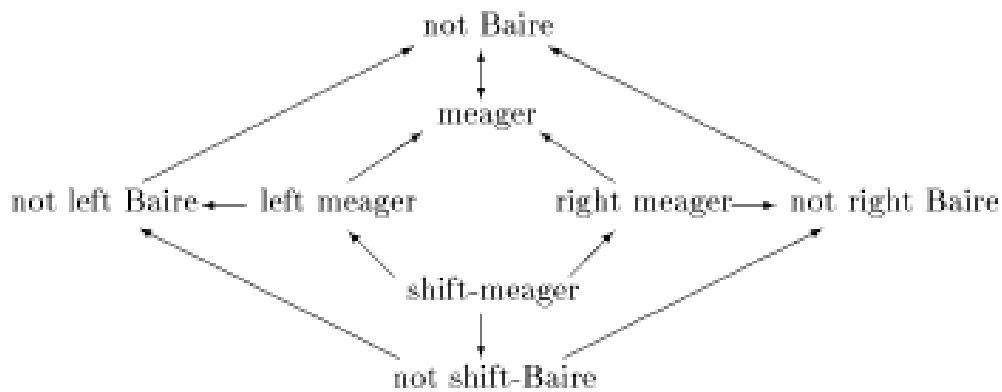
*left meager* (resp. *right meager*) if  $G = CA$  (resp.  $G = AC$ ) for some nowhere dense subset  $A \subset G$  and some countable subset  $C \subset G$ ;

*shift-meager* if  $G$  is both left and right meager;

*left Baire* (resp. *right Baire*) if for every open dense subset  $U \subset G$  and every countable subset  $C \subset G$  the intersection  $\bigcap_{x \in C} xU$  (resp.  $\bigcap_{x \in C} Ux$ ) is dense in  $G$ ;

*shift-Baire* if  $G$  is both left and right Baire.

For semitopological groups those notions relate as follows:



The following theorem implies that for Hausdorff paratopological groups all the eight properties from this diagram are equivalent.

**Theorem.** *A Hausdorff paratopological group is meager if and only if it is shift-meager.*

1. *Banakh T. O., Ravsky O. V.* Oscillator topologies on paratopological groups and related number invariants // Algebraical Structures and their Applications, Kyiv: Inst. Mat. NANU. – 2002. – P. 140–152 (arXiv:0810.3028).
2. *Guran I. Y.* Topological groups similar to Lindelöf groups // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1981. – **256**, № 6 – С. 1305–1307.
3. *Tkachenko M.* Introduction to topological groups // Topology and Applications. – 1998. – **86**, №3 – P. 179–231.

#### ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ХУДИХ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Показано, що хаусдорфова паратопологічна група  $G$  є худюю тоді і тільки тоді, коли існують ніде не щільна підмножина  $A \subset G$  та зліченна множина  $C \subset G$  такі, що  $CA = G = AC$ .

УДК 515.12

## CLASSIFYING COUNTABLE ABELIAN GROUPS UP TO THE BIJECTIVE COARSE EQUIVALENCE

**Banakh T., Zarichnyi I.**

*Ivan Franko Lviv National University, [tbanakh@yahoo.com](mailto:tbanakh@yahoo.com), [ihor.zarichnyj@gmail.com](mailto:ihor.zarichnyj@gmail.com)*

This talk is devoted to the classification of abelian groups up to the bijective coarse equivalence. Two metric spaces  $X, Y$  are *bijectively coarsely equivalent* if there is a bijective map  $f: X \rightarrow Y$  such that both  $f$  and  $f^{-1}$  are large scale uniform. The large scale uniformity of  $f$  means that for each  $\varepsilon$  there  $\delta$  such that  $\text{dist}(f(x), f(x')) < \delta$  for any points  $x, x' \in X$  with  $\text{dist}(x, x') < \varepsilon$ . Each countable group is considered as a metric space endowed with a left invariant metric with finite balls, see [3].

The aim of the talk is to present a bijective coarse classification of countable abelian. We shall show that each abelian group is bijectively coarsely equivalent to a group of the form  $Z_f = \bigoplus_{p \in \overline{\Pi}} Z_p^{f(p)}$  for a suitable function  $f: \overline{\Pi} \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$

defined on the set  $\overline{\Pi} = \Pi \cup \{\infty\}$  of prime numbers with attached infinity.

The function  $f: \overline{\Pi} \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$  can be recovered from the algebraic structure of  $G$  as follows. Let  $f_G(\infty)$  be the smallest cardinality  $|S|$  of a subset  $S \subset G$  generating a subgroup  $H$  of locally finite index in  $G$ . The latter means that  $H$  has finite index in each subgroup of  $G$  generated by the union of  $H$  and a finite subset. Fix any such a subgroup  $H$  in  $G$  and for every prime number  $p$  let  $f_G(p) = \sup\{k \in \omega : p^k \text{ divides the index of } H \text{ in a suitable subgroup of } G\}$ .

**Theorem 1.** *Each Abelian group  $G$  is bijectively coarsely equivalent to  $Z_{f_G}$ .*

Now we define an almost equality relation  $=^*$  on functions  $f: \overline{\Pi} \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$  as follows. Given two function  $f, g: \overline{\Pi} \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$  we write  $f =^* g$  iff one of the following conditions holds:  $f(\infty) = g(\infty) = 0$  and  $f = g$ ;  $f(\infty) = g(\infty) = \infty$ ;  $0 < f(\infty) = g(\infty) < \infty$  and  $\sum_{p \in \Pi} |f(p) - g(p)| < \infty$ .

**Theorem 2.** *Two abelian groups  $G, H$  are bijectively coarsely equivalent if and only if  $f_G =^* f_H$ .*



1. Banakh T., Higes J., Zarichnyy I. The coarse classification of countable abelian groups, preprint.
2. Banakh T., Zarichnyy I. The coarse classification of homogeneous ultra-metric spaces. preprint (arXiv:0801.2132).
3. Smith J. On Asymptotic dimension of Countable Abelian Groups // Topology Appl. – 2006. – 153, № 12. – P. 2047-2054.

**КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ АБЕЛЕВИХ ГРУП ЗГІДНО ГРУБОЇ БІЄКТИВНОЇ  
ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ**



УДК 512.536

**BRANDT EXTENSIONS AND PRIMITIVE TOPOLOGICAL INVERSE  
SEMIGROUPS**

**Gutik O.<sup>1</sup>, Pavlyk K.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Ivan Franko Lviv National University, [o\\_gutik@franko.lviv.ua](mailto:o_gutik@franko.lviv.ua),

<sup>2</sup> Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,  
[kpavlyk@yahoo.co.uk](mailto:kpavlyk@yahoo.co.uk)

We shall follow the terminology of [2, 4, 5].

A *topological (inverse) semigroup* is a Hausdorff topological space together with a continuous multiplication (and an inversion, respectively). An inverse semigroup  $S$  with zero is called *primitive* if every idempotent of  $S$  is primitive. A completely 0-simple inverse semigroup is called *Brandt semigroup*. If a semigroup  $S$  has zero  $0_S$ , then for any  $A \subseteq S$  we denote  $A^* = A \setminus \{0_S\}$ .

**Proposition 1.** *Every completely 0-simple topological inverse semigroup  $S$  is topologically isomorphic to a topological Brandt  $\lambda$ -extension  $B_\lambda(G)$  of some topological group  $G$  and cardinal  $\lambda \geq 1$  in the class of topological inverse semigroups. More than:*

(i) *any non-zero subgroup of  $S$  is topologically isomorphic to  $G$  and every non-zero  $\mathcal{H}$ -class of  $S$  is homeomorphic to  $G$  and is a clopen subset in  $S$ ;*

(ii) *the family  $\mathcal{B}(\alpha, g, \beta) = \{(\alpha, g \cdot U, \beta) \mid U \in \mathcal{B}_G(e)\}$ , where  $\mathcal{B}_G(e)$  is a base of the topology at the unity  $e$  of  $G$ , is a base of the topology at the non-zero element  $(\alpha, g, \beta) \in \mathcal{B}_\lambda(G)$ .*

**Theorem 1.** *Every primitive (countably) compact topological inverse semigroup  $S$  is topologically isomorphic to an orthogonal sum  $\sum_{i \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_{\lambda_i}(G_i)$  of*

topological Brandt  $\lambda_i$ -extensions  $\mathcal{B}_{\lambda_i}(G_i)$  of (countably) compact topological groups  $G_i$  in the class of topological inverse semigroups for some finite cardinals  $\lambda_i \geq 1$  More than the family

$$\mathcal{B}(0) = \{S \setminus (B_{\lambda_{i_1}}(G_{i_1}) \cup B_{\lambda_{i_2}}(G_{i_2}) \cup \dots \cup B_{\lambda_{i_n}}(G_{i_n}))^* \mid i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}$$

determines a base of the topology at zero 0 of  $S$ .

**Theorem 2.** Every primitive countably compact topological inverse semigroup  $S$  is a dense subsemigroup of a primitive compact topological inverse semigroup.

Let  $\mathcal{S}$  be a class of topological semigroups.

A semigroup  $S \in \mathcal{S}$  is called  $H$ -closed in  $\mathcal{S}$ , if  $S$  is a closed subsemigroup of any topological semigroup  $T \in \mathcal{S}$  which contains  $S$  as a subsemigroup. If  $\mathcal{S}$  coincides with the class of all topological semigroups, the the semigroup  $S$  is called  $H$ -closed.  $H$ -closed topological semigroups were introduced by J.W. Stepp in [6], and there they were called maximal semigroups.

A topological semigroup  $S \in \mathcal{S}$  is called *absolutely  $H$ -closed in the class  $\mathcal{S}$* , if any continuous homomorphic image of  $S$  into  $T \in \mathcal{S}$  is  $H$ -closed in  $\mathcal{S}$ . An algebraic semigroup  $S$  is called *algebraically  $h$ -closed in  $\mathcal{S}$* , if  $S$  with discrete topology  $\partial$  is absolutely  $H$ -closed in  $\mathcal{S}$  and  $(S, \partial) \in \mathcal{S}$ . Absolutely  $H$ -closed topological semigroups and algebraically  $h$ -closed semigroups were introduced by Stepp in [7], and there they were called absolutely maximal and algebraic maximal, respectively.

A topological group  $G$  is called *absolutely closed* if  $G$  is a closed subgroup of any topological group which contains  $G$  as a subgroup [1].

A topological group  $G$  is called  *$h$ -complete* if for every continuous homomorphism  $f : G \rightarrow H$  into a topological group  $H$  the subgroup  $f(G)$  of  $H$  is closed [3].

**Theorem 3.** A primitive topological inverse semigroup  $S$  is (absolutely)  $H$ -closed in the class of topological inverse semigroup if and only if any maximal subgroup of  $S$  is absolutely closed ( $h$ -complete).

**Corollary.** A primitive inverse semigroup  $S$  is algebraically ( $h$ -)closed in the class of topological inverse semigroups if and only if any maximal subgroup of  $S$  is algebraically ( $h$ -)closed in the class of topological inverse semigroups.

1. Aleksandrov A.D. On the extension of a Hausdorff space to an  $H$ -closed space // Dokl. Akad. Nauk. SSSR. – 1942. – 37. – P. 138-141 (in Russian).

2. Carruth J.H., Hildebrandt J.A. and Koch R.J. The Theory of Topological Semigroups. - Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
3. Dikranjan D., Uspenskij V.V. Categorically compact topological groups // J. Pure Appl. Algebra. – 1998. – **126**. – P. 149-168.
4. Engelking R. General Topology. - 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
5. Petrich M. Inverse Semigroups. - John Wiley & Sons, New York, 1984.
6. Stepp J.W. A note on maximal locally compact semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. - **20**:1. – 1969. – P. 251-253.
7. Stepp J.W. Algebraic maximal semilattices // Pacific J. Math. – 1975. - **58**:1. – P. 243-248.

### РОЗШИРЕННЯ БРАНДТА ТА ПРИМІТИВНІ ТОПОЛОГІЧНІ ІНВЕРСНІ НАПІВГРУПИ

*Описана структура компактних та зліченно компактних примітивних топологічних інверсних напівгруп. Доведено, що довільна зліченно компактна примітивна топологічна інверсна напівгрупа занурюється у компактну примітивну топологічну інверсну напівгрупу. Знайдено критерій (абсолютної)  $H$  – замкненості примітивних топологічних інверсних напівгруп у класі топологічних інверсних напівгруп.*



УДК 512.536

### TOPOLOGICAL FINITE SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUPS

**Gutik O., Reiter A.**

*Ivan Franko Lviv National University, [o\\_gutik@franko.lviv.ua](mailto:o_gutik@franko.lviv.ua), [reiter\\_andriy@yahoo.com](mailto:reiter_andriy@yahoo.com)*

We shall follow the terminology of [1, 2, 4].

A *topological semigroup* is a Hausdorff topological space together with a continuous semigroup operation.

Let  $X$  be a Hausdorff topological space. Let  $I_n(X)$  denote the set of all partial one-to-one transformations with the rank  $\leq n$  of  $X$  together with the following semigroup operation:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \text{ if } x \in \text{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \text{dom } \alpha \mid y\alpha \in \text{dom } \beta\}$$

for  $\alpha, \beta \in I_n(X)$ . The semigroup  $I_n(X)$  is called *the finite symmetric inverse semigroup of the topological space  $X$  of the rank  $\leq n$* .

