Практичне заняття № 1

Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь у загальному випадку

Нехай $n \geqslant 2$ – довільне натуральне число, $x = (x_1, ..., x_n)$ – точка простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f(x), \tag{1}$$

де $a_0, a_i, a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, – сталі коефіцієнти, а f – вільний член рівняння, який заданий в $\mathbb{R}^n$, а u – невідома функція.

Виникає питання: як знайти таку (невироджену) заміну незалежних змінних, при якій рівняння (1) матиме найпростіший (канонічний) вигляд? Відповідь отримаємо в два етапи.

1 етап. Спочатку розглядаємо квадратичну форму

$$S(t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, ..., t_n)^\top \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Нехай стала матриця $P := \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... \\ p_{n1} & ... & p_{nn} \end{pmatrix}$ така, що при заміні змінних

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \tau_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ ... \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... \\ p_{n1} & ... & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ ... \\ \tau_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad t = P\tau,$$

$$t = (t_1, ..., t_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \tau = (\tau_1, ..., \tau_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

форма $S(t)$ переходить у форму $\widetilde{S}(\tau)$ канонічного вигляду

$$\widetilde{S}(\tau) := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \tau_k^2, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

де $\gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$ (як випливає із закону інерції для квадратичних форм, кількість коефіцієнтів γ_k, які дорівнюють 1, і кількість коефіцієнтів γ_k, які дорівнюють -1, не залежать від перетворення).

2 етап. Робимо в рівнянні (1) заміну змінних

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{n1} \\ ... & ... & ... \\ p_{1n} & ... & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = P^\top x, \tag{5}$$

де $P^\top$ – транспонована по відношенню до P матриця. У результаті цього рівняння (1) переходить в рівняння канонічного вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{a}_i \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} + \widehat{a}_0 \widetilde{u} = \widehat{f}(\xi), \tag{6}$$

де γ_k ті ж самі, що в (4).

Залежно від значень γ_k у рівнянні (6) або, що те саме, у формі (4) кажуть, що рівняння (1) в точці x^0 є
а) *еліптичним*, якщо всі коефіцієнти γ_k відмінні від нуля і однакового знаку, тобто $\gamma_k = 1,\ k = \overline{1,n}$, або $\gamma_k = -1,\ k = \overline{1,n}$.
б) *гіперболічним*, якщо всі коефіцієнти γ_k відмінні від нуля і один з них має протилежний знак до всіх інших, тобто (з точністю до нумерації змінних τ_k) маємо $\gamma_1 = 1$, $\gamma_k = -1,\ k = \overline{2,n}$, або $\gamma_1 = -1$, $\gamma_k = 1,\ k = \overline{2,n}$;
в) *параболічним*, якщо один з коефіцієнтів γ_k дорівнює нулеві, а решта – відмінні від нуля і одного знаку, тобто (з точністю до нумерації змінних τ_k) маємо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = 1,\ k = \overline{2,n}$, або $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = -1,\ k = \overline{2,n}$;
г) *безтипним* в інших випадках.

Якщо рівняння (1) є еліптичним, або гіперболічним, або параболічним, або безтипним в кожній точці області Ω, то його називають відповідно *еліптичним*, *гіперболічним*, *параболічним* або *безтипним* рівнянням в області Ω.

Увага! Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду використовують різні методи, але найпоширенішим з них є *метод виділення повних квадратів*. Опишемо його.

Нехай

$$S(t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, \ldots, t_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

– довільна квадратична форма, $a_{ij} = a_{ji} = const$, $i, j = \overline{1,n}$. Можливі такі два випадки:
1) $a_{ii} = 0$ для всіх $i \in \{1, ..., n\}$.
2) $a_{ii} \neq 0$ хоча б одного значення $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Розглянемо *перший випадок*. Він легко зводиться до другого так. Оскільки квадратична форма ненульова, то існує хоча би один з її коефіцієнтів відмінний від нуля. Припустимо, не зменшуючи загальності, що $a_{12} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$t_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad t_2 = \alpha_1 + \alpha_1, \quad t_i = \alpha_i, \quad i = 3, ..., n.$$

У результаті приходимо до квадратичної форми, в якій є відмінний від нуля коефіцієнт при квадраті змінної. А далі робимо так, як в другому випадку.

Розглянемо *другий випадок*. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $a_{11} \neq 0$. Випишемо всі члени нашої квадратичної форми, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за правилом

$$a_{11} t_1^2 + 2a_{12} t_1 t_2 + ... + 2a_{1n} t_1 t_n =$$
$$= \frac{1}{a_{11}} [a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + ... + a_{1n} t_n]^2 - \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} t_i t_j.$$

Підставивши отриманий вираз у вихідну форму і спростивши подібні члени, прийдемо до зображення вихідної форми у вигляді

$$S(t) = \frac{1}{a_{11}} [a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + ... + a_{1n} t_n]^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij} t_i t_j.$$

Тепер зауважимо, що вираз $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a''_{ij} t_i t_j$ являє собою квадратичну форму від $n-1$ (або менше) змінних. Перетворивши цю форму аналогічно вихідній, отримаємо зображення вихідної квадратичної форми у вигляді суми двох квадратів лінійних виразів від змінних

$t_1, ..., t_n$ і квадратичної форми від $n-2$ (або менше) змінних. Продовжуючи діяти аналогічно, через скінченну кількість кроків прийдемо до зображення вихідної квадратичної форми у вигляді суми квадратів лінійних виразів від змінних $t_1, ..., t_n$:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [b_{k1} t_1 + b_{k2} t_2 + ... + b_{kn} t_n]^2,$$

де для деяких k може бути $\lambda_k = 0$, але якщо $\lambda_k \neq 0$, то хоча би для одного значення j коефіцієнт $b_{kj} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$\tau_k = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_k|}(b_{k1} t_1 + b_{k2} t_2 + ... + b_{kn} t_n), & \text{якщо} \quad \lambda_k \neq 0, \\ t_k, & \text{якщо} \quad \lambda_k = 0, \end{cases} \quad k = 1, ..., n.$$

У результаті приходимо до канонічного вигляду (4), де $\gamma_k = 1$, якщо $\lambda_k > 0$, $\gamma_k = -1$, якщо $\lambda_k < 0$, і $\gamma_k = 0$, якщо $\lambda_k = 0$.

Приклад 1.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yz} - u_{zz} + u_z - u = y.$$

Розв'язування.
1 етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t) := 4t_1^2 + 4t_1 t_2 + 2t_2 t_3 - t_3^2, \quad t := (t_1, t_2, t_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Зведемо її до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів. Оскільки коефіцієнт при t_1^2 відмінний від нуля, то випишемо всі члени, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за вказаним вище правилом

$$4t_1^2 + 4t_1 t_2 = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - t_2^2.$$

Підставимо отриманий вираз у вихідну форму:

$$S(t) = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - t_2^2 + 2t_2 t_3 - t_3^2.$$

Тепер перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну t_2:

$$-t_2^2 + 2t_2 t_3 = -(-t_2 + t_3)^2 + t_3^2.$$

У результаті вказаних перетворень отримаємо вираз вихідної квадратичної форми у вигляді

$$S(t) = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - (-t_2 + t_3)^2 = (2t_1 + t_2)^2 - (t_2 - t_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \tau_1 = 2t_1 + t_2 \\ \tau_2 = t_2 - t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases}.$$

Тоді $S(t) = \widetilde{S}(\tau), \quad \tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, де

$$\widetilde{S}(\tau) := \tau_1^2 - \tau_2^2.$$

Форма $\widetilde{S}(\tau)$ є канонічним виглядом вихідної форми $S(t)$. Отже, дане рівняння є безтипним. Приведемо його до канонічного вигляду. Для знаходження відповідної заміни виразимо "старі"змінні t через "нові"змінні τ:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{2}\tau_3 \\ t_2 = \tau_2 + \tau_3 \\ t_3 = \tau_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

2 етап. Потрібну заміну змінних у вихідному рівнянні ("нові"змінні $(\xi, \eta, \zeta)^\top$ виражаються через "старі"змінні $(x, y, z)^\top$)) маємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = 1/2x \\ \eta = -1/2x + y \\ \zeta = -1/2x + y + z \end{cases}.$$

Далі використаємо позначення

$$\partial_\xi := \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_\eta := \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \partial_\zeta := \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\partial^2_{\xi\xi} := \partial_\xi \partial_\xi = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi}, \quad \partial^2_{\eta\eta} := \partial_\eta \partial_\eta = \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta}, \quad \partial^2_{\zeta\zeta} := \partial_\zeta \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\zeta},$$

$$\partial^2_{\xi\eta} := \partial_\xi \partial_\eta = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}, \quad \partial^2_{\xi\zeta} := \partial_\xi \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}, \quad \partial^2_{\eta\zeta} := \partial_\eta \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta},$$

а також формулу

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
-1 \,\big|\, & u(x, y, z) = \widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta), \\
+0 \,\big|\, & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot \frac{1}{2} + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\frac{1}{2}) + \widetilde{u}_\zeta \cdot (-\frac{1}{2}) = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)\widetilde{u}, \\
+0 \,\big|\, & u_y = \widetilde{u}_\eta + \widetilde{u}_\zeta = \big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\widetilde{u}, \\
+1 \,\big|\, & u_z = \partial_\zeta \widetilde{u}, \\
+4 \,\big|\, & u_{xx} = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)^2\widetilde{u} = \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\xi\xi} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\zeta} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta}, \\
-1 \,\big|\, & u_{zz} = \partial_\zeta \partial_\zeta \widetilde{u} = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+4 \,\big|\, & u_{xy} = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)\big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\widetilde{u} = \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+2 \,\big|\, & u_{yz} = \big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\partial_\zeta \widetilde{u} = \widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}.
\end{aligned}$$

Підставимо вирази похідних функції u у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}]+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}+4(-\frac{1}{2})]+\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot(-\frac{1}{2})+2\cdot 1+(-1)\cdot 1]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot[4(-\frac{1}{2})+4\cdot\frac{1}{2}]+$$

$$+\widetilde{u}_{\xi\zeta}\cdot[4\cdot(-\frac{1}{2})+4\cdot\frac{1}{2}]+\widetilde{u}_{\eta\zeta}\cdot[4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot(-\frac{1}{2})]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[0]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[0]+\widetilde{u}_{\zeta}\cdot[1\cdot 1]+\widetilde{u}\cdot[-1\cdot 1]=\xi+\eta.$$

Після спрощення прийдемо до канонічного вигляду заданого рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}-\widetilde{u}_{\eta\eta}+\widetilde{u}_{\zeta}-\widetilde{u}=\xi+\eta.$$

$\square$

Приклад 2.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+u_{yy}+2u_{zz}-2u_{xz}-2u_{yz}+u_x-2u_z=0.$$

Розв'язування.
1 етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t)=t_1^2+t_2^2+2t_3^2-2t_1t_3-2t_2t_3,\quad t=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3.$$

і зведемо її до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів.

Врахувавши, що коефіцієнт при t_1^2 відмінний від нуля, випишемо всі члени, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за вказаним вище правилом:

$$t_1^2-2t_1t_3=(t_1-t_3)^2-t_3^2.$$

Отриманий вираз підставимо у вихідну форму:

$$S(t)=(t_1-t_3)^2+t_2^2+t_3^2-2t_2t_3.$$

Тепер, оскільки коефіцієнт при t_2^2 відмінний від нуля, перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну t_2:

$$t_2^2-2t_2t_3=(t_2-t_3)^2-t_3^2.$$

У результаті вказаних перетворень отримаємо вираз форми $S(t)$ вигляді

$$S(t)=(t_1-t_3)^2+(t_2-t_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases}\tau_1=t_1-t_3,\\ \tau_2=t_2-t_3,\\ \tau_3=t_3.\end{cases}$$

Тоді $S(t)=\widetilde{S}(\tau)$, де

$$\widetilde{S}(\tau)=\tau_1^2+\tau_2^2,\ \tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Це означає, що дане рівняння є параболічним. Виразимо "старі"змінні t через "нові"τ:

$$\begin{cases}t_1=\tau_1+\tau_3,\\ t_2=\tau_2+\tau_3,\\ t_3=\tau_3.\end{cases}$$

Отже, маємо

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 етап. Отож, в рівнянні робимо заміну змінних

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \\ \zeta = x + y + z \end{cases}.$$

Тоді, оскільки $u(x, y, z) = \widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta)$, то

$$\begin{aligned}
+1|\ & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
+0|\ & u_y = \widetilde{u}_\eta \cdot 1 + \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
-2|\ & u_z = \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
+1|\ & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+1|\ & u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+2|\ & u_{zz} = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
-2|\ & u_{xz} = \widetilde{u}_{\xi\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
-2|\ & u_{yz} = \widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}.
\end{aligned}$$

Підставивши ці вирази в рівняння, отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1] + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} \cdot [1 + 1 + 2 - 2 - 2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [0] + \widetilde{u}_{\xi\zeta} \cdot [2 - 2] + \widetilde{u}_{\eta\zeta} \cdot [2 - 2] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot [1] + \widetilde{u}_\eta \cdot [0] + \widetilde{u}_\zeta \cdot [1 - 2] = 0,$$

звідки маємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\zeta = 0 -$$

канонічний вигляд заданого рівняння. □

Приклад 3.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xy} + 2u_{yz} + u_z - u = x + y.$$

Розв'язування.
1 етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t) := t_1 t_2 + 2t_2 t_3, \quad t := (t_1, t_2, t_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Перш ніж виділяти повні квадрати, зробимо в цій формі заміну змінних

$$\begin{cases} t_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \\ t_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ t_3 = \alpha_3. \end{cases}$$

У результаті отримаємо $S(t) = \widehat{S}(\alpha)$, де

$$\widehat{S}(\alpha) := \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Оскільки коефіцієнт при α_1^2 відмінний від нуля, то випишемо всі члени, які містять змінну α_1, і виділимо повний квадрат за вказаним у зауваженні 1.3 правилом:

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - \alpha_3^2.$$

Підставимо отриманий вираз у форму $\widehat{S}(\alpha)$:

$$\widehat{S}(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2.$$

Тепер перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну α_2:

$$-\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 = -(-\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_3^2.$$

В результаті отримаємо

$$\widehat{S}(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_3) - (-\alpha_2 + \alpha_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних $\begin{cases} \tau_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ \tau_2 = -\alpha_2 + \alpha_3, \\ \tau_3 = \alpha_3. \end{cases}$

Тоді $S(t) = \widetilde{S}(\tau)$, де

$$\widetilde{S}(\tau) = \tau_1^2 - \tau_2^2, \quad \tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Форма $\widetilde{S}(\tau)$ є канонічним виглядом форми $S(t)$. Отже, дане рівняння є безтипним. Приведемо його до канонічного вигляду. Для знаходження відповідної заміни виразимо "старі"змінні t через "нові"τ (виразивши спочатку змінні α через змінні τ і підставивши їх у співвідношення між змінними α і t):

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3 \\ t_2 = \tau_1 - \tau_2 \\ t_3 = \tau_3, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 етап. Потрібна заміна змінних у вихідному рівнянні ("нові"змінні $(\xi, \eta, \zeta)^\top$ виражаються через "старі"$(x, y, z)^\top$) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = -x + y \\ \zeta = -2x + z \end{cases}.$$

Обчисливши похідні і підставивши їх вирази у вихідне рівняння, після спрощення прийдемо до канонічного вигляду

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\zeta - u = \xi.$$

$\square$

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння (загальний випадок):

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$;
б) $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$;
в) $u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + 3u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} - 8u = 0$;
г) $u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + 4u_{yz} + u_{zz} + 2u = 0$;

Відповіді:

1. а) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} = 0$; $\quad \xi = x, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = 2x - 2y + z$;
б) $\widetilde{u}_{\xi\xi} - \widetilde{u}_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 2\widetilde{u}_\eta = 0$; $\quad \xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = -x - y + z$;
в) $\widetilde{u}_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 8\widetilde{u} = 0$; $\quad \xi = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \quad \eta = -\frac{1}{2}(y + z), \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(y - z)$;
г) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u} = 0$; $\quad \xi = x, \quad \eta = -2x + y, \quad \zeta = -x + z$.

Практичне заняття № 2

Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.

1.1.2. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними

Розглянемо майже лінійне рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \Phi(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{1}$$

Вважатимемо, що Ω – область в $\mathbb{R}^2$, $a,b,c \in C^1(\Omega)$, $|a|+|b|+|c|>0$ на Ω.

Виявляється, що класифікація рівнянь вигляду (1) за типом залежить від значення виразу

$$\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

який називають дискримінантом рівняння (1).

Якщо або $\Delta(x,y) > 0$, або $\Delta(x,y) = 0$, або $\Delta(x,y) < 0$ у всіх точках (x,y) множини $\Omega_0 \subset \Omega$, то рівняння (1) є відповідно *гіперболічним* або *параболічним*, або *еліптичним* на Ω_0.

Виявляється, що для кожного типу рівняння (1) можна знайти таке перетворення незалежних змінних, яке приводить його до канонічного вигляду не тільки в окремо взятій точці області Ω, але і зразу в деякій підобласті Ω_0 області Ω, де рівняння зберігає тип.

Покажемо це. Спочатку зробимо таке загальне зауваження. Нехай (ξ,η) – нові незалежні змінні, які пов'язані з (x,y) співвідношеннями

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega_0,\ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega_0}, \tag{2}$$

де $\xi,\ \eta \in C^2(\Omega_0)$, $\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ на Ω_0.

Виконаємо заміну змінних змінних (2) в рівнянні (1). Маємо

$$u(x,y) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega_0,\ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega_0}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&u_x = \widetilde{u}_\xi\,\xi_x + \widetilde{u}_\eta\,\eta_x,\\
&u_y = \widetilde{u}_\xi\,\xi_y + \widetilde{u}_\eta\,\eta_y,\\
&u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\,(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,(\eta_x)^2 + \widetilde{u}_\xi\,\xi_{xx} + \widetilde{u}_\eta\,\eta_{xx},\\
&u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,\eta_x\eta_y + \widetilde{u}_\xi\,\xi_{xy} + \widetilde{u}_\eta\,\eta_{xy},\\
&u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\,(\xi_y)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,(\eta_y)^2 + \widetilde{u}_\xi\,\xi_{yy} + \widetilde{u}_\eta\,\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u в рівняння (1), отримаємо

$$\widetilde{a}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{c}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta) = 0, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
&\widetilde{a} = a\,(\xi_x)^2 + 2\,b\,\xi_x\,\xi_y + c\,(\xi_y)^2,\\
&\widetilde{b} = a\,\xi_x\,\eta_x + b\,(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + c\,\xi_y\,\eta_y,\\
&\widetilde{c} = a\,(\eta_x)^2 + 2\,b\,\eta_x\,\eta_y + c\,(\eta_y)^2,
\end{aligned}$$

а $\Phi(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta)$ – об'єднання всіх членів, які не містять похідних другого порядку від $\widetilde{u}$.

Виявляється, що можна вибрати заміну змінних (9) залежно від знаку Δ таку, при якій рівняння (3) матиме канонічний вигляд в Ω_0. Для цього розглядаємо рівняння

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0, \tag{4}$$

яке називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (1), а лінію, задану рівнянням

$$\omega(x,y) = C, \tag{5}$$

де C – довільна стала, а $\omega(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_0$, – перший інтеграл рівняння (4), називають *характеристикою* або *характеристичною лінією.*

Тепер вкажемо заміну незалежних змінних в рівнянні (1), при якій воно матиме канонічний вигляд в усій області Ω_0.

1) Нехай рівняння (1) *гіперболічне*, тобто $\Delta(x,y) > 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, і або $a(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, або $c(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$. Якщо $a(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, то рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне рівняння щодо dy" і отримуємо сукупність рівнянь

$$dy = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}\, dx,$$

яка рівносильна рівнянню (4). Цю сукупність можна записати у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} a\,dy - (b + \sqrt{\Delta})dx = 0, \\ a\,dy - (b - \sqrt{\Delta})dx = 0. \end{array}\right.$$

Аналогічно, якщо $c(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, то рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне рівняння відносно dx" і отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} c\,dx - (b + \sqrt{\Delta})dy = 0, \\ c\,dx - (b - \sqrt{\Delta})dy = 0. \end{array}\right.$$

Нехай, для визначеності, $a(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, і маємо першу сукупність рівнянь. Знайдемо перші інтеграли кожного з цих рівнянь:

$$\omega_1(x,y) = C, \quad \omega_2(x,y) = C$$

і зробимо заміну змінних

$$\xi = \omega_1(x,y), \quad \eta = \omega_2(x,y).$$

Тоді в рівнянні (3) маємо $\widetilde{a}(\xi,\eta) = 0$, $\widetilde{c}(\xi,\eta) = 0$, $\widetilde{b}(\xi,\eta) \neq 0$ для всіх $(\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega_0}$. Отже, поділивши рівняння (3) на $\widetilde{b}$, прийдемо до рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0. \tag{6}$$

Додаткова заміна $\xi = \alpha - \beta$, $\eta = \alpha + \beta$ зводить отримане рівняння до рівняння

$$\widehat{u}_{\alpha\alpha} - \widehat{u}_{\beta\beta} + \widehat{\Phi}(\alpha, \beta, \widehat{u}, \widehat{u}_\alpha, \widehat{u}_\beta) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння гіперболічного типу згідно з класифікацією, даною у попередньому пункті. Але у випадку двох незалежних змінних *канонічним виглядом рівняння гіперболічного типу* частіше називають рівняння (6).

2) Нехай рівняння (1) *параболічне*, тобто $\Delta(x,y)=0$, $(x,y)\in\Omega_0$, і або $a(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, або $c(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$. Тоді, якщо $a(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, то розв'язуючи рівняння (4) як "квадратне рівняння відносно dy"отримаємо рівносильне йому рівняння

$$a\,dy-b\,dx=0.$$

Аналогічно, якщо $c(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, то, розв'язуючи рівняння (4) як "квадратне рівняння відносно dx" , отримуємо рівносильне рівнянню (4) рівняння

$$c\,dx-b\,dy=0.$$

Нехай (для визначеності) $a(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, і маємо перше рівняння. Знайдемо перший інтеграл цього рівняння

$$\omega(x,y)=C.$$

Зробимо заміну змінних

$$\xi=\omega(x,y),\quad \eta=\eta(x,y),$$

де η – довільна неперервно диференційовна функція така, що $\begin{vmatrix}\omega_x & \eta_x\\ \omega_y & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$ на Ω_0, тобто функції η і ω є незалежними. Тоді маємо $\widetilde{a}(\xi,\eta)=0$, $\widetilde{b}(\xi,\eta)=0$ і $\widetilde{c}(\xi,\eta)\neq 0$ для всіх $(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_0$. Отже, поділивши рівняння (3) на $\widetilde{c}$, прийдемо до рівняння

$$\widetilde{u}_{\eta\eta}+\widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta)=0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння параболічного типу.

3) Нехай рівняння (1) *еліптичне*, тобто $\Delta(x,y)<0$, $(x,y)\in\Omega_0$. Тоді рівняння (4) рівносильне сукупності комплексно спряжених рівнянь

$$a\,dy-(b\pm i\sqrt{-\Delta})\,dx=0,$$

якщо $a(x,y)\neq 0$ (рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне рівняння щодо $\dot{dy}$"), або

$$c\,dx-(b\pm i\sqrt{-\Delta})\,dy=0,$$

якщо $c(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, (рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне відносно dx").

Нехай, для визначеності, $a(x,y)\neq 0,(x,y)\in\Omega_0$, і маємо першу сукупність рівнянь. Знайдемо їх перші інтеграли:

$$\omega_1(x,y)\pm i\omega_2(x,y)=C$$

(вони є комплексно спряженими). Тоді виберемо заміну змінних

$$\xi=\omega_1(x,y),\quad \eta=\omega_2(x,y)\quad (\text{або}\quad \eta=-\omega_2(x,y)).$$

У результаті в рівнянні (4) матимемо $\widetilde{a}(\xi,\eta)=\widetilde{c}(\xi,\eta)\neq 0$ і $\widetilde{b}(\xi,\eta)=0$ для всіх $(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega_0}$. Отже, поділивши рівняння (3) на $\widetilde{a}(\xi,\eta)=\widetilde{c}(\xi,\eta)$, отримаємо рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}+\widetilde{u}_{\eta\eta}+\widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta)=0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння еліптичного типу.

Висновок. Щоб звести рівняння (1) до канонічного вигляду, потрібно виконати такі операції:

- скласти дискримінант Δ і визначити тип рівняння;
- скласти характеристичне рівняння і знайти його перші інтеграли;
- виконати відповідне перетворення незалежних змінних.

Приклад 1.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + u_x - 2u_y = x \sin y.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант рівняння

$$\Delta = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то дане рівняння є гіперболічним. Запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 + 5\,dx\,dy + 6\,dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння щодо dy" , отримаємо сукупність рівнянь

$$dy = -3\,dx, \qquad dy = -2\,dx.$$

Перші інтеграли цих рівнянь

$$y + 3x = C, \qquad y + 2x = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = y + 3x, \qquad \eta = y + 2x.$$

Оскільки $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, то

$$\begin{aligned}
1| \quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 3 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2, \\
-2| \quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1| \quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 9 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 12 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4, \\
-5| \quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 3 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 5 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 2, \\
6| \quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\widetilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [9 - 15 + 6] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [12 - 25 + 12] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [4 - 10 + 6] + \widetilde{u}_\xi \cdot [3 - 2] + \widetilde{u}_\eta \cdot [2 - 2] = x \sin y.$$

Звідси, врахувавши, що згідно з нашою заміною

$$y = 3\eta - 2\xi, \quad x = \xi - \eta,$$

одержимо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_\xi = (\eta - \xi) \cdot \sin(3\eta - 2\xi)$$

– канонічний вигляд даного рівняння. $\square$

Приклад 2.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2xu_{xy} - 3x^2 u_{yy} + 4xu_x + 12x^2 u_y = 0, \quad x > 0.$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x, y) = x^2 + 3x^2 = 4x^2, \quad x > 0.$$

Звідси, зокрема, випливає, що дане рівняння є гіперболічного типу. Зведемо його до канонічного вигляду. Для цього запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 - 2x\,dxdy - 3x^2 dx^2 = 0.$$

Розв'яжемо його як "квадратне рівняння відносно dy":

$$dy = (x \pm 2x)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy + xdx = 0 \quad \text{або} \quad dy - 3xdx = 0.$$

Знаходимо перші інтеграли отриманих рівнянь:

$$\frac{x^2}{2} + y = C, \quad \frac{3}{2}x^2 - y = C.$$

Отже, заміна змінних має вигляд

$$\xi = \frac{x^2}{2} + y, \quad \eta = \frac{3x^2}{2} - y.$$

Тоді $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, і похідні функції u виражаються через похідні функції $\widetilde{u}$ так:

$$\begin{aligned}
4x \;|\quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot x + \widetilde{u}_\eta \cdot 3x, \\
12x^2 \;|\quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot (-1), \\
1\,|\quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 6x^2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 9x^2 + \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \cdot \widetilde{u}_\eta \cdot 3, \\
2x\,|\quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot x + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2x + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-3x), \\
-3x^2|\quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставляємо вирази похідних в задане рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [x^2 + 2x^2 - 3x^2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [6x^2 + 4x^2 + 6x^2] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [9x^2 - 6x^2 - 3x^2] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot [4x^2 + 12x^2] + \widetilde{u}_\eta \cdot [12x^2 - 12x^2] = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$16x^2\,\widetilde{u}_{\xi\eta} + (16x^2 + 1)\,\widetilde{u}_\xi + 3\,\widetilde{u}_\eta = 0.$$

Звідси, оскільки $2x^2 = \xi + \eta$, маємо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{8(\xi + \eta) + 1}{8(\xi + \eta)}\widetilde{u}_\xi + \frac{3}{8(\xi + \eta)}\widetilde{u}_\eta = 0$$

– рівняння канонічного вигляду.

Приклад 3.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$e^{2y}u_{xx} - 2xe^{y}u_{xy} + x^2u_{yy} - x^2u_y = x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант

$$\Delta = x^2e^{2y} - x^2e^{2y} = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то дане рівняння є параболічним. Запишемо характеристичне рівняння

$$e^{2y}dy^2 + 2xe^{y}dx\,dy + x^2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння щодо dy" , отримаємо рівняння

$$dy = -x \cdot e^{-y}dx \quad \Longleftrightarrow \quad e^{y}dy + x\,dx = 0.$$

Звідси отримаємо перший інтеграл

$$2e^{y} + x^2 = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = 2e^{y} + x^2, \qquad \eta = x.$$

Оскільки $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то маємо

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 2x + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
-\,x^2 & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 2e^{y}, \\
e^{2y} & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 4x + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_\xi, \cdot 2 \\
-\,2xe^{y} & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4xe^{y} + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2e^{y}, \\
x^2 & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4e^{2y} + \widetilde{u}_\xi \cdot 2e^{y}.
\end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\widetilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [4x^2e^{2y} - 8x^2e^{2y} + 4x^2e^{2y}] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [4xe^{2y} - 4xe^{2y}] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [e^{2y}] +$$

$$+\widetilde{u}_\xi \cdot [-2x^2e^{y} + 2e^{2y} + 2x^2e^{y}] + \widetilde{u}_\eta \cdot 0 = 0.$$

Врахувавши, що згідно з нашою заміною $x = \eta$, одержимо

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_\xi = \eta.$$

Це є канонічний вигляд даного рівняння. $\square$

Приклад 4.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + yu_y = 0.$$

Розв'язування. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x, y) = y^2 - y^2 = 0.$$

Отже, дане рівняння має параболічний тип. Запишемо його характеристичне рівняння

$$y^2dy^2 - 2ydxdy + dx^2 = 0 \Leftrightarrow (ydy - dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$ydy - dx = 0.$$

Знаходимо перший інтеграл:

$$\frac{y^2}{2} - x = C$$

і в даному рівняння робимо заміну змінних:

$$\xi = \frac{y^2}{2}, \quad \eta = y,$$

оскільки

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Маємо $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big)$. Виразимо похідні функцій u через похідні функцій $\widetilde{u}$:

$$\begin{aligned}
0 \cdot &\big| u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-1), \\
y \cdot &\big| u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot y + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
y^2 \cdot &\big| u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1)^2, \\
2y \cdot &\big| u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-y) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1), \\
1 \cdot &\big| u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot y^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2y + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_\xi \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо ці вирази у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \big[-2y^2 + y^2 + y^2\big] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \big[-2y + 2y\big] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot \big[1\big] + \widetilde{u}_\xi \cdot \big[y^2 + 1\big] + \widetilde{u}_\eta \cdot \big[y\big] = 0\,.$$

Звідси отримуємо

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + (\eta^2 + 1)\widetilde{u}_\xi + \eta\widetilde{u}_\eta = 0$$

– канонічний вигляд заданого рівняння. □

Приклад 5.

Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2+1)u_{yy} + xu_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{7}$$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x,y) = x^2 - 1 \cdot (x^2+1) = -1.$$

Оскільки $\Delta(x,y) < 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння (7) має еліптичний тип. Запишемо його характеристичне рівняння

$$dy^2 - 2xdxdy + (x^2+1)dx^2 = 0\,.$$

Розв'язуючи його як "квадратичне рівняння відносно dy ", отримаємо

$$dy = (x \pm i)dx,$$

звідки

$$y - \frac{x^2}{2} \mp i\,x = C.$$

Отже, заміну змінних в рівнянні (7) беремо у вигляді

$$\xi = y - \frac{x^2}{2}, \quad \eta = x.$$

Оскільки $u(x,y) = \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то і маємо

$$\begin{aligned}
0| \quad & u_x = \tilde{u}_\xi \cdot (-x) + \tilde{u}_\eta \cdot 1\,,\\
0| \quad & u_y = \tilde{u}_\xi \cdot 1,\\
x| \quad & u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-x^2) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2x) + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \tilde{u}_\eta \cdot (-1)\,,\\
2x| \quad & u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-x) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1\,,\\
(x^2+1)| \quad & u_{yy} = \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1\,.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази похідних у рівняння (7). Отримаємо

$$\tilde{u}_{\xi\xi}[x^2 - 2x^2 + x^2 + 1] + \tilde{u}_{\xi\eta}[-2x + 2x] + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1] + \tilde{u}_\xi \cdot [x-1] + \tilde{u}_\eta \cdot [0] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + (\eta - 1)\tilde{u}_\xi = 0$$

– канонічний вигляд рівняння (7). □

Приклад 6.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант рівняння

$$\Delta = x^2y^2 - 2x^2y^2 = -x^2y^2.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то дане рівняння є еліптичним. Запишемо характеристичне рівняння

$$y^2dy^2 - 2xy\,dx\,dy + 2x^2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його щодо dy, отримаємо сукупність двох комплексно спряжених рівнянь

$$dy = \frac{xy \pm ixy}{y^2}\,dx.$$

Після спрощення отримаємо

$$ydy = xdx \pm ixdx.$$

Перший інтеграл цього рівняння

$$x^2 - y^2 \pm ix^2 = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = x^2, \qquad \eta = x^2 - y^2.$$

Обчислимо похідні

$$\begin{aligned}
0\,|\quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 2x + \widetilde{u}_\eta \cdot 2x,\\
y\,|\quad & u_y = \widetilde{u}_\eta \cdot (-2y),\\
y^2\,|\quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 8x^2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_\xi \cdot 2 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2,\\
2xy\,|\quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-4xy) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-4xy),\\
2x^2\,|\quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + \widetilde{u}_\eta \cdot (-2).
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u у вихідне рівняння і врахувавши, що згідно з нашою заміною $x^2 = \xi$, $y^2 = \xi - \eta$, одержимо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}\,\widetilde{u}_\xi + \frac{1}{2(\eta - \xi)}\,\widetilde{u}_\eta = 0.$$

Це є канонічний вигляд даного рівняння. □

Приклад 7.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант цього рівняння:

$$\Delta(x, y) = x^2 - x(x-1) = x.$$

Звідси випливає, що дане рівняння, залежно від значення x, є таких типів:
1) якщо $x = 0$, тобто $\Delta = 0$, то рівняння параболічного типу,
2) якщо $x > 0$, тобто $\Delta > 0$, то рівняння гіперболічного типу,
3) якщо $x < 0$, тобто $\Delta < 0$, то рівняння еліптичного типу.

