

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ  
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Відділ термомеханіки



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН-  
України, академік НАН України

  
Роман КУШНІР

Протокол від «31»05 2022 року № 5

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Вибрані розділи механіки суцільного середовища (визначальні рівняння,  
основи нелінійної теорії пружності)  
/код і назва навчальної дисципліни /

Третій рівень, доктор філософії  
/рівень вищої освіти/

вид дисципліни \_\_\_\_\_ за вибором \_\_\_\_\_  
(обов'язкова / за вибором)

мова викладання \_\_\_\_\_ українська \_\_\_\_\_

спеціальність \_\_\_\_\_ 113 Прикладна математика \_\_\_\_\_  
/шифр і назва /

галузь знань \_\_\_\_\_ 11 Математика та статистика \_\_\_\_\_  
/шифр і назва /

Львів–2022 рік

Робоча програма з навчальної дисципліни «Вибрані розділи механіки суцільного середовища (визначальні рівняння, основи нелінійної теорії пружності)» для здобувачів освіти ступеня доктора філософії

Розробники:

Зав. відділу, доктор фіз.-мат. наук, професор



Роман КУШНІР

Пров. н.с., доктор фіз.-мат. наук, професор



Георгій СУЛИМ

“17” 05 2022 р.

## 1. Структура навчальної дисципліни

Найменування показників	Всього годин Денна форма навчання
Кількість кредитів/год.	4/120
Усього годин аудиторної роботи, у т. ч.:	60
• лекційні заняття, год.	30
• семінарські заняття, год.	-
• практичні заняття, год.	30
• лабораторні заняття, год.	-
Усього годин самостійної роботи, у т. ч.:	60
Екзамен	

## 2. Мета та завдання навчальної дисципліни

### 2.1. Мета вивчення навчальної дисципліни

Метою вивчення навчальної дисципліни є оволодіння та розуміння аспірантами базових понять і математичного апарату механіки суцільного середовища (тензорного числення, теорій деформацій і напружень), а також їхнього застосування їх до вивчення проблем нелінійної пружності, які використовують до вивчення новітніх проблем макро-, мікро- та наномеханіки.

### 2.2. Завдання навчальної дисципліни відповідно до освітньої програми

В результаті вивчення дисципліни аспірант повинен знати:

- основні положення математичного моделювання в механіці суцільного середовища (МСС) та пов'язані із МСС новітніх напрямках механіки деформівного твердого тіла;
- апарат тензорного числення, яке є основним математичним засобом опису об'єктивних законів природи у цілому зокрема й напружено-деформованого стану матеріальних тіл;
- широкий спектр засобів опису деформованого стану матеріальних тіл та мір деформації у залежності від мети дослідження об'єкту;
- засоби опису напруженого стану деформівних середовищ;
- обмеженість можливостей застосування класичних лінійно фізичних та геометричних підходів до вирішення актуальних проблем прикладної математики і механіки, а відтак оволодіння базовими підходами і знаннями до застосування поряд із такими теоріями концепцій фізичної та геометричної нелінійності, які будуть також фундаментом до наступного урахування несиметричності тензора напружень та нелокального характеру впливу на фізико-механічні поля частинок матерії;
- нові підходи до формулювання математичних моделей визначення напружено-деформованого стану тіл ускладненої внутрішньої будови і взаємодії;
- загальні відомості про сучасні можливості та підходи у математичному моделюванні деформування тіл ускладненої внутрішньої будови та на різних масштабних рівнях будови матерії.

Для успішності своєї майбутньої професійної діяльності наукового працівника, дослідника він повинен ґрунтовно засвоїти та глибоко зрозуміти фізичну суть та математичні підвалини фундаментальних понять нелінійної теорії пружності, що стосуються опису напруженого і деформованого стану тіл з урахуванням фізико-механічної нелінійності природи цих процесів. Повинен навчитися відчувати, бачити багатогранність механічних явищ, усвідомлювати важливість врахування під час моделювання перебігу широкого класу процесів нелінійних ефектів та засвоєння методів опису та аналізу ефектів нелінійності, а також можливостей реалізації лінеаризації для забезпечення допустимого рівня спрощення моделей.