**Theorem 1.** *A topological semigroup  $S$  with the countably compact square  $S \times S$  does not contain an infinite countable semigroup of matrix units.*

Theorem 1 implies the following corollary:

**Corollary 2** [3]. *A compact topological semigroup  $S$  does not contain an infinite countable semigroup of matrix units.*

**Theorem 3.** *A topological semigroup  $S$  with the countably compact square  $S \times S$  does not contain the semigroup  $I_n(X)$  for an infinite topological space  $X$  and any positive integer  $n$ .*

**Corollary 4.** *A compact topological semigroup  $S$  does not contain the semigroup  $I_n(X)$  for an infinite topological space  $X$  and any positive integer  $n$ .*

**Theorem 5.** *Any continuous homomorphism of the semigroup  $I_n(X)$  for an infinite topological space  $X$  into a topological semigroup  $S$  with the countably compact square  $S \times S$  is annihilating for any positive integer  $n$ .*

Theorem 5 implies the following corollaries:

**Corollary 6.** *Any continuous homomorphism of an infinite countable semigroup of matrix units into a topological semigroup  $S$  with the countably compact square  $S \times S$  is annihilating.*

**Corollary 7.** *Any continuous homomorphism of the semigroup  $I_n(X)$  for an infinite topological space  $X$  into a compact topological semigroup is annihilating for any positive integer  $n$ .*

**Corollary 8** [3]. *Any continuous homomorphism of an infinite countable semigroup of matrix units into a compact topological semigroup is annihilating.*

1. Carruth J.H., Hildebrand J.A. and Koch R.J. The Theory of Topological Semigroups. - Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
2. Engelking R., General Topology. - 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
3. Gutik O. V. and Pavlyk K. P., On topological semigroups of matrix units // Semigroup Forum. - 71:3. – 2005. – P. 389-400.
4. Petrich M., Inverse Semigroups. - John Wiley & Sons, New York, 1984.

#### ТОПОЛОГІЧНІ СКІНЧЕННІ СИМЕТРИЧНІ ІНВЕРСНІ НАПІВГРУПИ

Доведено, що топологічна скінченна симетрична інверсна напівгрупа  $I_n(X)$  рангу  $\leq n$  над нескінченним простором не занурюється у топологічну напівгрупу зі зліченно компактним квадратом і, що кожен неперервний гомоморфізм з топологічної напівгрупи  $I_n(X)$  у топологічну напівгрупу зі зліченно компактним квадратом є анулюючим.

## СЕКЦІЯ 10. “ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ”

УДК 517.956

### ГІПЕРБОЛІЧНА КВАЗІЛІНІЙНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Андрусяк Р.В., Бурдейна Н.О.

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
[r\\_andrusyak@yahoo.com](mailto:r_andrusyak@yahoo.com), [n\\_burdeina@ukr.net](mailto:n_burdeina@ukr.net)*

В області  $G_T^a = \{(x, t) \in R^2 : a_1(t) < x < a_2(t), 0 < t < T\}$  з невідомими межами  $a_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , розглянуто систему квазілінійних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad u = (u_1, \dots, u_n). \quad (1)$$

Початкові та граничні умови задамо наступним чином:

$$a_1(0) = a_1^0, a_2(0) = a_2^0, u(x, 0) = g(x), \quad g = (g_1, \dots, g_n), \quad a_1^0 \leq x \leq a_2^0, \quad (2)$$

$$H_k(t, a_1(t), a_2(t), a_1'(t), a_2'(t), u(a_1(t), t), u(a_2(t), t)) = 0, \quad k = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u_i(a_k(t), t) = \mu_k^i(t, \{u_s(a_{k'}(t), t)\}_{k'=1, 2, s \notin I_k}), \quad i \in I_k, \quad k = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

де множини індексів  $I_1$  та  $I_2$  задаються формулою

$$I_k = \{i : \text{sign}[\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) - \alpha_k] = (-1)^{k+1}\}, \quad k = 1, 2,$$

а  $\alpha_1, \alpha_2$  визначаються із співвідношення  $H_k(0, a_1^0, a_2^0, \alpha_1, \alpha_2, g(a_1^0), g(a_2^0)) = 0$ .

При виконанні умов гладкості та ліпшицевості стосовно вихідних функцій, а також умов погодження нульового та першого порядків і деяких додаткових співвідношень, встановлено існування та єдиність локального класичного розв'язку задачі (1)-(4). Доведення здійснюється на основі методу характеристик і теореми Банаха про нерухому точку.

1. *Филимонов А. М.* Локальная разрешимость смешаной задачи для гиперболических задач квазилинейных уравнений с двумя переменными // Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4001-82. - Деп. 72 с.
2. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Диф. уравнения. – 2006. – 42, № 4. – С. 489–503.

**HYPERBOLIC QUASI-LINEAR STEFAN PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY  
CONDITIONS**

*Applying the method of characteristics and the Banach theorem of contractive mappings, the local classical solvability of free boundary problem for hyperbolic system of quasi-linear equations is established.*

\* \* \* \* \*

УДК 517.95

**ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТА В  
ДВОВИМІРНМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З УМОВАМИ  
СТЕФАНА**

**Баранська І.Є.**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, e-mail: [BIE2006@ukr.net](mailto:BIE2006@ukr.net)*

Дана робота є продовженням дослідження обернених задач визначення старшого коефіцієнта в двовимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею [1, 2].

В області  $\Omega_T = \{(x_1, x_2, t) : l_1(t) < x_1 < l_2(t), h_1(t) < x_2 < h_2(t), 0 < t < T < \infty\}$ , де  $l_i \equiv l_i(t)$ ,  $h_i \equiv h_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , - невідомі функції, що визначають межі області, розглянемо рівняння з невідомим коефіцієнтом  $a(t)$

$$u_t = a(t)(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) + b(x_1, x_2, t)u_{x_1} + c(x_1, x_2, t)u_{x_2} + \\ + d(x_1, x_2, t)u + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [l_1(0), l_2(0)] \times [h_1(0), h_2(0)], \quad (2)$$

де  $l_i(0)$ ,  $h_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ , - задані, причому  $l_1(0) < l_2(0)$ ,  $h_1(0) < h_2(0)$  та крайовими умовами першого роду

$$u(l_1(t), x_2, t) = \mu_1(x_2, t), \quad u(l_2(t), x_2, t) = \mu_2(x_2, t),$$

$$(x_2, t) \in [h_1(t), h_2(t)] \times [0, T],$$

$$u(x_1, h_1(t), t) = \mu_3(x_1, t), \quad u(x_1, h_2(t), t) = \mu_4(x_1, t),$$

$$(x_1, t) \in [l_1(t), l_2(t)] \times [0, T].$$

Задамо умови типу Стефана

$$l_1'(t) = \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} u_{x_1}(l_1(t), x_2, t) dx_2 + \mu_5(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$l_2'(t) = - \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} u_{x_1}(l_2(t), x_2, t) dx_2 + \mu_6(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$h_1'(t) = \int_{l_1(t)}^{l_2(t)} u_{x_2}(x_1, h_1(t), t) dx_1 + \mu_7(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$h_2'(t) = - \int_{l_1(t)}^{l_2(t)} u_{x_2}(x_1, h_2(t), t) dx_1 + \mu_8(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

та умови перевизначення

$$a(t)u_{x_1}(l_1(t), x_0, t) = \mu_9(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

де  $x_0 \in (h_1(t), h_2(t))$ .

Заміною змінних  $y_1 = \frac{x_1 - l_1(t)}{l_2(t) - l_1(t)}$ ,  $y_2 = \frac{x_2 - h_1(t)}{h_2(t) - h_1(t)}$ ,  $t = t$  задачу (1)–

(8) зведемо до задачі стосовно невідомих  $a(t)$ ,  $l_1(t)$ ,  $h_1(t)$ ,  $l_3(t) \equiv l_2(t) - l_1(t)$ ,  $h_3(t) \equiv h_2(t) - h_1(t)$ ,  $v(y_1, y_2, t) \equiv u(y_1 l_3(t) + l_1(t), y_2 h_3(t) + h_1(t), t)$  в області з фіксованими межами  $Q_T = \{(y_1, y_2, t) : 0 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1, 0 < t < T < \infty\}$ .

До отриманої задачі застосовуємо методу дослідження обернених задач [3]. Зводючи отриману задачу до еквівалентної системи інтегральних рівнянь і застосовуючи до цієї системи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, встановлюємо умови існування класичного розв'язку задачі. Єдиність розв'язку задачі (1)–(8) впливає з єдиності розв'язку відповідної системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

1. Баранська І.Є., Іванчов М.І. Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісник. - 2007. - Т. 4, № 4. - С. 457-484.
2. Баранська І.Є. Обернена задача в області з вільною межею для анізотропного рівняння параболічного типу // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. - 2008 - Вип. 374. - Математика. - С. 13-28.
3. Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. - VNTL Publishers. - 2003.

INVERSE PROBLEM OF DETERMINATION OF SENIOR COEFFICIENT IN TWO-  
DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH STEFAN CONDITIONS

We establish conditions for the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a two-dimensional parabolic equation with unknown time dependent leading coefficient in a domain with free boundaries. The Stefan conditions are used as additional ones.



УДК 517

КРАЙОВА ЗАДАЧА З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ  
СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ  
КОЕФІЦІЄНТАМИ

Білусяк Н.І.<sup>1</sup>, Репетило С.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,

<sup>2</sup>Національний університет "Львівська політехніка", e-mail: [RepetyloSofiya@gmail.com](mailto:RepetyloSofiya@gmail.com)

В області  $D = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega\}$  розглядаємо задачу

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t, x) = f(t, x) + \varepsilon \Phi(t, x, u(t, x)),$$

$$(t, x) \in D, \quad a_s, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^{2(r-1)} u}{\partial t^{2(r-1)}} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^{2r-1} u}{\partial t^{2r-1}} \Big|_{t=T} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad r = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$L^q u|_{\sigma} = 0, \quad q = 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

де  $\Omega \in \mathbb{R}^p$  – обмежена область з гладкою межею  $\Gamma$ ,  $\sigma = [0, T] \times \Gamma$ ,

$L := \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - q(x)$  – еліптичний в області  $\Omega$  диференціальний

вираз із гладкими в  $\bar{\Omega}$  коефіцієнтами,  $q(x) \geq 0$ ;  $\varepsilon \neq 0$ ;  $\Phi(t, x, u)$  визначена та неперервна за змінною  $t$  і досить гладка за  $x, u$  в замкненій області

$$Q = \{(t, x, u) : (t, x) \in \bar{D}\}, \quad u \in \bar{S}(u^0, r),$$

$$\bar{S}(u^0, r) = \{u \in C^{2n}(\bar{D}) : \|u - u^0\|_{C^{2n}(\bar{D})} \leq r\},$$



$u^0 := u^0(t, x)$  - розв'язок задачі (1)–(3) при  $\varepsilon = 0$ . Припускаємо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським в області  $D$ .

У випадку задачі з умовами (2), (3) для лінійного рівняння (1) (при  $\varepsilon = 0$ ) встановлено умови коректності та конструктивно побудовано розв'язок. У випадку  $\varepsilon \neq 0$  встановлені умови, при виконанні яких для досить малих  $|\varepsilon|$  існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), який належить до кулі  $\bar{S}(u^0, r)$  і неперервно залежить від функції  $f(t, x)$ .

**THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR WEAKLY NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS**

*The conditions of existence of unique solution of the boundary problem with mixed conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations are established.*



**ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАГАЛЬНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

**Бурский В.П.<sup>1</sup>, Зарецкая А.А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>ИПММ НАНУ, <sup>2</sup>ДонНУ, Донецьк, Украина, e-mail: [v30@dn.farlep.net](mailto:v30@dn.farlep.net), [seerall@mail.ru](mailto:seerall@mail.ru)

**Теорема.** *Нехай задано систему диференціальних рівнянь першого порядку в крузі:*

$$Lu \equiv a \frac{\partial u}{\partial x_1} + b \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \text{В } \Omega \tag{1}$$

$$Im u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де  $a$  та  $b$  – сталі комутуючі комплексні матриці розміру  $n \times n$ , до того ж,  $a^2 + b^2 = I$ ,  $a$  і  $b$  – комплексна вектор-функція двох змінних,  $R^2 \supset \Omega = \{x : |x| \leq 1\}$ . Для того щоб задача (1), (2) мала нетривіальний розв'язок  $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  необхідно і досить, щоб у послідовності

детермінантів  $\{\Delta_m\}_{m=0}^\infty$  знайшовся хоча б один нуль. Тут  $\Delta_m = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ ,

де блоки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  розміру  $n \times n$  мають вигляд:

$$(A_1)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\cos \varphi_i a_{jk} - \sin \varphi_i b_{jk}) \tilde{e}_k^i,$$

$$(A_2)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\cos \varphi_i b_{jk} + \sin \varphi_i a_{jk}) \tilde{e}_k^i,$$

$$(A_3)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\cos \bar{\varphi}_i \bar{a}_{jk} - \sin \bar{\varphi}_i \bar{b}_{jk}) \bar{e}_k^i,$$

$$(A_4)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\cos \bar{\varphi}_i \bar{b}_{jk} + \sin \bar{\varphi}_i \bar{a}_{jk}) \bar{e}_k^i.$$

Тут  $a_{i,j}, b_{i,j}$  – елементи матриць  $a$  та  $b$  відповідно,  $\eta^j = (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$ ,  $j = \overline{1, \dots, n}$  – нормований розв'язок алгебричного рівняння  $\det(l(\xi)) = 0$ , якщо воно має різні корені  $\xi^j = \eta^j t$ ,  $t \in R$ , де  $l(\xi)$  – матриця-символ оператора  $L$ . Вектори  $\tilde{e}^j$  – лінійно незалежні та справджують рівняння  $[\tilde{l}(\eta^j)]^* \tilde{e}^j = 0$ , де  $\tilde{l}$  – матриця приєднана до символу оператора.

Наприклад, якщо  $a$  та  $b$  – комплексні сталі,  $u(x_1, x_2)$  – комплексна функція двох змінних в тій же самій області  $\Omega = \{x : |x| \leq 1\} \subset R^2$ , то для існування нетривіального гладкого розв'язку задачі

$$Lu \equiv a \frac{\partial u}{\partial x_1} + b \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

$$Im u|_{\partial \Omega} = 0,$$

необхідно і досить, щоб хоча б одне з чисел  $a$ ,  $b$  було недійсним.