Розглянемо кожний випадок окремо. У випадку 1), тобто на множині $\{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$, рівняння має такий канонічний вигляд:

$$u_{yy} = 0.$$

У випадку 2), тобто на множині $\{(x, y) \,|\, x > 0\}$, рівняння характеристик має вигляд

$$xdy^2 - 2xdxdy + (x-1)dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння відносно dy":

$$dy = \frac{x \pm \sqrt{x}}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = (1 - \frac{1}{\sqrt{x}})dx \;\vee\; dy = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx.$$

Знаходимо перші інтеграли

$$y - x - 2\sqrt{x} = C_1, \quad y - x + 2\sqrt{x} = C_2.$$

Отже, в нашому рівнянні треба зробити заміну змінних:

$$\xi = y - x - 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - x + 2\sqrt{x}.$$

Тоді $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$ і

$$\begin{aligned}
0 \;\;|\; u_x &= \widetilde{u}_\xi(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_\eta(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}), \\
0 \;|\; u_y &= \widetilde{u}_\xi 1 + \widetilde{u}_\eta 1, \\
x \;|\; u_{xx} &= \widetilde{u}_{\xi\xi}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}})(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + \\
&+ \frac{1}{2x\sqrt{x}}\widetilde{u}_\xi - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\widetilde{u}_\eta, \\
2x \;|\; u_{xx} &= \widetilde{u}_{\xi\xi}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\xi\eta}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \equiv \\
&\equiv \widetilde{u}_{\xi\xi}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\xi\eta}(-2) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}), \\
(x-1) \;|\; u_{yy} &= \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази в рівняння (2), отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \big[x(1 - \frac{1}{x})^2 + 2x(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + x - 1\big] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \big[x(1 - \frac{1}{x}) + (-2)2x + 2(x-1)\big] +$$

$$+ \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot \big[x(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2x(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + (x-1)1\big] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot \big[x\frac{1}{2x\sqrt{x}}\big] + \widetilde{u}_\eta \cdot \big[x(-\frac{1}{2x\sqrt{x}})\big] = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{u}_\xi \cdot \big[-x - 3\big] + \widetilde{u}_\xi \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \widetilde{u}_\eta \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Оскільки $x = (\frac{\eta-\xi}{2})^2$, то маємо канонічний вигляд нашого рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{2}{\eta-\xi}\frac{16}{(\eta-\xi)^2+8}(\widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta) = 0$$

Розглянемо випадок 3), тобто коли $x < 0$. Тоді характеристичне рівняння можна записати у вигляді сукупності рівнянь

$$dy = \frac{x \pm i\sqrt{-x}}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = \left(1 \pm i\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)dx\,,$$

і отримати такі перші інтеграли:

$$y - x \pm i \cdot 2\sqrt{-x} = C.$$

Отже, для зведення рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x}. \end{cases}$$

Оскільки $u(x, y) = \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, то

$$\begin{aligned}
0\;|&\quad u_x = \tilde{u}_\xi \cdot (-1) + \tilde{u}_\eta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\,,\\
0\;|&\quad u_y = \tilde{u}_\xi \cdot 1\,,\\
x\;|&\quad u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}} + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{-x}}\right)^2 + \tilde{u}_\eta \cdot \frac{1}{2x\sqrt{-x}}\,,\\
2x\;|&\quad u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\,,\\
(x-1)\;|&\quad u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1^2\,.
\end{aligned}$$

Підставимо вирази похідних u через похідні $\tilde{u}$ в рівняння:

$$\tilde{u}_{\xi\xi} \cdot [x - 2x + x - 1] + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \left[2x\frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x\frac{1}{\sqrt{-x}}\right] +$$

$$+\tilde{u}_{\eta\eta}\left[\frac{1}{-x} \cdot x\right] + \tilde{u}_\xi \cdot [0] + \tilde{u}_\eta\left[x\frac{1}{2x\sqrt{-x}}\right] = 0 \Leftrightarrow -\tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\tilde{u}_\eta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta = 0$$

– канонічний вигляд даного рівняння.

1.2. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними

1.2.1. Знаходження загальних розв'язків

Знаходження загального розв'язку довільного рівняння з частинними похідними другого порядку, взагалі кажучи, неможливе. Але в деяких часткових випадках це легко зробити. Наведемо частину цих випадків.

Розглянемо лінійне гіперболічне рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{8}$$

де Ω – область в $\mathbb{R}^2$, і нехай

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,\ (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}, \tag{9}$$

невироджена заміна змінних, при якій дане рівняння набуває канонічного вигляду

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}+\widetilde{a}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}_\xi+\widetilde{b}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}_\eta+\widetilde{c}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}=\widetilde{f}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}. \tag{10}$$

Розглянемо кілька найпростіших випадків виконання однієї з умов а) або б) і знаходження при цьому загального розв'язку вихідного рівняння. При цьому для спрощення викладення, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\widetilde{\Omega}=I\times J$, $I,\ J$ – відповідні числові інтервали, тобто $\widetilde{\Omega}$ – відкритий прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат.

Випадок 1. Нехай в рівнянні (10): $\widetilde{a}_1=0, \quad \widetilde{b}_1=0, \quad \widetilde{c}_1=0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}=\widetilde{f}(\xi,\eta). \tag{11}$$

Знаходження його розв'язку зводиться до інтегрування однієї з систем рівнянь:

$$v_\eta=\widetilde{f}(\xi,\eta), \quad \widetilde{u}_\xi=v \tag{12}$$

або

$$v_\xi=\widetilde{f}(\xi,\eta), \quad \widetilde{u}_\eta=v. \tag{13}$$

Розв'яжемо систему (12). Спочатку знайдемо розв'язок першого рівняння, інтегруючи його по η і при цьому вважаючи ξ параметром. У результаті здобуваємо

$$v(\xi,\eta)=\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\widetilde{f}(\xi,r)\,dr+F_1(\xi),$$

де η_0 – фіксоване число, F_1 – довільна функція. Підставимо отриманий вираз v у друге рівняння системи (13). Проінтегрувавши отримане рівняння по ξ, вважаючи при цьому η параметром, отримаємо загальний розв'язок рівняння (11):

$$\widetilde{u}(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\widetilde{f}(t,r)\,drdt+F(\xi)+G(\eta),$$

де $F(\xi),\ \xi\in I, \quad G(\eta),\ \eta\in J$, – довільні неперервно диференційовні функції (тут F – первісна від F_1).

Отож, загальний розв'язок рівняння (8) в даному випадку має вигляд

$$u(x,y)=\int\limits_{\xi_0}^{\varphi(x,y)}\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)}\widetilde{f}(t,r)\,drdt+F(\varphi(x,y))+G(\psi(x,y)),$$

де F, G – довільні двічі неперервно диференційовні функції, визначені на відповідних числових проміжках.

Випадок 2. Нехай в рівнянні (10): $\widetilde{a} = p(\eta), \quad \widetilde{b}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + p(\eta)\widetilde{u}_\xi = \widetilde{f}(\xi, \eta). \tag{14}$$

Знаходження його розв'язку зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$v_\eta + p(\eta)v = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\xi = v. \tag{15}$$

Спочатку знайдемо розв'язок першого рівняння, тобто рівняння

$$v_\eta + p(\eta)v = \widetilde{f}(\xi, \eta).$$

Його можна трактувати як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку щодо змінної η, вважаючи змінну ξ параметром.

Розв'яжемо його, помноживши попередньо на $e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds}$. Отримаємо

$$e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v_\eta + p(\eta) e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v = e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi, \eta) \quad \Leftrightarrow \quad \big(e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v\big)_\eta = e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi, \eta) \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi, r)\,dr + F_1(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

$$v = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi, r)\,dr + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} F_1(\xi).$$

де η_0 – фіксоване число, F_1 – довільна функція. Підставляючи отриманий вираз $v(\cdot)$ в друге рівняння системи (15) і інтегруючи його по ξ, вважаючи при цьому змінну η параметром, отримаємо загальний розв'язок рівняння (10):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(t, r)\,drdt + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} F(\xi) + G(\eta),$$

де $F(\xi)$, $\xi \in I$, $G(\eta)$, $\eta \in J$, – довільні неперервно диференційовні функції, які визначені на відповідних числових інтервалах (тут F – первісна від F_1).

Звідси здобуваємо загальний розв'язок рівняння (8) у вигляді

$$u(x, y) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} p(s)\,ds} \int\limits_{\xi_0}^{\varphi(x,y)} \int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(q, r)\,drdq + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} p(s)\,ds} F(\varphi(x, y)) + G(\psi(x, y)),$$

де F, G – довільні двічі неперервно диференційовні функції, які визначені на відповідних числових проміжках.

Випадок 3. Нехай в рівнянні (10): $\widetilde{a}_1 = 0, \ \widetilde{b}_1 = q(\xi), \ \widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + q(\xi)\widetilde{u}_\eta = \widetilde{f}(\xi, \eta). \tag{16}$$

Його розв'язування зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$v_\xi + q(\xi)v = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{17}$$

Ця система інтегрується цілком аналогічно, як система (15), із заміною η на ξ.

Приклад 8.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0.$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Обчисливши дискримінант рівняння

$$\Delta = (1-y^2)^2 + y^2 = 1 + 2y^2 + y^4 = (1+y^2)^2,$$

переконуємося (оскільки $\Delta > 0$), що дане рівняння є гіперболічним. Запишемо його рівняння характеристик

$$4y^2dy^2 - 2(1-y^2)dx\,dy - dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як квадратне відносно dy, отримаємо сукупність рівнянь

$$dy = -\frac{1}{2}dx, \quad dy = \frac{1}{2y^2}dx.$$

Перші інтеграли цих рівнянь

$$2y + x = C, \qquad \frac{2}{3}y^3 - x = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = 2y + x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^3 - x.$$

Виразимо похідні функції u через похідні функції $\widetilde{u}$:

$$\begin{array}{r|l}
\dfrac{-4y}{1+y^2} & \ u_x = \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta, \\
\dfrac{2y}{1+y^2} & \ u_y = 2\widetilde{u}\ \ + 2y^2\widetilde{u}_\eta, \\
4y^2 & \ u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} - 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}, \\
2(1-y^2) & \ u_{xy} = 2\widetilde{u}_{\xi\xi} + (-2+2y^2)\widetilde{u}_{\xi\eta} - 2y^2\widetilde{u}_{\eta\eta}, \\
-1 & \ u_{yy} = 4\widetilde{u}_{\xi\xi} + 8y^2\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4y^4\widetilde{u}_{\eta\eta} + 4y\widetilde{u}_\eta.
\end{array}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u у вихідне рівняння, одержимо канонічний вигляд даного рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{18}$$

Інтегруючи рівняння (18) спочатку по ξ, вважаючи при цьому η параметром, а потім – по η, вважаючи при цьому ξ параметром, одержимо

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ – довільні неперервно диференційовні функції.

Звідси, вернувшись до старих змінних, отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$u(x, y) = F(2y + x) + G(2y^3/3 - x),$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції. □

Приклад 9.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - e^{2x})u_{yy} - u_x - u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{19}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Знайдемо дискримінант рівняння:

$$\Delta(x, y) = 1 - 1 + e^{2x} = e^{2x}.$$

Оскільки $\Delta(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння (19) має гіперболічний тип. Запишемо відповідне рівняння характеристик:

$$dy^2 - 2\, dxdy + (1 - e^{2x})dx^2 = 0.$$

Розв'язавши його як "квадратне рівняння відносно dy", отримаємо сукупність двох рівнянь:

$$dy = (1 \pm e^x)\, dx,$$

і знайдемо їх перші інтеграли:

$$y - x - e^x = C, \quad y - x + e^x = C.$$

Отже, рівняння (19) зводиться до канонічного вигляду заміною змінних:

$$\xi = y - x - e^x, \quad \eta = y - x + e^x.$$

Оскільки

$$u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big),$$

то

$$\begin{aligned}
-1\,\big|\, & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-1 - e^x) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-1 + e^x), \\
-1\,\big|\, & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1\,\big|\, & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1 - e^x)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1 - e^x)(-1 + e^x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1 + e^x)^2 + \\
& + \widetilde{u}_\xi \cdot (-e^x) + \widetilde{u}_\eta \cdot e^x, \\
2\,\big|\, & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1 - e^x) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1 - e^x - 1 + e^x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1 + e^x), \\
(1 - e^{2x})\,\big|\, & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази u через похідні $\widetilde{u}$ в задане рівняння. У результаті отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\Big[(-1 - e^x)^2 + 2(-1 - e^x) + 1 - e^{2x}\Big] + \widetilde{u}_{\xi\eta}\Big[2(1 - e^{2x}) + (-4) + 2(1 - e^{2x})\Big] +$$

$$+ \widetilde{u}_{\eta\eta}\Big[(-1 + e^x)^2 + 2(-1 + e^x) + (1 - e^{2x})\Big] + \widetilde{u}_\xi\Big[(-1) \cdot (-1 - e^x) - e^x - 1\Big] +$$

$$+ \widetilde{u}_\eta\Big[(-1) \cdot (-1 + e^x) + e^x - 1\Big] = 0 \Longleftrightarrow -4e^{2x}\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{20}$$

Розв'яжемо рівняння (20), а точніше, знайдемо його загальний розв'язок. Зауважимо, що рівняння (20) рівносильне системі рівнянь

$$v_\xi = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{21}$$

Знайдемо розв'язок першого рівняння, інтегруючи його за змінною η, вважаючи зміну ξ довільною і фіксованою. Тоді

$$v = F_1(\xi), \tag{22}$$

де F_1 – довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо вираз (22) в друге рівняння системи :

$$\widetilde{u}_\xi = f_1(\xi).$$

Інтегруючи це рівняння за змінною ξ, вважаючи змінну η довільно заданою, отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = F(\xi) + G(\eta), \tag{23}$$

де F і G–довільні двічі неперервно диференційовні на осі $\mathbb{R}$ функції (тут F – первісна від F_1), тобто вираз (23) є зображенням загального розв'язку рівняння (20).

Повертаючись до змінних x і y, знайдемо загальний розв'язок рівняння (19):

$$u(x,y) = F(y - x - e^x) + G(y - x + e^x), (x,y) \in G,$$

де F і G–довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Приклад 10.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0. \tag{24}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо рівняння до канонічного вигляду. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x,y) = 4 + 5 = 9 > 0.$$

Отже, рівняння (24) має гіперболічний тип. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0, \tag{25}$$

звідси

$$dy = (2 \pm 3)\, dx \iff dy - 5dy = 0 \quad \text{або} \quad dy + dx = 0.$$

Отже, перший інтеграл рівняння (25) мають вигляд,

$$y - 5x = C_1 \quad \text{або} \quad y + x = C_2,$$

і в рівнянні (24) робимо заміну змінних

$$\xi = y - 5x, \quad \eta = y + x.$$

Врахувавши, що

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big),$$

знаходимо

$$\begin{aligned}
-1 \cdot &\big| u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-5) + \widetilde{u}_\eta \cdot 1,\\
-1 \cdot &\big| u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1,\\
1 \cdot &\big| u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-5)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-5) \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1^2,\\
4 \cdot &\big| u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-5) \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-5 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1^2,\\
-5 \cdot &\big| u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1^2.
\end{aligned}$$

Підставивши ці вирази у рівняння (24) одержимо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot[15-5\cdot 4-5]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot[-10-16-10]+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot[1+4-5]+$$
$$+\widetilde{u}_{\xi}[-5-1]+\widetilde{u}_{\eta}[1-1]=0 \Longleftrightarrow -36\widetilde{u}_{\xi\eta}-6\widetilde{u}_{\xi}=0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\widetilde{u}_{\xi\eta}+\frac{1}{6}\widetilde{u}_{\eta}=0. \tag{26}$$

Рівняння (26) рівносильне системі рівнянь

$$v_{\xi}+\frac{1}{6}v=0, \quad \widetilde{u}_{\eta}=v. \tag{27}$$

Спочатку розв'яжемо перше рівняння системи (27). Для цього помноживши його на $e^{\xi/6}$ і перепишемо у вигляді

$$\left(ve^{\xi/6}\right)_{\xi}=0.$$

Звідси інтегруючи за змінною ξ, вважаючи змінну η довільною і фіксованою, знаходимо

$$ve^{\xi/6}=G_1(\eta),$$

де G_1–довільна неперервно диференційовна функція.

Отже, маємо

$$v(\xi,\eta)=G_1(\eta)\cdot e^{-\xi/6}.$$

Підставляючи цей вираз в друге рівняння системи (27), одержимо

$$\widetilde{u}_{\eta}=G_1(\eta)\cdot e^{-\xi/6},$$

Звідси маємо загальний роз'язок рівняння (26):

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}=F(\xi)+G(\eta)e^{-\xi/6},$$

де F і G–довільні двічі неперервно диференційовні функції. Вертаючись до змінних x і y, знаходимо

$$u(x,y)=F(y-5x)+G(y+x)\,e^{(-y+5x)/6}$$

– загальний розв'язок заданого рівняння.

1.2.2. Знаходження розв'язків задачі Коші

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо задачу Коші для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{28}$$

з початковими умовами або вигляду

$$u\Big|_{y=\mu_1(x)}=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu_1(x)}=\psi(x), \tag{29}$$

або вигляду

$$u\Big|_{x=\mu_2(y)}=\varphi(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\mu_2(y)}=\psi(y). \tag{30}$$

Вважатимемо, що для рівняння (28) виконуються такі ж умови, як у пункті , тобто умови, які гарантують можливість знаходження загального розв'язку рівняння (28). Тоді, знайшовши загальний розв'язок рівняння (28), який містить дві довільні функції, підставимо його вираз у початкові умови ((29) чи (30)) і визначимо ці функції. Такий метод знаходження розв'язку задачі Коші називається *методом характеристик*. Продемонструємо його на конкретному прикладі.

Приклад 11.

Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{xx} + 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} + \cos x\, u_y = -4. \tag{31}$$

$$u\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 1 + 2\sin x, \quad u_y\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 2 - 2x. \tag{32}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Знайшовши дискримінант рівняння

$$\Delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

переконуємося (оскільки $\Delta > 0$), що дане рівняння є гіперболічним. Запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 - 2\sin x\, dx\, dy - \cos^2 x\, dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його щодо dy, отримаємо сукупність двох рівнянь

$$dy = (\sin x + 1)dx, \qquad dy = (\sin x - 1)dx.$$

Загальні інтеграли цих рівнянь

$$y + \cos x - x = C_1, \qquad y + \cos x + x = C_2.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду слід зробити заміну

$$\xi = y + \cos x - x, \qquad \eta = y + \cos x + x.$$

Виразимо похідні функції u через похідні функції $\widetilde{u}$:

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-\sin x - 1) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\sin x + 1), \\
\cos x & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1 & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (\sin^2 x + 2\sin x + 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (2\sin^2 x - 2) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (\sin^2 x - 2\sin x + 1) + \\
 & + \widetilde{u}_\xi \cdot (-\cos x) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\cos x), \\
2\sin x & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-\sin x - 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2\sin x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-\sin x + 1), \\
-\cos^2 x & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\tilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\tilde{u}_{\xi\xi}\cdot[\sin^2 x + 2\sin x + 1 + 2\sin x(-\sin x - 1) - \cos^2 x] + \tilde{u}_{\xi\eta}\cdot[2\sin^2 x - 2 + 2\sin x(-2\sin x) - 2\cos^2 x] +$$

$$+\tilde{u}_{\eta\eta}\cdot[\sin^2 x - 2\sin x + 1 + 2\sin x(-\sin x + 1) - \cos^2 x] + \tilde{u}_\xi\cdot[\cos x - \cos x] + \tilde{u}_\eta\cdot[\cos x - \cos x] = -4.$$

Після відповідних спрощень одержимо рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 1. \tag{33}$$

Інтегруючи це рівняння спочатку по ξ, вважаючи при цьому η параметром, а потім – по η, вважаючи при цьому ξ параметром, одержимо загальний розв'язок рівняння (33):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \eta\xi + F(\xi) + G(\eta),$$

де F і G – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Повернувшись до змінних x та y, здобуваємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x,y) = (y+\cos x - x)(y+\cos x + x) + F(y+\cos x - x) + G(y+\cos x + x), \tag{34}$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Знайдемо частинну похідну

$$u_y(x,y) = (y+\cos x - x) + (y+\cos x + x) + F'(y+\cos x - x) + G'(y+\cos x + x).$$

Підставимо отримані вирази u, u_y в початкові умови:

$$u\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = (x+1)(3x+1) + F(x+1) + G(3x+1) = 1 + 2\sin x, \tag{35}$$

$$u_y\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 4x+2 + F'(x+1) + G'(3x+1) = 2 - 2x. \tag{36}$$

Продиференціюємо рівність (36) по x:

$$6x + 4 + F'(x+1) + 3G'(3x+1) = 2\cos x. \tag{37}$$

Віднявши від рівності (37) рівність (36), отримаємо

$$G'(3x+1) = \cos x - 2. \tag{38}$$

Зробимо в (38) заміну змінних $z = 3x+1$, тобто $x = \frac{z-1}{3}$. Тоді $G'(z) = \cos\frac{z-1}{3} - 2$. Звідси $G(z) = 3\sin\frac{z-1}{3} - 2z + C$, де C – довільна стала. Тоді з (35) матимемо

$$F(x+1) = 1 + 2\sin x - (x+1)(3x+1) - 3\sin x + 2(3x+1) - C,$$

тобто $F(x+1) = -3x^2 + 2x + 2 - \sin x - C$. Зробимо заміну змінних $x+1 = s$, звідки $x = s-1$ і

$$F(s) = -3(s-1)^2 + 2(s-1) + 2 - \sin(s-1).$$

Отже, розв'язок вихідної задачі Коші визначений формулою

$$u(x,y) = (y+\cos x - x)(y+\cos x + x) - 3(y+\cos x - x - 1)^2 + 2(y+\cos x - x - 1) +$$

$$+2 - \sin(y+\cos x - x - 1) + 3\sin\frac{y+\cos x + x - 1}{3} - 2(y+\cos x + x).$$

$\square$

Приклад 12.

Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - u_y = 0 \tag{39}$$

з початковими умовами

$$u|_{y=x+1} = e^{5x+2}, \quad u_y|_{y=x+1} = 2e^{5x+2}. \tag{40}$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного рівняння. Для цього зводимо наше рівняння до канонічного вигляду. Знаходимо дискримінант рівняння.

$$\Delta(x,y) = \Big(-\frac{3}{2}\Big)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0.$$

Звідси, зокрема, отримуємо висновок, що дане рівняння є гіперболічного типу. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 + 3dxdy + 2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння відносно dy" , знаходимо

$$dy = \Big(-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Big)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad dy + dx = 0 \quad \text{або} \quad dy + 2dx = 0.$$

Знаходимо перші інтеграли

$$x + y = C, \quad 2x + y = C.$$

Отже, в нашому рівнянні треба зробити заміну змінних

$$\xi = x + y, \quad \eta = 2x + y.$$

Тоді

$$u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

і маємо

$$\begin{aligned}
1\,| \quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2, \\
-1\,| \quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1\,| \quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + 2 \cdot \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4, \\
-3\,| \quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 3 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4, \\
2\,| \quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в наше рівняння.

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1-3+2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [4-9+4] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [4-6+2] + \widetilde{u}_\xi \cdot [1-1] + \widetilde{u}_\eta \cdot [2-1] = 0 \Leftrightarrow -\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_\eta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_\eta = 0 \tag{41}$$

– рівняння канонічного вигляду.

Рівняння (41) є еквівалентним системі рівнянь

$$v_\xi - v = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{42}$$

Розв'яжемо перше рівняння. Для цього помножимо його на $e^{-\xi}$ і перетворимо так:

$$(ve^{-\xi})_\xi = 0.$$

Звідси отримаємо

$$ve^{-\xi} = G_1(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad v = e^\xi G_1(\eta),$$

де G_1 – довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо вираз v в друге рівняння системи (42):

$$\widetilde{u}_\eta = e^\xi G_1(\eta).$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо загальний розв'язок рівняння (41):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + e^\xi G(\eta),$$

де F і G – довільні неперервно диференційовні функції (G – первісна від G_1).

Повертаючись до змінних x і y , отримаємо загальний розв'язок даного рівняння:

$$u(x,y) = F(x,y) + e^{x+y}G(2x+y), \tag{43}$$

де F, G – довільні неперервно диференційовані на $\mathbb{R}$ функції.

Підставимо вираз загального розв'язку (43) в початкові умови (40), але спочатку обчислимо похідну знайденого розв'язку

$$u_y(x,y) = F'(x+y) + e^{x+y}G(2x+y) + e^{x+y}G'(2x+y).$$

Тоді з початкових (40) умов маємо

$$u|_{y=x+1} = F(2x+1) + e^{2x+1}G(3x+1) = e^{5x+2} + 1, \tag{44}$$

$$u|_{y=x+1} = F'(2x+1) + e^{2x+1}G(3x+1) + e^{2x+1}G'(2x+1) = 2e^{5x+2}. \tag{45}$$

Знайдемо функції F, G. Для цього продиференціюємо рівність (44):

$$2F'(2x+1) + 2e^{2x+1}G(3x+1) + 3e^{2x+1}G'(3x+1) = 5e^{5x+2}. \tag{46}$$

Помножимо рівність (45) на 2 і віднімемо отриману рівність від рівності (46):

$$e^{2x+1}G'(3x+1) = e^{5x+2} \Longleftrightarrow G'(3x+1) = e^{3x+1}. \tag{47}$$

Зробимо в (47) заміну змінних

$$p = 3x+1.$$

Тоді $G'(p) = e^p$, звідки маємо

$$G(p) = e^p + C, \quad C - \text{довільна стала.} \tag{48}$$

З рівності (44), врахувавши (48), знаходимо

$$F(2x+1) = e^{5x+2} + 1 - e^{2x+1}(e^{3x+1} + C) \equiv 1 - Ce^{2x+1}.$$

Зробимо тут заміну змінних

$$q = 2x+1.$$

Тоді

$$F(q) = 1 - Ce^q, \tag{49}$$

де C – та ж сама довільна стала, що в (48).

З виразу загального розв'язку (43) і (48) та (49) маємо

$$u(x,y) = 1 - Ce^{x+y} + e^{x+y}(e^{2x+y} + C) \equiv e^{3x+2y} + 1$$

розв'язок нашої задачі.

Приклад 13.

Розв'язати задачу Коші :

$$u_{xx} + u_{xy} + yu_x = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{50}$$

$$u|_{y=2x} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=2x} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{51}$$

де $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння (9), а для цього зведемо його до канонічного вигляду. Обчислимо дискримінант рівняння (9) :

$$\Delta(x,y) = \frac{1}{4} > 0.$$

Отже, рівняння (50) має гіперболічний тип. Запишемо для нього рівняння характеристик:

$$dy^2 - dxdy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (dy - dx)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy = 0 \quad \text{або} \quad dy - dx = 0.$$

Знайдемо перші інтеграли цих рівнянь :

$$y = C, \quad y - x = C.$$

Отже, для зведення рівняння (50) до канонічного вигляду потрібно зробити в ньому заміну змінних:

$$\xi = y, \quad \eta = y - x. \tag{52}$$

Враховуючи, що $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, знаходимо:

$$\begin{aligned}
y \mid & \ u_x = \widetilde{u}_\eta \cdot (-1), \\
0 \mid & \ u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1 \mid & \ u_{xx} = \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1)^2, \\
1 \mid & \ u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1), \\
0 \mid & \ u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази в рівняння (50):

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1 \cdot 0] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [1 \cdot (-1)] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)] + (-y) \cdot \widetilde{u}_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow -\widetilde{u}_{\xi\eta} - \xi\widetilde{u}_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \xi\widetilde{u}_\eta = 0. \tag{53}$$

Рівняння (53) рівносильне системі рівнянь:

$$v_\xi + \xi v = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{54}$$

Розв'яжемо перше з рівнянь системи (54):

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi \ \text{ або } \ v = 0.$$

Маємо

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \ln|v|}{\partial \xi} = -\xi \Leftrightarrow \ln|v| = -\xi^2/2 + \ln|G_1(\eta)| \Leftrightarrow$$

$$v(\xi,\eta) = G_1(\eta)e^{-\xi^2/2},$$

де G_1 – довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо отриманий вираз у друге рівняння системи (54):

$$\widetilde{u}_\eta = G_1(\eta)e^{-\xi^2/2}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок рівняння (53):

$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)e^{-\xi^2/2},$$

де F і G – довільні двічі неперервно-диференційовні функції. Повернемося до змінних x і y (див.(53)) :

$$u(x,y) = F(y) + G(y-x)e^{-y^2/2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{55}$$

– загальний розв'язок рівняння (50).

Підставимо знайдений вираз загального розв'язку в умови (51), але спочатку знайдемо похідну :

$$u_y(x,y) = F'(y) + G'(y-x)\cdot e^{-y^2/2} - G(y-x)\cdot y \cdot e^{-y^2/2}.$$

Тоді з умов (51) маємо

$$u|_{y=2x} = F(2x) + G(x)e^{-2x^2} = \varphi(x), \tag{56}$$

$$u_y|_{y=2x} = F'(2x) + G'(x)e^{-2x^2} - 2xG(x)e^{-2x^2} = \psi(x). \tag{57}$$

Для знаходження F і G продиференціюємо рівність (55):

$$2F'(2x) + G'(x)e^{-2x^2} - 4xG(x)e^{-2x^2} = \varphi'(x), \tag{58}$$

Помножимо рівність (56) на 2 і від отриманої рівності віднімемо рівність (57):

$$G'(x)e^{-2x^2} = 2\psi(x) - \varphi'(x),$$

Звідси

$$G'(x) = [2\psi(x) - \varphi'(x)]e^{2x^2}.$$

Отже, маємо

$$G(x) = \int_0^x [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C. \tag{59}$$

Тоді з (59) на підставі (58) маємо

$$F(2x) = \varphi(x) - \left(\int_0^x [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-2x^2}.$$

Зробивши заміну змінних $2x = s \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{s}{2}$, отримаємо :

$$F(s) = \varphi\left(\frac{s}{2}\right) - \left(\int_0^{\frac{s}{2}} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-s^2/2}. \tag{60}$$

Отже, з (55) на підставі (59), (60) отримуємо розв'язок задачі (50), (51):

$$u(x,y) = \varphi(y/2) - \left(\int_0^{\frac{y}{2}} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-y^2/2} +$$

$$+\left(\int_0^{y-x} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-\frac{y^2}{2}} \equiv \varphi(y/2) + \int_{y/2}^{y-x} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння (випадок двох незалежних змінних):

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0;$
б) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0;$
в) $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0;$
г) $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0;$
д) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0;$
е) $u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0.$

2. Знайти загальні розв'язки таких рівнянь:

а) $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0;$
б) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0;$
в) $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x.$

3. Знайти розв'язки таких задач Коші:
а) $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0,$
$u\big|_{y=0} = \sin x, \qquad u_y\big|_{y=0} = 1;$
б) $u_{xx} - 2u_{xy} = -4e^y,$
$u\big|_{x=0} = e^y, \qquad u_x\big|_{x=0} = y;$
в) $u_{xx} + 2\cos x\, u_{xy} - \sin^2 x\, u_{yy} - \sin x\, u_y = 0,$
$u\big|_{y=\sin x} = x + \cos x, \qquad u_y\big|_{y=\sin x} = \sin x;$
г) $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0,$
$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \qquad u_y\big|_{y=0} = \psi(x);$
д) $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0,$
$u\big|_{y=\cos x} = 0, \qquad u_y\big|_{y=\cos x} = e^{-x/2}\cos x.$
е) $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0; \qquad u|_{y=x} = 3x + 2, \quad u_y|_{y=x} = x + 1.$

Відповіді:

2. а) еліптичне всюди, $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} - 8\widetilde{u} = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2x;$
б) параболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\eta} + 18\widetilde{u}_\xi + 9\widetilde{u}_\eta - 9\widetilde{u} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x;$
в) гіперболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\xi} + 3\widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta + 2\widetilde{u} = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2y - x;$
г) еліптичне всюди, $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = y, \quad \eta = \operatorname{arctg} x;$
д) параболічне всюди, крім початку координат (у початку координат рівняння вироджується)

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} - \frac{\xi}{2\eta(\xi + \eta)}\widetilde{u}_\xi + \frac{1}{2\eta}\widetilde{u}_\xi = 0, \qquad \xi = y^2 - x^2, \quad \eta = x^2;$$

е) гіперболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\xi} = 0, \quad \xi = x + \operatorname{arctg} y, \quad \eta = x - \operatorname{arctg} y.$

1. а) заміна $\xi = x + y$, $\eta = 3x + 2y$ зводить до рівняння $\widetilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, інтегруючи яке, знаходимо $u(x, y) = F(x + y) + G(3x + 2y)$, де F, G – довільні двічі неперервно-диференційовні функції;
б) $u(x, y) = F(y - x) + e^{(x-y)/2}G(y - 2x);$
в) $u(x, y) = 2e^x + e^{(x+2y)/2}F(x) + G(x + 2y).$

3. а) $u(x, y) = \sin(x - \frac{2}{3}y^3) + y + \frac{1}{3}y^3$; в нових змінних $\xi = x - \frac{2}{3}y^3$, $\eta = x + 2y$ вихідне рівняння набуває вигляду $\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0$, інтегруючи яке і використовуючи початкові умови, приходимо

до відповіді.
б) $u(x,y) = (2+2x-e^{2x})e^y + x^2 + xy$; використовується заміна змінних $\xi = y$, $\eta = y+2x$.
в) $u(x,y) = x+\cos(x-y+\sin x)$; використати заміну змінних $\xi = y-x-\sin x, \eta = y+x-\sin x$.
г) $u(x,y) = \frac{3}{2}e^{-y}\varphi(x+y) - \frac{1}{2}\varphi(x+3y) + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+3y)}\int\limits_{x+y}^{x+3y} e^{z/2}[3\varphi(z)+2\psi(z)]dz$; спочатку за допомогою заміни змінних $\xi = x+3y, \eta = y+x$ звести вихідне рівняння до канонічного вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{2}\tilde{u}_\eta = 0$, інтегруючи яке, можна отримати його загальний розв'язок.
д) $u(x,y) = 2e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)}\cos x \sin\frac{1}{2}(y-\cos x)$; за допомогою заміни змінних $\xi = 2x-y+\cos x, \eta = 2x+y-\cos x$ вихідне рівняння задачі звести до канонічного вигляду $\widetilde{u}_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\widetilde{u}_\eta = 0$, загальний розв'язок якого має вигляд $\widetilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + e^{-\xi/4}G(\eta)$, де F і G – довільні двічі неперервно диференційовні функції; повертаючись до старих змінних, отримати загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x,y) = F(2x-y+\cos x) + e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)}G(2x+y-\cos x);$$

далі, використовуючи початкові умови, визначити вигляд функцій F і G.