Аспірант пізнає особливості нелінійного деформування матеріалів та головні математичні засоби його опису і поглибленого вивчення. Засвоїть методологію створення складних моделей ієрархічної будови та навчиться виявляти обмеження, за яких ці моделі зменшують чи й зовсім втрачають свою вірогідність. Зрозуміє багатогранність матеріального світу, його глибину та потребу постійно працювати над самоосвітою для того аби як професіонал відповідати викликам сучасності. Навчиться аналізувати напружено-деформований стан полімерів та найбільш використовуваного класу полімерних структур – нестисливих і стисливих еластомерів – як репрезентативного представника фізично та геометрично нелінійного класу матеріалів.

Вивчення навчальної дисципліни передбачає формування та розвиток в аспірантів **компетентностей:**

**загальних:**

- 1) знання сучасних засобів математичного моделювання напружено-деформованого стану матеріальних об'єктів з урахуванням ускладненої будови, а також структурного рівня (макро, мікро чи нано);
- 2) критичний аналіз, оцінка і синтез нових та складних ідей;
- 3) уміння ефективно спілкуватися з широкою науковою спільнотою та громадськістю в питаннях прикладної математики;
- 4) наполегливість у досягненні мети;
- 5) здатність самостійно розвиватися і вдосконалюватися упродовж життя, відповідальність за навчання інших;
- 6) соціальна відповідальність за результати прийняття стратегічних рішень;
- 7) ініціювання оригінальних дослідницько-інноваційних комплексних проектів;
- 8) лідерство та здатність як до індивідуальної автономної, так і до командної роботи під час реалізації проектів;

**фахових:**

- 1) знання про тенденції розвитку, а також найважливіші нові напрацювання в сфері математичного моделювання складних структурно-неоднорідних матеріальних систем, а також суміжних областей;
- 2) розуміння сучасних наукових теорій і методів, вміння їх ефективно застосовувати до синтезу та аналізу складних процесів, систем та явищ;
- 3) здатність ефективно застосовувати аналітичні методи аналізу та математичного моделювання складних процесів та систем під час проведення наукових досліджень;
- 4) можливість інтегрувати знання з інших дисциплін, застосовувати системний підхід та враховувати міждисциплінарні й нетехнічні аспекти при розв'язанні науково-прикладних задач і виконанні досліджень;
- 5) готовність розробляти та реалізовувати проекти, включаючи власні дослідження, які дають можливість переосмислювати наявні чи створювати нові знання, а також розв'язувати складні задачі в області математичного, числового та комп'ютерного моделювання.

Результати навчання даної дисципліни деталізують такі **програмні результати навчання:**  
– знання та розуміння наукових й математичних принципів, що лежать в основі математич-

- ного моделювання складних структурно-неоднорідних механічних систем;
- професійні знання основних закономірностей якісного та кількісного опису реальних процесів в межах широкого спектру математичних моделей для адекватного опису деформування та граничного стану у матеріальних середовищах з урахуванням дії різноманітних фізичних механізмів та зміни структури на усіх масштабних рівнях будови матерії (окрім квантового);
  - здатність створити раціональну математичну модель для вирішення сформульованої проблеми;
  - здатність продемонструвати поглиблені знання у вибраній спеціалізації;
  - розуміння впливу правильних науково-технічних рішень у суспільному, економічному й соціальному контекстах;
  - здійснювати пошук, аналізувати і критично оцінювати інформацію з різних джерел;
  - самостійно планувати й виконувати дослідження, а також адекватно оцінювати отримані результати;
  - застосовувати сучасні та перспективні інформаційно-комунікаційні технології та навички програмування для розв'язання задач математичного моделювання складних процесів, систем та явищ;
  - поєднувати теорію і практику, а також приймати рішення та виробляти стратегію діяльності для вирішення завдань спеціалізації з урахуванням загальнолюдських цінностей, суспільних, державних та виробничих інтересів;
  - самостійно виконувати наукові дослідження та застосовувати дослідницькі навички за професійною тематикою;
  - застосовувати системний підхід, інтегруючи знання з інших дисциплін та враховуючи нетехнічні аспекти, під час розв'язання задач обраної спеціалізації та проведення досліджень;
  - аргументувати вибір методів розв'язування спеціалізованої задачі, критично оцінювати отримані результати та захищати прийняті рішення;