УДК 517.946

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА  $2m$  С ВЫРОЖДЕННЫМ СИМВОЛОМ**

**Буряченко Е.А.**

Донецкий национальный университет, e-mail: [katarzyna@ukr.net](mailto:katarzyna@ukr.net)

Для уравнения произвольного четного порядка  $2m$ ,  $m > 2$ :

$$L(\partial)u = a_0 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + a_1 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m-1} \partial x_2} + \dots + a_{2m-1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1 \partial x_2^{2m-1}} + a_{2m} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} = f(x), \quad (1)$$

рассматривается задача Дирихле в единичном круге  $K = \{x \in R^2 : |x| \leq 1\}$ ,

$$u|_{\partial K} = \chi_0, \quad u'_\nu|_{\partial K} = \chi_1, \dots, u^{(m-1)}_\nu|_{\partial K} = \chi_{m-1}, \quad (2)$$

где  $f(x)$ ,  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{m-1}$  заданные функции,  $\vec{\nu}$  – единичный вектор внешней

нормали,  $\partial_x = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$  – вектор-градиент,  $a_i \in C, i = 0, 1, \dots, 2m$ .

В работе получен критерий единственности решения поставленной задачи в случае, когда корни характеристического уравнения  $L(1, \lambda) = 0$  принимают значения  $\pm i$  и некоторые из них могут иметь кратность  $k = 2, 3, \dots, 2m$ . Заметим, что случай  $k = 1$  был рассмотрен в работе [1]. Особо выделены случаи правильной эллиптичности оператора в уравнении (1).

Основным результатом работы является следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Предположим, что число  $i$  является корнем характеристического уравнения  $L(1, \lambda) = 0$  и имеет кратность  $k < m$ . Тогда для единственности решения задачи (1), (2) в  $C^{2m}(\bar{K})$ , необходимо и достаточно выполнения следующего условия для всех  $n \in N, n \geq 2m$ :*

$$\Delta \neq 0, \quad (3)$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} e^{in\varphi_m} & \dots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_m} & \cos(n-2k)\varphi_m & \dots & \sin(n-2(m-1))\varphi_m \\ e^{in\varphi_{m+1}} & \dots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{m+1}} & \cos(n-2k)\varphi_{m+1} & \dots & \sin(n-2(m-1))\varphi_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{in\varphi_{2m}} & \dots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{2m}} & \cos(n-2k)\varphi_{2m} & \dots & \sin(n-2(m-1))\varphi_{2m} \end{pmatrix}$$

2. Если характеристическое уравнение  $L(1, \lambda) = 0$  имеет корень  $i$  кратности  $k = t$ , тогда задача Дирихле (1), (2) имеет единственное решение.

3. Если характеристическое уравнение  $L(1, \lambda) = 0$  имеет корень  $i$  кратности  $k > t$ , тогда единственность решения задачи (1), (2) нарушается.

Здесь  $\varphi_j$  – углы наклона существующих характеристик, т.е. решения уравнения  $-\operatorname{tg} \varphi_j = \lambda_j \neq \pm i$ .

При выполнении условия (3) уравнение может быть как эллиптическим, но не правильно эллиптическим, так и правильно эллиптическим. Получены дополнительные условия на углы наклона характеристик, гарантирующие как правильную эллиптичность уравнения, так и выполнение условия (3), т.е. условия единственности решения задачи Дирихле для правильно эллиптических уравнений произвольного четного порядка  $2m$ . Заметим, что подобный результат, но для уравнений четвертого порядка был получен в работе [2], а также в работе [3] для уравнений главного типа произвольного четного порядка  $2m$ .

1. Буряченко Е. А. Нетривиальная разрешимость однородной задачи Дирихле в круге для уравнений порядка  $2m$  в случае характеристик, не имеющих углов наклона // Вісник ДонНУ, сер.мат. - 2007. – 50, № 2 - С. 1-9.
2. Babayan A. O. On unique solvability of Dirichlet problem for fourth order properly elliptic equation // Izvestia Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. - 1999. - 34, № 5. -- P. 5-18.
3. Бурский В. П., Буряченко Е. А. Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Матем. Заметки. - 2005. --74, № 4. --С. 1032-1043.

**SOLUTION UNIQUENESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE PROPERLY  
ELLIPTIC EQUATIONS OF THE ARBITRARY EVEN  $2M$  ORDER WITH THE  
DEGENERATED SYMBOL**

*Criterion of the solution uniqueness of the posed Dirichlet problem for the properly elliptic high-order equations are formulated in terms of angles of characteristics slope.*



УДК 517.9

## ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ БЛИЗЬКОЇ ДО ІНТЕГРОВНОЇ ГАМІЛЬТОНОВОЇ СИСТЕМИ З ПІВТОРА СТУПЕНЯМИ ВОЛІ

Вакал Ю.Є.

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, e-mail: [yulv@ukr.net](mailto:yulv@ukr.net)*

Розглядається гамільтонова система з півтора ступенями волі з  $2\pi$ -періодичним за часом гамільтоніаном  $H(y) + \varepsilon h(y, \varphi, t)$ , який записано в канонічних координатах “дія-кут”  $(y, \varphi \mid \text{mod } 2\pi)$ .

Припускається, що  $H : (-a, a) \mapsto \mathbb{R}$  та  $h : (-a, a) \times S^1 \times S^1 \mapsto \mathbb{R}$  – дійсно-аналітичні функції, відображення  $H' : (-a, a) \mapsto (0, 1)$  – сюр'єктивне та  $\inf_{y \in (-a, a)} H''(y) > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  – малий параметр.

Кожному значенню змінної дії, для якого  $H'(y) = \frac{p}{q}$  – раціональне число,

відповідає  $2\pi q$ -періодичний розв'язок незбуреної системи. Вивчається питання: які з цих періодичних розв'язків зберігаються під впливом збурень? Дослідження проводиться із застосуванням методу канонічного усереднення до допоміжної автономної гамільтонової системи з двома ступенями волі, гамільтоніан якої має вигляд  $H(y) + z + \varepsilon h(y, \varphi, \tau)$ , де  $(z, \tau \mid \text{mod } 2\pi)$  — додаткові координати “дія-кут”.

Встановлено достатні умови існування та оцінено кількість періодичних розв'язків збуреної гамільтонової системи, породжених одночасно всіма резонансними циклами допоміжної системи, періоди яких не перевищують  $2\pi N$ , та з'ясовано, якою є можлива швидкість прямування  $N$  до нескінченності, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### ESTIMATION OF NUMBER OF PERIODIC SOLUTIONS OF A HAMILTONIAN SYSTEM WITH ONE AND A HALF DEGREES OF FREEDOM WHICH IS CLOSE TO INTEGRABLE

*A Hamiltonian system with one and a half degrees of freedom which is close to integrable one and has a  $2\pi$ -periodic by time Hamiltonian is discussed. Sufficient conditions of the existence and number of periodic solutions of a perturbed Hamiltonian system, which solutions had been generated simultaneously by all resonant cycles are established.*

УДК 517.926(07)

## ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГОЛОВНОГО ОПЕРАТОРА

Віра М.Б.

Ніжинський державний університет ім. Миколи Гоголя, e-mail: [VyraMaryna@mail.ru](mailto:VyraMaryna@mail.ru)

Запропоновано метод побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із виродженою матрицею при похідних у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць.

У доповіді розглядається можливість побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon); \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(1, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$  – малий параметр,  $h \in N$ ,  $t \in [0;1]$ ,  $x(t, \varepsilon)$ ,  $d(\varepsilon)$ ,  $f(t, \varepsilon)$  – шуканий  $n$  – вимірний та відповідно задані  $l$  – і  $n$  – вимірні вектор-стовпці,  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t)$  –  $(n \times n)$  – матриці;  $M, N$  –  $(l \times n)$  – матриці зі сталими елементами.

Передбачається виконання умов:

1°  $\det B(t) = 0, \forall t \in [0;1];$

2° матриця  $A(t, \varepsilon)$  і вектор  $f(t, \varepsilon)$  допускають на відрізьку  $[0;1]$  рівномірні асимптотичні розвинення

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); \quad f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

3° коефіцієнти розвинень (3) нескінченно диференційовні на  $[0;1];$

4° гранична в'язка матриць

$$A_0(t) - \lambda B(t) \quad (4)$$

регулярна і має сталу кронекерову структуру при всіх  $t \in [0;1].$

Для дослідження можливості побудови асимптотичного розв'язку двочислової крайової задачі (1), (2) використано результати асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), описані в роботі [1], і методи

дослідження нетерових крайових задач, розроблені в [2],[3]. У доповіді розглядається випадок, коли гранична в'язка матриць (4) має кратний спектр. Доведена така теорема.

**Теорема.** *Якщо виконуються умови 1° – 4°, а гранична в'язка (4) має один скінченний елементарний дільник  $(\lambda(t) - \lambda_0(t))^p$  кратності  $p$  і один простий нескінченний, а також*

$$1) \operatorname{Re} \lambda_0(t) < 0, \forall t \in [0;1];$$

$$2) \det A_0(t) \neq 0, \forall t \in [0;1];$$

$$3) (\Gamma_1 \varphi, \psi) \neq 0,$$

де  $\Gamma_1 = A_1(t) - \delta_{h,1} B(t) \frac{d}{dt}$ , а вектори  $\varphi, \psi$  – нулі матриць  $A_0(t) - \lambda_0 B(t)$  та

$(A_0(t) - \lambda_0 B(t))^*$  відповідно, то при досить малих  $\varepsilon$  існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), який зображається асимптотичною формулою

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(t) + \lambda_i(t, \varepsilon) dt) + \tilde{v}(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{m+2}{n-1}-h-1}),$$

$$u_i(t, \varepsilon) = \mu^{-(n-2)} \sum_{k=0}^m \mu^k u_k^{(i)}(t); \lambda_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^m \mu^k \lambda_k^{(i)}(t); i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{v}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{v}_k(t); \mu = \sqrt[p]{\varepsilon}.$$

1. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Каранджулов Л. И., Бойчук А. А., Божко В.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной линейной краевой задачи // Докл. АН Украины. – 1994. – № 1 – С. 7–10.
3. Бойчук А.А., Журавльов В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Труды Института математики НАНУ, Том 13, 1995. – 318 с.

**CONSTRUCTING OF THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR LINEAR DEGENERATED SINGULAR PERTURBED SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN CASE OF MULTIPLE SPECTRUM OF THE LIMIT BUNDLE OF MATRIXES**

*The method of construction of the asymptotic solution of the boundary-value problem for the linear singular perturbed systems of differential equations with degenerated matrix at the derivatives in case of multiple spectrum of the limit bundle of matrixes is proposed.*

УДК 517.95+511.2

## БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНО- ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КЛЕФІЦІЄНТАМИ

Галун К.С.

*ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна, [galun.kseniya@gmail.com](mailto:galun.kseniya@gmail.com)*

В області  $D = \{(t, x) \in R^{p+1} : t \in (0, T) \subset R^1, x \in Q \subset R^p\}$ , де  $Q$  – одно-  
зв’язна обмежена відкрита область з гладкою межею  $\Gamma$ , розглянуто задачу

$$\mathcal{L}u \equiv \left(\partial/\partial t - a^2 L\right)^m \left(\partial^2/\partial t^2 - b^2 L\right)^n u(t, x) = \Phi(t, x), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad t_j = (j-1)t_0, \quad t_0 = T/(m+2n-1), \quad j = 1, \dots, m+2n, \quad x \in \bar{Q}, \quad (2)$$

$$L^q u|_{\Sigma} = 0, \quad q = 0, 1, \dots, m+n-1, \quad \Sigma = \Gamma \times [0, T], \quad (3)$$

де диференціальний вираз  $L := \sum_{i,j=1}^p \partial[h_{ij}(x)\partial/\partial x_j]/\partial x_i - c(x)$  – еліптичний в об-

ласті  $\bar{Q}$  з досить гладкими коефіцієнтами,  $c(x) \geq 0$ .

Розв’язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду  $u(t, x) = \sum_{k \in N} u_k(t) X_k(x)$ ,

де  $X_k(x)$  – нормовані власні функції задачі  $LX + \lambda X = 0$ ,  $X|_{\Gamma} = 0$ , множину  
власних значень  $\lambda_k$  якої позначимо через  $\Lambda$ . Нехай  $C_0^q(\bar{Q})$  – простір фун-  
кцій  $\varphi(x) = \sum_{k \in N} \varphi_k X_k(x)$ , які визначені і неперервні в області  $\bar{Q}$  разом з усіма

похідними до порядку  $q$  включно і для яких виконуються співвідношення

$$L^r \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \leq r \leq [(q-1)/2], \quad \text{з нормою}$$

$$\|\varphi; C_0^q(\bar{Q})\| = \sum_{0 \leq |s| \leq q} \max_{x \in \bar{Q}} \left| \partial^{|s|} \varphi / \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p} \right|;$$

$$E_{\gamma, l}(\bar{Q}) = \left\{ \varphi : \sum_{k \in N} \lambda_k^l e^{\gamma \lambda_k} |\varphi_k| < \infty, \quad x \in \bar{Q} \right\}, \quad l \in R_+, \quad \gamma > 0;$$

$C_0^{l, q}(\bar{D})$  – простір функцій  $\psi(t, x) = \sum_{k \in N} \psi_k(t) X_k(x)$ , таких, що похідні

$\partial^r \psi(t, x) / \partial t^r$ ,  $r = 0, 1, \dots, l$ , визначені та неперервно диференційовні за  $x$  в



області  $\bar{D}$  до порядку  $q-r$  включно та виконуються співвідношення  $L^r \psi|_{\Sigma} = 0$ ,  $0 \leq r \leq [(q-1)/2]$ , з нормою

$$\|\psi; C_0^{l,q}(\bar{D})\| = \sum_{\substack{0 \leq r+|s| \leq q \\ 0 \leq r \leq l}} \max_{(t,x) \in \bar{D}} \left| \partial^{r+|s|} \psi / \partial t^r \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p} \right|;$$

$$\mathcal{F}_{\gamma,l}(\bar{D}) = \{ \psi : \sum_{k \in N} \lambda_k^l e^{\gamma \lambda_k} \max_{t \in [0,T]} |\psi_k(t)| < \infty, (t,x) \in \bar{D} \}, l \in R_+, \gamma > 0.$$

**Теорема 1.** Для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) в просторі  $C^{m+2n,2(m+n)}(\bar{D})$  необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$bt_0 \sqrt{\lambda_k} \neq s\pi, \forall \lambda_k \in \Lambda, \forall s \in N. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Нехай справджуються умови (4) і  $m=1$ . Якщо  $\Phi(t,x) \in C_0^{0,r}(\bar{D})$ ,  $r = \max\{1, p(2n-1) - 2n\} + 1 + 3n + [3p/2]$ ,  $\varphi_j(x) \in C_0^q(\bar{Q})$ ,  $q = (2n-1)p + [3p/2] + 4n + 3$ ,  $j=1, \dots, 2n+1$ , то для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $R$ ) чисел  $\beta = bt_0$  існує розв'язок задачі (1)–(3), який належить до простору  $C^{1+2n,2(n+1)}(\bar{D})$  і неперервно залежить від функцій  $\Phi(t,x)$ ,  $\varphi_j(x)$ ,  $j=1, \dots, 2n+1$ .