Практичне заняття № 3
Задача Коші для рівняння коливань

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів n-ок $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, T – довільне додатне число або $+\infty$. Позначимо

$$Q := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant T\} = \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad \overline{Q} := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T\} = \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Розглянемо рівняння

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x,t) \;\Leftrightarrow\; u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

де $a > 0$, f – задані, відповідно, стала і неперервна функція, u – невідома функція і

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ – } \textbf{\textit{лапласіан}}, \quad \Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Зауважимо, що коли $n = 1$, то рівняння (1) є рівнянням поперечних коливань струни, коли $n = 2$ – рівнянням поперечних коливань мембрани, а коли $n = 3$ – рівнянням поширення звукових хвиль. Тому рівняння (1) називаємо *рівнянням коливань*.

Задача Коші для рівняння коливань (1): знайти функцію $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, яка поточково задовольняє рівняння (1) в Q і початкові умови

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де φ, ψ – задані неперервні функції.

Далі цю задачу коротко будемо називати задачею (1), (2).

Нагадаємо, що належність функції u до простору $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ означає, що функція u є двічі неперервно диференційовною по $x_1, ..., x_n$ і t в Q та неперервною на $\overline{Q}$ разом з похідними $u_t, u_{x_1}, ..., u_{x_n}$. Крім того, відмітимо, що через $C^{1,0}(\overline{Q})$ позначають простір, складений з функцій $f(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, які є неперервними на $\overline{Q}$ разом з похідними f_{x_i}, $i = \overline{1,n}$, а через $C^{2,0}(\overline{Q})$ – підпростір простору $C^{1,0}(\overline{Q})$, складений з тих функцій $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, для яких $f_{x_i x_j} \in C(\overline{Q})$, $i,j = \overline{1,n}$.

Розглянемо існування розв'язку задачі (1), (2) у випадках $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1), (2)

1) у випадку $n = 3$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$ і виражається формулою Кірхгофа

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} \varphi(y)\, dS_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} \psi(y)\, dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\, dS_y\,, \quad (x,t) \in Q; \tag{3}$$

2) у випадку $n = 2$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Пуассона

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\leqslant at}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2-|y-x|^2}}\,dy\right) + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\leqslant at}\frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2-|y-x|^2}}\,dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(a(t-\tau))^2-|y-x|^2}}\,dy\,,\quad (x,t)\in Q\,; \tag{4}$$

3) у випадку $n = 1$ існує при умові, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,,\quad (x,t)\in Q. \tag{5}$$

Тут прийнято такі позначення. У формулі (3) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки простору $\mathbb{R}^3$, $|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$ – відстань між точками y і x в $\mathbb{R}^3$, а інтеграл береться по сфері $\{y \,|\, |y-x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, dS_y – елемент площі цієї сфери. У формулі (4) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – точки площини $\mathbb{R}^2$, $|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$ – відстань між точками y і x, а інтеграл береться по кругу $\{y \,|\, |y-x| \leqslant at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, $dy = dy_1dy_2$ – елемент площі круга. У формулі (5) x і y є точки прямої $\mathbb{R}$, а інтеграл береться по відрізку $[x-at, x+at]$.

Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння коливань

Приклад 1. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x,\quad u_t\big|_{t=0} = x^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (5) маємо

$$u(x,t) = \frac{(x+at)+(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y^2\,dy.$$

Обчислимо

$$\frac{(x+at)+(x-at)}{2} = x,$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y^2\,dy = \frac{1}{2a}\frac{y^3}{3}\Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{2a}\frac{(x+at)^3-(x-at)^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{2at((x+at)^2+(x^2-a^2t^2)+(x-at)^2)}{3} = \frac{(3x^2+a^2t^2)t}{3}. \tag{6}$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = x + \frac{(3x^2+a^2t^2)t}{3},\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

□

Приклад 2. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (4) маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|y-x| \leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \, dy_1 dy_2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty). \tag{7}$$

Для обчислення інтегралу використаємо узагальнену полярну систему координат:

$$y_1 = x_1 + atr\cos\alpha, \; y_2 = x_2 + atr\sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \; 0 < r \le 1.$$

Легко переконатися, що $dy_1 dy_2 = a^2 t^2 r \, d\alpha dr$. Отож, маємо

$$J(x,t) := \iint\limits_{|y-x| \leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \, dy_1 dy_2 =$$

$$= a^2 t^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr\cos\alpha)(x_2 + atr\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2 - (atr\cos\alpha)^2 - (atr\sin\alpha)^2}} r \, d\alpha dr =$$

$$= a^2 t^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr\cos\alpha)(x_2 + atr\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2 (1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) r^2)}} r \, d\alpha dr =$$

$$= at \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \, dr \int_0^{2\pi} (x_1 x_2 + atr(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) + a^2 t^2 r^2 \cos\alpha \sin\alpha) \, d\alpha.$$

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha \, d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{\pi} \sin 2\alpha \, d\alpha = 0$, отримаємо

$$J(x,t) = \iint\limits_{|y-x| \leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \, dy_1 dy_2 = at \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \, dr \int_0^{2\pi} x_1 x_2 \, d\alpha =$$

$$= -2\pi at x_1 x_2 \sqrt{1 - r^2}\Big|_0^1 = 2\pi at x_1 x_2.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} J(x,t) = \frac{1}{2\pi a} 2\pi at x_1 x_2 = t x_1 x_2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

□

Приклад 3. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x_1 x_2 x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (3) маємо

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at} y_1y_2y_3\,dS_y\Big), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty). \tag{8}$$

Для обчислення інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = at\}$ на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at\sin\theta\cos\alpha,\ y_2 = x_2 + at\sin\theta\sin\alpha,\ y_3 = x_3 + at\cos\theta, \qquad 0\leqslant\alpha<2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2t^2\sin\theta\,d\theta d\alpha$. Отож, маємо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1y_2y_3\,dS_y = a^2t^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(x_1+at\cos\alpha\sin\theta)(x_2+at\sin\theta\sin\alpha)(x_3+at\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\big(x_1x_2x_3 + at(x_2x_3\cos\alpha\sin\theta + x_1x_3\sin\theta\sin\alpha + x_1x_2\cos\theta)+$$
$$+a^2t^2(x_1\sin\theta\sin\alpha\cos\theta + x_2\cos\alpha\sin\theta\cos\theta + x_3\cos\alpha\sin^2\theta\sin\alpha)+$$
$$+a^3t^3\cos\alpha\sin^2\theta\sin\alpha\cos\theta\big)\sin\theta\,d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_1x_2x_3\sin\theta\,d\theta + a^3t^3\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_2x_3\sin^2\theta\,d\theta+$$

$$+a^3t^3\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_1x_3\sin^2\theta\,d\theta + a^3t^3\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_1x_2\cos\theta\sin\theta\,d\theta+$$

$$+a^4t^4\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_1\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta + a^4t^4\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_2\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta+$$

$$+a^4t^4\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha\int\limits_0^{\pi}x_3\sin^3\theta\,d\theta + a^5t^5\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha\cos\alpha d\alpha\int\limits_0^{\pi}\cos\theta\sin^3\theta\,d\theta.$$

Врахувавши, що $\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{\pi}\sin 2\theta\,d\theta = 0$, отримаємо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1y_2y_3\,dS_y = 4\pi a^2t^2x_1x_2x_3.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2t}4\pi a^2t^2x_1x_2x_3\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(tx_1x_2x_3\Big) = x_1x_2x_3, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,+\infty).$$

□

Приклад 4. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 3t^2, \quad (x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = x_1, \quad u_t\Big|_{t=0} = x_2 + 2x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Розв'язок шукаємо за формулою (3)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} y_1\, dS_y\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3)\, dS_y +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y. \tag{9}$$

Для обчислення перших двох інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом at на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at \sin\theta \cos\alpha, \; y_2 = x_2 + at \sin\theta \sin\alpha, \; y_3 = x_3 + at\cos\theta, \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2 t^2 \sin\theta\, d\theta d\alpha$. Отож, знаходимо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1\, dS_y = a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (x_1 + at\cos\alpha \sin\theta) \sin\theta\, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1 \sin\theta\, d\theta + a^3 t^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha \sin\theta\, d\theta = 4\pi a^2 t^2 x_1;$$

$$\int\limits_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3) dS_y = a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (x_2 + at\cos\alpha \sin\theta + 2x_3 + 2at\cos\theta) \sin\theta\, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2 t^2 (x_2 + 2x_3) \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta + a^3 t^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha\, d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta +$$

$$+ a^3 t^3 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta\, d\theta = 4\pi a^2 t^2 (x_2 + 2x_3);$$

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y = \int\limits_0^t \frac{3\tau^2 d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^t 3\tau^2 (t-\tau)\, d\tau = 4\pi a^2 (t^4 - \frac{3}{4} t^4) = 4\pi a^2 \cdot \frac{1}{4} t^4 = \pi a^2 t^4.$$

Тут ми врахували, що інтеграл $\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y$ виражає площу сфери радіуса $a(t-\tau)$ і дорівнює $4\pi a^2 (t-\tau)^2$. Відмітимо, що в загальному випадку для обчислення інтеграла

$\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dS_y$ можна використати параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = a(t-\tau)\}$ (з центром x і радіусом at) вигляду

$$y_1 = x_1 + a(t-\tau)\sin\theta\cos\alpha,\ \ y_2 = x_2 + a(t-\tau)\sin\theta\sin\alpha,\ \ y_3 = x_3 + a(t-\tau)\cos\theta,$$

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 4\pi a^2 t^2 x_1\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 4\pi a^2 t^2 (x_2 + 2x_3) + \frac{1}{4\pi a^2}\cdot \pi a^2 t^4 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\big(tx_1\big) + t(x_2 + 2x_3) + \frac{1}{4}t^4 = x_1 + (x_2 + 2x_3)t + \frac{1}{4}t^4, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty).$$

□

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти розв'язки таких задач Коші

а) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

б) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = ax_1 + bt, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_2 x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

в) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 2x_1 x_3 t, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1 + x_2 x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

г) $u_{tt} - \sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = (x_1 + x_2)t, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x_1 + x_2, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

д) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = x_3 t^2 + 1, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 + x_2 + 7, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

е) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = x^3 t^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = 4, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R};$

є) $u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = x_1 x_3 t^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = 4x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x_3, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. Розв'язками яких задач є функції

$$а)\ u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} (3y_1 + y_2 + 2y_3) dS_y \ ?$$

$$б)\ u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} (y_1 + y_2 - y_3) dS_y \Big) \ ?$$

$$в)\ u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} (y_1^2 + y_2 - 2y_3) \cos\tau \, dS_y \ , \ ?$$

Потрібно сформулювати задачі і переконатися, що ці функції є їх розв'язками.

Відповіді:

1. а) $u = x_1^2 + x_2^2 + t + 2t^2$;
б) $u = x_2 x_3 + (x_1 x_2 + x_3)t + axt^2/2 + bt^3/6$.

Практичне заняття № 4
Задача Коші для рівняння теплопровідності

Нехай n – довільне натуральне число, T – будь-яке додатне число або $+\infty$,

$$Q := \{(x,t)\,|\,x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, 0<t\leqslant T\} \equiv \mathbb{R}^n\times(0,T] - \quad \text{напіввідкритий шар},$$
$$\overline{Q} := \{(x,t)\,|\,x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, 0\leqslant t\leqslant T\} \equiv \mathbb{R}^n\times[0,T] - \quad \text{замикання } Q.$$

Припустимо, що
$$f\in C(Q), \qquad \varphi\in C_b(\mathbb{R}^n)$$
– довільні функції.

Задача Коші для рівняння *теплопровідності*
$$u_t - a^2\Delta u = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$
полягає у знаходженні функції $u\in C^{2,1}(Q)\cap C_b(\overline{Q})$ (тобто u – функція, яка двічі неперервно диференційовна за змінними $x_1,\dots,x_n$ і неперервно диференційовна за змінною t в Q та неперервна і обмежена на $\overline{Q}$), яка задовольняє поточково це рівняння і початкову умову
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$
Функцію u називають *класичним розв'язком* задачі (1), (2).

Нагадаємо, що тут використано позначення
$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \text{де}\ \ \Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad - \text{лапласіан}.$$

Зауважимо, що коли $f = 0$, то рівняння (1) називають однорідним, а якщо $f \neq 0$, то – неоднорідним.

Теорема 1. *Якщо φ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^n$ функція, а f – неперервна і обмежена разом зі своїми похідними за змінними $x_1, \ldots, x_n$ до другого порядку включно на $\overline{Q}$, то існує обмежений класичний розв'язок задачі* (1), (2) *і він виражається формулою*

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} \int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\, dy, \qquad (3)$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$, $t \in (0,T]$.

Формулу (3) називають *формулою Пуассона.*

Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності

Приклад 1. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 u_{xx} = 2t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \tag{4}$$

$$u\Big|_{t=0} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Розв'язування. В нашому випадку $n = 1$ і тому розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \sin y \, dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} (2s) \, dy, \tag{6}$$

$(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Для обчислення першого інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y = x + 2a\sqrt{t} z \quad \Rightarrow \quad dy = 2a\sqrt{t} \, dz \, .$$

Тоді

$$v(x,t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin(x + 2a\sqrt{t} z) \, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin x \, \cos(2a\sqrt{t} z) \, dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos x \, \sin(2a\sqrt{t} z) \, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos(2a\sqrt{t} z) \, dz +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\sin(2a\sqrt{t}z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\cos(2a\sqrt{t}z)\,dz.$$

Тут враховано те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\sin(2a\sqrt{t}z)\,dz = 0.$$

Тепер використаємо відому формулу

$$J(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\beta\xi\,d\xi = \sqrt{\pi}e^{-\beta^2/4}. \tag{7}$$

Отже, одержуємо

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sin x\cdot J(2a\sqrt{t}) = e^{-a^2t}\sin x. \tag{8}$$

Знайдемо другий інтеграл в правій частині формули (6):

$$w(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}(2s)\,dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{2s\,ds}{\sqrt{t-s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}\,dy. \tag{9}$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл, зробивши заміну змінних

$$y = x + 2a\sqrt{t-s}\,z \quad \Rightarrow \quad dy = 2a\sqrt{t-s}\,dz$$

і використавши рівність (див. (7)):

$$J(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi}. \tag{10}$$

У результаті отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}\, dy = 2a\sqrt{t-s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = 2a\sqrt{\pi}\sqrt{t-s}.$$

Підставимо отриманий вираз у (9):

$$w(x,t) := \int\limits_{0}^{t} 2s\, ds = t^2. \tag{11}$$

З (8) і (11) одержимо розв'язок вихідної задачі:

$$u(x,t) \equiv v(x,t) + w(x,t) = e^{-a^2 t}\sin x + t^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 2. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty), \tag{12}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1 \sin x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{13}$$

Розв'язування. В даному випадку $n = 2$ і розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2 t}} y_1 \sin y_2 \, dy_1 dy_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty). \quad (14)$$

Для обчислення інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t} z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\, dz_k, \quad k = 1, 2\,.$$

Тоді, врахувавши (10), отримаємо

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2-z_2^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\sin(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_1dz_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\sin(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\sqrt{\pi}x_1+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}z_1\,dz_1\Big)\Big(\sin x_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\,\cos(2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2+$$

$$+\cos x_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\,\sin(2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big).$$

Тепер врахуємо те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}z_1\,dz_1=0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\sin(2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2=0,$$

та використаємо формулу (7). У результаті отримаємо

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi}x_1\sin x_2\cdot J(2a\sqrt{t})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x_1\sin x_2\cdot\sqrt{\pi}e^{-a^2t}=e^{-a^2t}x_1\sin x_2, \qquad (15)$$

$(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,+\infty)$. $\square$

Приклад 3. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2\Delta u = x_1 e^{-t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty), \tag{16}$$
$$u\Big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Розв'язування. Розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}} y_1y_2\,dy_1dy_2+$$

$$+\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}}(y_1e^{-s})\,dy_1dy_2, \tag{18}$$

$x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0,+\infty)$.

Для обчислення першого інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t}z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\,dz_k,\ k = \overline{1,2}\,.$$

Тоді

$$v(x_1,x_2,t) := \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}} y_1y_2\,dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2-z_2^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_1dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi}x_1+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}z_1\,dz_1)(\sqrt{\pi}x_2+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}z_2\,dz_2) = x_1x_2. \tag{19}$$

Тут враховано рівність (10) і те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}z\,dz = 0. \tag{20}$$

Знайдемо другий інтеграл в правій частині формули (18):

$$w(x_1,x_2,t) := \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{0}^{t}\frac{ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}}(y_1e^{-s})\,dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_0^t \frac{e^{-s}\, ds}{(t-s)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} y_1\, dy_1 dy_2. \tag{21}$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл, зробивши заміну змінних

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t-s}\, z_k, \quad k = 1, 2,$$

і використавши рівності (10) і (20):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} y_1\, dy_1 dy_2 =$$

$$= 4a^2(t-s) \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} (x_1 + 2a\sqrt{t-s}\, z_1)\, dz_1 \Big) \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\, dz_2 \Big) =$$

$$= 4a^2(t-s) x_1 (\sqrt{\pi})^2 = 4a^2\pi(t-s)x_1.$$

Підставимо отриманий вираз у (21):

$$w(x_1, x_2, t) = x_1 \int\limits_0^t e^{-s}\, ds = x_1(1 - e^{-t}). \tag{22}$$

З (19) і (22) одержимо розв'язок вихідної задачі

$$u(x_1, x_2, t) \equiv v(x_1, x_2, t) + w(x_1, x_2, t) = x_1 x_2 + x_1(1 - e^{-t}), \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

$\square$

Приклад 4. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty), \tag{23}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1 + \cos x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

Розв'язування. Розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2 t}} (y_1 + \cos y_2)\, dy_1 dy_2, \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty). \tag{25}$$

Для обчислення інтеграла зробимо в ньому заміну змінних

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t} z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\, dz_k, \quad k = 1, 2\,.$$

Тоді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2 - z_2^2} \left[x_1 + 2a\sqrt{t} z_1 + \cos(x_2 + 2a\sqrt{t} z_2)\right] dz_1 dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}\, dz_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2} \left[x_1 + 2a\sqrt{t} z_1 + \cos x_2 \cos(2a\sqrt{t} z_2) - \sin x_2 \sin(2a\sqrt{t} z_2)\right] dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} \left[\sqrt{\pi}(x_1 + 2a\sqrt{t} z_1) + \cos x_2 \cdot \sqrt{\pi} e^{-a^2 t}\right] dz_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi x_1 + \pi e^{-a^2 t}\cos x_2) = x_1 + e^{-a^2 t}\cos x_2.$$

Тут ми врахували те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} z_1\, dz_1 = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2} \sin(2a\sqrt{t} z_2)\, dz_2 = 0,$$

та використали формулу (7). Отже,

$$u(x_1, x_2, t) = x_1 + e^{-a^2 t}\cos x_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

$\square$

Вправи для самостійної роботи

Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $u_t - a^2 \Delta u = 3t^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$,
$u\big|_{t=0} = \sin 2x_1 \sin 3x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2$;
2. $u_t - a^2 u_{xx} = e^t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$,
$u\big|_{t=0} = x, \quad x \in \mathbb{R}$;
3. $u_t - a^2 \Delta u = e^{-t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$,
$u\big|_{t=0} = x_1 \sin x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2$;
4. $u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$,
$u\big|_{t=0} = \sin x_1 + \cos x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2$;
5. $u_t - a^2 \Delta u = x_1 x_2 e^{-t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$,

$u\big|_{t=0} = \cos x_1 \cos 2x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$

Відповіді:

1. $u(x_1, x_2, t) = e^{-13a^2t} \sin 2x_1 \sin 3x_2 + t^3.$
2. $u(x, t) = x_1 + (e^t - 1).$
3. $u(x_1, x_2, t) = e^{-a^2t} x_1 \sin x_2 + (1 - e^{-t}).$
4. $u(x_1, x_2, t) = e^{-a^2t}(\sin x_1 + \cos x_2).$
5. $u(x_1, x_2, t) = e^{-5a^2t} \cos x_1 \cos 2x_2 + x_1 x_2 (1 - e^{-t}).$

Варіант № 1

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+2u_{zz}+u_z=0\,.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$y^2u_{xx}-x^2u_{yy}+6u_x=0,\;\; x>0, y>0\,.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0,\quad u\big|_{y=0}=x,\quad u_y\big|_{y=0}=0\,.$$
4. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливання
$$u_{tt}-4\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=2x_1x_2,\quad u_t\big|_{t=0}=x_1+5x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-9u_{xx}=xe^t,\;\; (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=2x-1,\quad x\in\mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-16\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=2x_2t+x_1,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=x_2\sin 3x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 2

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 5u_{zz} + u_z = 0 .$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} + 6u_x = 0, \;\; x > 0, y > 0 .$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4, \quad u\big|_{x=0} = -y, \quad u_x\big|_{x=0} = y - 1 .$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливання

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = x_1^2 + 2x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = -x_1 + 2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 4u_{xx} = e^t, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = -1 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 8\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 3x_2 t + x_1, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \cos x_2 \sin 3x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 3

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$9u_{xx}+6u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+u_{zz}+u_z=0\,.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$4u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}+4u_x=0,\ \ x>0, y>0\,.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx}-u_{yy}+\frac{1}{2}u_x=0,\quad u\big|_{y=0}=x,\quad u_y\big|_{x=0}=0,\ \ x>0\,.$$
4. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливань
$$u_{tt}-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=x_1^2-2x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0}=-x_1+2x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-9u_{xx}=e^{3t},\ \ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=-4+4x,\quad x\in\mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=-3x_1+x_1t,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=\cos x_2\cos 3x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 4

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 2u_{zz} + u_y = 0.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - x^2 e^{-2y} u_{yy} + x u_x = 0, \ \ x > 0, y > 0.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$x u_{xy} - y u_{yy} - u_y = 2x^3, \quad u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_x\big|_{y=x} = \cos x, \ \ x > 0.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 25\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = x_1^2 + 2x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = -4x_1 + x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 16u_{xx} = 3t^2, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 2x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = x_2 t + 4x_1, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x_2 \cos 2x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 5

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$25u_{xx}+10u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+17u_{zz}+4u_y=0.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx}-4x^2u_{yy}+8u_x=0,\ \ x>0, y>0.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$xu_{xx}+(x-y)u_{xy}-yu_{yy}=0,\quad u\big|_{y=1/x}=x^3,\quad u_x\big|_{y=1/x}=2x^2,\ \ x\neq -y.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt}-9\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=5x_1^2+x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0}=5x_1-2x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-25u_{xx}=e^{5t},\ \ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=-1+5x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-16\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=5x_2+5x_2t,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=\cos 5x_2\cos x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 6

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$6u_{xx} + 2\sqrt{6}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} + u_z = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$e^{-2x}u_{xx} + e^{-2y}u_{yy} + 6u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad u\big|_{y=1/x} = x^3, \quad u_x\big|_{y=1/x} = 2x^2,\;\; x \neq -y\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 25\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0,\;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 6x_1x_2,\quad u_t\big|_{t=0} = 6x_1 + 3x_2,\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 16u_{xx} = 3xt^2,\;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 5x + 6,\;\; x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = x_2t + 4x_1,\;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x_2 \cos 2x_1,\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 7

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$3u_{xx} + 2\sqrt{3}\, u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 6u_{zz} + u_y = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} + e^{-2y} u_{yy} + 4u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0, \quad u\big|_{x=1} = y, \quad u_x\big|_{x=1} = y,\; y < 0\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 25\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 7x_1 x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = 7x_1 + 3x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 64u_{xx} = e^{7t}, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = -8x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 7tx_1 + x_2, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x_1 \sin 7x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 8

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$5u_{xx} - 2\sqrt{5}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} + u_x = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + x^2 e^{-2y} u_{yy} + x u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \frac{1}{x} u_x = 0, \quad u\big|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x\big|_{x=1} = 4\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 8x_1^2 + x_2^2, \;\; u_t\big|_{t=0} = -3x_1 + 5x_2, \;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9u_{xx} = xe^{-8t}, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 5x + 8, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 64\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 8x_2 t - 4x_1, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x_2 \cos 8x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 9

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+u_{zz}+2u_x-5u_y=0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx}+6xyu_{xy}+9x^2u_{yy}+6u_x=0,\;\; x>0,\, y>0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$xu_{xy}-yu_{yy}-u_y=2x^3,\quad u\big|_{y=x}=-\sin x,\quad u_x\big|_{y=x}=2\cos x,\;\; x>0\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt}-9\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=x_1^2+9x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0}=-3x_2+5x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-25u_{xx}=xe^{9t},\;\; (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=9x-1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-9\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=9x_1t-4x_2,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=\cos 9x_2\cos x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 10

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 4u_{yz} + 5u_{zz} + 2u_y - 3u_z = 0 .$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$e^{-2x}u_{xx} + 2e^{-x-y}u_{xy} + e^{-2y}u_{yy} + 2u_x = 0, \ \ x > 0, y > 0 .$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 4x, \quad u_y\Big|_{x=0} = 1, \ \ x > 0 .$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 10x_1x_2, \quad u_t\Big|_{t=0} = -3x_1 + 5x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - u_{xx} = e^{-10t}, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 10 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 49\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 10x_2t + x_1, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = \sin 10x_2 \cos x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 11

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+6u_{xy}+8u_{yy}+4u_{yz}-4u_{zz}+2u_x+3u_y=0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$9u_{xx}+e^{-2x}u_{yy}+3u_x=0,\;\; x>0, y>0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx}-u_{yy}-2u_x-2u_y=4,\quad u\big|_{x=0}=2y,\quad u_x\big|_{x=0}=2y-1\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt}-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\;(x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=x_1x_2,\quad u_t\big|_{t=0}=6x_1+5x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-16u_{xx}=3xt^2,\;\;(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=2x-11,\quad x\in\mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-9\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=x_2t+4x_1,\;\;(x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=\sin 11x_2\sin 2x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 12

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} - 12u_{xy} + 8u_{yy} + 6u_{yz} - 9u_{zz} + u_y = 0 .$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$(1+x^2)^2 u_{xx} - e^{-2y} u_{yy} + u_y = 0, \ \ x > 0, y > 0 .$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad u\big|_{y=0} = 2x, \quad u_y\big|_{y=0} = 1 .$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 64\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 6x_1x_2, \ \ u_t\big|_{t=0} = 5x_1 + 7x_2, \ \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 8u_{xx} = e^{7t}, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = -12x + 1, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 7t\,x_1 + x_2, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin 12x_1 \sin x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 13

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$25u_{xx}+10u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+17u_{zz}+4u_y=0\,.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}+6u_x=0,\;\; x>0, y>0\,.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx}+(x-y)u_{xy}-yu_{yy}=0,\quad u\big|_{y=1/x}=x^3,\quad u_x\big|_{y=1/x}=2x^2..$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt}-4\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\;(x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=8x_1^2+x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0}=-3x_1+10x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-9u_{xx}=xe^{-13t},\;\;(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=3x-1,\quad x\in\mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-49\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=5x_2t-13x_1,\;\;(x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=\sin 4x_2\cos 9x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 14

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$6u_{xx} + 2\sqrt{6}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} + u_z = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$e^{-2x}u_{xx} + e^{-2y}u_{yy} + 6u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$xu_{xx} + (x - y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad u\big|_{y=1/x} = x^3, \quad u_x\big|_{y=1/x} = 2x^2, x \neq -y\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 6x_1^2 + 9x_2^2, \;\; u_t\big|_{t=0} = 6x_2 + 5x_1, \;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 25u_{xx} = e^{9t}, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 4x - 9, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 9x_1t - 4x_2, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \cos 9x_2 \cos 5x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 15

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$3u_{xx}+2\sqrt{3}\,u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+6u_{zz}+3u_y=0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx}+e^{-2y}u_{yy}+4u_x=0,\;\; x>0, y>0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0,\quad u\big|_{x=1}=y,\quad u_x\big|_{x=1}=y,\; y<0\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt}-4\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=10x_1x_2,\quad u_t\big|_{t=0}=-3x_1+5x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-u_{xx}=e^{-15t},\;\; (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=15-3x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-10\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=x_2t+15x_1,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=\sin 10x_2\cos 5x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 16

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$5u_{xx} - 2\sqrt{5}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} + 2u_x = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + x^2 e^{-2y} u_{yy} + x u_x = 0,\ \ x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \frac{1}{x} u_x = 0, \quad u\big|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x\big|_{x=1} = 4\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 2x_1 x_2, \ \ u_t\big|_{t=0} = x_1 + 5x_2, \ \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9u_{xx} = xe^t, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 2x - 16, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 16\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 2x_2 t + x_1, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = x_2 \sin 16x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 17

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 2u_{zz} + 3u_z = 0\,.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} + 6u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0\,.$$
4. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливання
$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0,\;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x_1^2 + 7x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = -x_1 + 2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 4u_{xx} = xe^{16t},\;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = -7 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 8\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 3x_2 t + x_1,\;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = \cos 7x_2 \sin 3x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 18

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+5u_{zz}+4u_z=0.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}+6u_x=0,\ \ x>0, y>0.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$u_{xx}-u_{yy}-2u_x-2u_y=4,\quad u\big|_{x=0}=-y,\quad u_x\big|_{x=0}=y-1.$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt}-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=x_1^2-8x_2^2,\ \ u_t\big|_{t=0}=-3x_1+4x_2,\ \ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-9u_{xx}=e^{3t},\ \ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=-1+8x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=-3x_1+x_1t,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=\cos 18x_2\cos 3x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 19

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$9u_{xx}+6u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+u_{zz}-4u_z=0\,.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$4u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}+4u_x=0,\;\; x>0, y>0\,.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx}-u_{yy}+\frac{1}{2}u_x=0,\quad u\big|_{y=0}=x,\quad u_y\big|_{x=0}=0,\;\; x>0\,.$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt}-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=x_1^2+9x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0}=-4x_1+x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-16u_{xx}=3t^2,\;\; (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=2x-4,\quad x\in\mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t-9\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=x_2t+4x_1,\;\; (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0}=\sin 19x_2\cos 2x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 20

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$4u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 2u_{zz} - 3u_y = 0 .$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx} - x^2 e^{-2y} u_{yy} + xu_x = 0, \ \ x > 0, y > 0 .$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3, \quad u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_x\big|_{y=x} = \cos x, \ \ x > 0 .$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt} - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 10x_1^2 + 2x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 5x_1 - 2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 25u_{xx} = x e^{20t}, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = -4 + 5x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 16\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 10x_2 + 2x_2 t, \ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = \cos 5x_2 \cos 20x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 21

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$5u_{xx} - 2\sqrt{5}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} + 4u_x = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + x^2 e^{-2y} u_{yy} + x u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \frac{1}{x} u_x = 0, \quad u\big|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x\big|_{x=1} = 4\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i, x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 2x_1 x_2, \;\; u_t\big|_{t=0} = 16x_1 + 5x_2, \;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9u_{xx} = xe^t, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 2x - 1, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 16\sum_{i=1}^{2} u_{x_i, x_i} = 2x_2 t + x_1, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = x_2 \sin 3x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 22

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 4u_{yz} + 5u_{zz} + 2u_y - 3u_z = 0 .$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$e^{-2x}u_{xx} + 2e^{-x-y}u_{xy} + e^{-2y}u_{yy} + 2u_x = 0, \;\; x > 0, y > 0 .$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad u\big|_{y=0} = 4x, \quad u_y\Big|_{x=0} = 1, \;\; x > 0 .$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 11x_1x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = 12x_1 + 9x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - u_{xx} = e^{-10t}, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 11 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 10\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 10x_2t + x_1, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = \sin 11x_2 \cos 2x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 23

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+6u_{xy}+8u_{yy}+4u_{yz}-4u_{zz}+5u_x-2u_y=0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$9u_{xx}+e^{-2x}u_{yy}+3u_x=0,\;\; x>0, y>0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx}-u_{yy}-2u_x-2u_y=4,\quad u\big|_{x=0}=2y,\quad u_x\big|_{x=0}=2y-1\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt}-25\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\;\;(x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=2x_1x_2,\quad u_t\big|_{t=0}=2x_1-3x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-16u_{xx}=3xt^2,\;\;(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=2x+3,\quad x\in\mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-9\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=x_2t+4x_1,\;\;(x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=\sin 3x_2\sin 2x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 24

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} - 12u_{xy} + 8u_{yy} + 6u_{yz} - 9u_{zz} + 2u_y + 4u_z = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$(1+x^2)^2 u_{xx} - e^{-2y} u_{yy} + u_y = 0, \;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad u\big|_{y=0} = 2x, \quad u_y\big|_{y=0} = 1\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 25\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 8x_1x_2, \;\; u_t\big|_{t=0} = 2x_1 + 4x_2, \;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 64u_{xx} = xe^{7t}, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = -2x + 4, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 7tx_1 + x_2, \;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin 2x_1 \sin 4x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 25

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$25u_{xx}+10u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+17u_{zz}-4u_y-5u=0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}+6u_x=0,\ \ x>0, y>0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$xu_{xx}+(x+y)u_{xy}+yu_{yy}=0,\quad u\big|_{y=1/x}=x^3,\quad u_x\big|_{y=1/x}=2x^2,\ \ x>0\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt}-4\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=0,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=8x_1^2+x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0}=-3x_1+5x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-9u_{xx}=xe^{-25t},\ \ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=2x+5,\quad x\in\mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t-8\sum_{i=1}^{2}u_{x_i,x_i}=8x_2t-4x_1,\ \ (x,t)=(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0}=\sin 2x_2\cos 5x_1,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Варіант № 26

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$6u_{xx} + 2\sqrt{6}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} + 4u_x - 5u_y = 0\,.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$e^{-2x}u_{xx} + e^{-2y}u_{yy} + 6u_x = 0,\ \ x > 0, y > 0\,.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0,\quad u\big|_{y=1/x} = x^3,\quad u_x\big|_{y=1/x} = 2x^2,\ \ x > 0\,.$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt} - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0,\ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x_1^2 + 9x_2^2,\quad u_t\big|_{t=0} = -3x_2 + 5x_1,\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 25u_{xx} = x\,e^{9t},\ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 6x - 2,\quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 9x_1 t - 4x_2,\ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = \cos 6x_2 \cos 2x_1,\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 27

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$3u_{xx} + 2\sqrt{3}\,u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 6u_{zz} - 2u_x + u_y = 0\,.$$

2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} + e^{-2y}u_{yy} + 4u_x = 0,\;\; x > 0, y > 0\,.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0, \quad u\big|_{x=1} = y, \quad u_x\big|_{x=1} = y,\; y < 0\,.$$

4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань

$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0,\;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 7x_1x_2,\;\; u_t\big|_{t=0} = -x_1 + 8x_2,\;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - u_{xx} = x e^{-2t},\;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = 2 - 7x,\;\; x \in \mathbb{R}.$$

6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - 9\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = x_2 t + 3x_1,\;\; (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

$$u\big|_{t=0} = \sin 2x_2 \cos 7x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Варіант № 28

1. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 4u_{yz} + 5u_{zz} - u_x + 2u_y - 3u_z = 0.$$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння
$$e^{-2x}u_{xx} + 2e^{-x-y}u_{xy} + e^{-2y}u_{yy} + 2u_x = 0,\ \ x > 0, y > 0.$$
3. Розв'язати задачу Коші
$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad u\big|_{y=0} = 4x, \quad u_y\Big|_{x=0} = 1,\ \ x > 0.$$
4. Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань
$$u_{tt} - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = 0,\ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 10x_1x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = -3x_1 + 5x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - u_{xx} = e^{28t},\ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 8 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності
$$u_t - 4\sum_{i=1}^{2} u_{x_i,x_i} = -2x_2t + x_1,\ \ (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = \sin 8x_2 \cos 2x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Практичне заняття № 6

Задачі на знаходження власних значень і власних елементів диференціальних операторів та розвинення функцій в ряди Фур'є

Нехай H — сепарабельний дійсний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|$.