### 3. Опис навчальної дисципліни

#### 3.1. Лекційні заняття

<i>№ з/п</i>	<i>Найменування розділів, тем</i>	<i>Кількість год.</i>
1	<b>Вступ.</b> Основні припущення механіки суцільного середовища та механіки деформівного твердого тіла.	2
<b>Теорія напружень</b>		
2	Об'ємні та поверхневі сили: види механічних сил, вектор напружень, постулат і фундаментальна лема Коші. Фундаментальна теорема Коші і тензор напружень Коші.	2
3	Тензори напружень Піоли. Закони руху Коші.	2
4	Тензор функцій напружень. Теорема про взаємність нормальних складових. Головні напруження, інваріанти напруженого стану	2
5	Поверхня напружень. Головні дотичні напруження. Гідростатичний і девіаторний напружений стани. Октаедричні напруження.	2
6	Плоский напружений стан.	2
<b>Нелінійна теорія пружності</b>		
7	Робота зовнішніх зусиль. Спряжені пари тензорів. Закон пружності: головні залежності для ізотропного матеріалу (загальний випадок, степеневі міри деформації).	2
8	Анізотропія та ізотропія матеріалу. Стандартні матеріали. Малі деформації, лінійний закон Гука, обмеження на потенціал $I$ як функції	2

	головних значень $\lambda_i$ , обмеження на потенціали $I$ як функції головних інваріантів, конститутивні співвідношення стандартних матеріалів $n$ -го порядку	
9	Спряжені пари тензорів пружного ізотропного матеріалу. Особливості напруженого стану нестисливих матеріалів, матеріалів, що нерозтягливі у певному напрямі чи у яких відсутнє скошування прямих кутів між двома напрямками.	2
10	Головні властивості полімерних матеріалів. Особливості напруженого стану нестисливих матеріалів	2
11	Еластомери. Потенціали та конститутивні співвідношення еластомерів: матеріал Сетха, матеріал Сен - Венана – Кірхгофа, матеріал Сінйоріні	2
12	Модель матеріалу Генкі та її узагальнення. Матеріал Мурнагана. Модель матеріалу Чіскіса – Парнера	2
13	Феноменологічний підхід. Потенціал Муні – Рівліна. Статистичні моделі. Потенціал Трелоара (неогуків), потенціали Бартенева – Хазановича і Черних – Шубіної.	2
14	Багатопараметричні потенціали: потенціал Огдена, потенціали Арруди – Бойса та Зябицького, потенціал Йога	2
15	Стисливість еластомерів та інших матеріалів. Обмеження на потенціал стискуваного суцільного еластомера. Основні типи потенціалів стисливих матеріалів. Потенціал Блейтца – Ко та його розвиток. Потенціал Черних для стисливого матеріалу	2
	<b>Усього</b>	<b>30 год.</b>