**Теорема 3.** Нехай справджуються умови (4) і  $m \geq 2$ . Якщо  $\Phi(t,x) \in \mathcal{F}_{\gamma_m,r}(\bar{D})$ ,  $\gamma_m = (m-1)a^2 t_0$ ,  $r = p/4 + 3(m+n)/2 - \min\{2m, 3n\}/2$ ,  $\varphi_1(x) \in C_0^q(\bar{Q})$ ,  $q = \max\{m, (2n-1)p\} + [3p/2] + 2m + 4n + 1$ ,  $\varphi_j(x) \in \mathcal{E}_{\gamma_j,l}(\bar{Q})$ ,  $\gamma_j = (j-1)a^2 t_0$ ,  $l = p/4 + 3m/2 + 2n$ ,  $j=2, \dots, m-1$ ,  $\varphi_j(x) \in \mathcal{E}_{\gamma_m,l}(\bar{Q})$ ,  $j=m, \dots, m+2n$ , то для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $R$ ) чисел  $\beta = bt_0$  існує розв'язок задачі (1)–(3), який належить до простору  $C^{m+2n,2(m+n)}(\bar{D})$ .

Результати можна поширити на випадок задачі (1) – (3) при довільному розміщенні точок  $t_j$ ,  $j=1, \dots, m+2n$ , на відрізку  $0 \leq t \leq T$ .

#### MULTIPOINT PROBLEM FOR HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

*The correctness of the problems with multipoint conditions on temporary variable and conditions of type Dirihle on spatial coordinates for a differential operator, which is a product of natural power hyperbolic and parabolic operators with variable coefficients, in cylindrical domain is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solutions the problems are established.*

УДК 517.946

**СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ  
АНИЗОТРОПНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С  
 $L_1$  – ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ**

**Горбань Ю.С.**

*Донецкий национальный университет, e-mail: [Yuliya\\_Gorban@mail.ru](mailto:Yuliya_Gorban@mail.ru)*

В настоящей работе доказывается существование решений некоторых вариационных неравенств с  $L^1$  – правыми частями, причем рассматривается вырождающийся анизотропный случай. Заметим, что в основе доказательства лежит подход, предложенный в [1], а также используются некоторые методы и результаты работы [2].

Предположим, что  $\Omega$  некоторое открытое ограниченное множество в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ . Пусть также заданы действительные числа  $q_i$  такие, что  $1 < q < n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим функции  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие некоторому условию роста, монотонности и следующему условию коэрцивности:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq \sum_{i=1}^n \nu_i |\xi_i|^{q_i} - g(x), \quad \text{где } g(x) \in L^1(\Omega).$$

Используем такие обозначения:

$$W^{1,q}(\nu, \Omega) = \{u \in L^{q_-}(\Omega) : \nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega), i = 1, \dots, n\},$$

где  $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ ,  $q_- = \min(q_i)$ .

Пусть  $V$  – выпуклое замкнутое множество в  $W^{0,1,q}(\nu, \Omega)$ , удовлетворяющее условиям:

1)  $0 \in V$ ,

2) если  $u, v \in V$ ,  $k \geq 1$ , тогда  $u - T_k(u - v) \in V$ , где  $T_k$  – стандартная срезка.

Пусть  $f \in L^1(\Omega)$ . При некоторых условиях на числа  $q_i$  и показатели суммируемости функций  $\nu_i$  получен следующий результат:

**Теорема.** *Существует единственная функция  $u \in W^{0,1,1}(\Omega)$ , такая, что для каждого  $k \in N$ ,  $T_k(u) \in V$ ,  $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap V$  выполняется следующее неравенство:*

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx.$$

1. Benilan Ph., Boccardo L., Gallouet Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. An  $L^1$  – theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa. - 1995. – **22** - P. 241-273.
2. Ковалевский А.А. Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с  $L^1$  – правыми частями // Известия РАН. - 2001. – **65**. - P. 27-80.

**SOLUTION EXISTENCE OF DEGENERATED ANISOTROPIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH  $L^1$  – RIGHT-HAND SIDE**

*In present paper the existence of solutions of some degenerated anisotropic variational inequalities with  $L^1$  – right-hand sides is proved.*



УДК 517.95

**ПРО РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА СФЕРІ**

**Кириченко Є.В.**

*Інститут прикладної математики і механіки НАНУ, [yekirichenko@gmail.com](mailto:yekirichenko@gmail.com)*

Розглянемо наступну задачу інтегральної геометрії. Нехай

$$\Lambda = \{ \xi : \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 - a^2 (\xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_n^2) = 0 \}$$

– конус у спряженому просторі  $(\mathbf{R}^n)^*$ , який задається за допомогою символу

ультрагіперболічного оператора  $L \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \Delta_k - a^2 \Delta_{n-k}$  з дійсним параметром  $a$ .

Тут  $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ ,  $n \geq 2, k < n$ . Позначимо через  $S^{n-1}$

одичину сферу в  $\mathbf{R}^n$ . Кожна пара  $(\xi \in \Lambda, p \in \mathbf{R})$  породжує гіперплощину  $M_{\xi,p} = \{x \in \mathbf{R}^n : (\xi, x) = p\}$ , перпендикулярну до вектора  $\xi$  і розташовану на

відстані  $p \in [-1, 1]$  від центра сфери  $S^{n-1}$  [1], а також сферу  $S_{\xi,p} = S^{n-1} \cap M_{\xi,p}$ .

Питання, яке нас цікавить: чи існує така нетривіальна функція  $v \in C(S^{n-1})$ , що при будь-яких  $\xi \in \Lambda$ ,  $p \in \mathbf{R}$  виконується рівність

$$\int_{S_{\xi,p}} v(x) ds_x = 0, \quad (1)$$

де  $ds_x$  – евклідова міра на гіперплощині?

Відповідь на це питання міститься в наступній теоремі.

**Теорема.** *Задача (1) має нетривіальний розв'язок  $v \in C(S^{n-1})$  тоді і тільки тоді, коли існують такі натуральні  $N_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ), що число  $a$  задовольняє хоча б одній з наступних умов:*

- 1)  $P_{N_1}^{(\alpha,\beta)} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right) = 0$ , де  $N_1 = 1 + \frac{m - i - j}{2}$ ;
- 2)  $P_{N_2}^{(-\alpha,\beta)} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right) = 0$ , де  $N_2 = \frac{m + n - k - i + j}{2}$ ;
- 3)  $P_{N_3}^{(-\alpha,-\beta)} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right) = 0$ , де  $N_3 = -1 + \frac{m + n + i + j}{2}$ ;
- 4)  $P_{N_4}^{(\alpha,-\beta)} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right) = 0$ , де  $N_4 = \frac{m + k + i - j}{2}$ .

Тут  $P_{N_s}^{(\alpha,\beta)}(x)$  – класичні поліноми Якобі,  $\alpha = \frac{n - k}{2} + j - 1$ ,

$\beta = \frac{k}{2} + i - 1$  – показники степенів вагової функції  $(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ , яка відповідає даній системі ортогональних поліномів.

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, – 1987. – 735 с.

## ON THE SOLUTION OF INTEGRAL GEOMETRY PROBLEM ON SPHERE

The present investigation deals with the non-trivial solvability of the homogeneous integral geometry problem. Such problem is considered on spheres generated by the intersection of unit sphere  $S^{n-1}$  and hyperplanes which are orthogonal to the generatrices of cone

$$\Lambda = \{ \xi : \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 - a^2 (\xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_n^2) = 0 \}.$$

The considerations are based on the connection with the Dirichlet problem in a ball for ultrahyperbolic equation.



УДК 534/621

## КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ ЗМІННОЇ МАСИ ПРИ ДІЇ СИЛ В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ

Крадінова Т.А.

ЛНТУ, [rimta@ukr.net](mailto:rimta@ukr.net)

Розглянемо вихідне диференціальне рівняння коливань при сталому коефіцієнті жорсткості, яке має вигляд

$$m(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu(t) \frac{dx}{dt} + c_2 x = 0. \quad (1)$$

При цьому можна спостерігати два різні випадки поведінки системи залежно від характеру зміни  $m(t)$  і  $\mu(t)$ .

*а) Випадок збільшення маси.*

Вважатимемо, що величина маси зростає за законом  $m(t) = m_0 (1 + kt)^2$ .

При цьому вважатимемо, що параметр  $\mu$ , що характеризує тертя  $\mu(t) = \mu_0 (1 + kt)$ , де  $\mu_0$  – його початкова величина.

Вважатимемо, що отримане при цьому рівняння інтегрується в квадратурах. Порівняємо його з першою формою диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах [1]

$$\frac{C_0}{\{f'(t)\}^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \left\{ \frac{C_1}{f'(t)} - \frac{C_0 f''(t)}{\{f'(t)\}^3} \right\} \frac{dx}{dt} + C_2 x = 0.$$

Прирівнявши коефіцієнти при  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{dx}{dt}$ , знайдемо сталі  $C_0$  і  $C_1$  та визначальну функцію  $f(t)$  [1].

Шуканий закон коливального руху матиме вигляд

$$x = a_1 (1 + kt) e^{(k-b)/2k} \sin \left[ \frac{s_1}{2k} \ln(1 + kt) + \gamma_1 \right]. \quad (2)$$

З цього рівняння знаходимо, що можна знайти швидкість і прискорення системи. При цьому сталі  $a_1$  і  $\gamma_1$  визначаються з початкових умов.

Рівняння (2) описує закон коливального руху нестационарної системи. При цьому коливання, що спостерігаються, матимуть як змінну амплітуду, так і змінний період.

Розглянемо поведінку амплітуд в таких нестационарних системах. З рівняння (2) випливає, що при  $k > b$  вони зростають, при  $k < b$  – спадають, а при  $k = b$  амплітуда стала і рівна  $a_1$ , при  $k \leq b$  амплітуди зростати не будуть. Із законів зміни швидкостей і прискорень випливає, що обидві ці величини з часом зменшуються.

Дослідивши відношення півперіодів, отримаємо, що збільшення маси системи приводить до зростання півперіодів коливань в усіх наведених випадках.

*б) Випадок маси, що зменшується*

Нехай маса системи зменшується згідно із законом  $m(t) = m_0 (1 - kt)^2$ , а коефіцієнт, що характеризує її тертя, буде  $\mu(t) = \mu_0 (1 - kt)$ .

Тоді початкове рівняння коливань (1) приймає форму

$$m_0 (1 - kt)^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \mu_0 (1 - kt) \frac{dx}{dt} + c_2 x = 0. \quad (3)$$

В цьому випадку коливання спостерігатимуться до повного вичерпання маси в перебігу часу  $0 < t < 1/k$ , а закон таких коливань має вигляд

$$x = a_2 (1 - kt)^{(b+k)/2k} \sin \left[ \frac{s_2}{2k} \ln(1 - kt) + \gamma_2 \right], \quad (4)$$

де  $s_2^2 = 4\omega_0^2 - (k + b)^2$ . При цьому сталі величини  $a_2$  і  $\gamma_2$  визначаються з початкових умов.

Рівняння (4) також описує нестационарні коливання. З нього випливає, що зменшення маси, незалежно від відношення, приводить до згасання таких коливань. При цьому їх півперіоди також зменшуються. Амплітуди коливань у цьому випадку також швидко зменшуються і при  $t_k = 1/k$  коливання припиняються.

1. *О.Кислий, Б.Дутчак, Т.Римарук* Види вихідних рівнянь параметричних коливань, які інтегруються в квадратурах // *Машинознавство*. - 2005. - № 7. - С. 15-19.
2. *О.Кислий, Б.Дутчак, О.Гуда* Нестационарні коливання системи змінної маси або жорсткості // *Машинознавство*. – 2003. - № 8(74). - С. 15-19.

**OSCILLATION OF THE SYSTEM OF VARIABLE MASS AT ACTION OF FORCES OF VISCID FRICTION**

*Oscillation of the system is considered at action of forces of viscid friction at the constant coefficient of rigidity. Installed that with decreasing mass or as amplitudes as periods of oscillations are decreasing. With increasing mass of system the periods oscillations increase. The amplitudes of oscillations can increase, decrease or will be constant.*



УДК 517.925.44

**АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  – РОЗВ’ЯЗКІВ  
ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО  
ПОРЯДКУ**

**Кусік Л.І.**

*Одеський національний морський університет, [ludakusik@mail.ru](mailto:ludakusik@mail.ru)*

Розглядаємо рівняння вигляду

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y') \psi(t, y, y'), \quad (1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ) – неперервна функція,  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i = 0, 1$ ),  $\psi : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow ]0, +\infty[$  – неперервна функція,  $\Delta_{Y_i}$  ( $i = 0, 1$ ) – односторонній окіл  $Y_i$  ( $i = 0, 1$ ), а кожне  $Y_i$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ . Вважаємо, що виконана наступна умова

$$\psi(t, y, z) \rightarrow 1 \text{ при } (t, y, z) \rightarrow (\omega, Y_0, Y_1) \quad ((t, y, z) \in [a, \omega[ \times Y_0 \times Y_1). \quad (2)$$

Припускаємо також, що функції  $\varphi_i$  ( $i = 0, 1$ ) – правильно змінні, тобто справедливі граничні рівності

$$\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i} L_i(z), \quad \sigma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \sigma_0 + \sigma_1 \neq 1, \quad (3)$$

де  $L_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  – неперервні поволі змінні функції (див. [1]), звідки випливає, що для будь-якого  $\mu > 0$  виконується співвідношення

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(\mu z)}{L_i(z)} = 1. \quad (4)$$

Відомо, що рівність (4) виконується рівномірно за  $\mu$  ( $i = 0,1$ ) на довільному відрізку  $[c, d] \subset ]0, +\infty[$  та існує неперервно диференційована поволі змінна при  $z \rightarrow Y_i$  функція  $L_{ii} : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  така, що

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(z)}{L_{ii}(z)} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{zL_{ii}(z)}{L_{ii}(z)} = 0. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (1), що заданий на деякому проміжку  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  назовемо  $P(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  - розв'язком, якщо він задовольняє умови:

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \text{ при } t \in [t_0, \omega[ \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0,1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

У випадку  $\psi(t, y, z) \equiv 1$ ,  $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i} \text{sign}(z)$  ( $i = 0,1$ ) рівняння (1) є узагальненим рівнянням типу Емдена – Фаулера, яке досліджено в [2]-[5].