Прикладом простору H є простір Лебега $L_2(\Omega)$, складений з класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $v:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_{\Omega}|v(x)|^2\,dx<\infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} v(x)w(x)\,dx, \quad v,w\in L_2(\Omega),$$

де Ω — область в просторі $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. Зокрема, якщо $n=1$ і $\Omega=(0,l)$, де $l>0$ — довільне число, то $L_2(0,l)$ — дійсний гільбертів простір, складений з класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $v:(0,l)\to\mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_0^l |v(x)|^2\,dx<\infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_0^l v(x)w(x)\,dx, \quad v,w\in L_2(0,l),$$

тобто $L^2(0,l):=L^2(\Omega)$, де $\Omega=(0,l)$.

Нехай задано лінійний оператор

$$A: D(A)\to H,$$

тобто відображення A з H в H таке, що його область визначення $D(A)$ є лінійним підпростором лінійного простору H і для будь-яких $v_1,v_2\in D(A)$ та $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ маємо

$$A(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 Av_1+\alpha_2 Av_2.$$

Далі всюди вважаємо, що $D(A)$ — щільна в H множина.

Означення 1. *Оператор $A: D(A)\to H$ називають* ***замкненим****, якщо з того, що $v_k \underset{k\to\infty}{\to} v$ і $Av_k \underset{k\to\infty}{\to} w$ в H, де $\{v_k\}$ — послідовність елементів з $D(A)$, випливає, що $v\in D(A)$ і $w=Av$.*

Зауваження 1. *Якщо лінійний оператор $\widetilde{A}: D(\widetilde{A})\to H$ зі щільною в H областю визначення $D(\widetilde{A})$ не є замкненим, то в деяких випадках можна розширити його до замкненого. Необхідною і достатньою умовою реалізації цієї можливості є наявність в оператора $\widetilde{A}$ такої властивості:*

- *для будь-яких послідовностей $\{v_k^{(1)}\},\{v_k^{(2)}\}\subset D(A)$ таких, що*

$$v_k^{(1)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v,\quad v_k^{(2)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v \quad \text{і}\quad \widetilde{A}v_k^{(1)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}w^{(1)},\quad \widetilde{A}v_k^{(2)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}w^{(2)} \quad \text{в}\quad H,$$

правильна рівність

$$w^{(1)}=w^{(2)}.$$

Тоді можна побудувати замкнений лінійний оператор $A: D(A)\to H$ такий, що

$$D(\widetilde{A})\subset D(A)\quad \text{і}\quad Av=\widetilde{A}v\quad \forall v\in D(\widetilde{A}),$$

причому для будь-якого $v \in D(A)$ існує послідовність $\{v_k\} \subset D(\widetilde{A})$ така , що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad і \quad Av_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Av \quad в \quad H.$$

Це робиться шляхом приєднання до множини $D(\widetilde{A})$ тих елементів $v \in H$, для яких існують елемент $w \in H$ і послідовність $\{v_k\}$ елементів з $D(\widetilde{A})$ такі, що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\to} v \quad і \quad Av_k \underset{k\to\infty}{\to} w \quad в\ H,$$

і покладанням

$$Av := w.$$

$\square$

Нагадаємо, що $H^2(0,l)$ — простір Соболєва, складений з неперервно диференційовних функцій $v : [0,l] \to \mathbb{R}$ таких, що функція v' є абсолютно неперервною на $[0,l]$ і її похідна v'' (яка існує майже всюди на $(0,l)$) є елементом простору $L_2(0,l)$. Простір $H^2(0,l)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H^2(0,l)} := \int_0^l [vw + v'w' + v''w'']\,dx.$$

Твердження 1. *Припустимо, що $l > 0$ — довільне дійсне число, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ — які-небудь дійсні числа такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, і розглядаємо оператор*

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to L_2(0,l),$$

визначений за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \big\{ v \in C^2([0,l]) \ \big| \ \ \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \ \ \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(l) = 0 \big\} \subset L_2(0,l),$$

$$\widetilde{A}v := -v'' \quad \forall v \in D(\widetilde{A}).$$

Тоді розширенням цього оператора до замкненого є оператор

$$A : D(A) \to L_2(0,l)$$

такий, що

$$D(A) := \big\{ v \in H^2(0,l) \,\big|\ \ \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(l) = 0 \big\}, \tag{1}$$

$$Av := -v'' \quad \forall v \in D(A). \tag{2}$$

Означення 2. ***Спряженим*** *до оператора A називають оператор $A^\star : D(A^\star) \to H$, область визначення $D(A^\star)$ якого складається з тих елементів $w \in H$, для яких існує елемент $w^\star \in H$ такий, що*

$$(Av, w) = (v, w^\star) \quad \forall v \in D(A), \tag{3}$$

і

$$A^\star w = w^\star.$$

Очевидно, що оператор $A^\star$ є лінійним і

$$(Av, w) = (v, A^\star w) \quad \forall v \in D(A),\ \forall w \in D(A^\star).$$

Означення 3. *Оператор A, для якого*

$$D(A) \subset D(A^\star) \quad i \quad Av = A^\star v \quad \forall v \in D(A),$$

тобто правильна тотожність

$$(Av, w) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in D(A), \tag{4}$$

називають ***симетричним****.*

Означення 4. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають* **самоспряженим**, *якщо $A = A^\star$, тобто*

$$D(A) = D(A^\star) \quad i \quad Av = A^\star v \ \ \forall v \in D(A).$$

Теорема 1. *Оператор $A : D(A) \to H$ є самоспряженим тоді і лише тоді, коли він є симетричним і з того, що для $w \in H$ існує $w^\star \in H$, при якому виконується тотожність* (3)*, випливає включення $w \in D(A)$.*

Твердження 2. *Оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$, який визначений у формулюванні твердження 1, є самоспряженим.*

Доведення. Отже, нехай $v, w \in D(A)$ — довільні. Маємо

$$(Av, w) = \int_0^l (-v''(x))w(x)\ dx = -v'(x)w(x)\Big|_0^l + \int_0^l v'(x)w'(x)\ dx =$$

$$= -v'(l)w(l) + v'(0)w(0) + v(x)w'(x)\Big|_0^l + \int_0^l v(x)(-w''(x))\, dx =$$

$$= -v'(l)w(l) + v'(0)w(0) + v(l)w'(l) - v(0)w'(0) + (v, Aw). \tag{5}$$

Нехай $\alpha_0\beta_0 = 0$. Це означає, що або $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_0 = 0$ і $\alpha_0 \neq 0$. У випадку $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$ маємо $v(0) = w(0) = 0$ і тоді

$$v'(0)w(0) - v(0)w'(0) = 0. \tag{6}$$

Якщо $\beta_0 = 0$ і $\alpha_0 \neq 0$, то $v'(0) = v'(l) = 0$, і тоді знову маємо (6). Коли ж $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ (тобто $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 \neq 0$), то $v'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v(0)$ і $w'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}w(0)$, а отже правильна рівність (6).

Аналогічно аналізуємо всеможливі випадки значень α_1 та β_1 і отримуємо рівність

$$v'(l)w(l) - v(l)w'(l) = 0. \tag{7}$$

З (5) на підставі (6) і (7) маємо

$$(Aw, v) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in D(A),$$

тобто оператор А є симетричним.

Залишається показати, що коли для деяких $w, w^* \in L_2(0, l)$ маємо

$$(Av, w) = (v, w^*) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^l (-v''(x))w(x)\, dx = \int_0^l v(x)w^*(x)\, dx \ \ \forall v \in D(A),$$

то $w \in D(A)$ і $w^* = Aw$, тобто $w^* = -w''$. Це легко доводиться, виходячи із означення узагальненої похідної другого порядку. □

Означення 5. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають невід'ємним, якщо*

$$(Av, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(A). \tag{8}$$

Якщо ж

$$(Av, v) > 0 \quad \forall v \in D(A),\ v \neq 0, \tag{9}$$

то його називають додатним.

Твердження 3. *Оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$, який визначений у формулюванні твердження 1, у випадку $\alpha_0\beta_0 \leq 0$ і $\alpha_1\beta_1 \geq 0$ є невід'ємним, причому коли $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$ (це означає, що або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$), то він є додатним, а коли $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то суттєво невід'ємним.*

Доведення. Отже, нехай $v \in D(A)$ — довільне. Тоді маємо

$$(Av, v) = \int_0^l (-v''(x))\, v(x)dx = -v'(x)v(x)\big|_0^l + \int_0^l |v'(x)|^2 dx =$$

$$= -v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int_0^l |v'(x)|^2 dx. \tag{10}$$

Нехай $\alpha_0\beta_0 = 0$, тобто або $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, або $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Якщо $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, то $v(0) = 0$, а отже, $v'(0)v(0) = 0$. Така ж рівність буде і коли $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Коли $\alpha_0\beta_0 < 0$, то $v'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v(0)$, а отже, $v'(0)v(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}|v(0)|^2 \geq 0$, бо $\frac{\beta_0}{\alpha_0} < 0$.

Аналогічно розглядаючи різні випадки значень α_1 і β_1, приходимо до висновку, що $-v'(l)v(l) \geq 0$, якщо $\alpha_1\beta_1 \geq 0$. Тоді з (10) маємо, що $(Av, v) \geq 0$.

Якщо $(Av, v) = 0$, то з (10) маємо, що $v'(x) = 0\ \forall x \in [0, l]$, $v'(0)v(0) = 0$ і $v'(l)v(l) = 0$. Очевидно, що $v(x) = C$, $x \in [0, l]$, де C — стала, і при $\beta_0 \neq 0$ або $\beta_1 \neq 0$ маємо $C = 0$, а при $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$ отримаємо, що C —- довільна стала. Це означає те, що нам було потрібно показати. □

Означення 6. *Кажуть, що число $\lambda \in \mathbb{R}$ є власним значенням оператора $A : D(A) \to H$, якщо існує ненульовий елемент $w \in D(A)$, такий, що*

$$Aw = \lambda w, \tag{11}$$

Елемент w називають ***власним елементом*** *оператора A, відповідний власному значенню λ.*

Легко переконатися, що множина $V(\lambda^*)$, складена з власних елементів оператора A, відповідних власному значенню λ^*, разом з нульовим елементом, є лінійним підпростором у просторі $D(A)$. Цей підпростір називають власним підпростором, відповідним власному значенню Розмірність підпростору $V(\lambda^*)$ або, іншими словами, максимальна кількість лінійно незалежних власних елементів оператора A, відповідних власному значенню λ^*, називають **кратністю власного значення** λ^*. Кратність власного значення може бути як скінченою так і нескінченною.

Теорема 2. *Якщо оператор $A : D(A) \to H$ є самоспряженим, то будь-які два власні елементи цього оператора, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними. Крім того, якщо оператор A ще і невід'ємний (відповідно, додатний), то його власні значення є невід'ємними (відповідно, додатними).*

Означення 7. *Оператор $B : H \to H$ називають компактним, якщо для будь-якої обмеженої послідовності $\{v_k\} \subset H$ (тобто $v_k \in H$ і $\|v_k\| \le C$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, де $C > 0$ — стала, яка від k не залежить) послідовність $\{Bv_k\}$ містить збіжну в H підпослідовність.*

Твердження 4. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $K(\cdot,\cdot) : [0,l] \times [0,l] \to \mathbb{R}$ — задана неперервна функція. Тоді оператор $B : L_2(0,l) \to L_2(0,l)$, визначений за правилом:*

$$\big(Bv\big)(x) = \int\limits_0^l K(x,y)v(y)\,dy, \quad x \in [0,l], \tag{12}$$

є компактним.

Твердження 5. *Нехай $A : D(A) \to L_2(0,l)$ — оператор, який визначений у формулюванні твердження 1, і $\alpha_0\beta_0 \le 0$ та $\alpha_1\beta_1 \ge 0$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ оператор $(cI{+}A)^{-1}$, який називають резольвентою оператора A, є визначеним на всьому просторі $L_2(0,l)$ і компактним.*

Доведення. Отже, нехай $c > 0$ — довільна фіксована стала. Спочатку доведемо, що для довільного елемента $w \in L_2(0,l)$ існує тільки один елемент $v \in H^2(0,l)$ такий, що

$$-v''(x) + cv(x) = w(x), \quad x \in (0,l), \tag{13}$$

$$\alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0. \tag{14}$$

Як випливає з теорії крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку функція v, яка задовольняє (13), (14) може існувати і бути єдиною тоді і лише тоді, коли функція $v(x)$, $x \in [0,l]$, що задовольняє рівність

$$-v''(x) + cv(x) = 0, \quad x \in (0,l), \tag{15}$$

і крайові умови (14), може бути лише нульовою. Покажемо, що при $c > 0$ це так. Припустимо, що маємо функцію v, яка задовольняє (15), (14). Помножимо рівність (15) на цю функцію та проінтегруємо здобуту рівність по $[0,l]$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_0^l \left[-v''(x)v(x) + c|v(x)|^2\right]\,dx = 0. \tag{16}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^l \big(-v''(x)\big)v(x)\,dx = -v''(x)v(x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l \big|v'(x)\big|^2\,dx = -v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int\limits_0^l \big|v'(x)\big|^2\,dx,$$

то рівність (16) перепишемо у вигляді

$$-v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int\limits_0^l \Big[\big|v'(x)\big|^2 + c\big|v(x)\big|^2\Big]\,dx = 0. \tag{17}$$

Міркуючи так як при доведені твердження 3, отримуємо, що $-v'(l)v(l) + v'(0)v(0) \ge 0$. Звідси і з (17) випливає, що $v = 0$. Зауважимо, що коли або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, то і при умові $c = 0$ матимемо $v = 0$.

Визначимо функцію Гріна:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{W(y)}, & \text{якщо } \ 0 \le x \le y, \\[2ex] \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{W(y)}, & \text{якщо } \ y \le x \le l, \end{cases} \tag{18}$$

де v_1 — функція, що задовольняє (15) і першу з крайових умов (14), а v_2 — функція, що задовольняє (15) і другу з крайових умов (14), а

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [0,l],$$

— визначник Вронського, побудований за функціями v_1 і v_2.

Як відомо з теорії крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку, коли $w \in C\big([0,l]\big)$, то єдина функція $v \in C^2([0,l])$, яка задовольняє (13), (14), має зображення

$$v(x) = \int\limits_0^l G(x,y)w(y)\,dy = \int\limits_0^x G(x,y)w(y)\,dy + \int\limits_x^l G(x,y)w(y)\,dy =$$

$$= v_2(x)\int\limits_0^x \frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy + v_1(x)\int\limits_x^l \frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy, \quad x \in [0,l]. \tag{19}$$

Це означає, що

$$v'(x) = v_2'(x)\int\limits_0^x \frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy + v_1'(x)\int\limits_x^l \frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy, \quad x \in [0,l],$$

$$v''(x) = v_2''(x)\int\limits_0^x \frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy + v_1''(x)\int\limits_x^l \frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy + w(x) \text{ для майже всіх } x \in [0,l].$$

Звідси видно, що функція v, задана формулою (19) при $w \in L_2(0,l)$, належить простору $H^2(0,l)$ і задовольняє (13) майже скрізь та крайові умови (14), тобто обернений оператор $(cI+A)^{-1}$ визначний на всьому просторі $L_2(0,l)$, причому $(cI+A)^{-1}w = v$, де $w \in L_2(0,l)$ — довільна, а v визначена формулою (19), тобто формула (19) визначає оператор $(cI+A)^{-1} : L_2(0,l) \to L_2(0,l)$. А так як $G \in C\big([0,l]\times[0,l]\big)$, то цей оператор, як показано у твердженні 4, є компактним. $\square$

Теорема 3. *Нехай лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє такі умови:*
- *він є самоспряженим і невід'ємним (відповідно, додатним),*
- *для деякої сталої $c \ge 0$ оператор $(cI + A)^{-1}$ (тобто обернений до оператора $cI + A$ або, іншими словами, резольвента оператора A) визначений на всьому просторі H і компактний.*

Тоді власні значення оператора A є невід'ємними (відповідно, додатними), мають скінчені кратності і точкою скупчення є і тільки $+\infty$, а з власних елементів оператора A можна утворити ортонормовану базу в H, а точніше існує ортонормована база $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H така, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

де

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \quad \textit{причому} \;\; \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{21}$$

і в ланцюжку нерівностей (21) кожне власне значення оператора A повторюється стільки разів, яка його кратність.

Означення 8. *Скажемо, що лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє умову (**SNC**), якщо він задовольняє умови теореми 3.*

Зауваження 2. *Якщо лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє умову (**SNC**), то послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$, про які говориться в теоремі 3, шукаємо так. Спочатку шукаємо всі власні значення λ_j°, $j \in \mathbb{N}$, оператора A (вони є невід'ємними числами), нумеруючи їх так, щоби вони утворювали монотонну зростаючу послідовність, тобто $0 \le \lambda_1^\circ < \lambda_2^\circ < \ldots < \lambda_k^\circ < \ldots$, і знаходимо відповідні їм власні підпростори $V(\lambda_j^\circ)$. Як відомо, будь-які два власні елементи оператора A, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними. В кожному власному підпросторі $V(\lambda_j^\circ)$ (він скінченновимірний) вибираємо ортонормомовану базу $w^*_{(j,s)}, s \in \{1, \ldots, q_j\}$, де q_j — кратність власного значення λ_j°, і вводимо позначення $\lambda^*_{(j,s)} := \lambda_j^\circ$, $s \in \{1, \ldots, q_j\}$. Впорядкуємо множину $\{(j\,, s) \,|\, j \in \mathbb{N}, s \in \{1, \ldots, q_j\}\}$ так, що (j_1, s_1) передує (j_2, s_2), якщо або $j_1 < j_2$, або $j_1 = j_2$ і $s_1 < s_2$, і задамо монотонно зростаюче відображення μ множини $\mathbb{N}$ в цю множину (тобто, якщо $l_1 < l_2$, то $\mu(l_1) = (j_1, s_1)$ передує $\mu(l_2) = (j_2, s_2)$). Тоді визначаємо*

$$w_k := w^*_{\mu(k)}, \quad \lambda_k := \lambda^*_{\mu(k)}, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що в ланцюжку рівностей/нерівностей (21) кожне власне значення оператора A повторяється підряд стільки раз, яка його кратність.

Наслідок 1. *Існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора $A : D(A) \to L_2(0, l)$, визначеного у формулюванні твердження 1 при умові $\alpha_0\beta_0 \le 0$ та $\alpha_1\beta_1 \ge 0$, так, що*

$$A w_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ..., \;\; \textit{причому} \; \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{23}$$

і $\lambda_1 = 0$ у випадку $\beta_0 = \beta_1 = 0$, а в інших випадках значень α_0, β_0 і α_1, β_1 маємо $\lambda_1 > 0$.

Доведення. Ми вже з'ясували, що (див. твердження 2, 3, 5), що оператор A є самоспряженим, додатним у випадку, якщо або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, і суттєво невід'ємним у випадку, якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, а також встановили, що для довільного $c > 0$ оператор $(cI + A)^-1$ є визначеним на $L_2(0, l)$ і компактним, тобто оператор A задовольняє умову **(SNC)**. Зі сказаного безпосередньо випливає, що власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, і нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$. Звідси і теореми 3 безпосередньо випливає наше твердження.

Уточнимо спосіб знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ і переконаємося, що в (23) всі нерівності, крім першої, є обов'язково строгими, тобто всі власні значення є однократними. Для цього зауважимо, що із означення оператора A випливає, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0, l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0, l), \\ \alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Оскільки $H^2(0,l)$ — простір Соболєва, то w'' — узагальнена похідна w другого порядку за Соболєвим. Як було раніше сказано, $H^2(0,l) \subset C^1([0,l])$, а отже, з рівняння задачі (24) маємо $w'' \in C([0,l])$, тобто задачу (24) розв'язуємо в просторі $C^2([0,l])$ (похідна w'' є класичною і неперервною на $[0,l]$).

Отож, нам потрібно знайти числа λ такі, що задача (24) має ненульові розв'язки. Як вже було сказано, коли або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, то такі числа є тільки серед додатних чисел, а якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, то нуль є таким числом, а решта — серед додатних чисел.

Спочатку припустимо, що маємо перший випадок, тобто або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, а отже, $\lambda > 0$.

Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w,$$

яке запишемо у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{25}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знаходимо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (25) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{26}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{27}$$

і підставимо вирази (26) і (27) в крайові умови задачі (24):

$$\begin{cases} \alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) \equiv \alpha_0 C_2\sqrt{\lambda} + \beta_0 C_1 = 0, \\ \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) \equiv \alpha_1(-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + \beta_1(C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення λ, при яких система (28) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки і підставити їх у (26). У результаті цього будуть знайдені власні значення і відповідні їм власні елементи оператора A.

Зведемо систему (28) до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} \beta_0 C_1 + \alpha_0\sqrt{\lambda}C_2 = 0, \\ (-\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_1\cos\sqrt{\lambda}l)C_1 + (\alpha_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_1\sin\sqrt{\lambda}l)C_2 = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Система (29) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0\sqrt{\lambda} \\ -\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_1\cos\sqrt{\lambda}l & \alpha_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_1\sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + (\alpha_0\alpha_1\lambda - \beta_0\beta_1)\sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{30}$$

Аналізуючи різні випадки значень $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, в кожному з них отримаємо зліченну кількість додатних коренів рівняння (30). Найбільш загальний та складний випадок будемо мати, коли $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \neq 0$, $\alpha_0\alpha_1 \neq 0$, $\beta_0\beta_1 \neq 0$. Тоді рівняння (30) рівносильне рівнянню

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}(\alpha_0\alpha_1\sqrt{\lambda} + \frac{\beta_0\beta_1}{\sqrt{\lambda}}).$$

Розв'язуючи графічно, бачимо, що це рівняння має зліченну кількість додатних коренів, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Ці корені і будуть власними значеннями нашого оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (29) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга або має значення нуль, або виражається через першу. Це означає, що множина всіх власних функцій, відповідних одному і тому ж власному значенню, доповнена нульовою функцією, утворюють одновимірний лінійний підпростір простору $L_2(0,l)$, який має вигляд $\{Cw^* \mid C \in \mathbb{R}\}$, де w^* — одна із власних функцій. Отож, ми встановили, що власні значення оператора A є однократними. Впорядкуємо додатні корені рівняння (30) в порядку зростання їх величин, тобто у вигляді

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ... \tag{31}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдемо власну функцію за формулою (26) при $\lambda = \lambda_k$ і значеннях C_1 і C_2, знайдених із системи (29) при $\lambda = \lambda_k$ за додаткової умови

$$\int_0^l |w(x)|^2 dx = 1$$

(умові нормування). Позначимо отриману власну функцію через w_k. Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$.

Аналогічно розглядаємо випадок $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$. □

Як було сказано вище, для будь-якого $v \in H$ маємо маємо

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}_k w_k, \quad \text{де} \ \ \widehat{v}_k = (v, w_k), \ k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Припустимо, що оператор A задовольняє умову (**SNC**). Тоді*

$$D(A) = \{v \in H \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\widehat{v}_k|^2 < \infty\}, \quad Av = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widehat{v}_k w_k, \quad \text{якщо} \ \ v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}_k w_k. \tag{32}$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай* $l > 0$ — *яке-небудь фіксоване число, а* $A : D(A) \to L_2(0,l)$ *оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де* $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, *тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A).$$

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0,l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$, *складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := x + 1$, $x \in (0,l)$; *б)* $f(x,t) := x \sin t$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, & x \in (0,l), \\ w(0) = 0, & w'(l) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Отож, нам потрібно знайти значення $\lambda > 0$ такі, що задача (33) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w,$$

і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{34}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{35}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{36}$$

і підставимо вирази (35) і (36) в крайові умови задачі (33):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (37) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (37) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{38}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (35) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{40}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0, l],$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l (x+1)\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)}\Big((x+1)\cos\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx\Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)}\Big(-1 - \frac{2l}{-\pi + 2\pi k}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)}\Big(-1 - (-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi + 2\pi k}\Big) = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)}\Big(1 + (-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi + 2\pi k}\Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int\limits_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (x \sin t) \sin \sqrt{\lambda_k} x\,dx =$$

$$= \sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l x \sin \sqrt{\lambda_k} x\,dx = \sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l x \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx =$$

$$= -\sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(x \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x \Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx \Big) =$$

$$= -\sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(0 - \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x \Big|_0^l \Big) =$$

$$= \sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} ((-1)^{k+1} \frac{2l}{-\pi + 2\pi k}) = (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \Big)^2 \cdot \sin t\,, \quad t \in (0, +\infty).$$

$\square$

Приклад 2. *Нехай* $l > 0$ *— яке-небудь фіксоване число, а* $A : D(A) \to L_2(0,l)$ *оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де* $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, *тобто*

$$D(A) := \{ v \in H^2(0,l) \mid v'(0) = 0,\ v'(l) = 0 \}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A).$$

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0,l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$, *складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := 2x + 1$, $x \in (0,l)$; *б)* $f(x,t) := (x-1)e^t$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1 = 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, & x \in (0,l), \\ w'(0) = 0, & w'(l) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geqslant 0$ такі, що задача (42) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w, \tag{43}$$

у випадках 1) $\lambda = 0$ та 2) $\lambda > 0$.
1) Нехай $\lambda = 0$, тоді маємо рівняння

$$-w'' = 0.$$

Будь-який його розв'язок якого має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі. Знайдемо ці сталі, підставивши розв'язок у крайові умови задачі (42). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто $w_0(x) = C_2$, $x \in [0, l]$, де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_0(x)|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 l = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{44}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{45}$$

2) Нехай $\lambda > 0$ і запишемо рівняння (43) у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{46}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \mu^2 = -\lambda \Longleftrightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (46) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{47}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі. Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{48}$$

і підставимо вирази (47) і (48) в крайові умови задачі (42):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{49}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (49) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (49) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{50}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (47) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ знаходимо

$$w_k(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad x \in [0, l], \tag{52}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_k(x)|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_k} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi k}{l} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} C_1^2 \int_0^l \Big(1 + \cos 2\frac{\pi k}{l} x\Big) \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} x \, dx \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0, l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_0 := \int_0^l \varphi(x) w_0(x) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l (2x+1) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} (l^2 + l) = \sqrt{l}(l+1) \,,$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (2x+1) \cos \frac{\pi k}{l} x \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k} \Big((2x+1) \sin \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l - 2 \int_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx \Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k} \Big(0 + \frac{2l}{\pi k} \cos \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l \Big) = 2 \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_0(t) := \int_0^l f(x,t) w_0(x) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l (x-1) e^t \, dx = e^t \cdot \sqrt{\frac{1}{l}} \Big(\frac{l^2}{2} - l\Big) = \sqrt{l} \Big(\frac{l}{2} - 1\Big) \cdot e^t \,,$$

$$\widehat{f_k}(t) := \int\limits_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l (x-1)e^t\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= e^t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l (x-1)\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx = e^t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l (x-1)\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx =$$

$$= e^t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{l}{\pi k}\Big((x-1)\sin\frac{\pi k}{l}x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \sin\frac{\pi k}{l}x\,dx\Big) = e^t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{l}{\pi k}\Big(0+\frac{l}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{l}x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k-1)\cdot e^t = a_k e^t, \quad t\in(0,+\infty), \quad k\in\mathbb{N},$$

де $a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k-1),\ k\in\mathbb{N}.$ □

Приклад 3. *Нехай $l>0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A: D(A)\to L_2(0,l)$ оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де $\alpha_0=1, \beta_0=-h_1, \alpha_1=0, \beta_1=1$, тобто*

$$D(A) := \{v\in H^2(0,l) \mid v'(0)-h_1v(0)=0,\ v(l)=0\}, \quad Av=-v'' \ \ \forall v\in D(A),$$

де $h_1>0$ — задане число.
Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := \cos x,\ x\in(0,l)$; *б) $f(x,t) := 2x\cos t,\ (x,t)\in(0,l)\times(0,+\infty)$.*

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1>0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w''=\lambda w, \quad x\in(0,l), \\ w'(0)-h_1w(0)=0, \quad w(l)=0. \end{cases} \tag{54}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda>0$ такі, що задача (54) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння задачі (54) і запишемо його у вигляді

$$w''+\lambda w=0. \tag{55}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2+\lambda=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu^2=-\lambda \quad\Leftrightarrow\quad \mu_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}\,i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (55) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{56}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{57}$$

і підставимо вирази (56) і (57) в крайові умови задачі (54):

$$\begin{cases} w'(0) - h_1 w(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (58) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (58) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_1 \sin \sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \tag{59}$$

звідки

$$-h_1 \sin \sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}. \tag{60}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda}l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{l h_1}. \tag{61}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (58) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (56) і кожного $k \in \mathbb{N}$ знаходимо

$$w_k(x) = C_1(\cos \sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k}x), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{63}$$

де C_1 — ненульова стала, яку знаходимо з умови нормування:

$$\int_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{\int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx}\right)^{-1}. \tag{64}$$

Отож, для кожного $k \in \mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x \in [0,l], \tag{65}$$

де M_k визначено в (64).

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ (див. (65)) і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$ (див.(62)), складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A.

Зауваження 1. *Вирази власних елементів w_k, $k \in \mathbb{N}$, оператора A можна спростити. Справді, використавши рівність* (60), *маємо*

$$\cos\sqrt{\lambda_k}x - \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_k}x = \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}(\cos\sqrt{\lambda_k}x\sin\sqrt{\lambda_k}l - \cos\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_k}x) =$$

$$= \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Отож, звідси та (63) *для довільного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо*

$$w_k(x) := C_1\frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x) = \widetilde{C}_1\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}$$

де $\widetilde{C}_1 := C_1\dfrac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}$ *— ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування:*

$$\int_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1^2\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1^2\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1.$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використавши рівність (60)*:*

$$\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\sqrt{\lambda_k}l =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_k}l\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\lambda_k}l} =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{1}{1-(\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}})^2} = \frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big).$$

Отож, отримуємо

$$\widetilde{C}_1^2 \cdot \frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1 = \widetilde{M}_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}. \tag{67}$$

Отож,

$$w_k(x) = \widetilde{M}_k \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x \in [0,l], \quad \text{де } \widetilde{M}_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{68}$$

— ортонормована база в $L^2(0,l)$ складена з власних елементів оператора A, а відповідна їй числова послідовність з власних чисел має вигляд (62).