### 3.2. Практичні заняття

№ з/п	Найменування розділів, тем	Кількість год.
<b>Тензори</b>		
1	Вектори та діадки: правило підсумовування Айнштайна, символи Кронекера та Леві-Чівіті. Діади і діадки.	2
2	Набла-оператор Гамільтона та споріднені диференціальні оператори Перетворення об'ємного інтеграла у поверхневий та поверхневого у контурний. Трансформаційна матриця.	2
3	Зміна компонент вектора; тензорний закон зміни компонент; алгебричні операції з тензорами; обернена тензорна ознака.	2
4	Ізотропні тензори, багатоточкові тензори. Дії з матрицями. Тензори обернені та ортогональні (матриці, тензори обернений, повертання й інверсії; теорема Ейлера про тензор повертання.	2
5	Теорема про полярний розклад тензора. Вектор і тензор повертання. Головні осі тензора, власні значення і власні напрями тензора, характеристичне рівняння, інваріанти тензора, властивості власних значень і власних напрямів симетричних тензорів.	2
6	Поверхні Коші та канонічні подання симетричних і несиметричних тензорів. Кульовий тензор і девіатор. Формула Гамільтона – Келі.	2
7	Функції від тензорів (інваріантний скаляр, класичні функції тензорів, градієнтні і квазіградієнтні. Тензорне поле. Теорема про нульове значення тензорного поля. Головні залежності при тензорному диференціюванні скалярів, векторів і тензорів	2

<b>Теорія деформацій</b>		
8	Вектор переміщення і швидкості руху точки та зміни поля. Градієнти деформації, місця і переміщень. Тензор дисторсії. Тензори деформації Гріна, Коші, Коші – Гріна, Фінгера, Карні – Рейнера, Піоли.	2
9	Тензор кратності видовжень. Узагальнені тензори деформації та їхні головні значення. Геометричні рівняння. Тензор дисторсії,	2
10	Механічний зміст компонент тензора Гріна. Тензори повертання Лагранжа і малих поворотів.	2
11	Тензори деформації Альманзі та повертання Ейлера. Індиферентність, інваріантність і об'єктивність тензорів.	2
12	Механічний зміст компонент тензора Гріна. Мала деформація.	2
13	Головні напрями, головні деформації, інваріанти. Відносна зміна об'єму під час деформування. Розклад вектора переміщення	2
14	Девіатор деформації. Формула Чезаро. Умови сумісності деформацій.	2
15	Логарифмічні деформації. Швидкість деформації. Міри деформації. Плоска деформація.	2
	<b>Усього</b>	<b>30 год.</b>

### 3.3. Самостійна робота

<b>№ п/п</b>	<b>Зміст роботи</b>	<b>К-сть годин</b>
1.	Виконання індивідуальних науково-дослідних завдань, к-сть/год	40
2.	Підготовка до заліків та іспиту	20
	<b>Усього</b>	<b>60 год.</b>

### Рекомендована література

#### *Література базова*

#### **Нелінійна пружність**

1. *Божидарнік В.В., Сулим Г.Т.* Теорія пружності: підручник. Т. 1: Загальні питання. Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2012. 552 с.
2. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
3. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
6. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1986. 336 с.
7. *Трелоар Л.* Введение в науку о полимерах. М.: Мир, 1973. 238 с.
8. *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications (London Mathematical Society Lecture Note Series No 282) / Editors Y.B. Fu, R.W. Ogden.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. xi+525 p.
9. *Truesdell C., Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Third Edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2004. xxix+602 p.

#### *Література додаткова*

#### **Нелінійна пружність**

1. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. К.: Наук. думка, 1986. 512 с.
2. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К.: Наук. думка, 1973. 274 с.
3. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

5. *Zeidler E.* Basic Equations of Nonlinear Elasticity Theory / Nonlinear Functional Analysis and its Applications. IV: Applications to Mathematical Physics, 1988. Springer-Verlag New York, Inc. P. 158-232.
6. *Hanyga A.* Mathematical Theory of Non-Linear Elasticity. Warszawa: PWN; Chichester: Ellis Horwood, 1985. 432 p.
7. *Maeosko C.W.* Rheology: principles, measurement and applications, New York: Wiley-VCH Publishers, 1994. xiii+563 p.