Мета цієї роботи - встановити необхідні і достатні умови існування та асимптотичних зображень  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  – розв'язків рівняння (1) при  $t \uparrow \omega$  і виконанні умов (2), (3) у випадку, коли  $\psi(t, y, z) \neq 1$ . Зауважимо, що раніше (див. [3]-[6]) при дослідженні рівняння (1) на відміну від (4), (5) припускали, що функції  $\varphi_i$  ( $i = 0,1$ ) - строго монотонні двічі неперервно диференційовані, такі, що

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \left| \frac{y\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)} \right| < +\infty.$$

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. - М.:Наука, 1985. – 144 с.
2. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1990. – 432 с.
3. Костин А.В., Евтухов В.М. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. - 1976. - **231**, № 5. -С. 1059-1062.
4. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. - 1982. - **106**, № 3. -С. 473-476.



5. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math.Nachr. - 1984. - **115**. - P. 215-236.
6. *Евтухов В.М., Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // УМЖ -2008. - **60**, №3. - С. 310-331.

**ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  – SOLUTIONS FOR ONE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER**

*The asymptotic behavior of some solutions for one class of essentially nonlinear non-autonomous differential equations of second order is established. We give necessary and sufficient conditions for existence of these solutions.*



УДК 517.964:511.2

**ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА У КЛАСІ ФУНКЦІЙ, МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ЗА ПРОСТОРОВИМИ КООРДИНАТАМИ**

**Кузь А.М.**

*Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С.Бандери, 12,  
79013, м. Львів, Україна*

В області  $D^P = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^P, t \in [0, T]\}$  досліджується питання про існування та єдність майже періодичного за  $x$  розв'язку задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u - c^2 u = 0, \quad \alpha_j u|_{t=t_j} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(x, t) dt = \varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

де  $a, c, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$ ,  $r_j \in \mathbb{N}$ ,  $r_2 > r_1$ ,  $j = 1, 2$ ,  $a > 0$ ,  $t_1 = 0$ ,

$t_2 = T$ ,  $\Delta = \sum_{j=1}^p \partial^2 / \partial x_j^2$ , функції  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , – майже періодичні за Бором

зі спектром  $M_p = \{\mu_k, k \in \mathbb{Z}^P\}$ , таким що  $C_2 |k|^\sigma \leq |\mu_k| \leq C_1 |k|^\sigma$ ,  $C_2 > 0$ ,  $C_1 > 0$ ,  $\sigma > 0$ .

Розв'язок задачі (1) шукаємо у вигляді ряду  $u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{(i\mu_k, x)}$ , де

$u_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , є розв'язками задач

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + (a^2 \|\mu_k\|^2 - c^2) u_k = 0, \quad \alpha_j u_k(t_j) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (2)$$

в яких  $\varphi_{jk}$  – коефіцієнти Фур'є функції  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ .

Характеристичний визначник задачі (2) обчислюється за формулою

$$\Delta(\gamma_k) = \alpha_1 \alpha_2 (e^{-i\gamma_k T} - e^{i\gamma_k T}) + \alpha_1 \beta_2 (I_{21} - I_{22}) + \alpha_2 \beta_1 (e^{-i\gamma_k T} I_{12} - e^{i\gamma_k T} I_{11}) + \\ + \beta_1 \beta_2 (I_{12} I_{21} - I_{11} I_{22}),$$

де 
$$I_{nj} = (-1)^{r_n j} \frac{r_n!}{(i\gamma_k)^{r_n+1}} + (-1)^j \sum_{m=1}^{r_n+1} \frac{(-1)^{mj} r_n!}{(r_n - m + 1)!} \frac{T^{r_n - m + 1} e^{(-1)^j i\gamma_k T}}{(i\gamma_k)^m}, \quad n, j = 1, 2,$$

$$\gamma_k = \sqrt{a^2 \|\mu_k\|^2 - c^2}.$$

**Теорема 1.** Для єдиності розв'язку задачі (1) в класі майже періодичних функцій Бора зі спектром  $M_p$  необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall \mu_k \in M_p \quad \Delta(\gamma_k) \neq 0. \quad (3)$$

Якщо виконується умова (3), то формальний розв'язок задачі зображується рядом

$$u(x,t) = \sum_{|k| \geq 0} \sum_{j,l=1}^2 (-1)^{l+j} \frac{\Delta_{lj}(\gamma_k)}{\Delta(\gamma_k)} \varphi_{jk} \exp \left\{ i \left[ (-1)^{l+1} \gamma_k t + (\mu_k, x) \right] \right\}, \quad (4)$$

де  $\Delta_{lj}(\gamma_k)$  – алгебричне доповнення у визначнику  $\Delta(\gamma_k)$  елемента  $l$ -ого рядка та  $j$ -ого стовпця.

Існування розв'язку задачі (1), взагалі, пов'язане з проблемою малих знаменників, бо  $|\Delta(\gamma_k)|$ , будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості  $\mu_k \in M_p$ .

Встановлено, що якщо функції  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , є досить гладкими, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}^3$ ) векторів  $(\beta_1, \beta_2, T)$  існує класичний розв'язок задачі (1), який зображується формулою (4).

Частинний випадок задачі (1), коли  $c = 0$ ,  $\alpha_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , розглядався в [1].

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові

задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наукова думка, 2002. – 416 с.

**PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR A KLEIN-GORDON EQUATION IN A CLASS OF FUNCTIONS, ALMOST PERIODIC FOR SPACE VARIABLES**

*The problem with integral conditions for a Klein-Gordon equation in a class of functions, almost periodic for space variables is considered. Conditions of the existence and uniqueness of solution for the problem are obtained.*



УДК 517.95

**ОПЕРАТОРИ ГРІНА ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ**

**Лопушанський А.О., Пасічник О.В.**

*ІІІММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львівський національний університет ім. Івана Франка e-mail: [olena.pasichnyk@gmail.com](mailto:olena.pasichnyk@gmail.com)*

Вивчаємо задачу Коші для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом, коли в початковій умові задано узагальнену функцію. Знаходимо співвідношення між компонентами вектор-функції Гріна цієї задачі, встановлюємо властивості інтегральних операторів Гріна та спряжених до них.

Нехай  $\Omega = \{(x, t) : x \in R, t > 0\}$ ,  $D'(R)$  – простір лінійних неперервних функціоналів на просторі дійсних нескінченно диференційовних функцій в  $R$ ,  $(f_{-\alpha} *)$ - оператор дробового диференціювання ( $0 < \alpha < 1$ ),  $(f_{-\alpha} \hat{*})$ - оператор дробового диференціювання Вейля. Через  $C^{2,\alpha}(\Omega)$  позначаємо клас функцій  $v(x, t)$ , двічі неперервно диференційовних за змінною  $x$  в  $\Omega$  та таких, що існує неперервна згортка  $f_{-\alpha}(t) * v(x, t)$ . Оператором дифузії дробового порядку  $\alpha$  за часом називатимемо  $(Lv)(x, t) \equiv f_{-\alpha}(t) * v(x, t) - v_{xx}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega$ ,  $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ ;  $(\hat{L}v)(x, t) \equiv f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x, t) - v_{xx}(x, t)$  – оператор, спряжений до  $L$ . Зауважимо, що символ оператора  $L$  не є гладким в нулі.

Нехай  $\rho(x, t) = \tilde{\rho}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \exp\left\{-\mu t \frac{\alpha}{2-\alpha} x^{2-\alpha}\right\}$ , де  $\tilde{\rho}(t)$  – нескінченно диференційовна додатна функція при  $t > 0$ ,  $\tilde{\rho}(t) = O(t)$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\rho}(t) \leq 1$  при  $t \in [0; +\infty)$ ;  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \mu < \mu_0 = (2 - \alpha)\alpha^{\alpha/2-\alpha} 2^{-2/2-\alpha}$ .

Введемо простори

$$D_k(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in C^{[k]}(\bar{\Omega}) : \rho^{-k} \varphi \in C(\bar{\Omega})\},$$

$$X_k(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in C^{[k]}(\bar{\Omega}) : \rho^{-k} (\hat{L}\varphi) \in C(\bar{\Omega})\}, \quad k \geq 0.$$

Для  $g \in X'_k(\bar{\Omega})$ , та функції  $u_0 \in D'(R)$ , яка має порядок сингулярності  $s(u_0) \leq s_0$ , розглядаємо задачу

$$(Lu)(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Вектор-функцією Гріна задачі Коші назвемо таку вектор-функцію  $(G_0(x, t; \xi, \tau), G_1(x, t; \xi, \tau))$ , що розв'язок задачі (1), (2) при достатньо гладких  $g = g_0$ ,  $u_0 = g_1$  має вигляд

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, t; \xi, \tau) g_0(\xi, \tau) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x, t; \xi, 0) g_1(\xi) d\xi.$$

Функція  $G_1$  та її оцінки знайдені в [1]. Нами знайдене співвідношення

$$G_0(x, t; \xi, 0) = f_{\alpha-1}(t) * G_1(x, t; \xi, 0).$$

Введемо інтегральні оператори

$$(\hat{G}_0\varphi)(\xi, \tau) = \int_{\tau}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, t; \xi, \tau) \varphi(x, t) dx,$$

$$(\hat{G}_1\varphi)(\xi) = \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x, t; \xi, 0) \varphi(x, t) dx \quad \text{на } C^\infty(\bar{\Omega}).$$

**Лема 1.** Оператори  $\hat{G}_0, \hat{G}_1$  такі, що  $\hat{G}_1 : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(R)$ ;

$$\hat{G}_0 : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega}), \quad D_k(\bar{\Omega}) \rightarrow X_k(\bar{\Omega}), \quad k \geq 0.$$

**Лема 2.**  $\hat{G}_0(\hat{L}\varphi) = \varphi$ ,  $\hat{G}_1(\hat{L}\varphi) = \int_0^{+\infty} f_{1-\alpha}(t) \varphi(\cdot, t) dt \quad \forall \varphi \in X_k(\bar{\Omega})$ .

1. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – Т. 26. – №4. – 1990. – С. 660–670.

**GREEN'S OPERATORS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFUSION EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME**

*Connection between the components of Green's vector-function of the Cauchy problem for diffusion equation with fractional derivative with respect to time are obtained. The properties of Green's integral operators and conjugate Green's operators are established.*

\* \* \* \* \*

УДК 517.95

**ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ**

**Панат О.Т., Бугрій О.М.**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
e-mail: [panat\\_ot@mail.ru](mailto:panat_ot@mail.ru), [ol\\_buhrii@i.ua](mailto:ol_buhrii@i.ua)*

У циліндрі  $Q_{0,T} = \Omega \times (0, T)$ , де  $\Omega \subset R^n$  – область з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$ ,  $n \in N$ ,  $0 < T \leq +\infty$ , розглянемо рівняння

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + c_1(x)u_t + c_2(x)u + g_1(x)|u_t|^{p_1(x)-2}u_t + g_2(x)|u|^{p_2(x)-2}u = f(x,t) \quad (1)$$

з крайовими

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \quad (2)$$

та початковими

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

умовами.

Припускаємо виконання таких умов:

(A):  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  для майже всіх  $x \in \Omega$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,

$$a_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a^0 |\xi|^2 \text{ для всіх } \xi \in R^n \text{ та майже всіх } x \in \Omega,$$

де  $a_0, a^0 > 0$ ,  $a_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

(C):  $c_1, c_2 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $c_{i,0} \leq c_i(x) \leq c_i^0$  для майже всіх  $x \in \Omega$ , де  $c_{i,0}, c_i^0 \in R$ ,  $i = 1, 2$ ;

(G):  $g_1, g_2 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $g_{i,0} \leq g_i(x) \leq g_i^0$  для майже всіх  $x \in \Omega$ , де  $g_{i,0}, g_i^0 \in R$ ,  $i = 1, 2$ ;

(P):  $p_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $1 < p_{i,0} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p_i(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p_i(x) = p_i^0 < +\infty$ ,

$1/p_i(x) + 1/p'_i(x) = 1$ , де  $x \in \Omega$ ,  $i = 1, 2$ ;

Під узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) в області  $Q_{0,T}$  розуміємо функцію  $u : Q_{0,T} \rightarrow R^1$  з деякого класу, яка задовольняє умови (3) та рівняння (1) в сенсі інтегральної тотожності.

Визначимо функцію  $\tilde{u} : Q_{0,\infty} \rightarrow R^1$  за правилом:  $\tilde{u}(x,t) = u^k(x,t)$  при  $(x,t) \in Q_{0,k}$ , де  $u^k$  - узагальнений розв'язок задачі (1)-(3) в області  $Q_{0,k}$ . Якщо це можна коректно зробити, то  $\tilde{u}$  називається *глобальним (за часом) розв'язком* мішаної задачі (1)-(3).

Розглянемо функціонал

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[ |u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx + \int_{\Omega_t} \frac{1}{p_2(x)} g_2(x) |u|^{p_2(x)} dx, \quad t > 0,$$

де  $\Omega_t = \{(x,s) \in Q_{0,T} \mid s = t\}$ ,  $u$  - глобальний розв'язок задачі (1)-(3).