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою $\{w_k\}$, використавши вирази (68):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0,l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = \widetilde{M}_k \int_0^l \cos x \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2} \int_0^l \big(\sin(x(1-\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l) + \sin(-x(1+\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l)\big)\,dx =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\Big(- \frac{1}{1-\sqrt{\lambda_k}} \cos(x(1-\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l)\big|_0^l + \frac{1}{1+\sqrt{\lambda_k}} \cos(-x(1+\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l)\big|_0^l\Big) =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\Big(- \frac{1}{1-\sqrt{\lambda_k}}(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k}l) + \frac{1}{1+\sqrt{\lambda_k}}(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k}l)\Big) =$$

$$= -\widetilde{M}_k \frac{\sqrt{\lambda_k}}{1-\lambda_k}\Big(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k}l\Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = \widetilde{M}_k \int_0^l (2x\cos t)\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx =$$

$$= 2\cos t \cdot \widetilde{M}_k \int_0^l x \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx = 2\cos t \cdot \frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(x\cos\sqrt{\lambda_k}(l-x)\big|_0^l - \int_0^l \cos\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx\Big) =$$

$$= 2\cos t \cdot \frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\big|_0^l\Big) = 2\frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\Big) \cdot \cos t =$$

$$= b_k \cos t, \quad t \in (0,+\infty), \quad \text{де} \quad b_k := 2\frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Приклад 4. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0,l)$ оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) = 0,\ v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

де h_2 — задане число.
Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := x - 1,\ x \in (0,l)$;   б) $f(x,t) := e^x \sin t,\ (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) = 0, \quad w'(l) + h_2 w(l) = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (69) має ненульові розв'язки. Отже, розглянемо рівняння задачі (69) і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{70}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (70) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{71}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{72}$$

і підставимо вирази (71) і (72) в крайові умови задачі (69):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) + h_2 w(l) \equiv (-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + h_2(C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (58) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (73) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + h_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{74}$$

Перетворимо отримане рівняння так

$$-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + h_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = \frac{h_2}{\sqrt{\lambda}}. \tag{75}$$

Позначимо $\mu := \sqrt{\lambda}l$ і здобуваємо рівняння

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{h_2 l}{\mu}.$$

Розв'язуючи його графічно, переконуємося, що це рівняння має зліченну кількість додатних коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{76}$$

— власні значення нашого оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (71) і знаходимо

$$w_k(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N},$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо з умови нормування:

$$\int_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\int_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad .$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використовуючи (75), так:

$$\int_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1+\cos 2\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_k}}\sin 2\sqrt{\lambda_k}l =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l = \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_k}l\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\lambda_k}l} =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{1}{1+(\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}})^2} = \frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big).$$

Отож, отримуємо

$$C_1^2\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = H_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{77}$$

Отже, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$, складена з власних елементів оператора A, є така:

$$w_k(x) = H_k\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \quad \text{де} \quad H_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{78}$$

а відповідну їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складена з власних власних значень оператора A, визначена в (76).

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0, l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = H_k \int_0^l (x-1) \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Big((x-1) \sin\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l - \int_0^l \sin\sqrt{\lambda_k} x\, dx \Big) =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Big((l-1) \sin\sqrt{\lambda_k} l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cos\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l \Big) =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Big((l-1) \sin\sqrt{\lambda_k} l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (\cos\sqrt{\lambda_k} l - 1) \Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx = H_k \int_0^l (e^x \sin t) \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= \sin t \cdot H_k \int_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx, \quad t \in (0, +\infty).$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^l e^x \sin\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= e^l \cos\sqrt{\lambda_k} l - 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \big(e^x \sin\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx \big) =$$

$$= e^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k} l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k} l}{\sqrt{\lambda_k}} \big) - 1 - \frac{1}{\lambda_k} \int_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx.$$

Звідси

$$\big(1 + \frac{1}{\lambda_k}\big) \int_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = e^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k} l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k} l}{\sqrt{\lambda_k}} \big) - 1,$$

$$\int_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = \frac{e^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k} l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k} l}{\sqrt{\lambda_k}} \big) - 1}{1 + \frac{1}{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{f}_k(t) := c_k \sin t, \quad t \in (0,+\infty), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{де} \;\; c_k := \frac{e^l\left(\cos\sqrt{\lambda_k}l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}}\right) - 1}{1 + \frac{1}{\lambda_k}} H_k\,.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0,l)$ оператор, заданий за правилом (1),(2).

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x)$, $x \in (0,l)$; б) $f(x,t)$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$,
якщо

1. $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 0,\; \beta_1 = 1$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\; v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A);$$

$\varphi(x) = \cos 2x$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = (x+2)t^3$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

2. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) = 0,\; v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A);$$

$\varphi(x) = 2x + 3$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = x^2(t+1)$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

3. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\; v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де h_1 — задане число;

$\varphi(x) = 3x + 2$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = e^x t^3$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

4. $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\; v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де h_2 — задане число;

$\varphi(x) = \sin 3x$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = (x+2)e^{2t}$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

5. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\; v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де $h_1,\; h_2$ — задані числа;

$\varphi(x) = 2x - 1$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = x(t+3)$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Практичне заняття № 7

Мішані задач для рівняння коливання струни з однорідними крайовими умовами. Метод рядів Фур'є

Завдання: Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

де

- $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,
- $\varphi, \psi \in L^2(0,l)$, $f \in C([0,T]; L^2(0,l))$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{4}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (1) – (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{5}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{6}$$

Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) – це слабкий розв'язок задачі (5),(6). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (5), (6).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad w'' + \lambda w = 0, \quad x \in (0,l), \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{8}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (7) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (8), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язуємо в просторі $C^2([0,l])$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0,l], \ t \in [0,T], \tag{9}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{10}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (10) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (1) і початкові умови (3) замість u (крайові умови (2) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (9)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \ \Rightarrow \ w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (11).

Дивлячись на рівності (11), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \psi_k. \end{cases} \tag{12}$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (10) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

$\square$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{13}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{14}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{15}$$

де $l > 0, \ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,*

$$f(x,t) := x \sin t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := x+1, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Зведемо задачу (13) – (15) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор

$$A : D(A) \to L_2(0,l)$$

за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0, \ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{16}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t), \ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t), \ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{17}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{18}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (17), (18).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (19) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (19), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{20}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (20) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{21}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{22}$$

і підставимо вирази (21) і (22) в крайові умови задачі (19):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (23) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (23) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{24}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (21) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \tag{26}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi+2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x, \quad x\in[0,l], \ \ k\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x\in[0,l], \ t\in[0,T], \tag{28}$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(1+(-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big),$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2\cdot\sin t = a_k\cdot\sin t, \quad t\in[0,T],$$

$$a_k := (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2.$$

Тут ми використали результати розв'язування прикладу 7 практичного заняття №7.

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{29}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \quad k\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{30}$$

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (30), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (29)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases}z'' + a^2\lambda_k z = a_k\sin t, \quad t\in(0,T],\\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k.\end{cases} \tag{31}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0. \tag{32}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T], \quad A_k,\ B_k \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (32).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (31) шукатимемо методом невизначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k \cos t, \ \ z'' = -d_k \sin t \quad \Rightarrow \quad -d_k \sin t + a^2\lambda_k d_k \sin t = a_k \sin t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = a_k \ \Rightarrow$$

$$d_k := \frac{a_k}{a^2\lambda_k - 1} \tag{33}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2\lambda_k - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$).

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (31). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (13) – (15) є (див. (29)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{\varphi}_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+\frac{\widehat{\psi}_k-d_k}{a\sqrt{\lambda_k}}\sin a\sqrt{\lambda_k}t+d_k\sin t)\sin\sqrt{\lambda_k}x,\quad t\in[0,T],$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, d_k для кожного $k\in\mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

Приклад 2. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q:=(0,l)\times(0,T], \tag{34}$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0,\quad t\in(0,T], \tag{35}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in[0,l], \tag{36}$$

де $l>0,\ T>0$ *– довільно задані і фіксовані числа,*

$$f(x,t):=(x-1)e^t,\quad (x,t)\in Q,\qquad \varphi(x):=0,\quad \psi(x):=2x+1,\quad x\in[0,l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку зведемо задачу (34) – (36) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A:D(A)\to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A):=\{v\in H^2(0,l)\mid v'(0)=0,\ v'(l)=0\},\quad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A) \tag{37}$$

і позначення:

$$[0,T]\ni t\mapsto u(t):=u(x,t),\ x\in[0,l];\quad [0,T]\ni t\mapsto f(t):=f(x,t),\ x\in[0,l];$$

$$\varphi:=\varphi(x),\quad \psi:=\psi(x),\quad x\in[0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (34) – (36) є слабким розв'язком задачі

$$u''+a^2Au=f(t),\quad t\in(0,T], \tag{38}$$

$$u'(0)=\varphi,\quad u'(0)=\psi. \tag{39}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок даної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (38), (39).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w\in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases}-w''=\lambda w,\quad x\in(0,l),\\ w'(0)=0,\quad w'(l)=0.\end{cases} \tag{40}$$

Шукаємо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робимо точно так як в прикладі 8 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geq 0$ такі, що задача (40) має ненульові розв'язки. Розглянем цю задачу у випадках: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.
1) Нехай $\lambda = 0$, тоді маємо рівняння

$$-w'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2, \quad x \in [0, l], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (40), підставивши цей вираз у крайові умови задачі (40). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$w_0(x) = C_2, \quad x \in [0, l],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_0(x)|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 l = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{41}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{42}$$

2) Тепер нехай $\lambda > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (40), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{43}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{44}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{45}$$

і підставимо вирази (44) і (45) в крайові умови задачі (40):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (46) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (46) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{47}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (44) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{49}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_k(x)|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \cos^2\frac{\pi k}{l}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_1^2 \int_0^l \Big(1 + \cos 2\frac{\pi k}{l}x\Big)\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi k}{l}x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

3-ий крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x),\ t \in [0, T], \tag{51}$$

де

$$\widehat{\varphi}_k = \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = 0\,, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\widehat{\psi}_0 := \int_0^l \varphi(x) w_0(x)\, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l (2x+1)\, dx = \sqrt{\frac{1}{l}}(l^2 + l) = \sqrt{l}(l+1)\,,$$

$$\widehat{\psi}_k = \int_0^l \psi(x) w_k(x)\, dx = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int_0^l f(x,t) w_0(x)\, dx = a_0 e^t\,, \quad a_0 := \sqrt{l}\Big(\frac{l}{2} - 1\Big), \quad t \in [0, T],$$

$$\widehat{f}_k(t) = \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = a_k \cdot e^t\,, \quad a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1), \qquad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (34) – (36) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad t \in [0,T], \tag{52}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_0''(t) = \widehat{f}_0(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_0(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad \widehat{u}_0'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{54}$$

З (53) випливає, що функція $\widehat{u}_0$ (відповідний коефіцієнт ряду (52)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' = a_0e^t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{55}$$

а з (53) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (52)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = a_ke^t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0. \end{cases} \tag{56}$$

Розв'яжемо спершу задачу (55). Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі, проінтегрувавши рівняння двічі:

$$z = a_0e^t + A_0t + B_0, \quad t \in [0,T],$$

де A_0, B_0 – довільні сталі.

Підставимо цей вираз повного загального розв'язку рівняння даної задачі в її початкові умови для знаходження значень сталих A_0, B_0. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = a_0e^t + A_0, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv a_0 + B_0 = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) \equiv a_0 + A_0 = \widehat{\psi}_0.$$

Звідси

$$A_0 = \widehat{\psi}_0 - a_0, \quad B_0 = \widehat{\varphi}_0 - a_0.$$

Отже,

$$\widehat{u}_0(t) = a_0e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0, \quad t \in [0,T].$$

Тепер розв'яжемо задачу (56) для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (56) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k e^t, \quad t \in [0, T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k e^t,\ z'' = d_k e^t \quad \Rightarrow \quad d_k e^t + a^2\lambda_k d_k e^t = a_k e^t \Rightarrow \quad (1 + a^2\lambda_k)d_k = a_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{a_k}{1 + a^2\lambda_k}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (56).

Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k, B_k. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Звідси маємо

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0, T].$$

Отож, сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є (див. (52)) сумою збіжного в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$ ряду

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}\big[a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0\big] +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\big[(\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t\big]\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad (x,t) \in [0, l] \times [0, T].$$

□

Приклад 3. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{57}$$

$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{58}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{59}$$

де $l > 0,\ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,*

$$f(x,t) := 2x\cos t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку зведемо задачу (57) – (59) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\ v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{60}$$

і позначення

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (57) – (59) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{61}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{62}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (61), (62).

2-ий крок. Всі власні значення оператора є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases} \tag{63}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (це робиться точно так як в прикладі 9 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (63) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (63), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{64}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (64) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{65}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{66}$$

і підставимо вирази (65) і (66) в крайові умови задачі (63):

$$\begin{cases} w'(0) - h_1 w(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{67}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (67) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (67) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_1 \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{68}$$

звідки

$$-h_1 \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}. \tag{69}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda}l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{lh_1}. \tag{70}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{71}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (67) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A, тобто власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля, підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (65) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{72}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx}\right)^{-1}. \tag{73}$$

Отож, для кожного $k\in\mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x\in[0,l], \tag{74}$$

де M_k визначено в (73).

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x\in[0,l],\ t\in[0,T], \tag{75}$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = M_k\int_0^l \cos x\cdot\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)\,dx,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = M_k\int_0^l (2x\cos t)\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)\,dx =$$
$$= b_k\cos t, \quad t\in[0,T],$$

де

$$b_k := 2M_k\int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)x\,dx, \quad k\in\mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (57) – (59) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{76}$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in[0,T], \\ \quad \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{77}$$

З рівностей (77) випливає, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (76)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = b_k\cos t, \quad t\in(0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{78}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \cos t, \ t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_k \sin t, \quad z'' = -d_k \cos t \quad \Rightarrow \quad -d_k \cos t + a^2\lambda_k d_k \cos t = a_k \cos t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = b_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{b_k}{a^2\lambda_k - 1}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (78). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t - d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k}B_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{u}_k(t) := \big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T],$$

і сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \Big[\big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t +$$

$$+ d_k \sin t\Big]\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

□

Завдання для самостійної роботи

4. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := (x+2)t^3, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos 2x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

5. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u_x|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := x^2(t+1), \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x+3, \quad x \in [0,l].$$

6. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := e^x t^3, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 3x+2, \quad x \in [0,l].$$

7. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := (x+2)e^{2t}, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \sin 3x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

8. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := x(t+3), \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x-1, \quad x \in [0,l].$$

Практичне заняття № 8

Мішані задачі для рівняння коливання струни з неоднорідними крайовими умовами

I. Теоретичний матеріал

Задача: Нехай $l > 0$, $T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. *Мішана задача для рівняння коливання струни* полягає у знаходженні функції $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2 \widetilde{u}_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

крайові умови

$$(\alpha_0 \widetilde{u}_x + \beta_0 \widetilde{u})|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 \widetilde{u}_x + \beta_1 \widetilde{u})|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

та початкові умови

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,
- $\mu_0, \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : [0,l] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (1) — (3), якщо $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in L^2(0,l)$, $\widetilde{f} \in C([0,T]; L^2(0,l))$, $\mu_0, \mu_1 \in C^2([0,T])$, причому або $\mu_0 \ne 0$, або $\mu_1 \ne 0$.

Розв'язування.
0-ий крок. Шукаємо функцію $h \in H^2(Q)$, яка задовольняє крайові умови (2), тобто

$$(\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{4}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(x,t) = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{5}$$

де $p, q, r \in C^2([0,T])$ — функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалися умови (4). Для знаходження p, q, r шукають похідну

$$h_x(x,t) = 2p(t)x + q(t)$$

і підставляють вирази w і w_x в умови (4):

$$\begin{cases} \alpha_0 q(t) + \beta_0 r(t) = \mu_0(t), \\ \alpha_1(2lp(t) + q(t)) + \beta_1(l^2 p(t) + lq(t) + r(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \end{cases}$$

Звідси знаходять p, q і r. Оскільки маємо два рівняння, а невідомих функцій — три, то одна з функцій p, q або r може бути довільною, її покладемо рівною, наприклад, нулеві.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (1) — (3) роблять заміну

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{6}$$

де u — нова невідома функція:

$$(u+h)_{tt} - a^2(u+h)_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0(u+h)_x + \beta_0(u+h))|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1(u+h)_x + \beta_1(u+h))|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad (u+h)_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_{tt} + h_{tt} - a^2 u_{xx} - a^2 h_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} + (\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \; (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} + (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad u_t|_{t=0} + h_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x).$$

Отож, врахувавши (4), для нової невідомої функції u отримаємо задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{9}$$

де $f(x,t) := \widetilde{f}(x,t) - h_{tt} + a^2 h_{xx}$, $\varphi(x) := \widetilde{\varphi}(x) - h(x,0)$, $\psi(x) := \widetilde{\psi}(x) - h_t(x,0)$.

Відмітимо, що коли $\mu_0 = \mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (7) — (9) маємо $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{f} = f$, $\widetilde{\varphi} = \varphi$, $\widetilde{\psi} = \psi$) і починаємо з 1-го кроку.

1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \; \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A), \tag{10}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := \widetilde{u}(x,t), \; x \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := \widetilde{f}(x,t), \; x \in [0,l],$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (1) — (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{11}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{12}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) — це слабкий розв'язок задачі (11),(12). Тому шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (11), (12).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \tag{13}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{14}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (13) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (14), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язуємо в просторі $C^2([0,l])$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \ x \in [0,l],$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \ t \in [0,T], \tag{15}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{16}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (16) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (7) і початкові умови (9) замість $\widetilde{u}$ (крайові умови (8) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ і $\widetilde{f}$ в ряди Фур'є (див. (15)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (17).

Дивлячись на рівності (17), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \psi_k. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, що рівняння задачі (18) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{19}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (18).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (19). Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}\, i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t, \quad t \in [0,T], \quad A_k,\ B_k \in \mathbb{R} \text{ — довільні сталі,}$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (19).

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{20}$$

де A_k, B_k — довільні сталі. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (18), отримаємо

$$\begin{cases} A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \\ B_k a\sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0) = \widehat{\psi}_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0) \\ B_k = \dfrac{\widehat{\psi}_k - \overset{*}{z}{}'(0)}{a\sqrt{\lambda_k}}. \end{cases}$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := \left(\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0)\right) \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - \overset{*}{z}{}'(0)}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T]. \tag{21}$$

!!! Розглянемо кілька випадків знаходження часткового розв'язку рівняння задачі (18) методом неозначених коефіцієнтів.

• Якщо
$$\widehat{f}_k(t) = a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t,$$
де ω — стала така, що $\omega \neq a\sqrt{\lambda_k}$ для кожного $k \in N$ (може бути $a_k = 0$ або $b_k = 0$) то частковий розв'язок шукають у вигляді
$$\overset{*}{z}(t) := c_k \cos \omega t + d_k \sin \omega t,$$
де c_k і d_k знаходять за формулами
$$c_k = \frac{a_k}{a^2\lambda_k - \omega^2}, \quad d_k = \frac{b_k}{a^2\lambda_k - \omega^2}.$$

• Якщо ж $f_k(t) = a_k t + b_k$, то
$$\overset{*}{z}(t) := c_k t + d_k,$$
де $c_k = \dfrac{a_k}{a^2\lambda_k}, \quad d_k = \dfrac{b_k}{a^2\lambda_k}.$

• Якщо $f_k(t) = a_k e^{\omega t}$, то
$$\overset{*}{z}(t) := c_k e^{\omega t},$$
де $c_k = \dfrac{a_k}{\lambda_k a^2 + \omega^2}.$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (16) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$, а значить, функція $\widetilde{u}$ належить цьому ж простору, тобто функція $\widetilde{u}$ задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. Отож, сильно узагальненим розв'язком задачі (1) — (3) є функція
$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x) + p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T],$$
де $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N},\ p, q, r$ знайдені вище. □

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $l > 0,\ T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Знайдіть сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*
$$\widetilde{u}_{tt} - a^2 \widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{22}$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = \sin t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0,T], \tag{23}$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x + 1, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{24}$$

Розв'язування.

0-ий крок. Оскільки $\mu_0 \neq 0$ і $\mu_1 \neq 0$, то в задачі робимо заміну невідомої функції:
$$\widetilde{u} = u + h,$$
де u — нова невідома функція, а h — відома допоміжна функція така, що
$$h|_{x=0} = \mu_0(t), \quad h_x|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{25}$$

Шукаємо функцію h у вигляді

$$h(x,t) := p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q},$$

де p, q, r такі, що виконуються рівності (25), тобто

$$r(t) = \mu_0(t), \quad 2lp(t) + q(t) = \mu_1(t), \quad t \in [0,T].$$

Звідси, поклавши $p(t) = 0,\ t \in [0,T]$, знаходимо $r(t) = \mu_0(t),\ q(t) = \mu_1(t),\ t \in [0,T]$, тобто

$$h(x,t) := x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Отож, в нашій задачі робимо заміну

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Маємо

$$u_{tt} - \sin t - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=0} + \sin t = \sin t, \quad u_x|_{x=l} + 1 = 1, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} + x = x + 1, \quad u_t|_{t=0} + 1 = 0, \quad x \in [0,l],$$

звідки отримуємо задачу для нової невідомої функції $\widetilde{u}$:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{26}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{27}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{28}$$

де

$$f(x,t) := (x+1)\sin t, \quad (x,t) \in Q; \qquad \varphi(x) := 1, \quad \psi(x) := -1, \quad x \in [0,l].$$

1-ий крок. Зведемо задачу (26) — (28) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{29}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (26) — (28) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{30}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{31}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (30), (31).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (32) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (32), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{33}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (33) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{34}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{35}$$

і підставимо вирази (34) і (35) в крайові умови задачі (32):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (36) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (36) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{37}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ і врахування того, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (34) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \tag{39}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_k} x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2 \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x, \quad x \in [0,l], \ \ k \in \mathbb{N}. \quad (40)$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0,l], \ t \in [0,T], \quad (41)$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l 1 \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx\,,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (-1) \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (x+1) \sin t \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx =$$

$$= \sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (x+1) \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx = a_k \cdot \sin t, \quad t \in [0,T]\,,$$

$$a_k := \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (x+1) \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\,dx.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (26) — (28) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad (42)$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \quad (43)$$

Умови (43) на коефіцієнти ряду (42) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (26) і умови (28), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (41)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k'(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x),\quad x\in[0,l].$$

Звідси випливають рівності (43).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (43), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (42)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z''+a^2\lambda_k z=a_k\sin t,\quad t\in(0,T],\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k,\quad z'(0)=\widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{44}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z''+a^2\lambda_k z=0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2+a^2\lambda_k=0\quad\Rightarrow\quad \mu_{1,2}=\pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z=A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin a\sqrt{\lambda_k}t,\quad t\in[0,T],\quad A_k,\ B_k\in\mathbb{R}\text{ — довільні сталі},$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z=d_k\sin t,\quad t\in[0,T],$$

де d_k — стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z'=d_k\cos t,\ \ z''=-d_k\sin t\quad\Rightarrow\quad -d_k\sin t+a^2\lambda_k d_k\sin t=a_k\sin t\Rightarrow\quad (a^2\lambda_k-1)d_k=a_k\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad d_k:=\frac{a_k}{a^2\lambda_k-1}. \tag{45}$$

Отож, маємо

$$z=A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin a\sqrt{\lambda_k}t+d_k\sin t,\quad t\in[0,T],$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (44). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z'=-A_k a\sqrt{\lambda_k}\sin a\sqrt{\lambda_k}t+a\sqrt{\lambda_k}B_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+d_k\cos t,\quad t\in[0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (22) — (24) є (див. (42)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$ ряду

$$\widetilde{u}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + d_k \sin t\right] \sin\sqrt{\lambda_k}x + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, d_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

□

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $a > 0,\ l > 0,\ T > 0$ — довільно задані сталі. Розв'язати мішані задачі для рівняння коливання струни:

1.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x+2)e^{3t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = 4e^{3t}, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos 2x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l].$$

2.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 2\cos 3t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 4\cos 3t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \sin x, \quad x \in [0,l].$$

3.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3\sin 2t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 1, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 4\sin 3t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x+2, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \cos 2x, \quad x \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(\widetilde{u}_x - 2\widetilde{u})|_{x=0} = 2e^{2t}, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 3x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3xt, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{(u_x - 2u)}|_{x=0} = 2t, \quad (\widetilde{u}_x + 3\widetilde{u})|_{x=l} = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x+3, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$

Практичне заняття № 9

Мішані задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани. Метод Фур'є

Завдання: Нехай

- $p > 0,\ q > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := (0,p) \times (0,q), \quad Q := \Omega \times (0,T]$.

Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases} \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \leq 0\ ,\ \alpha_1\beta_1 \geq 0,\ \gamma_0\delta_0 \leq 0\ ,\ \gamma_1\delta_1 \geq 0,$
- $\varphi, \psi \in L_2(\Omega),\ f \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Як відомо, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань – це слабкий розв'язок задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \alpha_0 v_x(0,y) + \beta_0 v(0,y) = 0,\ \alpha_1 v_x(p,y) + \beta_1 v(p,y) = 0,$$

$$\gamma_0 v_y(x,0) + \delta_0 v(x,0) = 0, \quad \gamma_1 v_y(x,q) + \delta_1 v(x,q) = 0\},$$
$$Av = -(v_{xx} + v_{yy}) \equiv -\Delta v \quad \forall v \in D(A), \tag{4}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,y,t),\ (x,y) \in \overline{\Omega}; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$\varphi := \varphi(x,y), \quad \psi := \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, задача (1) – (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{5}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{6}$$

Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) – це слабкий розв'язок задачі (5), (6). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (5), (6).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(\Omega)$ крайової задачі для еліптичного рівняння

$$-\Delta w = \lambda w \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta w + \lambda w = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 w_x(0,y) + \beta_0 w(0,y) = 0, \quad \alpha_1 w_x(p,y) + \beta_1 w(p,y) = 0, \quad y \in (0,q), \\ \\ \gamma_0 w_y(x,0) + \delta_0 w(x,0) = 0, \quad \gamma_1 w_y(x,q) + \delta_1 w(x,q) = 0 \quad x \in [0,p]. \end{cases} \tag{8}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (7) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (8), а також шукаємо ці розв'язки (фактично, в просторі $C^2(\overline{\Omega})$).

Розв'язки задачі (7), (8) шукаємо у вигляді

$$w(x,y) = X(x)Y(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{9}$$

Для знаходження X і Y підставимо вираз w вигляду (9) у рівняння (7) і умови (8):

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 X'(0)Y(y) + \beta_0 X(0)Y(y) = 0, \quad \alpha_1 X'(p)Y(y) + \beta_1 X(p)Y(y) = 0, \\ \\ \gamma_0 X(x)Y'(0) + \delta_0 X(x)Y(0) = 0, \quad \gamma_1 X(x)Y'(q) + \delta_1 X(x)Y(q) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Поділимо рівність (10) на XY:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda. \tag{12}$$

Оскільки ліва і права частина рівності (12) залежать від різних незалежних змінних (відповідно, x та y), то ці частини є сталими і однаковими, тобто існує стала ν така, що

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\nu, \quad x \in [0,p],\ y \in [0,q].$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ Y'' + \omega Y = 0, \end{cases} \tag{13}$$

де ν, $\omega := \lambda - \nu \in \mathbb{R}$.

З (13) отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \quad \alpha_1 X'(p) + \beta_1 X(p) = 0, \\ \\ \gamma_0 Y'(0) + \delta_0 Y(0) = 0, \quad \gamma_1 Y'(q) + \delta_1 Y(q) = 0. \end{cases}$$

Отож, маємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ \\ \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \quad \alpha_1 X'(p) + \beta_1 X(p) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} Y'' + \omega Y = 0, \\ \\ \gamma_0 Y'(0) + \delta_0 Y(0) = 0, \quad \gamma_1 Y'(q) + \delta_1 Y(q) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

які пов'язані із задачею (7), (8) співвідношеннями (9) і

$$\lambda = \nu + \omega. \tag{16}$$

Спочатку знаходимо послідовності $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій і власних значень задачі (14), такі, що послідовність $\{X_k\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,p)$ і

$$X_k'' = -\nu_k X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le ... \le \nu_k \le ..., \quad \text{причому} \;\; \nu_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Потім знаходимо послідовності $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ і $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій та власних елементів задачі (15), такі, що послідовність $\{Y_m\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,q)$ і

$$Y_m'' = -\omega_m Y_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le ... \le \omega_m \le ..., \quad \text{причому} \;\; \omega_m \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тоді вводимо позначення:

$$w_{k,\,m}(x,y) := X_k(x) Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda_{k,\,m} := \nu_k + \omega_m, \quad k,m \in \mathbb{N}.$$

Відомо, що система $\{w_{k,\,m} \,\big|\, k,m \in \mathbb{N}\}$ утворює ортонормовану базі в $L_2(\Omega)$. Зауважимо, що зі сказаного вище маємо

$$-\Delta w_{k,m} = \lambda_{k,m} w_{k,m} \;\text{ в }\; \Omega, \quad k,m \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_{k,\,m}\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1,\,m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,\,m} w_{k,\,m}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{k=1,\,m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,\,m} w_{k,\,m}(x,y), \tag{18}$$

$$f(x,y,t) = \sum_{k=1,m=1}^{\infty} \widehat{f}_{k,\,m}(t) w_{k,\,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \; t \in [0,T], \tag{19}$$

де для кожних $k,m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_{k,\,m} := \int_{\Omega} \varphi(x,y) w_{k,\,m}(x,y)\, dxdy, \quad \widehat{\psi}_{k,\,m} := \int_{\Omega} \psi(x,y) w_{k,\,m}(x,y)\, dxdy,$$

$$\widehat{f}_{k,\,m}(t) := \int_{\Omega} f(x,y,t) w_{k,\,m}(x,y)\, dxdy, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1,m=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(t) w_k(x,y), \quad (x,y,t) \in \overline{Q}, \tag{20}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_{k,m}\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2 \lambda_{k,m} \widehat{u}_{k,m}(t) = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ \\ \widehat{u}_{k,m}(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad \widehat{u}'_{k,m}(0) = \widehat{\psi}_{k,m}, \end{cases} \qquad k,\, m \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (20) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (1) і початкові умови (3) замість u (крайові умови (2) для суми ряду виконуються за рахунок належності $w_{k,m}$ до $D(A)$, $k,m \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (18), (19)) і рівності (17), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \left[\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2 \lambda_{k,m} \widehat{u}_{k,m}(t) \right] w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t) \in \Omega \times (0,T],$$

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \widehat{u}'_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_{k,m}\}$, маємо рівності (21).

Дивлячись на рівності (21), бачимо, що для кожних $k, m \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_{k,m}$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_{k,m} z = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad z'(0) = \psi_{k,m}. \end{cases} \tag{22}$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (20) збігається в просторі $C([0,T]; L_2(\Omega))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

$\square$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай* $p > 0,\ q > 0,\ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,* $\Omega := (0,p) \times (0,q),\ Q := \Omega \times (0,T]$.

Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x+y)\cos t, \quad (x,y,t) \in Q, \tag{23}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases} \tag{24}$$

$$u|_{t=0} = xy + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{25}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Введемо позначення

$$f(x,y,t) := (x+y)\cos t, \quad (x,y,t) \in Q; \quad \varphi(x,y) := xy + 1, \quad \psi(x,y) := 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

і зведемо задачу (23) – (25) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid v(0,y) = 0,\ v_x(p,y) = 0,\ v_y(x,0) = 0,\ v_y(x,q) = 0\},$$

$$Av = -(v_{xx} + v_{yy}) \equiv -\Delta v \quad \forall v \in D(A), \tag{26}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,y,t),\ (x,y) \in \overline{\Omega}; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$\varphi := \varphi(x,y), \quad \psi := \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (23) – (25) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{27}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{28}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (27), (28).

2-ий крок. Знаходимо ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(\Omega)$ крайової задачі для еліптичного рівняння

$$-\Delta w = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad \Delta w + \lambda w = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{29}$$

з крайовими умовами

$$w(0,y) = 0, \quad w_x(p,y) = 0, \quad w_y(x,0) = 0, \quad w_y(x,q) = 0. \tag{30}$$

Розв'язки задачі (29), (30) шукаємо у вигляді

$$w(x,y) = X(x)Y(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{31}$$

Підставимо вираз w у рівняння (29) і крайові умови (30):

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \tag{32}$$

$$\begin{cases} X(0)Y(y) = 0, \quad X'(p)Y(y) = 0, \\ X(x)Y'(0) = 0, \quad X(x)Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Поділимо рівність (32) на XY:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\nu \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ Y'' + \omega Y = 0, \end{cases} \tag{34}$$

де ν, $\omega := \lambda - \nu \in \mathbb{R}$.

З (33) маємо

$$\begin{cases} X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(q) = 0. \end{cases}$$

Отож, маємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} Y'' + \omega Y = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Знайдемо послідовності $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій і власних значень задачі (35), такі, що послідовність $\{X_k\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,p)$ і

$$X_k'' = -\nu_k X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le ... \le \nu_k \le ..., \quad \nu_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення $\nu > 0$ такі, що задача (35) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (35). Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\nu \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\nu}\, i, \ \ i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння задачі (35) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\nu}x + C_2 \sin\sqrt{\nu}x, \quad x \in [0,p], \tag{37}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$X'(x) = -C_1\sqrt{\nu}\sin\sqrt{\nu}x + C_2\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}x, \quad x \in [0,p], \tag{38}$$

і підставимо вирази (37) і (38) в крайові умови задачі (35):

$$\begin{cases} X(0) \equiv C_1 = 0, \\ X'(l) \equiv -C_1\sqrt{\nu}\sin\sqrt{\nu}p + C_2\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}p = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\nu > 0$, при яких система рівнянь (39) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (39) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\nu}p = 0. \tag{40}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\nu}p = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\nu}p > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\nu}p = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \nu_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення ν, C_1, C_2 у вираз (37) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$X_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\nu_k}x, \quad x \in [0, p], \tag{42}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^p |X_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^p \sin^2\sqrt{\nu_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^p \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{p}}\,.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{X_k\}$ в $L^2(0, p)$ і числова послідовність $\{\nu_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\nu_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\sqrt{\nu_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}x, \quad x \in [0, p], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Тепер знаходимо послідовності $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$ і $\{\omega_m\}_{m=1}^\infty$, складені, відповідно, з власних функцій та власних елементів задачі (36), такі, що послідовність $\{Y_m\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0, q)$ і

$$Y_m'' = -\omega_m Y_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq ... \leq \omega_m \leq ..., \quad \text{причому} \;\; \omega_m \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Отож, нам потрібно знайти всі значення $\omega \geq 0$ такі, що задача (36) має ненульові розв'язки. Розглянемо цю задачу у випадках: 1) $\omega = 0$; 2) $\omega > 0$.

1) Нехай $\omega = 0$, тоді маємо рівняння

$$Y'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$Y(y) = C_1 y + C_2, \quad y \in [0, q], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (36), підставивши цей вираз у крайові умови цієї задачі. Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$Y_0(y) = C_2, \quad y \in [0, q],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^q |Y_0(y)|^2\,dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^q dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 q = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{q}}\,.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\omega_0 = 0 \tag{44}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$Y_0(y) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad x \in [0, q]. \tag{45}$$

2) Тепер розглянемо випадок $\omega > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (36). Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\omega \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\omega}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (36) має вигляд

$$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{\omega}y + C_2 \sin\sqrt{\omega}y, \quad y \in [0, q], \tag{46}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$Y'(y) = -C_1\sqrt{\omega}\sin\sqrt{\omega}y + C_2\sqrt{\omega}\cos\sqrt{\omega}y, \quad y \in [0, q], \tag{47}$$

і підставимо вирази (46) і (47) в крайові умови задачі (36):

$$\begin{cases} Y'(0) \equiv C_2\sqrt{\omega} = 0, \\ Y'(q) \equiv -C_1\sqrt{\omega}\sin\sqrt{\omega}q + C_2\sqrt{\omega}\cos\sqrt{\omega}q = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\omega > 0$, при яких система рівнянь (48) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (48) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\omega}q = 0. \tag{49}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\omega}q = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\omega}q > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\omega}q = \pi m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення ω, C_1, C_2 у вираз (46) і для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$Y_m(y) = C_1 \cos\sqrt{\omega_m}y, \quad y \in [0, q], \tag{51}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |Y_m(y)|^2\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^q \cos^2\sqrt{\omega_m}y\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^q \cos^2\frac{\pi k}{q}y\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_1^2 \int\limits_0^q \left(1 + \cos 2\frac{\pi k}{q}y\right) dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\frac{q}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{q}}\,.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{Y_m\}_{m=0}^{\infty}$ в $L_2(0,q)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$Y_0(y) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\sqrt{\omega_m}y \equiv \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\frac{\pi m}{q}y, \quad y \in [0,q], \quad m \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Введемо позначення:

$$w_{k,m}(x,y) := X_k(x)Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda_{k,m} := \nu_k + \omega_m, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Відомо, що система $\{w_{k,m} \,|\, k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ утворює ортонормовану базі в $L_2(\Omega)$. Зауважимо, що зі сказаного вище маємо

$$-\Delta w_{k,m} = \lambda_{k,m} w_{k,m} \ \text{в}\ \Omega, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{53}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_{k,m}\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{k,\, m=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{54}$$

$$f(x,y,t) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T], \tag{55}$$

де для кожних $k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0$ маємо:

$$\widehat{\varphi}_{k,m} := \int_\Omega \varphi(x,y)\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega (xy+1)\cdot X_k(x)Y_m(y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^p xX_k(x)\,dx \int_0^q yY_m(y)\,dy + \int_0^p X_k(x)\,dx \int_0^q Y_m(y)\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}}\int_0^p x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx \int_0^q y\cos\frac{\pi m}{q}y\,dy +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}}\int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx \int_0^q \cos\frac{\pi m}{q}y\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Big(\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Big[-x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p + \int_0^p \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\Big] + \frac{q}{\pi m}\Big[y\sin\frac{\pi m}{q}y\Big|_0^q -$$

$$- \int_0^q \sin\frac{\pi m}{q}y\,dy\Big] - \frac{2p}{-\pi+2\pi k}\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p \cdot \frac{q}{\pi m}\sin\frac{\pi m}{q}y\Big|_0^q\Big) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Big(\frac{4p^2}{(-\pi+2\pi k)^2}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p + \frac{q^2}{\pi^2 m^2}\cos\frac{\pi m}{q}y\Big|_0^q - \frac{2p}{-\pi+2\pi k}(0-1)\cdot\frac{q}{\pi m}(0-0)\Big) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Big((-1)^{k+1}\frac{4p^2}{(-\pi+2\pi k)^2} + ((-1)^m - 1)\frac{q^2}{\pi^2 m^2}\Big), \quad k,m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\varphi}_{k,0} := \int_\Omega \varphi(x,y)\cdot w_{k,0}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega (xy+1)\cdot X_k(x)Y_0(y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^p xX_k(x)\,dx \int_0^q yY_0(y)\,dy + \int_0^p X_k(x)\,dx \int_0^q Y_0(y)\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_0^p x \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx \int_0^q y\,dy +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_0^p \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx \int_0^q \,dy = ..., \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\psi}_{k,\,m} := \int_\Omega \psi(x,y) \cdot w_{k,\,m}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega 0 \cdot w_{k,\,m}(x,y)\,dxdy = 0, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0,$$

$$\widehat{f}_{k,\,m}(t) := \int_\Omega f(x,y,t) \cdot w_{k,\,m}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}} \int_\Omega (x+y)\cos t \cdot \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \cos\frac{\pi m}{q} y\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}} \cos t \cdot \int_\Omega (x+y) \cdot \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \cos\frac{\pi m}{q} y\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}} \cos t \cdot \Big[\int_0^p x \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx \int_0^q \cos\frac{\pi m}{q} y\,dy +$$

$$+ \int_0^p \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx \int_0^q y \cos\frac{\pi m}{q} y\,dy \Big] = ... = a_{k,\,m} \cos t, \quad t \in [0,T],\ k,m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_{k,\,0}(t) := \int_\Omega f(x,y,t) \cdot w_{k,\,0}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_\Omega (x+y)\cos t \cdot \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}} \cos t \cdot \int_\Omega (x+y) \cdot \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}} \cos t \cdot \Big[\int_0^p x \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx \int_0^q \,dy +$$

$$+ \int_0^p \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx \int_0^q y\,dy \Big] = ... = a_{k,\,0} \cos t, \quad t \in [0,T],\ k \in \mathbb{N},$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (23) – (25) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty} \widehat{u}_{k,\,m}(t) w_{k,\,m}(x,y), \quad (x,y,t) \in \overline{Q}, \tag{56}$$

де функції $\{\widehat{u}_{k,\,m}\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}''_{k,\,m}(t) + a^2 \lambda_{k,\,m} \widehat{u}_{k,\,m}(t) = \widehat{f}_{k,\,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_{k,\,m}(0) = \varphi_{k,\,m}, \quad \widehat{u}'_{k,\,m}(0) = \psi_{k,\,m} \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{57}$$

Умови (57) на коефіцієнти ряду (56) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (23) і умови (25), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (54)) і рівність (53). У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \left[\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t)\right] w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$
$$\sum_{k=1,m=0}^{\infty} \widehat{u}'_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,m=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Звідси випливають рівності (57).

Знайдемо $\{\widehat{u}_{k,m}\}$. Дивлячись на рівності (57), бачимо, що для кожних $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ функція $\widehat{u}_{k,m}$ (відповідний коефіцієнт ряду (56)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_{k,m} z = a_{k,m}\cos t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_{k,m}. \end{cases} \tag{58}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільних фіксованих $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_{k,m} z = 0. \tag{59}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_{k,m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_{k,m}}\, i.$$

Тоді

$$z = A_{k,m}\cos a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + B_{k,m}\sin a\sqrt{\lambda_{k,m}}t, \quad t \in [0,T], \quad A_{k,m},\, B_{k,m} \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (59).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (58) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_{k,m}\cos t, \quad t \in [0,T],$$

де $d_{k,m}$ – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_{k,m}\sin t, \quad z'' = -d_{k,m}\cos t \quad \Rightarrow \quad -d_{k,m}\cos t + a^2\lambda_{k,m} d_{k,m}\cos t = a_{k,m}\cos t \Rightarrow$$

$$(a^2\lambda_{k,m} - 1)d_{k,m} = a_{k,m} \ \Rightarrow d_{k,m} := \frac{a_{k,m}}{a^2\lambda_{k,m} - 1}, \quad k \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{N}_0 \tag{60}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2\lambda_{k,m} - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$).

Отож, маємо

$$z = A_{k,\,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + B_{k,\,m} \sin a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + d_{k,\,m} \cos t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (58). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_{k,\,m},\ B_{k,\,m}$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_{k,\,m} a\sqrt{\lambda_{k,\,m}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}B_{k,\,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t - d_{k,\,m} \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_{k,m} + d_{k,\,m} = \widehat{\varphi}_{k,\,m},$$

$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}B_{k,\,m} = \widehat{\psi}_{k,\,m}.$$

Звідси

$$A_{k,\,m} = \widehat{\varphi}_{k,\,m} - d_{k,\,m}, \quad B_{k,\,m} = \frac{\widehat{\psi}_{k,\,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_{k,\,m}(t) = \big(\widehat{\varphi}_{k,\,m} - d_{k,\,m}\big)\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + \frac{\widehat{\psi}_{k,\,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + d_{k,m} \cos t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (23) – (25) (див. (56)) є сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(\Omega))$ ряду

$$u(x,y,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty} \Big[\big(\widehat{\varphi}_{k,\,m} - d_{k,\,m}\big) \cos a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + \frac{\widehat{\psi}_{k,\,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t +$$

$$+ d_{k,\,m} \cos t\Big] X_k(x) Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T],$$

де $\lambda_{k,\,m},\ \widehat{\varphi}_{k,\,m},\ \widehat{\psi}_{k,\,m},\ d_{k,\,m}, X_k, Y_m$ для кожних $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ обчислюються за вище наведеними формулами.

□

Завдання для самостійної роботи

Нехай $p > 0, q > 0, \ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$, $Q := \Omega \times (0,T]$. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння коливань прямокутної мембрани:

1.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x^2 + y)\cos 2t, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 2xy, \quad u_t|_{t=0} = y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

2.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (2x + y)\cos 3t, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 5x + y, \quad u_t|_{t=0} = 2x, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

3.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (2x + y)\sin 2t, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 3x + 2y, \quad u_t|_{t=0} = y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

4.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x^2 + y)e^{2t}, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 3x - y, \quad u_t|_{t=0} = 3xy, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

5.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 2xyt + 1, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} (u_x - u)|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \qquad\qquad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 2x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 3y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Практичне заняття № 10

Мішані задачі для рівняння теплопровідності в стержні. Метод Фур'є

Нехай $l > 0$, $T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в стержні* полягає у знаходженні функції $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

крайові умови

$$(\alpha_0\widetilde{u}_x + \beta_0\widetilde{u})|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1\widetilde{u}_x + \beta_1\widetilde{u})|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \leqslant 0$, $\alpha_1\beta_1 \geqslant 0$,
- $\mu_0, \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi} : [0,l] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (1) — (3), якщо

$$\mu_0,\ \mu_1 \in H^2(0,T), \quad \widetilde{\varphi} \in L^2(0,l), \quad \widetilde{f} \in C([0,T];L^2(0,l)).$$

Розв'язування.

0-ий крок. Цей крок робимо, якщо або $\mu_0 \neq 0$, або $\mu_1 \neq 0$ (крайові умови неоднорідні). Спочатку шукаємо функцію $h \in H^2(Q)$, яка задовольняє крайові умови (2), тобто

$$(\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{4}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(x,t) = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{5}$$

де $p, q, r \in H^2(0,T)$ — функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалися умови (4). Для знаходження p, q, r шукають похідну

$$h_x(x,t) = 2p(t)x + q(t)$$

і підставляють вирази h і h_x в умови (4):

$$\begin{cases} \alpha_0 q(t) + \beta_0 r(t) = \mu_0(t), \\ \alpha_1(2lp(t) + q(t)) + \beta_1(l^2p(t) + lq(t) + r(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \end{cases}$$

Звідси знаходять p, q і r. Оскільки маємо два рівняння, а невідомих функцій — три, то одна з функцій p, q або r може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нульовою.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (1) — (3) роблять заміну

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{6}$$

де u — нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2(u+h)_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0(u+h)_x + \beta_0(u+h))|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1(u+h)_x + \beta_1(u+h))|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2 u_{xx} - a^2 h_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} + (\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \; (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} + (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x).$$

Отож, врахувавши (4), для нової невідомої функції u отримаємо задачу

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{9}$$

де $f(x,t) := \widetilde{f}(x,t) - h_t(x,t) + a^2 h_{xx}(x,t),\; (x,t) \in Q, \quad \varphi(x) := \widetilde{\varphi}(x) - h(x,0),\; x \in [0,l].$

Відмітимо, що коли $\mu_0 = \mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді у формулюванні задачі (7) — (9) маємо $u = \widetilde{u},\; f = \widetilde{f},\; \varphi = \widetilde{\varphi}$) і починаємо з 1-го кроку.

1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності (7) — (9) є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\; \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A), \tag{10}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\; x \in [0,l]\,; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\; x \in (0,l),$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (7) — (9) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{11}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{12}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) — це слабкий розв'язок задачі (11), (12). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (11), (12).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$A w_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \tag{13}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{14}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (13) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (14), і знаходження цих розв'язків, називають *задачею Штурма-Ліувілля.*

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \ t \in [0,T], \tag{15}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad f_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{16}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (16) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (7) і початкові умови (9) замість u (крайові умови (8) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (15)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k'(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad x\in[0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (17).

Дивлячись на рівності (17), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'+a^2\lambda_k z=\widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, що рівняння задачі (18) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z'+a^2\lambda_k z=0,\quad t\in(0,T], \tag{19}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (18).

Спочатку для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (19). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t}z'+a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t}z=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(e^{a^2\lambda_k t}z\right)'=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{a^2\lambda_k t}z=A_k,\quad t\in[0,T], \tag{20}$$

де A_k — довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (19) має вигляд

$$z=A_k e^{-a^2\lambda_k t},\quad t\in[0,T], \tag{21}$$

де A_k — довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z=A_k e^{-a^2\lambda_k t}+\overset{*}{z}(t),\quad t\in[0,T], \tag{22}$$

де A_k — довільна стала.

Для знаходження розв'язку задачі (18) підставимо вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (18). У результаті отримаємо

$$A_k+\overset{*}{z}(0)=\widehat{\varphi}_k \quad\Rightarrow\quad A_k=\widehat{\varphi}_k-\overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t):=(\widehat{\varphi}_k-\overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t}+\overset{*}{z}(t),\quad t\in[0,T]. \tag{23}$$

Підставивши знайдені вирази $\widehat{u}_k$, $k\in\mathbb{N}$, у ряд (16), отримаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9), оскільки при наших умовах на φ і f ряд (16) збігається в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопрвідності. $\square$

Зауваження 1. *Розглянемо кілька випадків знаходження часткового розв'язку рівняння задачі* (18) *методом неозначених коефіцієнтів.*

- *Якщо*

$$\widehat{f}_k(t) = a_k \cos\omega t + b_k \sin\omega t,$$

де ω, a_k, b_k — *сталі (може бути* $a_k = 0$ *або* $b_k = 0$*), то частковий розв'язок шукають у вигляді*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k \cos\omega t + d_k \sin\omega t,$$

де c_k *і* d_k *знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у неоднорідне рівняння.*

- *Якщо ж* $f_k(t) = a_k t + b_k$, *то*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k t + d_k,$$

де c_k *і* d_k *знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у рівняння задачі* (18).

- *Якщо* $f_k(t) = a_k e^{\omega t}$, *то*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k e^{\omega t},$$

де c_k *знаходять із лінійних алгебраїчного рівняння, яке отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у рівняння задачі* (18).

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай* $l > 0$, $T > 0$ — *довільно задані і фіксовані числа,* $Q := (0, l) \times (0, T]$. *Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в стержні*

$$\widetilde{u}_t - a^2 \widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x, t) \in Q, \tag{24}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \sin t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0, T], \tag{25}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = x + 1, \quad x \in [0, l], \tag{26}$$

Розв'язування.

0-ий крок. Оскільки крайові умови не є однорідними, то в задачі робимо заміну невідомої функції:

$$\widetilde{u}(x, t) = u(x, t) + h(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де u — нова невідома функція, а h — відома допоміжна функція така, що

$$h|_{x=0} = \sin t, \quad h_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0, T]. \tag{27}$$

Шукаємо функцію h у вигляді

$$h(x, t) := p(t) x^2 + q(t) x + r(t), \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де p, q, r такі, що виконуються рівності (27), тобто

$$r(t) = \sin t, \quad 2lp(t) + q(t) = 1, \quad t \in [0, T].$$

Звідси, поклавши $p(t)=0,\ t\in[0,T]$, знаходимо $r(t)=\sin t,\ q(t)=1,\ t\in[0,T]$, тобто

$$h(x,t):=x+\sin t,\quad (x,t)\in\overline{Q}.$$

Отож, в нашій задачі робимо заміну

$$\widetilde{u}(x,t)=u(x,t)+x+\sin t,\quad (x,t)\in\overline{Q}.$$

Маємо

$$u_t+\cos t-a^2u_{xx}=x\sin t,\quad (x,t)\in Q,$$
$$u|_{x=0}+\sin t=\sin t,\quad u_x|_{x=l}+1=1,\quad t\in(0,T],$$
$$u|_{t=0}+x=x+1,\quad x\in[0,l],$$

звідки отримуємо задачу для нової невідомої функції u:

$$u_t-a^2u_{xx}=-\cos t+x\sin t,\quad (x,t)\in Q, \tag{28}$$

$$u|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0,\quad t\in(0,T], \tag{29}$$

$$u|_{t=0}=1,\quad x\in[0,l]. \tag{30}$$

1-ий крок. Введемо позначення

$$f(x,t):=-\cos t+x\sin t,\quad (x,t)\in Q,\qquad \varphi(x):=1,\quad x\in[0,l],$$

і зведемо задачу (28) — (30) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A:D(A)\to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A):=\{v\in H^2(0,l)\mid v(0)=0,\ v'(l)=0\},\qquad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A), \tag{31}$$

а також позначення:

$$[0,T]\ni t\mapsto u(t):=u(x,t),\ x\in[0,l];\quad [0,T]\ni t\mapsto f(t):=f(x,t),\ x\in(0,l);$$

$$\varphi:=\varphi(x),\quad x\in[0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (28) — (30) є слабким розв'язком задачі

$$u'+a^2Au=f(t),\quad t\in(0,T], \tag{32}$$

$$u(0)=\varphi. \tag{33}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (28) — (30), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (32), (33).

2-ий крок. Знаходимо власні значення і відповідні їм власні елементи оператора A, а для цього зауважимо, що на підставі означення оператора A отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w\in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases}-w''=\lambda w,\quad x\in(0,l),\\ w(0)=0,\quad w'(l)=0.\end{cases} \tag{34}$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$.

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (34) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (34), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{35}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (35) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{36}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{37}$$

і підставимо вирази (36) і (37) в крайові умови задачі (34):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (38) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (38) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{39}$$

Розв'язавши рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ з врахуванням того, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, отримаємо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

звідки визначаємо власні значення оператора A:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у формулу (36) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{41}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \frac{1}{2}\big(1 - \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{l}x\big)\, dx = 1 \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_2^2\big(x - \frac{l}{-\pi + 2\pi k}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{l}x\big)\Big|_{x=0}^{x=l} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ складена з власних елементів оператора A, є такою:

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x, \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x \in (0,l), \; t \in [0,T], \tag{43}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx \; = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l 1\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx\,,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l(-\cos t + x\sin t)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= -\cos t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx + \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = a_k\cdot\sin t + b_k\cdot\sin t,$$

$$t\in[0,T]\,, \quad a_k := -\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx, \quad b_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (28) — (30) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in\overline{Q}, \tag{44}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ задовольняє рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k,\end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{45}$$

Умови (45) на коефіцієнти ряду (44) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (28) і умови (30), врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (43)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \;\Rightarrow\; w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x),\, x\in[0,l],\; k\in\mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x\in[0,l].$$

Звідси випливають рівності (45).

Знайдемо $\widehat{u}_k$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Дивлячись на рівності (45), бачимо, що функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (44)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos t + b_k \sin t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k \,. \end{cases} \tag{46}$$

Розв'яжемо цю задачу. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times\frac{dt}{z} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k\,dt,\;\; z = 0 \quad\Rightarrow\quad \ln|z| = -a^2\lambda_k\,t + \ln|A_k|,\;\; z = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k\,t}, \quad t \in [0,T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ — довільна стала,} \tag{47}$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k \cos t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

де c_k, d_k — сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-c_k \sin t + d_k \cos t + a^2\lambda_k(c_k \cos t + d_k \sin t) = a_k \cos t + b_k \sin t \quad\Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos t & : & a^2\lambda_k c_k + d_k = a_k \\ \sin t & : & -c_k + a^2\lambda_k d_k = b_k \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} a^2\lambda_k & 1 \\ -1 & a^2\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^2\lambda_k & 1 \\ -1 & a^2\lambda_k \end{vmatrix} = a^4\lambda_k^2 + 1,$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 1 \\ b_k & a^2\lambda_k \end{vmatrix} = a^2\lambda_k a_k - b_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a^2\lambda_k & a_k \\ -1 & b_k \end{vmatrix} = a^2\lambda_k b_k + a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k - b_k}{a^4\lambda_k^2 + 1}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k b_k + a_k}{a^4\lambda_k^2 + 1}. \tag{48}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k\,t} + c_k \cos t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ — довільна стала,}$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (46). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k\,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k\cos t + d_k\sin t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (24) — (26) є (див. (44)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$\widetilde{u}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k\cos t + d_k\sin t\right]\sin\sqrt{\lambda_k}x + x + \sin t, \quad (x,t)\in\overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, c_k, d_k для кожного $k\in\mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами. $\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $l>0$, $T>0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l)\times(0,T]$. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в стержні:

1.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = x^2t, \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 2t, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = t-1, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x, \quad x\in[0,l].$$

2.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x-1)e^t, \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = e^t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 0, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 3x, \quad x\in[0,l].$$

3.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = e^xt^2, \quad (x,t)\in Q,$$
$$(\widetilde{u}_x - h_0\widetilde{u})|_{x=0} = 2t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 2, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos x, \quad x\in[0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x+2)e^{2t}, \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = e^{2t}, \quad (\widetilde{u}_x + h_1\widetilde{u})|_{x=l} = 0, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \sin 3x, \quad x\in[0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = x\sin t, \quad (x,t)\in Q,$$
$$(\widetilde{u}_x - h_0\widetilde{u})|_{x=0} = \sin t, \quad (\widetilde{u}_x + h_1\widetilde{u})|_{x=l} = 2\sin t, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x, \quad x\in[0,l].$$

Контрольна робота № 2

Варіант № j, j — Ваш порядковий номер у журналі

Задача 1. Розв'язати мішану задачу для рівняння коливань струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = (x - j)e^{jt}, \quad (x,t) \in Q := (0;l) \times (0;1],$$

$$u|_{x=0} = je^{jt}, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0;1],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad x \in [0;l],$$

де $a = (|j-10|+1)$,
$l = (|j-10|+1)$,
$\varphi(x) = \sin(jx)$, якщо j – непарне,
$\varphi(x) = \cos(jx)$, якщо j – парне.

Задача 2. Розв'язати мішану задачу для рівняння коливань мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q := (0;p) \times (0;q) \times (0;1],$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in [0;q] \times (0;1], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0;p] \times (0;1], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = jx, \quad u_t|_{t=0} = y + j - 10, \quad (x,y) \in \overline{\Omega} := [0;p] \times [0;q],$$

де $a = (|j-10|+1)$,
$p = (|j-10|+1)$,
$q = (|j-10|+1)$,
$f(x,y,t) = y\sin(jt)$, якщо j – непарне,
$f(x,y,t) = x\cos(jt)$, якщо j – парне.

Практичне заняття № 12

Мішані задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску. Метод Фур'є

I. Довідковий матеріал

1. *Рівнянням Бесселя* називають рівняння вигляду

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

де $\nu = \text{const} \geqslant 0$, x — незалежна змінна, що приймає значення в $\mathbb{R}$.

Оскільки коефіцієнт рівняння (1) при y'' в точці $x = 0$ перетворюється в нуль, то його розв'язки можуть мати особливості при $x = 0$. Враховуючи це, а також те, що ліва частина рівняння (1) не змінюється при заміні x на $-x$, приходимо до висновку, що нам достатньо розглядати це рівняння на промені $(0, +\infty)$.

Розв'язки рівняння (1) шукають, враховуючи його вироджуваність при $x = 0$, у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{2}$$

де $\rho \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розв'язками рівняння (1) є функції Бесселя

$$J_{\pm\nu}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\pm\nu + m + 1)\Gamma(m+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2m\pm\nu}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{3}$$

ν-го порядку, причому, коли ν – не ціле (і, очевидно, що додатне), то функції J_ν і $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними, а коли $\nu = n \in \mathbb{N}$, то $J_{-n} = (-1)^n J_n$, звідки, зокрема, випливає, що J_n і J_{-n} є лінійно залежними. Тому вводять в розгляд функцію Вебера

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $\nu > 0$ – не ціле, і

$$Y_n(x) := \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n+2k} - \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Big(\frac{t}{2}\Big)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)}\right), \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Твердження 1. *Повний загальний розв'язок рівняння* (1) *на промені* $(0, +\infty)$ *має вигляд*

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \; \text{— довільні сталі.}$$

Зауваження 1. *Сім'я функцій Бесселя J_ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, володіє, зокрема, такими властивостями:*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{зокрема,} \quad J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(x^\rho J_\rho(x))' = x^\rho J_{\rho-1}(x), \quad \text{зокрема,} \quad J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$J_{\rho+1}(x) = \frac{2\rho}{x} J_\rho(x) - J_{\rho-1}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

2. Нехай
- $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 < l^2\}$ – круг радіуса l з центром в початку координат,
- $\Gamma := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 = l^2\}$ – коло радіуса l з центром в початку координат (воно обмежує Ω),
- $Q := \Omega \times (0, T]$ – циліндр з основою Ω і твірною, паралельною осі t,
- $\Sigma := \Gamma \times (0, T]$ – бічна поверхня циліндра Q.

Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску полягає у знаходженні функції $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{5}$$

крайову умову

$$\text{або} \quad u\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \quad \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\Big)\Big|_\Sigma = \mu \tag{6}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

де $a > 0,\ h > 0,\ \varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \ \mu : \Sigma \to \mathbb{R},\ \ f : Q \to \mathbb{R}$ – задані, $\Delta u := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$, ν – одинична зовнішня нормаль до Γ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – похідна u по нормалі ν.

Нас цікавить проблема ***знаходження*** *сильно узагальненого* розв'язку задачі (5) — (7), якщо

$$\varphi \in L_2(\Omega), \quad f \in C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

Перейдемо в цій задачі до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta, \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \quad -\infty < \theta < +\infty. \tag{8}$$

У результаті, врахувавши, що якщо $\widetilde{u}(r, \theta) := u(x_1, x_2)$, то

$$\Delta u = \widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta},$$

отримаємо ***задачу***: знайти функцію $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta}\big) = \widetilde{f}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in \widetilde{Q} := (0, l) \times \mathbb{R} \times (0, T], \tag{9}$$

крайові умови

$$\widetilde{u}(r, \theta + 2\pi, t) = \widetilde{u}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in (0, l] \times \mathbb{R} \times [0, T],$$

$$\lim_{r\to 0+}\widetilde{u}(r,\theta,t)<\infty, \quad (\alpha_1\widetilde{u}_r+\beta_1\widetilde{u})|_{r=l}=0, \quad (\theta,t)\in\mathbb{R}\times(0,T], \tag{10}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(r,\theta), \quad (r,\theta)\in[0,l]\times\mathbb{R}, \tag{11}$$

де

- $\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1|+|\beta_1|>0, \quad \alpha_1\beta_1\geq 0$,
- $\widetilde{\varphi}:[0,l]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad \widetilde{f}:(0,l)\times\mathbb{R}\times(0,T]\to\mathbb{R}$ – задані функції, причому
  $\widetilde{\varphi}(r,\theta+2\pi)=\widetilde{\varphi}(r,\theta), \quad (r,\theta)\in(0,l]\times\mathbb{R}$,
  $\widetilde{f}(r,\theta+2\pi,t)=\widetilde{f}(r,\theta,t), \quad (r,\theta,t)\in(0,l]\times\mathbb{R}\times[0,T]$.

Увага!!! Далі будемо розглядати випадок, коли задані функції $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ явно від змінної θ не залежать. Тоді від цієї змінної не буде залежати і розв'язок $\widetilde{u}$ отриманої задачі, а отже, задача матиме простіший вигляд. Для її розв'язування використовують ваговий простір $L_2(\rho;0,l)$, де $\rho(r):=r,\ r\in(0,l)$, складений з вимірних функцій $v:(0,l)\to\mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_0^l r|v(r)|^2\,dr<\infty$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком і породженою ним нормою:

$$(v,w)_{L_2(\rho;0,l)}:=\int\limits_0^l rv(r)w(r)\,dr, \quad \|v\|_{L_2(\rho;0,l)}:=\Big(\int\limits_0^l r|v(r)|^2\,dr\Big)^{1/2}, \quad v,w\in L_2(\rho;0,l).$$

3. Далі розглядаємо ***задачу***, розв'язування якої є метою нашого заняття.

Нехай $l>0,\ T>0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q:=(0,l)\times(0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску* полягає у знаходженні функції $u:\overline{Q}\to\mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t-a^2\big(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\big)=f(r,t), \quad (r,t)\in Q:=(0,l)\times(0,T], \tag{12}$$

крайові умови

$$\lim_{r\to 0+}u(r,t)<\infty, \quad (\alpha_1u_r+\beta_1u)|_{r=l}=0, \quad t\in(0,T], \tag{13}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0}=\varphi(r), \quad r\in[0,l], \tag{14}$$

де

- $\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1|+|\beta_1|>0,\ \alpha_1\beta_1\geq 0$,
- $\varphi:[0,l]\to\mathbb{R},\ f:Q\to\mathbb{R}$ – задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (12) — (14), якщо

$$\varphi\in L_2(\rho;0,l), \quad f\in C([0,T];L_2(\rho;0,l)).$$

Схема розв'язування.
1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A:D(A)\to L_2(\rho;0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A}:C^2([0,l])\to L_2(\rho;0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}):=\{v\in C^2([0,l])\mid v'(0)=0, \quad (\alpha_1v'+\beta_1v)|_{r=l}=0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}),$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, задача (12) – (14) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{15}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{16}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14) – це слабкий розв'язок задачі (15), (16). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (15), (16).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(\rho;0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, які складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' - \frac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \tag{17}$$

з крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{18}$$

Як уже говорилося раніше, задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (17) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (18), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* (і фактично розв'язуємо в просторі $C^2((0,l])$).

Покажемо, що всі власні значення оператора A є додатними, якщо $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_1 = 0$. Для цього домножимо рівняння (17) на r і врахувавши, що $rw'' + w' = (rw')'$, запишемо:

$$-(rw')' = \lambda rw, \quad r \in (0,l), \tag{19}$$

Нехай w – ненульовий розв'язок задачі (17), (18), тобто власний елемент оператора A. Домножимо рівність (19) на w і проінтегруємо здобуту рівність по проміжку $(0,l)$:

$$-\int_0^l (rw')'w\,dr = \lambda \int_0^l r|w|^2\,dr \quad \Leftrightarrow \quad -rw'w\Big|_0^l + \int_0^l r|w'|^2\,dr = \lambda \int_0^l r|w|^2\,dr.$$

Відмітимо, що $-rw'w\Big|_0^l \geqslant 0$. Справді, якщо або $\alpha_1 = 0$, або $\beta_1 = 0$, то, відповідно, або $w(l) = 0$, або $w'(0) = 0$, а отже, $-lw'(l)w(l) = 0$, а якщо $\alpha_1\beta_1 > 0$, то $-lw'(l)w(l) = \dfrac{l\beta_1}{\alpha_1}|w(l)|^2 \geqslant 0$. Враховуючи сказане, отримуємо

$$\lambda \geqslant \int\limits_0^l r|w'|^2\,dr \Big/ \int\limits_0^l r|w|^2\,dr \geqslant 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w'(r) = 0 \ \ \forall r \in [0,l] \quad \Leftrightarrow \ w(r) = C \ \ \forall r \in [0,l], \ \text{ де } C \text{ – стала.}$$

На підставі цього і другої з крайових умов (18) отримуємо, що якщо $\beta_1 \neq 0$, то $\lambda > 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, то $\lambda \geqslant 0$, зокрема, 0 є власним значенням.

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так. Перш за все зауважимо, що коли $\lambda = 0$, то з рівняння (19) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси ще раз випливає, що коли $\beta_1 \neq 0$, то $w \equiv 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (18) має вигляд $w'(l) = 0$, то $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int\limits_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int\limits_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2\frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, коли $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (18) має вигляд $w'(l) = 0$, то маємо

$$\lambda_0 = 0, \quad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \ \ r \in [0,l]. \tag{20}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння (17) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0,+\infty), \tag{21}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda}r. \tag{22}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \ \ x = \sqrt{\lambda}r,$$

то

$$w'(r) = y'(x)\cdot\sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x)\cdot\lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \quad x \in (0,+\infty). \tag{23}$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0, +\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі,} \tag{24}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (21) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l], \quad C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі.} \tag{25}$$

Легко знайти, що

$$w' = C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \sqrt{\lambda} Y_0'(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l],$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Враховуючи це (тобто, що $\lim\limits_{r \to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$), з першої з крайових умов (18) отримаємо $C_2 = 0,\ C_1$ – довільна стала, а з другої з крайових умов (18) маємо

$$C_1 \big[\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l)\big] = 0, \quad C_1 \neq 0 \text{– довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l) = 0\,. \tag{26}$$

Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$\alpha_1 \frac{\mu}{l} J_0'(\mu) + \beta_1 J_0(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{27}$$

Як відомо, рівняння (27) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k \to \infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2,\ k \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (25))

$$w_k(r) := M_k J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad r \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ стала $M_k > 0$ така, що $\int\limits_0^l r |w_k(r)|^2\, dr = 1$, тобто

$$M_k := 1 / \Big(\int\limits_0^l r \big|J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big)\big|^2\, dr\Big)^{1/2}.$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0, l], \quad f(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \quad r \in (0, l),\ t \in [0, T], \tag{30}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l rf(r,t)w_k(r)\,dr, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{31}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (31) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (12) і початкові умови (14) замість u (крайові умови (13) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (30)) і те, що

$$w_k''(r) + \frac{1}{r}w_k'(r) = -\lambda_k w_k(r), \quad r \in [0,l],\ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right] w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0)w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (32).