При виконанні додаткових умов на вихідні дані задачі одержано такі результати:

У випадку  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$  встановлено поведінку глобального розв'язку задачі (1)-(3) при  $t \rightarrow +\infty$ . Доведено існування таких сталих  $w > 0$ ,  $C > 0$ , що

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \quad t > 0,$$

Якщо  $g_1 > 0$ ,  $g_2 < 0$ , то показано неіснування глобального розв'язку мішаної задачі (1)-(3), тобто знайдено такий момент часу  $T_0$ ,  $0 < T_0 < +\infty$ , що узагальнений розв'язок даної задачі прямує до нескінченності при  $t \rightarrow T_0 - 0$ .

**SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS TO THE MIXED PROBLEMS FOR SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY**

*We consider the mixed problems for some nonlinear hyperbolic equations in Sobolev spaces and generalized Lebesgue spaces. We obtain the following results: 1) the behavior of the global solution as  $t \rightarrow +\infty$  is established, 2) under certain conditions we prove the nonexistence of the global solution.*



УДК 517.95

**ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО  
УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ**

**Процак Н.П.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Національний лісотехнічний університет України, [protsakh@ukr.net](mailto:protsakh@ukr.net)*

Нехай  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})$ ,  $x_i \in R^{n_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , натуральні числа  $n_1, n_2, n_3$  такі, що  $1 \leq n_3 < n_2 < n_1$ ,  $n = n_1 + n_2 + n_3$ ,  $T$  – додатне число.

В смузі  $\Omega = R^n \times (0, T)$  розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} u_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} u_{x_{3j}} - \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(x, t) u_{x_{1i} x_{1j}} - \sum_{i=1}^{n_1} a_i(x, t) u_{x_{1i}} - \tag{1}$$

$$- a_0(x, t) u = \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} |u_{x_{ij}}|^p + f(x, t, u(x, t + \theta)) \quad \text{для } -r \leq \theta \leq 0,$$

$$u(x, s) = \varphi(x, s), \quad -r \leq s \leq 0, \quad x \in R^n, \tag{2}$$

де  $\varphi(x, s) \in C^2(R^n \times [-r; 0])$ ,  $\sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(x, t) \xi_{1j} \xi_{1j} \geq \delta_0 |\sigma_1|^2$ ,  $\delta_0 > 0$ ,  $p > 1$ .

Отримано умови, за яких існує єдиний класичний розв’язок задачі (1)–(2) для скінченного  $T$ . У випадку необмеженої за часовою змінною області  $\Omega = R^n \times (0, \infty)$ , за умов невід’ємності функції  $\varphi(x, s)$ , для  $1 < p < \frac{n-2}{n-1}$ ,

$\mu < 0$ ,  $f(x, t, \zeta) \leq 0$  для майже всіх  $t$ , показано, що розв'язок задачі (1)–(2) існує, єдиний та спадає на нескінченності.

**ON CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH  
DELAY**

*The solvability of the Cauchy problem for the nonlinear ultraparabolic equation with time delay is considered. It has been proved that the classical solution for this problem exists, is unique and decreases as  $t \rightarrow \infty$ .*

\* \* \* \* \*

УДК 517.95+511.72

**ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З  
ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І СТАЛИМИ АЛГЕБРИЧНО  
ЗАЛЕЖНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

**Савка І.Я.**

*ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, [s-i@ukr.net](mailto:s-i@ukr.net)*

Нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними, взагалі, є некоректними, а їх розв'язність є нестійкою стосовно як завгодно малих змін коефіцієнтів задачі, що пов'язано з проблемою малих знаменників [1,2] у випадку області  $D = (0, T) \times \Omega$ , де  $\Omega$  –  $p$ -вимірний тор  $(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})^p$ ,  $T > 0$ . Оцінки малих знаменників встановлено для незалежних коефіцієнтів.

Нехай  $H_q(\Omega)$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , – простір Соболева  $2\pi$ -періодичних функцій, отриманих поповненням множини тригонометричних поліномів

$\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$  за нормою  $\|\varphi\|_{H_q(\Omega)} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} |\varphi_k|^2}$ , де

$x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$ ;  $H_l^n(\bar{D})$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – банахів простір

функцій  $u = u(t, x)$  таких, що  $\forall t \in [0, T]$  функції  $\partial^j u / \partial t^j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , належать до простору  $H_{l-j}(\Omega)$  та неперервні за  $t$  у нормі цього простору,

$\|u\|_{H_l^n(\bar{D})} = \sqrt{\sum_{j=0}^n \max_{t \in [0, T]} \|\partial^j u(t, \cdot) / \partial t^j\|_{H_{l-j}(\Omega)}^2}$  – формула для норми в  $H_l^n(\bar{D})$ .



В області  $D$  розглядається задача про знаходження розв'язку  $u = u(t, x)$  нормального рівняння з частинними похідними

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + \dots + a_p \frac{\partial^n}{\partial x_p^n}\right)u + \sum_{j=0}^n A_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}} u = 0, \quad (1)$$

який справджує нелокальні двоточкові умови

$$L_j u \equiv \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

де  $a_1, \dots, a_p$ ,  $\mu$  – сталі дійсні коефіцієнти,  $A_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \leq j} A_s^j \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$  – операції зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок  $u$  шукаємо в просторі  $H_1^n(\bar{D})$  для довільних заданих функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  зі шкали просторів  $H_q(\Omega)$ .

При цьому вважаємо фіксованими коефіцієнти  $A_s^j$ , а коефіцієнти  $a_1, \dots, a_p$  – змінними, на які накладена умова алгебричної залежності

$$\sum_{|s| \leq d} \alpha_s a_1^{s_1} \dots a_p^{s_p} = 0, \quad (3)$$

де  $\alpha_s$  – дійсні фіксовані числа,  $d$  – довільне натуральне число.

У припущенні незалежних коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_p$  задача (1), (2) розглядалась раніше в [1,2]; за допомогою деяких результатів з метричної теорії чисел встановлено розв'язність такої задачі. Однак, ці результати не можна безпосередньо використати у випадку задачі (1)–(3), оскільки метричні теореми про оцінки малих знаменників, що забезпечують розв'язність задачі, не розрізняють множини нульової міри у  $p$ -вимірному просторі, які визначаються умовою (3).

Питання про опис і характеристизацію множини точок алгебричного многовиду (3), яка володіє певними діофантовими властивостями, в термінах теорії міри виявляється нетривіальним питанням. Воно тісно пов'язане із теорією діофантових наближень на многовидах [3].

У роботі встановлено умови єдиності та існування розв'язку задачі (1)–(3); доведено теореми метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, зокрема, досліджено питання про можливість відокремлення від нуля дискримінанта за змінною  $\lambda$  многочлена  $L(\lambda, ik)$  на алгебричному многовиді (3).

1. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
3. Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // Успехи матем. наук. – 1980. – 35, вып. 4.– С. 3–68.

**PROBLEM WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS FOR PARTIAL  
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ALGEBRAICALLY DEPENDENT CONSTANT  
COEFFICIENTS**

*The conditions of existence and uniqueness of the solution to the nonlocal boundary problem are proved. The lower estimates of small denominators on algebraic manifold are established.*



УДК 517.95

**ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ В  
ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ**

**Снітко Г.А.**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН  
України, e-mail: [snitkog@ukr.net](mailto:snitkog@ukr.net)*

В області  $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$  з невідомою межею  $x = h(t)$  розглянуто обернену задачу визначення залежних від часу молодших коефіцієнтів в параболічному рівнянні

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x, t) dx = \mu_3(t), \quad \int_0^{h(t)} xu(x, t) dx = \mu_4(t),$$

$$\int_0^{h(t)} x^2 u(x, t) dx = \mu_5(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Заміною змінних  $y = \frac{x}{h(t)}$ ,  $t = t$ , задачу (1)–(4) зведено до оберненої з невідомими  $(b(t), c(t), h(t), v(y, t))$ , де  $v(y, t) = u(yh(t), t)$ , в області з фіксованою межею  $Q_T = \{(y, t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$ . Знайдено умови локального існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Доведення існування розв'язку задачі базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, питання про єдиність зводиться до питання про єдиність розв'язку системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду.

**AN INVERSE PROBLEM OF THE DETERMINATION OF UNKNOWN MINOR COEFFICIENTS IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN**

*We establish conditions of local existence and uniqueness of a solution to the inverse problem for a one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent minor coefficients in a free boundary domain.*



УДК 539.3

**ВИДІЛЕННЯ НЕОСЦИЛЯЦІЙНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТОЧНИХ РІВНЯНЬ МАТІСОНА В ПОЛІ ШВАРЦШИЛЬДА ПОБЛИЗУ  $r = 1,5r_g$**

**Стефанишин О.Б.**

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, [stefanyshyn@mail.com](mailto:stefanyshyn@mail.com)

Відомо, що рівняння Матісона [1], які описують поведінку пробної частки зі спіном в загальній теорії відносності, та їх вкорочений варіант, що не містить других похідних від спіну, мають у полі Шварцшильда спільний розв'язок з  $r = const = 1,5r_g$  [2]. Для однозначності розв'язку вкорочених рівнянь достатньо задати початкові значення координат та їх похідних; для повних рівнянь цього недостатньо, оскільки вони є третього порядку за координатами частки. Для пониження порядку повної системи використано відомі два перші інтеграли  $E$  та  $\Phi$ , які входять в отримані рівняння як невідомі параметри. Серед різних розв'язків точних рівнянь Матісона розрізняють неосциляційний (відповідає єдиному набору значень параметрів  $E$  та  $\Phi$ ) та осциляційні (всі інші набори). Неосциляційний розв'язок відповідає траєкторії, по якій рухається т. зв. власний центр мас пробної частки зі спіном, а осциляційні - невласним центрам мас. Раніше були досліджені розв'язки вко-

рочених рівнянь поблизу орбіти  $r = 1,5r_g$  та визначено межі області, за яких можна знехтувати відкинутими членами при переході від повної до вкороченої системи [3]. Оскільки у цьому випадку значення параметрів  $E$  та  $\Phi$  відомі, то саме їх значення і будемо використовувати для одержання неосциляційного розв'язку точної системи.

1. *Mathisson M.* Neue Mechanismaterialer Systeme // Acta Phys. Pol. – 1937. – 6. – P. 163 –200.
2. *Пляцко Р.М.* Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спіно-орбітальної взаємодії. – Київ, Наук. думка, 1988, - 148 с.
3. *Пляцко Р., Стефанишин О., Феник М.* Про траєкторії швидкої частки зі спіном поблизу компактних джерел гравітаційного поля // Фізичний збірник НТШ. – 2008. - Т. 7. - С. 557-563.

#### SELECTION OF NON-OSCILLATION SOLUTIONS OF MATHISSON EQUATIONS IN SCHWARZSCHILD FIELD NEAR $r = 1,5r_g$

*For picking out non-oscillation solutions of Mathisson equations in Schwarzschild field near  $r = 1,5r_g$  we use the shortened Mathisson equations, integrals of energy and angular momentum as the parameters. These parameters are known if the Mathisson equations are shortened.*



УДК 517.956

## НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Торган Г.Р.

Львівський національний університет імені Івана Франка, [torgan\\_g@yahoo.com](mailto:torgan_g@yahoo.com)

Нехай  $\Omega$  – обмежена область в просторі  $R^n$  з межею  $\partial\Omega \in C^1$ ,  
 $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , де  $T < \infty$ ,  $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ .

У області  $Q$  розглянемо задачу

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x,t) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) |u_{x_i x_j}|^{p-2} u_{x_i x_j})_{x_i x_j} + \\ + \sum_{i,j,s,l=1}^n (b_{ij}^{sl}(x,t) u_{tx_i x_j})_{x_s x_l} = b_0(x,t) |u|^{q-2} u \quad (1)$$

з початковими

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

і граничними умовами

$$u|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = 0, \quad (3)$$

де  $\nu$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega \times (0, +\infty)$ .

При виконанні певних умов щодо гладкості коефіцієнтів рівняння (1), у випадку  $p > 2$ ,  $q \leq \frac{2n-4}{n-4}$ , якщо  $n > 4$  і  $q > 2$  при  $n \in \{1, \dots, 4\}$ ,

$u_0 \in W_0^{2,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ ,  $u_1 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ , доведено існування локального та неіснування глобального узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

### NONEXISTENCE OF A GLOBAL SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION OF THE FIFTH ORDER

*There obtained sufficient conditions of the existence of a strong solution in the bounded domain and nonexistence of a global solution at time.*



УКД 517.95+511.2

## БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ОПЕРАТОРА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Тимків І.Р.

*ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, e-mail: [tymkiv\\_if@ukr.net](mailto:tymkiv_if@ukr.net)*

В області  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in Q \subset \mathbb{R}^p\}$ , де  $Q$  – обмежена од-  
нозв’язна область з гладкою межею  $\partial Q$ , розглянемо задачу

$$\prod_{q=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial t} - a_q(t)L \right) u(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad x \in \bar{Q}, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T, \quad (2)$$

$$L^m u(t, x) \Big|_{\partial Q} = 0, \quad t \in [0, T], \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

де  $a_q(t) = \alpha_q + a(t)$ ,  $\alpha_q > 0$ ,  $q = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_q \neq \alpha_r$ ,  $q \neq r$ ,  $a(t) > 0$  – досить гладка дійснозначна функція;  $L := \sum_{i,j=1}^p \partial / \partial x_i (h_{ij}(x) \partial / \partial x_j) - c(x)$  – еліптичний в  $Q$  диференціальний вираз із досить гладкими в  $\bar{Q}$  коефіцієнтами,  $c(x) \geq 0$ . За вказаних припущень, рівняння (1) є рівномірно параболічним за Петровським в області  $D$ .

Нехай  $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ ,  $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  – система власних функцій та множина власних значень задачі  $LX + \lambda X = 0$ ,  $LX|_{\partial Q} = 0$ ;  $G_\gamma(Q)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , – простір функцій  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| X_k(x)$ , зі скінченною нормою  $\|\varphi; G_\gamma(Q)\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \exp(\gamma \lambda_k)$ ;  $\alpha = \min_{1 \leq q \leq n} \{\alpha_q\}$ ,  $A = \max_{t \in [0, T]} a(t)$ .