Дивлячись на рівності (32), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{33}$$

Очевидно, що рівняння задачі (33) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{34}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (33).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (34). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t}z' + a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t}z = 0 \Leftrightarrow \left(e^{a^2\lambda_k t}z\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{a^2\lambda_k t}z = A_k, \quad t \in [0,T], \tag{35}$$

де A_k – довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0,T], \tag{36}$$

де A_k – довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (33) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (33), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0, T], \tag{37}$$

де A_k – довільна стала. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (33), отримаємо

$$A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \quad \Rightarrow \quad A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := (\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0, T], \tag{38}$$

а значить, розв'язок нашої задачі має вигляд

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \big[(\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t)\big] J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{39}$$

При наших умовах на φ і f ряд (39) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(\rho; 0, l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. $\square$

Зауваження 2. *Якщо маємо задачу*

$$\widetilde{u}_t - a^2(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r) = \widetilde{f}(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{40}$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 \widetilde{u}_r + \beta_1 \widetilde{u})|_{r=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{41}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r), \quad r \in [0,l], \tag{42}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – *сталі такі, що* $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \ \ \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}, \ \ f : Q \to \mathbb{R}, \ \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$ — *задані функції, причому* $\mu_1 \neq 0$, *тобто друга з крайових умов* (13) *є неоднорідною, то спочатку робимо*

0-ий крок. *Шукаємо функцію* $h \in H^2(Q)$, *яка задовольняє крайову умову* (41), *тобто*

$$(\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{43}$$

Функцію h *можна шукати у вигляді*

$$h(r,t) = a(t)r + b(t), \quad (r,t) \in \overline{Q}, \tag{44}$$

де $a, b \in H^2(0,T)$ – *функції від змінної* t, *які вибирають такими, щоби виконувалася умова* (43).

Для знаходження a *і* b *шукають похідну* $h_r(r,t) = a(t)$ *і підставляють вирази* h *і* h_r *в умову* (43):

$$\alpha_1 a(t) + \beta_1(la(t) + b(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T].$$

Звідси знаходять a *і* b. *Оскільки маємо одне рівняння, а невідомих функцій – дві, то одна з функцій* a, b *може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нулеві.*

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (40) – (48) *роблять заміну*

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{45}$$

де u – нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2\big[(u+h)_{rr} + \frac{1}{r}(u+h)_r\big] = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+}(u+h) < \infty, \quad (\alpha_1(u+h)_r + \beta_1(u+h))|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) - a^2(h_{rr} + \frac{1}{r}h_r) = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) + \lim_{r\to 0+} h(r,t) < \infty, \, (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} + (\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \varphi(r).$$

Отож, врахувавши (43), *для нової невідомої функції u отримаємо задачу*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = f(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{46}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{47}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r \in [0,l], \tag{48}$$

де $f(r,t) := \widetilde{f}(r,t) - h_t(r,t) + a^2(h_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}h_r(r,t)), \quad \varphi(r) := \widetilde{\varphi}(r) - h(r,0).$

Відмітимо, що коли $\mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (40) – (48) *маємо $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{f} = f$, $\widetilde{\varphi} = \varphi$) і починаємо з 1-го кроку.*

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = r^2 \cos 2t, \quad (r,t) \in Q, \tag{49}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{50}$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l]. \tag{51}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(r,t) := r^2 \cos 2t, \quad (r,t) \in Q, \qquad \varphi(r) := 1, \quad r \in [0,l],$$

і зведемо задачу (49) – (51) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\rho; 0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A} : C^2([0,l]) \to L_2(\rho; 0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \{v \in C^2([0,l]) \mid v'(0) = 0, \quad v'(l) = 0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}), \tag{52}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51) є слабким розв'язком задачі

$$u' + a^2Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{53}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{54}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (53), (54).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' - \dfrac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \\ \lim\limits_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{55}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geqslant 0$ такі, що задача (55) має ненульові розв'язки. Перш за все зауважимо, що у випадку $\lambda = 0$ з рівняння задачі (55) (після множення на $-r$) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси та з крайових умов випливає, що $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int\limits_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2\int\limits_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2\frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, маємо

$$\lambda_0 = 0, \qquad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \quad r \in [0,l]. \tag{56}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння задачі (55) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0,+\infty),$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda}r. \tag{57}$$

Тоді, якщо
$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \;\; x = \sqrt{\lambda}\, r,$$
то
$$w(r) = y(x), \quad w'(r) = y'(x)\cdot\sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x)\cdot\lambda,$$
а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку
$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \quad x \in (0, +\infty).$$
Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0, +\infty)$ має вигляд
$$y = C_1J_0(x) + C_2Y_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \;\; C_1,\; C_2 \;\text{ – довільні сталі}, \tag{58}$$
де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (55) має вигляд
$$w = C_1J_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2Y_0(\sqrt{\lambda}r), \quad r \in (0, l], \;\; C_1,\; C_2 \;\text{ – довільні сталі}. \tag{59}$$
Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Тоді з першої з крайових умов задачі (55), зважаючи на те, що $\lim\limits_{r\to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda}r) = \infty$, отримаємо, що $C_2 = 0$, C_1 – довільна стала, а з другої з крайових умов задачі (55) маємо
$$C_1\sqrt{\lambda}J_0'(\sqrt{\lambda}l) = 0, \quad C_1 \neq 0 \text{ – довільна стала.}$$
Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:
$$J_0'(\sqrt{\lambda}l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_1(\sqrt{\lambda}l) = 0 \tag{60}$$
(тут використана рівність $J_0'(x) = -J_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$). Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda}l$, отримаємо рівняння
$$J_1(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{61}$$
Як відомо, рівняння (61) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так
$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є
$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{62}$$
а відповідними їм власними функціями є (див. (59))
$$w_k(r) := C_1J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big), \quad r \in [0, l],\; C_1 \neq 0 \text{ — довільна стала}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{63}$$
Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо значення C_1 таким, щоби функція w_k була нормованою, тобто виконувалась умова
$$\int\limits_0^l r|w_k(r)|^2\,dr \equiv C_1^2\int\limits_0^l r|J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big)|^2\,dr = 1. \tag{64}$$

Маємо

$$\int\limits_0^l r\big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big)\big|^2\,dr = \Big[x = \frac{\mu_k}{l}r, \quad r = \frac{l}{\mu_n}x, \quad dr = \frac{l}{\mu_k}\,dx\Big] = \Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 \int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx.$$

Далі нам будуть потрібні такі відомі для функцій Бесселя рівності

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (xJ_1(x))' = xJ_0(x), \quad (x^2J_2(x))' = x^2J_1(x),$$

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Враховуючи це та використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx = \int\limits_0^{\mu_k} |J_0(x)|^2\,d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}|J_0(x)|^2\Big|_0^{\mu_k} - \int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_0(x)J_0'(x)\,dx =$$

$$= \frac{|\mu_k J_0(\mu_k)|^2}{2} + \int\limits_0^{\mu_k} xJ_1(x)\,d(xJ_1(x)) = \frac{|\mu_k J_0(\mu_k)|^2}{2} + \frac{|xJ_1(x)|^2}{2}\Big|_0^{\mu_k} = \frac{|\mu_k J_0(\mu_k)|^2}{2}.$$

Звідси та з (64) знаходимо

$$C_1^2\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\frac{|\mu_k J_0(\mu_k)|^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\sqrt{2}}{lJ_0(\mu_k)} =: M_k.$$

Отож, власними функціями є

$$w_k(r) := M_k J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big), \quad r \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0, l], \quad f(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \quad r \in (0, l), \ t \in [0, T], \tag{66}$$

де

$$\widehat{\varphi}_0 := \int_0^l r\varphi(r)w_0(r)\,dr = \frac{\sqrt{2}l}{2},$$

а для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr = M_k\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr =$$

$$\Big[\text{заміна}: \quad x = \frac{\mu_k}{l}r, \quad r = \frac{l}{\mu_n}x, \quad dr = \frac{l}{\mu_k}\,dx\Big]$$

$$= M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 \int\limits_0^{\mu_k} xJ_0(x)\,dx = M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 \int\limits_0^{\mu_k} (xJ_1(x))'\,dx = M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_k} = 0\,,$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int_0^l rf(r,t)w_0(r)\,dr = \frac{\sqrt{2}}{l}\int_0^l r^3\cos 2t\,dr = \frac{\sqrt{2}l^3}{4}\cos 2t = a_0\cos 2t, \quad a_0 := \frac{\sqrt{2}l^3}{4},$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l rf(r,t)w_k(r)\,dr = M_k\int_0^l r\cdot r^2\cos 2t\cdot J_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr = \cos 2t\cdot M_k\int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr =$$
$$= a_k\cos 2t, \quad t\in[0,T]\,,$$

де

$$a_k := M_k\int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr = \Big[\text{заміна}:\quad x=\frac{\mu_k}{l}r, \quad r=\frac{l}{\mu_n}x, \quad dr=\frac{l}{\mu_k}\,dx\Big] =$$
$$= M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^4\int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\,dx.$$

Знаходимо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\,dx = \int\limits_0^{\mu_k} x^2(xJ_1(x))'\,dx = x^3J_1(x)\Big|_0^{\mu_k} - 2\int\limits_0^{\mu_k} x^2J_1(x)\,dx =$$

$$= -2\int\limits_0^{\mu_k} x^2J_1(x)\,dx = -2\int\limits_0^{\mu_k}(x^2J_2(x))'\,dx = -2x^2J_2(x)\Big|_0^{\mu_k} = -2(\mu_k)^2J_2(\mu_k) =$$
$$= -2(\mu_k)^2\big(\frac{2}{\mu_k}J_1(\mu_k) - J_0(\mu_k)\big) = 2(\mu_k)^2J_0(\mu_k).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(r), \quad (r,t)\in\overline{Q}, \tag{67}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k,\end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{68}$$

Умови (68) на коефіцієнти ряду (67) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (49) і умови (51), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (66)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \quad\Rightarrow\quad w_k''(r) + \frac{1}{r}w_k' = -\lambda_k w_k(r), \;\; r\in[0,l],\; k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad (r,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r\in[0,l].$$

Звідси випливають рівності (68).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Дивлячись на рівності (68), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (67)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos 2t, \quad t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k\,. \end{cases} \tag{69}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Перш за все розглянемо випадок $k = 0$. Оскільки $\lambda_0 = 0$, то рівняння задачі (69) має вигляд $z' = a_0 \cos 2t$, повний загальний якого має вигляд $z = \frac{a_0}{2} \sin 2t + A_0$, де A_0 — довільна стала. Звідси та з початковою умовою задачі (69) матимемо $z(0) \equiv A_0 = \varphi_0$. Отож, ми отримали

$$\widehat{u}_0(t) := \frac{a_0}{2} \sin 2t + \varphi_0, \quad t \in [0, T]. \tag{70}$$

Тепер розглянемо випадок $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (69). Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times \frac{dt}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k\, dt, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = -a^2\lambda_k\, t + \ln|A_k|, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k\, t}, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала,} \tag{71}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0, T],$$

де c_k, d_k – сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-2c_k \sin 2t + 2d_k \cos 2t + a^2\lambda_k(2c_k \cos 2t + 2d_k \sin 2t) = a_k \cos 2t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos 2t & : & 2a^2\lambda_k c_k + 2d_k = a_k \\ \sin 2t & : & -2c_k + 2a^2\lambda_k d_k = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 4(a^4\lambda_k^2 + 1),$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 2 \\ 0 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 2a^2\lambda_k a_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & a_k \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}. \tag{72}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0,T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала,}$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (69). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k\,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (49) – (51) є (див. (67)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(\rho;0,l))$ ряду

$$u(r,t) = \frac{\sqrt{2}}{l}\Big[\frac{a_0}{2}\sin 2t + \varphi_0\Big] + \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t\Big] J_0\Big(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{l} r\Big), \ (r,t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, c_k, d_k для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0, \ T > 0, \ h_1 > 0$ – довільно задані і фіксовані числа. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в круговому диску:

1.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = t^2, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 4, \quad r \in [0,l].$$

2.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = e^{2t}, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = r^2 + 2, \quad r \in [0,l],$$

3.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = (r^2-1)e^{t}, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (u_r + h_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2(t+1), \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 2, \quad r \in [0, l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = 2t^3, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r \to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) = 5, \quad t \in (0,T],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = l^2 - r^2, \quad r \in [0, l].$$

6.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2 t, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r \to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) + h_1\widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = 7, \quad r \in [0, l].$$

(Завдання №6 бажано зробити, але не обов'язково)

Практичне заняття № 12

Мішані задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску. Метод Фур'є

I. Довідковий матеріал

1. *Рівнянням Бесселя* називають рівняння вигляду

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

де $\nu = \mathrm{const} \geqslant 0$, x — незалежна змінна, що приймає значення в $\mathbb{R}$.

Оскільки коефіцієнт рівняння (1) при y'' в точці $x = 0$ перетворюється в нуль, то його розв'язки можуть мати особливості при $x = 0$. Враховуючи це, а також те, що ліва частина рівняння (1) не змінюється при заміні x на $-x$, приходимо до висновку, що нам достатньо розглядати це рівняння на промені $(0, +\infty)$.

Розв'язки рівняння (1) шукають, враховуючи його вироджуваність при $x = 0$, у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{2}$$

де $\rho \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розв'язками рівняння (1) є функції Бесселя

$$J_{\pm\nu}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\pm\nu + m + 1)\Gamma(m+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2m\pm\nu}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{3}$$

ν-го порядку, причому, коли ν – не ціле (і, очевидно, що додатне), то функції J_ν і $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними, а коли $\nu = n \in \mathbb{N}$, то $J_{-n} = (-1)^n J_n$, звідки, зокрема, випливає, що J_n і J_{-n} є лінійно залежними. Тому вводять в розгляд функцію Вебера

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $\nu > 0$ – не ціле, і

$$Y_n(x) := \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n+2k} - \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Big(\frac{t}{2}\Big)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)}\right), \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Твердження 1. *Повний загальний розв'язок рівняння* (1) *на промені* $(0, +\infty)$ *має вигляд*

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \ \text{— довільні сталі.}$$

Зауваження 1. *Сім'я функцій Бесселя J_ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, володіє, зокрема, такими властивостями:*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{зокрема}, \quad J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(x^\rho J_\rho(x))' = x^\rho J_{\rho-1}(x), \quad \textit{зокрема}, \quad J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$J_{\rho+1}(x) = \frac{2\rho}{x} J_\rho(x) - J_{\rho-1}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

2. Нехай

- $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 < l^2\}$ – круг радіуса l з центром в початку координат,
- $\Gamma := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 = l^2\}$ – коло радіуса l з центром в початку координат (воно обмежує Ω),
- $Q := \Omega \times (0, T]$ – циліндр з основою Ω і твірною, паралельною осі t,
- $\Sigma := \Gamma \times (0, T]$ – бічна поверхня циліндра Q.

Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску полягає у знаходженні функції $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{5}$$

крайову умову

$$\text{або} \;\; u\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \;\; \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\Big)\Big|_\Sigma = \mu \tag{6}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

де $a > 0$, $h > 0$, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, $f : Q \to \mathbb{R}$ – задані, $\Delta u := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$, ν – одинична зовнішня нормаль до Γ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – похідна u по нормалі ν.

Нас цікавить проблема ***знаходження*** *сильно узагальненого* розв'язку задачі (5) — (7), якщо

$$\varphi \in L_2(\Omega), \quad f \in C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

Перейдемо в цій задачі до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta, \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \quad -\infty < \theta < +\infty. \tag{8}$$

У результаті, врахувавши, що якщо $\widetilde{u}(r, \theta) := u(x_1, x_2)$, то

$$\Delta u = \widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta},$$

отримаємо ***задачу***: знайти функцію $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta}\big) = \widetilde{f}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in \widetilde{Q} := (0, l) \times \mathbb{R} \times (0, T], \tag{9}$$

крайові умови

$$\widetilde{u}(r, \theta + 2\pi, t) = \widetilde{u}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in (0, l] \times \mathbb{R} \times [0, T],$$

$$\lim_{r\to 0+}\widetilde{u}(r,\theta,t)<\infty,\quad (\alpha_1\widetilde{u}_r+\beta_1\widetilde{u})|_{r=l}=0,\quad (\theta,t)\in\mathbb{R}\times(0,T], \tag{10}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(r,\theta),\quad (r,\theta)\in[0,l]\times\mathbb{R}, \tag{11}$$

де

- $\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1|+|\beta_1|>0,\quad \alpha_1\beta_1\geq 0$,
- $\widetilde{\varphi}:[0,l]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \widetilde{f}:(0,l)\times\mathbb{R}\times(0,T]\to\mathbb{R}$ – задані функції, причому
  $\widetilde{\varphi}(r,\theta+2\pi)=\widetilde{\varphi}(r,\theta),\ \ (r,\theta)\in(0,l]\times\mathbb{R}$,
  $\widetilde{f}(r,\theta+2\pi,t)=\widetilde{f}(r,\theta,t),\quad (r,\theta,t)\in(0,l]\times\mathbb{R}\times[0,T]$.

Увага!!! Далі будемо розглядати випадок, коли задані функції $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ явно від змінної θ не залежать. Тоді від цієї змінної не буде залежати і розв'язок $\widetilde{u}$ отриманої задачі, а отже, задача матиме простіший вигляд. Для її розв'язування використовують ваговий простір $L_2(\rho;0,l)$, де $\rho(r):=r,\ r\in(0,l)$, складений з вимірних функцій $v:(0,l)\to\mathbb{R}$ таких, що $\int_0^l r|v(r)|^2\,dr<\infty$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком і породженою ним нормою:

$$(v,w)_{L_2(\rho;0,l)}:=\int_0^l rv(r)w(r)\,dr,\quad \|v\|_{L_2(\rho;0,l)}:=\Big(\int_0^l r|v(r)|^2\,dr\Big)^{1/2},\quad v,w\in L_2(\rho;0,l).$$

3. Далі розглядаємо ***задачу***, розв'язування якої є метою нашого заняття.

Нехай $l>0,\ T>0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q:=(0,l)\times(0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску* полягає у знаходженні функції $u:\overline{Q}\to\mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t-a^2\big(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\big)=f(r,t),\quad (r,t)\in Q:=(0,l)\times(0,T], \tag{12}$$

крайові умови

$$\lim_{r\to 0+}u(r,t)<\infty,\quad (\alpha_1u_r+\beta_1u)|_{r=l}=0,\quad t\in(0,T], \tag{13}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0}=\varphi(r),\quad r\in[0,l], \tag{14}$$

де

- $\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1|+|\beta_1|>0,\ \alpha_1\beta_1\geq 0$,
- $\varphi:[0,l]\to\mathbb{R},\ f:Q\to\mathbb{R}$ – задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (12) — (14), якщо

$$\varphi\in L_2(\rho;0,l),\quad f\in C([0,T];L_2(\rho;0,l)).$$

Схема розв'язування.
1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A:D(A)\to L_2(\rho;0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A}:C^2([0,l])\to L_2(\rho;0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}):=\{v\in C^2([0,l])\mid v'(0)=0,\quad (\alpha_1v'+\beta_1v)|_{r=l}=0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}),$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, задача (12) – (14) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{15}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{16}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14) – це слабкий розв'язок задачі (15), (16). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (15), (16).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(\rho;0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, які складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' - \frac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \tag{17}$$

з крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{18}$$

Як уже говорилося раніше, задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (17) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (18), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* (і фактично розв'язуємо в просторі $C^2((0,l])$).

Покажемо, що всі власні значення оператора A є додатними, якщо $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_1 = 0$. Для цього домножимо рівняння (17) на r і врахувавши, що $rw'' + w' = (rw')'$, запишемо:

$$-(rw')' = \lambda r w, \quad r \in (0,l), \tag{19}$$

Нехай w – ненульовий розв'язок задачі (17), (18), тобто власний елемент оператора A. Домножимо рівність (19) на w і проінтегруємо здобуту рівність по проміжку $(0,l)$:

$$-\int_0^l (rw')'w\,dr = \lambda\int_0^l r|w|^2\,dr \quad \Leftrightarrow \quad -rw'w\Big|_0^l + \int_0^l r|w'|^2\,dr = \lambda\int_0^l r|w|^2\,dr.$$

Відмітимо, що $-rw'w\Big|_0^l \geqslant 0$. Справді, якщо або $\alpha_1 = 0$, або $\beta_1 = 0$, то, відповідно, або $w(l) = 0$, або $w'(0) = 0$, а отже, $-lw'(l)w(l) = 0$, а якщо $\alpha_1\beta_1 > 0$, то $-lw'(l)w(l) = \dfrac{l\beta_1}{\alpha_1}|w(l)|^2 \geqslant 0$. Враховуючи сказане, отримуємо

$$\lambda \geqslant \int\limits_0^l r|w'|^2\,dr \Big/ \int\limits_0^l r|w|^2\,dr \geqslant 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w'(r) = 0 \ \ \forall r \in [0,l] \quad \Leftrightarrow \ w(r) = C \ \ \forall r \in [0,l], \ \ \text{де } C \text{ – стала.}$$

На підставі цього і другої з крайових умов (18) отримуємо, що якщо $\beta_1 \neq 0$, то $\lambda > 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, то $\lambda \geqslant 0$, зокрема, 0 є власним значенням.

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так. Перш за все зауважимо, що коли $\lambda = 0$, то з рівняння (19) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси ще раз випливає, що коли $\beta_1 \neq 0$, то $w \equiv 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (18) має вигляд $w'(l) = 0$, то $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int\limits_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int\limits_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, коли $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (18) має вигляд $w'(l) = 0$, то маємо

$$\lambda_0 = 0, \quad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \ \ r \in [0,l]. \tag{20}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння (17) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2 w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0, +\infty), \tag{21}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda} r. \tag{22}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \ \ x = \sqrt{\lambda} r,$$

то

$$w'(r) = y'(x) \cdot \sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x) \cdot \lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad x \in (0, +\infty). \tag{23}$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0,+\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0,+\infty), \ \ C_1,\ C_2 \ \text{ – довільні сталі,} \tag{24}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (21) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0,l], \ \ C_1,\ C_2 \ \text{ – довільні сталі.} \tag{25}$$

Легко знайти, що

$$w' = C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \sqrt{\lambda} Y_0'(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0,l],$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Враховуючи це (тобто, що $\lim\limits_{r\to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$), з першої з крайових умов (18) отримаємо $C_2 = 0,\ C_1$ – довільна стала, а з другої з крайових умов (18) маємо

$$C_1 \big[\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l)\big] = 0, \quad C_1 \neq 0\text{– довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l) = 0\,. \tag{26}$$

Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$\alpha_1 \frac{\mu}{l} J_0'(\mu) + \beta_1 J_0(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{27}$$

Як відомо, рівняння (27) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2,\ k \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (25))

$$w_k(r) := M_k J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad r \in [0,l], \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ стала $M_k > 0$ така, що $\int\limits_0^l r|w_k(r)|^2\,dr = 1$, тобто

$$M_k := 1/\Big(\int\limits_0^l r|J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big)|^2\,dr\Big)^{1/2}.$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \ \ r \in [0,l], \quad f(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \ \ r \in (0,l),\ t \in [0,T], \tag{30}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l rf(r,t)w_k(r)\,dr, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{31}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (31) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (12) і початкові умови (14) замість u (крайові умови (13) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (30)) і те, що

$$w_k''(r) + \frac{1}{r}w_k'(r) = -\lambda_k w_k(r), \quad r \in [0,l],\ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right] w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0)w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (32).

Дивлячись на рівності (32), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{33}$$

Очевидно, що рівняння задачі (33) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{34}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (33).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (34). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t}z' + a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t}z = 0 \Leftrightarrow \left(e^{a^2\lambda_k t}z\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{a^2\lambda_k t}z = A_k, \quad t \in [0,T], \tag{35}$$

де A_k – довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0,T], \tag{36}$$

де A_k – довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (33) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (33), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{37}$$

де A_k – довільна стала. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (33), отримаємо

$$A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \quad \Rightarrow \quad A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := (\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{38}$$

а значить, розв'язок нашої задачі має вигляд

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k\big[(\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t)\big] J_0\Big(\frac{\mu_k}{l}r\Big), \quad (r,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{39}$$

При наших умовах на φ і f ряд (39) збігається в просторі $C([0,T];L^2(\rho;0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. $\square$

Зауваження 2. *Якщо маємо задачу*

$$\widetilde{u}_t - a^2(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r) = \widetilde{f}(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{40}$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1\widetilde{u}_r + \beta_1\widetilde{u})|_{r=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{41}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r), \quad r \in [0,l], \tag{42}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – *сталі такі, що* $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \ \ \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}, \ \ f : Q \to \mathbb{R}, \ \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$ — *задані функції, причому* $\mu_1 \neq 0$, *тобто друга з крайових умов* (13) *є неоднорідною, то спочатку робимо*

0-ий крок. *Шукаємо функцію* $h \in H^2(Q)$, *яка задовольняє крайову умову* (41), *тобто*

$$(\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{43}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(r,t) = a(t)r + b(t), \quad (r,t) \in \overline{Q}, \tag{44}$$

де $a, b \in H^2(0,T)$ – *функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалася умова* (43).

Для знаходження a і b шукають похідну $h_r(r,t) = a(t)$ і підставляють вирази h і h_r в умову (43)*:*

$$\alpha_1 a(t) + \beta_1(la(t) + b(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T].$$

Звідси знаходять a і b. Оскільки маємо одне рівняння, а невідомих функцій – дві, то одна з функцій a, b може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нулеві.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (40) – (48) *роблять заміну*

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{45}$$

де u – нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2\big[(u+h)_{rr} + \frac{1}{r}(u+h)_r\big] = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+}(u+h) < \infty, \quad (\alpha_1(u+h)_r + \beta_1(u+h))|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) - a^2(h_{rr} + \frac{1}{r}h_r) = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) + \lim_{r\to 0+} h(r,t) < \infty, \; (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} + (\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \varphi(r).$$

Отож, врахувавши (43), *для нової невідомої функції u отримаємо задачу*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = f(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{46}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{47}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r \in [0,l], \tag{48}$$

де $f(r,t) := \widetilde{f}(r,t) - h_t(r,t) + a^2(h_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}h_r(r,t)), \quad \varphi(r) := \widetilde{\varphi}(r) - h(r,0).$

Відмітимо, що коли $\mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (40) – (48) *маємо $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{f} = f$, $\widetilde{\varphi} = \varphi$) і починаємо з 1-го кроку.*

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = r^2 \cos 2t, \quad (r,t) \in Q, \tag{49}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{50}$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l]. \tag{51}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(r,t) := r^2 \cos 2t, \quad (r,t) \in Q, \qquad \varphi(r) := 1, \quad r \in [0,l],$$

і зведемо задачу (49) – (51) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\rho; 0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A} : C^2([0,l]) \to L_2(\rho; 0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \{v \in C^2([0,l]) \mid v'(0) = 0, \quad v'(l) = 0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}), \tag{52}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51) є слабким розв'язком задачі

$$u' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{53}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{54}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (53), (54).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' - \dfrac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \\ \lim\limits_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{55}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geqslant 0$ такі, що задача (55) має ненульові розв'язки. Перш за все зауважимо, що у випадку $\lambda = 0$ з рівняння задачі (55) (після множення на $-r$) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси та з крайових умов випливає, що $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int\limits_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int\limits_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, маємо

$$\lambda_0 = 0, \qquad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \quad r \in [0,l]. \tag{56}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння задачі (55) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2 w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0,+\infty),$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda} r. \tag{57}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \quad x = \sqrt{\lambda}\, r,$$

то

$$w(r) = y(x), \quad w'(r) = y'(x) \cdot \sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x) \cdot \lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0, +\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі,} \tag{58}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (55) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l], \quad C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі.} \tag{59}$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Тоді з першої з крайових умов задачі (55), зважаючи на те, що $\lim\limits_{r \to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$, отримаємо, що $C_2 = 0$, C_1 – довільна стала, а з другої з крайових умов задачі (55) маємо

$$C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) = 0, \quad C_1 \neq 0 \ \text{– довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$J_0'(\sqrt{\lambda} l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_1(\sqrt{\lambda} l) = 0 \tag{60}$$

(тут використана рівність $J_0'(x) = -J_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$). Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$J_1(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{61}$$

Як відомо, рівняння (61) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k \to \infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{62}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (59))

$$w_k(r) := C_1 J_0\big(\frac{\mu_k}{l} r\big), \quad r \in [0, l],\ C_1 \neq 0 \text{ — довільна стала,} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{63}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо значення C_1 таким, щоби функція w_k була нормованою, тобто виконувалась умова

$$\int\limits_0^l r |w_k(r)|^2\, dr \equiv C_1^2 \int\limits_0^l r \big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l} r\big)\big|^2\, dr = 1. \tag{64}$$

Маємо

$$\int\limits_0^l r\big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big)\big|^2\,dr = \Big[x=\frac{\mu_k}{l}r, \quad r=\frac{l}{\mu_n}x, \quad dr=\frac{l}{\mu_k}\,dx\Big] = \Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx.$$

Далі нам будуть потрібні такі відомі для функцій Бесселя рівності

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (xJ_1(x))' = xJ_0(x), \quad (x^2J_2(x))' = x^2J_1(x),$$

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x), \quad x\in(0,+\infty).$$

Враховуючи це та використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx = \int\limits_0^{\mu_k}|J_0(x)|^2\,d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}|J_0(x)|^2\Big|_0^{\mu_k} - \int\limits_0^{\mu_k} x^2J_0(x)J_0'(x)\,dx =$$

$$= \frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2} + \int\limits_0^{\mu_k} xJ_1(x)\,d(xJ_1(x)) = \frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2} + \frac{|xJ_1(x)|^2}{2}\Big|_0^{\mu_k} = \frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2}.$$

Звідси та з (64) знаходимо

$$C_1^2\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad C_1 = \frac{\sqrt{2}}{lJ_0(\mu_k)} =: M_k.$$

Отож, власними функціями є

$$w_k(r) := M_kJ_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big), \quad r\in[0,l], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{65}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_kw_k(r), \quad r\in[0,l], \quad f(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad r\in(0,l),\ t\in[0,T], \tag{66}$$

де

$$\widehat{\varphi}_0 := \int_0^l r\varphi(r)w_0(r)\,dr \,=\frac{\sqrt{2}l}{2},$$

а для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr \,= M_k\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr =$$

$$\Big[\text{заміна}: \quad x=\frac{\mu_k}{l}r, \quad r=\frac{l}{\mu_n}x, \quad dr=\frac{l}{\mu_k}\,dx\Big]$$

$$= M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k} xJ_0(x)\,dx = M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k}(xJ_1(x))'\,dx = M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_k} = 0\,,$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int_0^l rf(r,t)w_0(r)\,dr = \frac{\sqrt{2}}{l}\int_0^l r^3\cos 2t\,dr = \frac{\sqrt{2}l^3}{4}\cos 2t = a_0\cos 2t, \quad a_0 := \frac{\sqrt{2}l^3}{4},$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l r f(r,t) w_k(r)\, dr = M_k \int_0^l r \cdot r^2 \cos 2t \cdot J_0(\frac{\mu_k}{l} r)\, dr = \cos 2t \cdot M_k \int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l} r)\, dr =$$
$$= a_k \cos 2t, \quad t \in [0,T]\,,$$

де

$$a_k := M_k \int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l} r)\, dr = \Big[\text{заміна}: \quad x = \frac{\mu_k}{l} r, \quad r = \frac{l}{\mu_n} x, \quad dr = \frac{l}{\mu_k}\, dx\Big] =$$
$$= M_k \Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^4 \int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\, dx.$$

Знаходимо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\, dx = \int\limits_0^{\mu_k} x^2 (x J_1(x))'\, dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^{\mu_k} - 2 \int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\, dx =$$

$$= -2 \int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\, dx = -2 \int\limits_0^{\mu_k} (x^2 J_2(x))'\, dx = -2x^2 J_2(x)\Big|_0^{\mu_k} = -2(\mu_k)^2 J_2(\mu_k) =$$

$$= -2(\mu_k)^2 \big(\frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) - J_0(\mu_k)\big) = 2(\mu_k)^2 J_0(\mu_k).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(r), \quad (r,t) \in \overline{Q}, \tag{67}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{68}$$

Умови (68) на коефіцієнти ряду (67) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (49) і умови (51), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (66)) і те, що

$$A w_k = \lambda_k w_k \quad \Rightarrow \quad w_k''(r) + \frac{1}{r} w_k' = -\lambda_k w_k(r), \;\; r \in [0,l], \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big[\widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t)\big]\, w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \quad (r,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0,l].$$

Звідси випливають рівності (68).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Дивлячись на рівності (68), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (67)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos 2t, \quad t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k \,. \end{cases} \tag{69}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Перш за все розглянемо випадок $k = 0$. Оскільки $\lambda_0 = 0$, то рівняння задачі (69) має вигляд $z' = a_0 \cos 2t$, повний загальний якого має вигляд $z = \frac{a_0}{2} \sin 2t + A_0$, де A_0 — довільна стала. Звідси та з початковою умовою задачі (69) матимемо $z(0) \equiv A_0 = \varphi_0$. Отож, ми отримали

$$\widehat{u}_0(t) := \frac{a_0}{2} \sin 2t + \varphi_0, \quad t \in [0, T]. \tag{70}$$

Тепер розглянемо випадок $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (69). Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times \frac{dt}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k\, dt, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = -a^2\lambda_k\, t + \ln|A_k|, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k\, t}, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала,} \tag{71}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0, T],$$

де c_k, d_k – сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-2c_k \sin 2t + 2d_k \cos 2t + a^2\lambda_k(2c_k \cos 2t + 2d_k \sin 2t) = a_k \cos 2t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos 2t & : & 2a^2\lambda_k c_k + 2d_k = a_k \\ \sin 2t & : & -2c_k + 2a^2\lambda_k d_k = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 4(a^4\lambda_k^2 + 1),$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 2 \\ 0 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 2a^2\lambda_k a_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & a_k \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}. \tag{72}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0,T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала,}$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (69). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k\,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (49) – (51) є (див. (67)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(\rho; 0,l))$ ряду

$$u(r,t) = \frac{\sqrt{2}}{l}\Big[\frac{a_0}{2}\sin 2t + \varphi_0\Big] + \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t\Big] J_0\Big(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{l} r\Big), \ (r,t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, c_k, d_k для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0,\ T > 0,\ h_1 > 0$ – довільно задані і фіксовані числа. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в круговому диску:

1.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = t^2, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 4, \quad r \in [0,l].$$

2.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = e^{2t}, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = r^2 + 2, \quad r \in [0,l],$$

3.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = (r^2 - 1)e^t, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (u_r + h_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2(t+1), \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 2, \quad r \in [0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = 2t^3, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) = 5, \quad t \in (0,T],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = l^2 - r^2, \quad r \in [0,l].$$

6.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2 t, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) + h_1\widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = 7, \quad r \in [0,l].$$

(Завдання №6 бажано зробити, але не обов'язково)

Практичне заняття № 13

Крайові задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області. Метод Фур'є

Завдання: Нехай $p > 0,\ q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases} \tag{2}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \le 0,\ \alpha_1\beta_1 \ge 0,\ \gamma_0\delta_0 \le 0,\ \gamma_1\delta_1 \ge 0,$

- $\omega, \sigma \in L_2(0,q),\ \varphi, \psi \in L_2(0,p),\ f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Крайову задачу для рівняння Пуассона далі коротко називатимемо задачею (1), (2).