Розв’язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду  $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x)$ . Кожна з функцій  $u_k(t)$  є розв’язком задачі

$$\prod_{q=1}^n \left( \frac{d}{dt} + a_q(t) \lambda_k \right) u_k(t) = 0, \quad (4)$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T, \quad (5)$$

де  $\varphi_{jk} = \int_Q \varphi_j(x) X_k(x) dx$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Рівняння (4) інтегрується в квадратурах.

Система функцій

$$\left\{ u_{kq}(t) = \lambda_k^{q-n} \prod_{r=q+1}^n (\alpha_r - \alpha_q)^{-1} \exp \left\{ -\lambda_k \int_0^t (\alpha_q + a(\tau)) d\tau \right\}, q = 1, \dots, n \right\}$$

є фундаментальною системою розв'язків рівняння (4). Характеристичний визначник задачі (4) – (5) зображується формулою

$$\Delta(\lambda_k) := \det \| u_{kq}(t_j) \|_{j,q=1}^n = \lambda_k^{-n(n-1)/2} \prod_{1 \leq q < r \leq n} (\alpha_r - \alpha_q)^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\lambda_k \sum_{j=1}^n \int_0^{t_j} a(\tau) d\tau \right\} \det \| \exp(-\alpha_q t_j \lambda_k) \|_{j,q=1}^n.$$

**Теорема 1.** Для єдиності розв'язку задачі (1) – (3) у просторі  $C^{(n,2n)}(\overline{D})$  необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall \lambda_k \in \Lambda \quad \det \| \exp(-\alpha_q t_j \lambda_k) \|_{j,q=1}^n \neq 0. \quad (6)$$

**Теорема 2.** Нехай існує додатна стала  $\nu$  така, що для всіх (крім скінченної кількості)  $\lambda_k \in \Lambda$  виконується нерівність

$$\left| \det \| \exp(-\alpha_q t_j \lambda_k) \|_{j,q=1}^n \right| > \exp(-\nu \lambda_k). \quad (7)$$

Якщо  $\varphi_j(x) \in G_\gamma(Q)$ ,  $\gamma > \nu + AT - (n-1)\alpha_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , то в просторі  $C^{(n,2n)}(\overline{D})$  існує розв'язок задачі (1) – (3), який неперервно залежить від функцій  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в  $\mathbb{R}^n$ ) векторів  $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n$  нерівність (7) виконується для всіх (крім скінченної кількості)  $\lambda_k \in \Lambda$  при  $\nu > nT \max_{1 \leq q \leq n} \{ \alpha_q \}$ .

#### MULTIPOINT PROBLEM FOR FACTORIZED PARABOLIC OPERATOR WITH VARIABLE COEFFICIENTS

We establish conditions of classical correctness of the problem with multipoints in respect time-variable conditions and conditions after the pattern of Dirichlet according to the spatial coordinates for one class of factorized by Petrovski parabolic operator with variable coefficients.

УДК 519.46:517.944

**ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО  
ПОРЯДКУ В ПРОСТОРИ  $M(1,4) \times R(u)$ , ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО  
АБЕЛЕВИХ РОЗЩЕПЛЮВАНИХ ПІДГРУП РОЗШИРЕНОЇ ГРУПИ  
ГАЛІЛЕЯ  $\tilde{G}(1,3)$**

**Федорчук В.І.**

*ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України*

Серед важливих для теоретичної та математичної фізики груп група Пуанкаре  $P(1,4)$  посідає особливе місце – вона є найменшою групою, яка містить в якості підгруп групу симетрії релятивістської фізики ( $P(1,3)$ ) та групу симетрії нерелятивістської фізики (розширена група Галілея  $\tilde{G}(1,3)$ ) [1]. На основі нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених розщеплюваних підгруп групи  $\tilde{G}(1,3)$  побудовано 99 класів диференціальних рівнянь першого порядку в просторі  $M(1,4) \times R(u)$ , які інваріантні відносно цих підгруп ( $R(u)$  є дійсною віссю залежної змінної  $u$ ). Деякі з цих класів можна знайти в [2]. На цей час з множини всіх побудованих класів диференціальних рівнянь першого порядку виділені класи, які інваріантні відносно абелевих розщеплюваних підгруп групи  $\tilde{G}(1,3)$ .

1. *Фуцич В.И., Никитин А.Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука – 1990 – 400 с.
2. *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.*, On functional bases of the first-order differential invariants for non-conjugate subgroups of the Poincaré group  $P(1,4)$  // Ann. Acad. Paed. Cracoviensis, Stud. Math. – 2008.– VII – Folia 63 – P. 41–50.

**ON SOME CLASSES OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SPACE  
 $M(1,4) \times R(u)$  INVARIANT UNDER ABELIAN SPLITTING SUBGROUPS OF THE  
EXTENDED GALILEI GROUP  $\tilde{G}(1,3)$**

*The classes of the first-order differential equations in the space  $M(1,4) \times R(u)$  invariant under Abelian splitting subgroups of the extended Galilei group  $\tilde{G}(1,3)$  have been found.*





УДК 517.9

ІСНУВАННЯ АСИМПТОТИЧНО СТІЙКОГО ІНВАРІАНТНОГО ТОРА  
ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Фекета П.В.

Київський національний університет, [petro.feketa@gmail.com](mailto:petro.feketa@gmail.com)

У теорії багаточастотних коливань виникає ряд питань, пов'язаних з доліденням інваріантних торів автономних систем диференціальних рівнянь. Одним з найважливіших є питання існування і збереження інваріантних торів при малих збуреннях, а також поведінка розв'язків систем на самих торах та в їх околі. Фундаментальні дослідження в цьому напрямку проведені в роботах [1], [2].

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь, визначену на  $m$ -вимірному торі  $T^m$ , яка піддається невеликому збуренню

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x), \quad \dot{x} = F(\varphi, x) + \Lambda(\varphi)x, \quad (1)$$

де  $\varphi \in T^m$ ,  $a(\varphi) \in C^1(T^m)$ ,  $a_1(\varphi, x) \in C_{Lip(x)}^{(1,0)}(\varphi \in T^m, x \in R^n)$ ,  $\Lambda(\varphi) \in C^1(T^m)$ ,  $F(\varphi, x) \in C_{\varphi, x}^{(1,2)}(\varphi \in T^m, x \in R^n)$ ,  $\|x\| \leq h$ . Запишемо систему (1) у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, x) + f(\varphi),$$

$$\text{де } f(\varphi) = F(\varphi, 0), \quad B(\varphi, x) = \int_0^1 \frac{\partial F(\varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau.$$

Нехай  $\varphi_t(\varphi)$  - розв'язок системи (1) такий, що  $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ ,  $\Omega_\varphi$  -  $\omega$ -гранична множина цього розв'язку, а  $\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$ . Нас цікавитиме випадок,

коли матрична функція  $\Lambda(\varphi)$  на множині  $\Omega$  є сталою матрицею  $\Lambda(\varphi) = A$  для всіх  $\varphi \in \Omega$ . Це означає, що для всіх  $\varphi \in T^m$   $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$ .

Покажемо, що при певних умовах, накладених на систему (1), вона має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид. Цей многовид будемо шукати методом послідовних наближень, запропонованим А. М. Самойленком в роботі [2]. За початковий многовид  $M_0$  візьмемо многовид  $x \equiv 0$ , за  $M_1$  візьмемо інваріантний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, 0), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, 0) + f(\varphi).$$

Таким чином, на  $k$ -му кроці, за многовид  $M_{k+1}$  візьмемо інваріантний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(k)}(\varphi)), \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) + f(\varphi).$$

Довівши, що на кожному кроці можна побудувати функцію  $u^{(k)}(\varphi)$  для будь-якого  $k = 1, 2, \dots$ , довівши рівномірну збіжність  $u^{(k)}(\varphi) \Rightarrow u(\varphi)$ ,  $\varphi \in \Gamma^m$  і показавши, що  $x = u(\varphi)$  задає інваріантний тороїдальний многовид початкової системи (1), прийдемо до справедливості теореми.

**Теорема.** *Нехай система (1) така, що існує границя  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$ ,*

*для всіх  $\varphi \in \Gamma^m$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Тоді існують такі сталі  $b_0 > 0$ ,  $m > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  і достатньо малі сталі Ліпшиця  $L$  і  $\tilde{L}$ , що для будь-якої матриці  $F(\varphi, x) \in C_{\varphi, x}^{(1,2)}$  ( $\varphi \in \Gamma^m$ ,  $x \in R^n$ ),  $\|x\| \leq h$  такої, що*

$$\max_{\varphi \in \Gamma^m} \|F(\varphi, 0)\| = m, \quad \max_{\varphi \in \Gamma^m, \|x\| \leq h} \|B(\varphi, x)\| = b_0,$$

$$\|B(\varphi, x') - B(\varphi, x'')\| \leq L\|x' - x''\|,$$

*для будь-якої функції  $a(\varphi) \in C^1(\Gamma^m)$  і для будь-якої функції  $a_1(\varphi, x) \in C_{Lip(x)}^{(1,0)}$  ( $\varphi \in \Gamma^m$ ,  $x \in R^n$ ) такої, що*

$$\max_{\varphi \in \Gamma^m, \|x\| \leq h} \|a_1(\varphi, x)\| \leq \varepsilon, \quad \|a_1(\varphi, x') - a_1(\varphi, x'')\| \leq \tilde{L}\|x' - x''\|$$

*система (1) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик Л. В. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

#### EXISTENCE OF ASYMPTOTICALLY STABLE INVARIANT TORUS FOR SYSTEM OF CERTAIN CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

*The question of existence of asymptotically stable invariant toroidal set for system of weakly perturbed nonlinear differential equations of certain class, defined on  $m$ -measurable torus is considered.*

УДК 517.956

**ПРО ХАРАКТЕР ТОЧКОВИХ СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ  
РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ  
ВОЛЬТЕРРА**

**Чмир О.Ю.**

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,  
[o\\_chmyr@yahoo.com.ua](mailto:o_chmyr@yahoo.com.ua)*

**Формулювання задачі.** Нехай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$  з межею  $S = \partial\Omega$  класу  $C^\infty$ ,  $Q = \Omega \times (0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ .

Використовуватимемо позначення:

$\|x - y\|$  – евклідова відстань в  $\mathbb{R}^n$ ;  $P = (x, t)$ ,  $M = (y, \tau)$ ,  $\hat{P} = (\hat{x}, \hat{t})$ ;

$d(x, t; y, \tau) = |PM| = (\|x - y\|^2 + |t - \tau|)^{\frac{1}{2}}$  – параболічна відстань в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ;

$\eta$  – мультиіндекс з компонентами  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

$|\eta| = \eta_1 + \dots + \eta_n$  – довжина мультиіндексу  $\eta$ ,  $D_x^\eta = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \dots \partial x_n^{\eta_n}}$ .

Нехай  $\hat{P}$  – довільна фіксована точка з  $\overline{Q}$ ,  $\rho_0(P, \hat{P}) = \rho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t})$  – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок відстані  $|P\hat{P}|$  в околі точки  $\hat{P}$ , додатна поза ним та  $\rho_0(P, \hat{P}) \leq 1$ ,  $(x, t) \in \overline{Q}$ .

Введемо такі позначення:

$$(Hz)(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} K(x, t; y, \tau) F_0(y, \tau, z(y, \tau)) dy, \quad H_1 z = Hz + h,$$

де  $K(x, t; y, \tau)$  ( $(x, t; y, \tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ ) – ядро інтегрального оператора  $H$ , що володіє наступними властивостями:

1)  $K(x, t; y, \tau) = 0$  при  $t < \tau$ ;

2)  $K(x, t; y, \tau)$  при  $(x, t) \neq (y, \tau)$  має похідні до порядку  $s + n + 2$ , а в околі діагоналі  $(x, t) = (y, \tau)$  разом із своїми похідними має такі оцінки:

$$\left| \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial \tau^{n_0}} D_y^\eta K(x, t; y, \tau) \right| \leq C_{\eta, n_0} [d(x, t; y, \tau)]^{s - |\eta| - 2n_0}, \quad \text{де } -n - 2 < s < 0,$$

$|\eta| + 2n_0 < s + n + 2$ ,  $C_{\eta, n_0}$  – додатні сталі;

функція  $F_0$  визначена в  $Q \times (-\infty; +\infty)$ , функція  $h$  визначена в  $Q$ .

Введемо такі функційні простори:

$$M_k(Q, \hat{P}) = \{z : \|z; \hat{P}\|_k = \int_Q \rho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) |z(x, t)| dx dt < +\infty\}, \quad k \in R;$$

$$\tilde{M}_\alpha(\bar{Q}, \hat{P}) = \{z \in C(\bar{Q} / \{\hat{P}\}) : \rho_0^{-\alpha}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) z(y, \tau) \in C(\bar{Q})$$

$$(\|z; \hat{P}\|'_\alpha = \sup_{(y, \tau) \in \bar{Q}} \rho_0^{-\alpha}(y, \tau, \hat{x}, \hat{t}) |z(y, \tau)| < +\infty)\}.$$

Розглянемо інтегральне рівняння

$$z(x, t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega K(x, t; y, \tau) |z(y, \tau)|^q dy + h(x, t) \quad (1)$$

в якому  $q \in (0, 1)$ ,  $h \in \tilde{M}_\alpha(\bar{Q}, \hat{P})$ .

**Теорема.** Нехай  $q \in (0, 1)$ ,  $-n - 2 < s < 0$ ,  $h \in \tilde{M}_\alpha(\bar{Q}, \hat{P})$ , де  $-\frac{n+s+2}{q} < \alpha \leq 0$ . Тоді існує розв'язок  $u \in \tilde{M}_\alpha(\bar{Q}, \hat{P})$  інтегрального рівняння

(1) і при  $k > -\alpha - n - 2$  цей розв'язок належить до простору  $M_k(Q, \hat{P})$ .

Одержані результати мають застосування до розв'язності крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь.

#### THE CHARACTER OF POINTED POWER SINGULARITIES OF THE SOLUTION OF VOLTERRA NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

*The sufficient conditions of the solvability for Volterra nonlinear integral equation with the polar kernel in weight  $L^1$  – spaces of the functions with power singularities near the given point in domain have been investigated.*



УДК 517.91/943

## АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

**Шатковська К.В.**

*Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, Київ, e-mail:  
[shatkovskakv@ukr.net](mailto:shatkovskakv@ukr.net)*

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$B(\tau) \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x(t, \varepsilon) + C(\tau, \varepsilon)x(t - \Delta(\tau), \varepsilon), \quad (1)$$

де  $x(t, \varepsilon)$  – шуканий  $n$ -вимірний вектор,  $A(\tau, \varepsilon), B(\tau), C(\tau, \varepsilon)$  – дійсні або комплекснозначні квадратні матриці  $n$ -го порядку,  $\tau = \varepsilon t \in [0; T]$ ,  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$  – малий параметр,  $\det B(\tau) \equiv 0$ .

Системи рівнянь даного типу досліджувались у роботах [1-3]. Зокрема, в [1,2] розроблено метод побудови асимптотичного розв'язку початкової задачі для системи (1) у випадку, коли  $B(t) = E$ , а запізнення  $\Delta = const$ . У цих же роботах розглянуто можливість побудови частинних асимптотичних розв'язків даної системи у випадку змінного запізнення, коли відповідне характеристичне рівняння  $\det(A_0(\tau) - \lambda E + e^{-\lambda \Delta(\tau)} C_0(\tau)) = 0$  має прості корені.

Система (1) з тотожно виродженою матрицею  $B(\tau)$  вперше розглядалась у [3], де по аналогії з [1,2] методом кроків будується асимптотика розв'язку початкової задачі за умови сталого запізнення.

У даній роботі вивчається питання про побудову асимптотики частинних розв'язків системи (1) у випадку, коли відповідне характеристичне рівняння  $\det(A_0(\tau) - \lambda B(\tau) + e^{-\lambda \Delta(\tau)} C_0(\tau)) = 0$  має ізольований кратний корінь  $\lambda_0(\tau)$  довільної кратності  $p < \infty$ .

Передбачається, що виконуються такі умови:

1°. Матриці  $A(\tau, \varepsilon), C(\tau, \varepsilon)$  допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра  $\varepsilon$ :

$$A(\tau, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(\tau), C(\tau, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k C_k(\tau); \quad (2)$$

2°. Коефіцієнти розвинень (2), матриця  $B(\tau)$  і функція  $\Delta(\tau)$  нескінченно диференційовні на відрізку  $[0; T]$ ;

3°.  $\Delta(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; T]$ ;

Показано, що при виконанні цих умов система (1) має  $p$  лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду

$$x(t, \varepsilon) = u(\tau, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(s, \mu) ds\right),$$

де  $u(\tau, \mu)$  –  $n$ -вимірний вектор,  $\lambda(\tau, \mu)$  – скалярна функція, які зображуються у вигляді формальних розвинень

$$u(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(\tau), \lambda(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda_k(\tau), \mu = \sqrt[p]{\varepsilon}.$$

Доведено їх асимптотичний характер при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

1. *Фещенко С.Ф., Шкіль Н.И., Підченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1981. – 294 с.
2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
3. *Самусенко П.Ф.* Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних // Нелінійні коливання. - 2002. – Т. 5, №4. – С. 527-539.

#### ASYMPTOTIC INTEGRATION OF THE LINEAR DEGENERATE SYSTEM OF THE DELAY DIFFERENTIAL EQUATION

*The particular asymptotic solutions of the linear system of the delay differential equations with the slowly varying coefficients in case of the multiple root of the characteristic equation are considered in report.*



УДК 517.977.1

**ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ  
ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО  
ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

**Яковець В.П., Тарасенко О.В.**

*Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, e-mail:  
[oxana.tarasenko@gmail.com](mailto:oxana.tarasenko@gmail.com)*

Розглядається процес керування, який описується лінійною неавтономною системою диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + C(t, \varepsilon)u, \quad (1)$$

і переводить її з положення  $x(0, \varepsilon) = x_0(\varepsilon)$  в положення  $x(T, \varepsilon) = x_1(\varepsilon)$  за фіксований проміжок часу  $T$ , надаючи мінімум функціоналу

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h} \int_0^T (D(t, \varepsilon)u, u) dt, \quad (2)$$

де  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t)$  - квадратні матриці  $n$ -го порядку,  $C(t, \varepsilon)$ ,  $D(t, \varepsilon)$  - матриці розмірності  $(n \times m)$  і  $(m \times m)$  відповідно,  $x(t, \varepsilon)$  -  $n$ -вимірний вектор стану,  $u(t, \varepsilon)$  -  $m$ -вимірний вектор керування,  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$  - малий параметр:  $\varepsilon_0 \ll 1$ ;  $h \in N$ ,  $t \in [0; T]$ .

Передбачається, що виконуються наступні умови:

1. матриці  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t, \varepsilon)$ ,  $D(t, \varepsilon)$  допускають на відрізку  $[0; T]$  рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &\sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), & B(t) &\sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k B_k(t), & C(t, \varepsilon) &\sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k C_k(t), \\ D(t, \varepsilon) &\sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k D_k(t); \end{aligned} \quad (3)$$

2. коефіцієнти  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$ ,  $D_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  розвинень (3) нескінченно диференційовні на відрізку  $[0; T]$ ;

3. матриця  $D(t, \varepsilon)$  додатно визначена на  $[0; T]$ ;

4.  $\det D_0(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [0; T]$ ;

5.  $\det B(t) \equiv 0$ ,  $\forall t \in [0; T]$ .

Оптимальне керування вибирається з області допустимих значень, яка збігається з усім заданим  $m$ -вимірним простором.

Використовуючи результати робіт [1], [2], досліджується можливість побудови оптимального керування  $u(t, \varepsilon)$  та відповідної оптимальної траєкторії  $x(t, \varepsilon)$  у вигляді розвинень за степенями малого параметра та встановлюється їх асимптотичний характер.

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. *Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной линейной краевой задачи // Докл. АН Украины. - 1994. - № 1. – С. 7-10.

**ON THE CONSTRUCTION OF ASYMPTOTIC SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL  
PROBLEM FOR THE DEGENERATED SINGULAR PERTURBED SYSTEMS OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*We propose an algorithm for constructing asymptotic solution of optimal control problem for a singularly perturbed linear system of differential equations with a degenerate matrix at the derivatives.*



**SMALL DENOMINATORS IN SEVERAL METRICS**

**Kukso O.S.<sup>1</sup>, Shamukova N.V.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of NAS of Belarus, [olga\\_kukso@tut.by](mailto:olga_kukso@tut.by)*

<sup>2</sup>*Bobrujsk filial of BSEU, [shamukova\\_n@mail.ru](mailto:shamukova_n@mail.ru)*

V.I. Arnold and A.N. Kolmogorov showed stability of solar-type systems. The proof was based on studying of behaviour of the value  $f(\bar{a}, \bar{w}) = (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n)$ , where  $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbf{R}^n$  and  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ . Let  $H = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$ . It is easy to prove that for almost all

$\bar{w}$  the inequality

$$|f(\bar{a}, \bar{w})| < H^{-w} \quad (1)$$

has only finite number of solutions in vectors  $\bar{a}$  for almost all  $\bar{w}$  (in sense of Lebesgue measure in  $\mathbf{R}^n$ ).

The problem becomes considerably more complicated, if the vector  $\bar{w}$  belongs to some manifold  $G$ ,  $\dim G < n$ . However the formulated above



statement remains true if  $\bar{w} = (w, w^2, \dots, w^n)$  (details see in [1]). Recently in [2] the similar statement has been proved for a wide class of so-called non-degenerate curves. We prove analogues of metric theorems for monic polynomials in several metrics.

Let  $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_1t + \dots + a_0$  be the monic polynomial with integer coefficients and height  $H = \max_{1 \leq j \leq n-1} |a_j|$ . Denote by  $\bar{u} = (x, z, w)$  a vector in  $\mathbf{R} \times \mathbf{C} \times \mathbf{Q}_p$ ,  $\Psi(x)$  monotonic decreasing function of positive argument ( $x > 0$ ),  $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$  cartesian product of Lebesgue measures in  $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}_p$ .

**Theorem.** Let  $\sum_{H=1}^{\infty} H^{-n+1} \Psi(H)$  converges then the system of inequalities

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-v_1} \Psi^{\lambda_1}(H), \\ |P(z)| < H^{-v_2} \Psi^{\lambda_2}(H), \\ |P(w)|_p < H^{-v_3} \Psi^{\lambda_3}(H), \end{cases}$$

for almost all  $\bar{u}$  has finite number of solutions in vectors  $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ , where  $v_i \geq 0$ ,  $v_1 + 2v_2 + v_3 = n - 4$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

1. Sprindzuk V.G. Mahler's problem in metric number theory. – Minsk.: Nauka I Technika, 1967. – 184 p.
2. Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for non-degenerate manifolds // Moscow Math. J. – 2002. – 2, No. 2. – P. 203-225.



UDK 517.928.2, 517.927.25

## ON THE SCHRÖDINGER OPERATOR WITH POINT INTERACTIONS

**Man'ko S.S.**

*Ivan Franko National University of L'viv, Department of Mechanics and Mathematics,  
[s.manko@franko.lviv.ua](mailto:s.manko@franko.lviv.ua)*

Describing point interactions for one-dimensional Schrödinger operators attracts considerable attention by researchers in various disciplines. The proper potentials have supports at the positions of a discrete set of point sources. Such operators are used to obtain exactly solvable models in quantum mechanics, in the study of wave propagation in electrodynamics and more generally in some models of theoretical physics [1]. The structure of the spectrum of such operators can easily be investigated and eigenfunctions can be calculated explicitly.

Our talk will be focused on the Schrödinger operator with  $\delta'$ -interactions

$H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x)$ , where  $\alpha$  is a coupling constant and  $\delta'(x)$  is the derivative of the Dirac function. This operator can be understood as a selfadjoint extension of the relevant free Hamiltonians with the interaction points removed.

We approximate  $H_\alpha$  by operators  $H_{\varepsilon,\alpha}$  that are the closure of the essentially selfadjoint ones

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon}\Psi(\varepsilon^{-1}x), \quad D(H_\varepsilon) = C_0^\infty(R).$$

Here  $\Psi$  is the *shape* of the  $\delta'$ -like barrier and  $\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \delta'(x)$  in the sense of distributions as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In order to describe the best solvable model we introduce for each  $\delta'$ -like barrier  $\Psi$  two spectral characteristics: *resonant set*  $\Sigma_\Psi$  and *coupling function*  $\theta_\Psi$ . Resonant set  $\Sigma_\Psi$  is the spectrum of the Sturm-Liouville problem with indefinite weight

$$-w'' + \alpha\Psi w = 0, \quad \xi \in (-1,1), \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0. \quad (1)$$

It is convenient to associate problem (1) with J-selfadjoint and J-nonnegative operator in the Krein space. The spectrum of this operator and thereby the resonant set is real and countable. If  $\alpha \in \Sigma_\Psi$ , then  $\theta_\Psi(\alpha) = w_\alpha(1)/w_\alpha(-1)$ , where  $w_\alpha$  is an eigenfunction of the problem (1) corresponding to  $\alpha$ .

Let  $S_\pm$  be the Schrödinger operators on half-axes  $R_\pm$

$$S_{\pm} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad x \in R_{\pm}, \quad D(S_{\pm}) = \{f \in W_2^2(R_{\pm}) : f(0) = 0\}$$

and  $S_{\alpha}$  – operators on the whole line  $R$  with domain  $W_2^2(R \setminus 0)$  and coupling conditions at the origin  $f(+0) = \theta_{\Psi}(\alpha)f(-0)$  and  $\theta_{\Psi}(\alpha)f'(+0) = f'(-0)$ . Having spectral characteristics of the  $\delta'$ -like barrier  $\Psi$  we can construct operator

$$A(\alpha, \Psi) = \begin{cases} S_- \oplus S_+, & \alpha \notin \Sigma_{\Psi}, \\ S_{\alpha}, & \alpha \in \Sigma_{\Psi}. \end{cases} \quad (2)$$

The family  $A(\alpha, \Psi)$  describes the motion of a particle in the potential  $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$  which is only correct approximation for  $\delta'$ -potential.

In [2] it was showed that the family of Schrodinger operators

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}V(\varepsilon^{-1}x)$$

converge in the norm resolvent sense to free Hamiltonians defined on the half-axes by the Dirichlet boundary conditions at the origin. However, this result is incorrect due to the existence of partial transmission for such type potential. This is in contrast to the earlier consensus that such a potential allows no transmission.

**Theorem.** *For each real  $\alpha$  and for each  $\delta'$ -shape  $\Psi$  there exists a family of operators  $A(\alpha, \Psi)$  defined by (2) such that the family  $H_{\varepsilon, \alpha}$  converges to  $A(\alpha, \Psi)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  in the strong resolvent sense.*

1. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner. – Chelsea Publishing, 2005. – 517 p.*
2. *Šeba P. Some remarks on the  $\delta'$ -interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – 24, № 1 – P. 111–120.*

### ОПЕРАТОР ШРЕДІНГЕРА З ТОЧКОВОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

У доповіді показано, що формальному диференціальному оператору Шредінгера

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x), \text{ де } \delta'(x) \text{ – похідна функції Дірака, неможливо поставити у відповід-}$$

ність єдиний самоспряжений оператор. Але для кожної реальної моделі із фіксованим гладким  $\delta'$ -подібним потенціалом можна побудувати сім'ю самоспряжених операторів, що найкраще описують рух частинки в такому потенціалі.



Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача

КОНФЕРЕНЦІЯ  
молодих учених із сучасних проблем  
механіки і математики  
імені академіка Я. С. Підстригача

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ  
(25-27 травня 2009 року)

Комп'ютерна верстка Катерини Павлик

Підписано до друку 18.05.2009.

Формат 60□84 1/16. Папір офсетний № 1. Умовн. друк. арк. 14,07.

Зам. № 05/09. Тираж 150 прим.

Видруковано у Дослідно-видавничому центрі  
Наукового товариства ім. Шевченка

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи ДК № 884 від 04.04.2002 р.