Зауважимо, що крайові умови (2) задані на межі області Ω, яка є прямокутником, тобто на сторонах прямокутника. Цих умов є чотири (відповідно до сторін прямокутника) і ми будемо розрізняти дві пари крайових умов: перша – умови на вертикальних сторонах, тобто при $x = 0$ та $x = p$ (вони записані в першому рядку формулювання умов (2)), друга – умови на горизонтальних сторонах, тобто при $y = 0$ та $y = q$ (вони записані в другому рядку формулювання умов (2)). Для безпосереднього застосування методу рядів Фур'є потрібно, щоби одна з пар крайових умов була однорідною, тобто або $\omega = 0$ і $\sigma = 0$, або $\varphi = 0$ і $\psi = 0$. Якщо це не так, то потрібно або зробити заміну шуканої функції на іншу, для якої задача буде ідентичною до даної, але з парою однорідних умов, або розбити дану задачу на дві ідентичні з даною, але які мають хоча би одній парі однорідних крайових умов. Детальніше про це скажемо пізніше, а зараз розглянемо задачу (1), (2), коли $\omega = 0, \sigma = 0$, і покажемо як її розв'язувати.

Завдання I: Нехай $p > 0,\ q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = 0, \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases} \tag{4}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \le 0\ ,\ \alpha_1\beta_1 \ge 0,\ \gamma_0\delta_0 \le 0\ ,\ \gamma_1\delta_1 \ge 0,$

- $\varphi, \psi \in L_2(0,p),\ f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Розв'язування.

1-ий крок. Для знаходження сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області зводимо її до крайової задачі для відповідного диференціально-операторного рівняння і знаходимо слабкий розв'язок цієї задачі. Запишемо ту крайову задачу для диференціально-операторного рівняння, до якої зводиться дана задача. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,p)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(p) + \beta_1 v(p) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{5}$$

а також позначення:

$$[0,q] \ni y \mapsto u(y) := u(x,y),\ x \in [0,p]; \quad (0,q) \ni y \mapsto f(y) := f(x,y),\ x \in (0,p);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,p].$$

Отже, задача (3), (4) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(y), \quad y \in (0,q), \tag{6}$$

$$\gamma_0 u'(0) + \delta_0 u(0) = \varphi, \quad \gamma_1 u'(q) + \delta_1 u(q) = \psi. \tag{7}$$

Сильно узагальнений розв'язок задачі (3), (4) будемо шукати за схемою відшукання слабкого розв'язку задачі (6), (7).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,p)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,p)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,p), \tag{8}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(p) + \beta_1 w(p) = 0. \tag{9}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (8), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0,$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (9), а також шукаємо ці розв'язки, фактично, в просторі $C^2([0,p])$. Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7. Відмітимо, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p], \tag{11}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{12}$$

де для кожного k маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^p \varphi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^p \psi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{f}_k(y) := \int_0^p f(x,y) w_k(x)\,dx,\ y \in (0,q). \tag{13}$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (3), (4) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \overline{\Omega} = [0,p] \times [0,q], \tag{14}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y) = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \gamma_0 \widehat{u}_k'(0) + \delta_0 \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \gamma_1 \widehat{u}_k'(p) + \delta_1 \widehat{u}_k(p) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (14) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (3) і другу пару крайових умов (4) замість u (перша пара крайових умов (4) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (11) — (13)) і рівності (10), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\gamma_0 \widehat{u}_k'(0) + \delta_0 \widehat{u}_k(0)\big) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\gamma_1 \widehat{u}_k'(p) + \delta_1 \widehat{u}_k(p)\big) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (15).

Дивлячись на рівності (15), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \gamma_0 z'(0) + \delta_0 z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \gamma_1 z'(q) + \delta_1 z(q) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{16}$$

Розв'язуємо задачу (16) при довільно вибраному і зафіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки рівняння задачі (16) є лінійним рівнянням, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{17}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (16).

Рівняння (17) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння: $\mu^2 - \lambda_k = 0$. Коренями характеристичного рівняння є числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, якщо $\lambda_k > 0$, і $\mu_1 = 0$, якщо $\lambda_k = 0$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y}, \quad y \in [0, q], \quad \text{якщо } \lambda_k > 0,$$

і

$$z = A_k y + B_k, \quad y \in [0, q], \quad \text{якщо } \lambda_k = 0,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Далі знаходимо частковий розв'язок рівняння задачі (16). Використаємо метод варіації сталих, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$z = a_k(y) e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + b_k(y) e^{\sqrt{\lambda_k} y}, \quad y \in [0, q],$$

де a_k, b_k – функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} & e^{\sqrt{\lambda_k} y} \\ -\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} & \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(y) \\ b_k'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(y) \end{pmatrix}, \quad y \in [0, q].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(y)$ і $b_k'(y)$ для довільного фіксованого $y \in [0, q]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle_k(y) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} & e^{\sqrt{\lambda_k} y} \\ -\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} & \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} y} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda_k},$$

$$\triangle_{1,k}(y) = \begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{\lambda_k} y} \\ \widehat{f}_k(y) & \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} y} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{\lambda_k} y} \widehat{f}_k(y),$$

$$\triangle_{2,k}(y) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} & \widehat{f}_k(y) \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k} y} \widehat{f}_k(y), \quad y \in [0, q].$$

Звідси маємо

$$a_k(y) = \frac{\triangle_{1,k}(y)}{\triangle_k(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_0^y e^{\sqrt{\lambda_k} s} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad b_k(y) = \frac{\triangle_{1,k}(y)}{\triangle_k(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_y^q e^{-\sqrt{\lambda_k} s} \widehat{f}_k(s)\, ds,$$

$y \in [0, q]$, а значить, функція $z = \overset{*}{z}(y)$, $y \in [0, q]$, де

$$\overset{*}{z}(y) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_0^y e^{-\sqrt{\lambda_k}(y-s)} \widehat{f}_k(s)\, ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_y^q e^{\sqrt{\lambda_k}(y-s)} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad y \in [0, q],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (16). Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (16) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + \overset{*}{z}(y), \quad y \in [0, q]. \tag{18}$$

Знайдемо

$$z' = -A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} y} + \overset{*}{z}{}'(y), \quad y \in [0, q]. \tag{19}$$

З крайових умов задачі (16), врахувавши (18), (19), маємо

$$\gamma_0 \big(- A_k \sqrt{\lambda_k} + B_k \sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0) \big) + \delta_0 \big(A_k + B_k + \overset{*}{z}(0) \big) = \widehat{\varphi}_k,$$

$$\gamma_1 \big(- A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} q} + \overset{*}{z}{}'(q) \big) + \delta_1 \big(A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} + \overset{*}{z}(q) \big) = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси після спрощень і відповідних перепозначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих A_k, B_k:

$$\begin{cases} c_{1,k} A_k + d_{1,k} B_k = P_k \\ c_{2,k} A_k + d_{2,k} B_k = R_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{1,k} = \begin{vmatrix} P_k & d_{1,k} \\ R_k & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{2,k} = \begin{vmatrix} c_{1,k} & P_k \\ c_{2,k} & R_k \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k}, \quad B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Підставивши (20) в (18), отримаємо вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, коефіцієнтів ряду (14). При наших умовах на φ, ψ і f ряд (14) збігається в просторі $L_2(\Omega)$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона. $\square$

Завдання II: Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0, p) \times (0, q)$. Знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{21}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in [0, q], \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = 0, \quad x \in (0, p), \end{cases} \tag{22}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\gamma_0| + |\delta_0| > 0$, $|\gamma_1| + |\delta_1| > 0$,
  $\alpha_0 \beta_0 \le 0$, $\alpha_1 \beta_1 \ge 0$, $\gamma_0 \delta_0 \le 0$, $\gamma_1 \delta_1 \ge 0$,

- $\omega, \sigma \in L_2(0, q)$, $f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Для знаходження сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області зводимо її до крайової задачі для відповідного диференціально-операторного рівняння і знаходимо слабкий розв'язок цієї задачі. Запишемо ту крайову задачу для диференціально-операторного рівняння, до якої зводиться дана задача. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0, q)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, q) \mid \gamma_0 v'(0) + \delta_0 v(0) = 0,\ \gamma_1 v'(q) + \delta_1 v(q) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{23}$$

а також позначення:

$$[0, p] \ni x \mapsto u(x) := u(x, y),\ y \in [0, q]; \quad (0, p) \ni x \mapsto f(x) := f(x, y),\ y \in (0, q);$$

$$\omega := \omega(y), \quad \sigma := \sigma(y), \quad x \in [0, q].$$

Отже, задача (21), (22) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(x), \quad x \in (0, p), \tag{24}$$

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \omega, \quad \alpha_1 u'(p) + \beta_1 u(p) = \sigma. \tag{25}$$

Будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (21), (22), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (24), (25).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0, q)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\delta_0 \neq 0$, або $\delta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\delta_0 = 0$ і $\delta_1 = 0$.

Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0, q)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0, p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad y \in (0, q), \tag{26}$$

з крайовими умовами

$$\gamma_0 w'(0) + \delta_0 w(0) = 0, \quad \gamma_1 w'(q) + \delta_1 w(q) = 0. \tag{27}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (26), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0,$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (27), а також шукаємо ці розв'язки, фактично, в просторі $C^2([0,q])$. Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7. Відмітимо, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\omega(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(y), \quad \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(y), \quad y \in [0,q], \tag{29}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(x) w_k(y), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{30}$$

де для кожного k маємо

$$\widehat{\omega}_k := \int_0^q \omega(y) w_k(y)\,dy, \quad \widehat{\sigma}_k := \int_0^q \sigma(y) w_k(y)\,dy, \quad \widehat{f}_k(x) := \int_0^q f(x,y) w_k(y)\,dy,\ x \in (0,p).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (21), (22) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(x) w_k(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{31}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(x) - \lambda_k \widehat{u}_k(x) = \widehat{f}_k(x), \quad x \in (0,p), \\ \alpha_0 \widehat{u}_k'(0) + \beta_0 \widehat{u}_k(0) = \widehat{\omega}_k, \quad \alpha_1 \widehat{u}_k'(p) + \beta_1 \widehat{u}_k(p) = \widehat{\sigma}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (31) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (21) і першу пару крайових умов (22) замість u (друга пара крайових умов (22) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення ω, σ і f в ряди Фур'є (див. (29), (30)) і рівності (28), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(x) - \lambda_k \widehat{u}_k(x)\right] w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(x) w_k(y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_0 \widehat{u}_k'(0) + \beta_0 \widehat{u}_k(0)\big) w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\omega}_k w_k(y), \quad y \in [0,q],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_1 \widehat{u}_k'(p) + \beta_1 \widehat{u}_k(p)\big) w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\sigma}_k w_k(y), \quad y \in [0,q].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (55).

Дивлячись на рівності (55), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = \widehat{f}_k(x), \quad x \in (0,p), \\ \alpha_0 z'(0) + \beta_0 z(0) = \widehat{\omega}_k, \quad \alpha_1 z'(p) + \beta_1 z(p) = \widehat{\sigma}_k. \end{cases} \tag{33}$$

Розв'язуємо задачу (33) при довільно вибраному і фіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки рівняння задачі (33) є лінійним рівнянням, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{34}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (33).

Рівняння (34) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння: $\mu^2 - \lambda_k = 0$. Коренями характеристичного рівняння є числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, якщо $\lambda_k > 0$, і $\mu_1 = 0$, якщо $\lambda_k = 0$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}x}, \quad x \in [0,p], \quad \text{якщо } \lambda_k > 0,$$

і

$$z = A_k x + B_k, \quad x \in [0,p], \quad \text{якщо } \lambda_k = 0,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Далі знаходимо частковий розв'язок рівняння задачі (33). Використаємо метод варіації сталих, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$z = a_k(x) e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + b_k(x) e^{\sqrt{\lambda_k}x}, \quad x \in [0,p],$$

де a_k, b_k – функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(x) \\ b_k'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0,p].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(x)$ і $b_k'(x)$ для довільного фіксованого $x \in [0,p]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle_k(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \omega_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda_k},$$

$$\triangle_{1,k}(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ \widehat{f}_k(x) & \omega_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{\lambda_k}x}\widehat{f}_k(x),$$

$$\triangle_{2,k}(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \widehat{f}_k(x) \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}x}\widehat{f}_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси маємо

$$a_k(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^x e^{\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad b_k(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_x^q e^{-\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad x \in [0,p],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}(x),\ x \in [0,p]$, де

$$\overset{*}{z}(x) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^x e^{-\sqrt{\lambda_k}(x-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_x^q e^{\sqrt{\lambda_k}(x-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad x \in [0,p],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (33). Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (33) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \overset{*}{z}(x), \quad x \in [0,p]. \tag{35}$$

Знайдемо

$$z' = -A_k\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k\sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \overset{*}{z}{}'(x), \quad x \in [0,p]. \tag{36}$$

З крайових умов задачі (33), врахувавши (35), (36), маємо

$$\gamma_0\big(-A_k\sqrt{\lambda_k} + B_k\sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0)\big) + \delta_0\big(A_k + B_k + \overset{*}{z}(0)\big) = \widehat{\omega}_k,$$

$$\gamma_1\big(-A_k\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}p} + B_k\sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}p} + \overset{*}{z}{}'(p)\big) + \delta_1\big(A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}p} + \overset{*}{z}(p)\big) = \widehat{\sigma}_k.$$

Звідси після спрощень і відповідних перепозначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих A_k, B_k:

$$\begin{cases} c_{1,k}A_k + d_{1,k}B_k = P_k \\ c_{2,k}A_k + d_{2,k}B_k = R_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{1,k} = \begin{vmatrix} P_k & d_{1,k} \\ R_k & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{2,k} = \begin{vmatrix} c_{1,k} & P_k \\ c_{2,k} & R_k \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k}, \quad B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Підставивши (37) в (35), отримаємо вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнтів ряду (54). При наших умовах на φ, ψ і f ряд (54) збігається в просторі $L_2(\Omega)$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона. □

Примітка. Якщо в задачі (1), (2) нема жодної пари однорідних умов, тобто котрась із функцій φ або ψ і яка-небудь із функцій ω або σ відмінні від нуля, то можна зробити одне із двох: 1) ввести нову невідому функцію $\widetilde{u}$ за правилом $u = \widetilde{u} + \widetilde{w}$, де $\widetilde{w}$ – задана функція, що задовольняє одну з пар крайових умов ;

2) подати розв'язок даної задачі як суму розв'язків подібних задач, але з потрібними для реалізації методу рядів Фур'є крайовими умовами, а точніше, шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u = u_1 + u_2,$$

де u_1 – *сильно узагальнений* розв'язок задачі

$$u_{1,xx} + u_{1,yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_{1,x} + \beta_0 u_1)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_{1,x} + \beta_1 u_1)|_{x=p} = 0, \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_{1,y} + \delta_0 u_1)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_{1,y} + \delta_1 u_1)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases}$$

а u_2 – *сильно узагальнений* розв'язок задачі

$$u_{2,xx} + u_{2,yy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_{2,x} + \beta_0 u_2)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_{2,x} + \beta_1 u_2)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_{2,y} + \delta_0 u_2)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_{2,y} + \delta_1 u_2)|_{y=q} = 0, \quad x \in [0,p]. \end{cases}$$

Приклад розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай* $p > 0$, $q > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,* $\Omega := (0,p)\times(0,q)$. *Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області* $\Omega := (0,p)\times(0,q)$*:*

$$u_{xx} + u_{yy} = x\cos 2y, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{38}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad y\in(0,q), \\ u|_{y=0} = x+1, \quad u|_{y=q} = 2, \quad x\in[0,p]. \end{cases} \tag{39}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(x,y) := x\cos 2y, \quad (x,y)\in\Omega, \qquad \varphi(x) := x+1, \quad \psi(x) := 2, \quad x\in[0,p],$$

і зведемо задачу (38), (39) до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A)\to L_2(0,p)$ за правилом:

$$D(A) := \{v\in H^2(0,p) \mid v(0)=0,\ v'(p)=0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v\in D(A), \tag{40}$$

а також позначення:

$$[0,q]\ni y\mapsto u(y) := u(x,y),\ x\in[0,p]; \quad (0,q)\ni y\mapsto f(y) := f(x,y),\ x\in(0,p);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x\in[0,p].$$

Отже, задача (38), (39) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(y), \quad y\in(0,q), \tag{41}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(q) = \psi. \tag{42}$$

Будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (38) – (39), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (41), (42).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,p)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w\in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x\in(0,p), \\ w(0) = 0, \quad w'(p) = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ такі, що задача (43) має ненульові розв'язки в просторі $C^2([0,p])$. Як відомо, ці значення можуть бути тільки серед додатних чисел. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (43), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{44}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння, врахувавши, що $\lambda > 0$:

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (44) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,p], \tag{45}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,p], \tag{46}$$

і підставимо вирази (45) і (46) в крайові умови задачі (43):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(p) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}p + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}p = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (47) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (47) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}p = 0. \tag{48}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}p = 0$ і врахування того, що $\sqrt{\lambda}p > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}p = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{49}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (45) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,p], \tag{50}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^p |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^p \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^p \sin^2\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,p)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi+2\pi k}{2p}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x, \quad x \in [0,p], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Очевидно, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad x\in[0,p],\qquad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad x\in[0,p],$$

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(y)w_k(x),\quad x\in(0,p),\ y\in(0,q), \tag{53}$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k:=\int\limits_0^p\varphi(x)w_k(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p(x+1)\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}\Big((x+1)\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p-\int\limits_0^p\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\Big)=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(-1-\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p\Big)=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}\Big(-1-(-1)^{k+1}\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Big)=\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}\Big(1+(-1)^{k+1}\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Big),$$

$$\widehat{\psi}_k:=\int_0^p\psi(x)w_k(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p 2\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx=$$

$$=-2\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p=2\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)},$$

$$\widehat{f}_k(y):=\int_0^p f(x,y)w_k(x)\,dx=\int_0^p f(x,y)w_k(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^l x\cos 2y\cdot\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx=$$

$$=\cos 2y\cdot\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p x\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx=\cos 2y\cdot\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^l x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx=$$

$$=-\cos 2y\cdot\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}\Big(x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p-\int\limits_0^p\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx\Big)=$$

$$=-\cos 2y\cdot\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}\Big(0-\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p\Big)=$$

$$=\cos 2y\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2p}{(-\pi+2\pi k)}((-1)^{k+1}\frac{2p}{-\pi+2\pi k})=(-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{p}}\Big(\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Big)^2\cdot\cos 2y=$$

$$=a_k\cdot\cos 2y,\quad y\in(0,q),\quad \text{де}\ \ a_k:=(-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{p}}\Big(\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Big)^2.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (38), (39) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{54}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y) = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k(q) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{55}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (54) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (21) і другу пару крайових умов (22) замість u (перша пара крайових умов (22) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (29)) і рівності (52), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(q) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (55).

Дивлячись на рівності (55) і вираз $\widehat{f}_k$, бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = a_k \cos 2y, \quad y \in (0,q), \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z(q) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{56}$$

Розв'яжемо задачу (56) при довільно вибраному і фіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (56). Оскільки це рівняння є лінійним, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{57}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (56).

Рівняння (57) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\lambda_k.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння задачі (56) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y}, \quad y \in [0,q],$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Знайдемо частковий розв'язок рівняння задачі (56). Оскільки вільний член цього рівняння є квазімногочленом, то використаємо метод неозначених коефіцієнтів. Отож, записуємо проєкт часткового розв'язку рівняння задачі (56) у вигляді

$$z = b_k \cos 2y, \quad y \in [0, q], \tag{58}$$

де b_k – поки що неозначений коефіцієнт, значення якого знаходимо за умови, що дана функція є розв'язком нашого рівняння. Для знаходження значення b_k підставимо проєкт розв'язку в рівняння задачі (56):

$$-4b_k \cos 2y - \lambda_k b_k \cos 2y = a_k \cos 2y \quad \Rightarrow \quad -(\lambda_k + 4)b_k = a_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_k = -\frac{a_k}{\lambda_k + 4}.$$

Підставивши знайдене значення b_k у вираз (58), отримаємо частковий розв'язок рівняння задачі (56).

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (56) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + b_k \cos 2y, \quad y \in [0, q]. \tag{59}$$

З крайових умов задачі (56) маємо

$$z(0) = \widehat{\varphi}_k \;\; \Rightarrow \;\; A_k + B_k = \widehat{\varphi}_k - b_k,$$

$$z(q) = \widehat{\psi}_k \;\; \Rightarrow \;\; A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} = \widehat{\psi}_k - b_k \cos 2q.$$

Введемо позначення:

$$P_k := \widehat{\varphi}_k - b_k, \quad R_k := \widehat{\psi}_k - b_k \cos 2q.$$

Отже, значення A_k і B_k знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} A_k + B_k = P_k \\ e^{-\omega_k T} A_k + e^{\omega_k T} B_k = R_k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера. Знаходимо

$$\triangle_k := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda_k} q} - e^{-\sqrt{\lambda_k} q} = e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big) \neq 0 \;\; \text{оскільки} \sqrt{\lambda_k} \neq 0,$$

$$\triangle_{1,k} := \begin{vmatrix} P_k & 1 \\ R_k & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{vmatrix} = P_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} - R_k, \quad \triangle_{2,k} := \begin{vmatrix} 1 & P_k \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & R_k \end{vmatrix} = R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k} = \frac{P_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} - R_k}{e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big)} \equiv \frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}}, \tag{60}$$

$$B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k} = \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big)} \equiv \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{61}$$

На підставі (60) і (61) з (59) отримаємо

$$\widehat{u}_k(y) = \frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k}(q-y)} - \frac{a_k}{\lambda_k + 4} \cos 2y, \quad y \in [0, q], \tag{62}$$

– коефіцієнт ряду (54).

Отже, сильно узагальнений розв'язок крайової задачі (38), (39) (див. (54)) є сумою збіжного в просторі $L^2(\Omega)$ ряду

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{P_k-R_ke^{-\sqrt{\lambda_k}q}}{1-e^{-2\sqrt{\lambda_k}q}}e^{-\sqrt{\lambda_k}y}+\frac{R_k-P_ke^{-\sqrt{\lambda_k}q}}{1-e^{-2\sqrt{\lambda_k}q}}e^{-\sqrt{\lambda_k}(q-y)}-\frac{a_k}{\lambda_k+4}\cos 2y\Big]\sin\sqrt{\lambda_k}x, \tag{63}$$

$(x,y)\in\overline{\Omega}$, де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, a_k, P_k, R_k для кожних $k\in\mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами. $\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $p>0$, $q>0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega:=(0,p)\times(0,q)$. Знайти сильно узагальнені розв'язки крайових задач для рівняння Пуассона в прямокутній області:

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=x^2+y,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=2y,\quad u|_{x=p}=y,\quad y\in(0,q),\\ u|_{y=0}=0,\quad u|_{y=q}=0,\quad x\in[0,p]; \end{cases}$$

2.

$$u_{xx}+u_{yy}=2x\cos 3y,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=p}=0,\quad y\in(0,q),\\ u_y|_{y=0}=5\sin x,\quad u_y|_{y=q}=2x+1,\quad x\in[0,p]; \end{cases}$$

3.

$$u_{xx}+u_{yy}=2xe^y,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=2y,\quad u|_{x=p}=\sin y,\quad y\in(0,q),\\ u|_{y=0}=3\sin x,\quad u_y|_{y=q}=2,\quad x\in[0,p]; \end{cases}$$

4.

$$u_{xx}+u_{yy}=2xy+1,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} (u_x-u)|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=p}=0,\quad y\in(0,q),\\ u|_{y=0}=2x+1,\quad u_y|_{y=q}=\cos x,\quad x\in[0,p]. \end{cases}$$

Контрольна робота № 3

Варіант № j, j — Ваш порядковий номер у журналі

Задача 1. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності

$$u_t - a^2 u_{xx} = x f(t), \quad (x,t) \in (0;l) \times (0;1],$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 2t, \quad t \in [0;1],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0;l],$$

де

$$a = (|j-10|+1), \quad l = (|j-10|+1),$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(lt), & \text{якщо} \quad j - \text{непарне}, \\ \sin(lt), & \text{якщо} \quad j - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(jx), & \text{якщо} \quad j - \text{непарне}, \\ \cos(jx), & \text{якщо} \quad j - \text{непарне}. \end{cases}$$

Задача 2. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності в диску

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = f(t), \quad (r,t) \in Q := (0;l) \times (0;1],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) = 0, \quad t \in (0;1],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = lr^2, \quad r \in [0;l],$$

де

$$a = (|j-10|+1), \quad l = (|j-10|+1),$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-lt}, & \text{якщо} \quad j - \text{непарне}, \\ e^{lt}, & \text{якщо} \quad j - \text{непарне}. \end{cases}$$

Практичне заняття № 15

Крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона в кругових областях. Метод Фур'є

Завдання №1: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < l^2\} \ \text{— круг радіуса } l>0,$$

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l^2\} \ \text{— межа } \ \Omega \ \text{— коло радіуса } \ l,$$

$$\nu \ \text{— одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \ \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона в крузі***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \nu} w(x,y) + \beta_1 w(x,y) = p(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

де

$$g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad p \in C(\partial\Omega), \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_1\beta_1 \geqslant 0,\ \alpha_1+\beta_1>0.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Для розв'язування даної задачі перейдемо в ній до полярної системи координат:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad r \in [0,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Покладаючи

$$u(r,\theta) := w(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad f(r,\theta) := g(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \psi(\theta) := p(l\cos\theta, l\sin\theta),$$

отримаємо задачу

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (0,l), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \quad r \in (0,l], \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u\big|_{r=0} < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)\big|_{r=l} = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Тут і далі під умовою $u\big|_{r=0} < \infty$ розумітимемо обмеженість функції u в околі 0.

Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \psi(\theta+2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(r,\theta) = f(r,\theta+2\pi), \quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Введемо лінійний простір $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ визначених на $\mathbb{R}$ і неперервних та 2π-періодичних функцій, тобто $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$ для будь-яких $\theta \in \mathbb{R}$. На ньому задамо скалярний добуток і відповідну норму за правилами:

$$(v,w) = \int_0^{2\pi} v(\theta)w(\theta)\,d\theta, \quad \|v\| = \Big(\int_0^{2\pi} |v(\theta)|^2\,d\theta\Big)^{1/2}.$$

Так введений простір не є повним і його поповнення позначимо через $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$. Очевидно, що $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ є складений з функцій $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ таких, що $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$ для майже всіх $\theta \in \mathbb{R}$.

Визначимо оператор

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(\widetilde{A}) = C^2(\mathbb{R}) \cap C_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad \widetilde{A}v = -v'' \ \ \forall v \in D(\widetilde{A}),$$

та введемо позначення

$$(0, l] \ni r \to u(r) := u(r, \cdot) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad (0, l) \ni r \to f(r) := f(r, \cdot) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\psi := \psi(\cdot) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

У результаті задача () – () може бути потрактована як крайова задача для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}\widetilde{A}u = f(r), \quad r \in (0, l), \tag{4}$$

з крайовими умовами

$$u(0) < \infty, \quad \alpha_1 u_r(l) + \beta_1 u(l) = \psi, \tag{5}$$

де під умовою $u(0) < \infty$ розуміємо умову $\overline{\lim}_{r\to 0+} \|u(r)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} < \infty$, тобто обмеженість функції $r \to \|u(r)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}$ в околі точки 0.

Розширимо оператор $\widetilde{A}$ до замкненого оператора $A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, поклавши

$$D(A) := H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A).$$

Тоді отримаємо задачу

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (0, l), \tag{6}$$

$$u(0) < \infty, \quad \alpha_1 u_r(l) + \beta_1 u(l) = \psi, \tag{7}$$

де умова $u(0) < \infty$ означає, що

$$\overline{\lim_{r\to 0+}} \|u(r)\|_{L_{2,2\pi}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Задача (6), (7) є узагальненням задачі (4), (5). Сильно узагальнений розв'язок задачі () — () будемо шукати як слабкий розв'язок задачі (6), (7), використовуючи метод Фур'є.

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Покажемо, що $\lambda \geqslant 0$. Справді, якщо функція $w \neq 0$ є розв'язком задачі (8) при деякому значенні λ, то домноживши рівність (9) на w, проінтегруємо отриману рівність по θ від 0 до 2π:

$$\int_0^{2\pi} w''(\theta)w(\theta)\,d\theta + \lambda\int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\,d\theta = 0.$$

Звідси, інтегруючи частинами та враховуючи 2π-періодичність функції w, отримаємо

$$\int_0^{2\pi} |w'(\theta)|^2\,d\theta = \lambda\int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\,d\theta,$$

звідки

$$\lambda = \int_0^{2\pi} |w'(\theta)|^2\,d\theta \Big/ \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\,d\theta \geqslant 0.$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (9) при $\lambda = 0$. Підставимо отриманий вираз повного загального розв'язку в умову періодичності:

$$C_1(\theta + 2\pi) + C_2 = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 \text{ – довільна стала.}$$

Звідси випливає, що нуль є власним значенням, а відповідні йому власні функції мають вигляд $w = C_2$, $r \in (0, l]$. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2\,d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2\,d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

– відповідно власне значення і відповідна йому нормована власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Характеристичне рівняння для рівняння (9) має вигляд

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$w = C_1\cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2\sin\sqrt{\lambda}\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1\cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2\sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1\cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2\sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\big[\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] + C_2\big[\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Звідси, після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$[C_1\sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2\cos\sqrt{\lambda}\theta]\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, а це означає, що

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \quad m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (13) у рівність (12). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (11) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$, у вигляді

$$w(\theta) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (14) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (14), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2 \, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зі сказанного вище випливає, що ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{15}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складеною з власних значень оператора A і для якої

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots \, .$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\psi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$f(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{18}$$

$r \in (0, l)$, $\theta \in \mathbb{R}$, де

$$\widehat{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \, d\theta,$$

$$\widehat{\psi}_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos m\theta \, d\theta, \quad \widehat{\psi}_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin m\theta \, d\theta, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\, d\theta,$$

$$\widehat{f}_{2m}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \cos m\theta\, d\theta, \quad \widehat{f}_{2m+1}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \sin m\theta\, d\theta, \quad r \in (0,l),\ m \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Сильно узагальнений розв'язок задачі () – () шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{19}$$

$r \in (0,l],\ \theta \in \mathbb{R}$,
де коефіцієнти ряду (19) визначаються рівностями та умовами

$$\widehat{u}_1(r)'' + \frac{1}{r} \widehat{u}_1(r)' = \widehat{f}_1(r), \quad r \in (0,l), \tag{20}$$

$$\widehat{u}_1(r)(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}_1(r)'(l) + \beta_1 \widehat{u}_1(r)(l) = \widehat{\psi}_1; \tag{21}$$

$$\widehat{u}''_{2m}(r) + \frac{1}{r} \widehat{u}'_{2m}(r) - \frac{m^2}{r^2} \widehat{u}_{2m}(r) = \widehat{f}_{2m}(r), \quad r \in (0,l), \tag{22}$$

$$\widehat{u}_{2m}(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}'_{2m}(l) + \beta_1 \widehat{u}_{2m}(l) = \widehat{\psi}_{2m}, \quad m \in \mathbb{N}; \tag{23}$$

$$\widehat{u}''_{2m+1}(r) + \frac{1}{r} \widehat{u}'_{2m+1}(r) - \frac{m^2}{r^2} \widehat{u}_{2m+1}(r) = \widehat{f}_{2m+1}(r), \quad r \in (0,l), \tag{24}$$

$$\widehat{u}_{2m+1}(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}'_{2m+1}(l) + \beta_1 \widehat{u}_{2m+1}(l) = \widehat{\psi}_{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Відмітимо, що рівності і умови (20) – (25) безпосередньо випливають з таких міркувань: формально підставляємо ряд (19) в рівняння () та умови () і використовуємо рівності (16) та лінійну незалежність системи функцій $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Як легко переконатися, коефіцієнти ряду (19) мають бути (див. (20) – (25)) розв'язками задачі

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{m^2}{r^2} z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{26}$$

$$z(0) < \infty, \qquad \alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \widehat{\psi}_k, \tag{27}$$

де $k \in \mathbb{N},\ m := [k/2]$. Тут і далі $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$.

Розв'яжемо задачу (26), (27). Очевидно, що, враховуючи лінійність рівняння (26), потрібно знайти вираз повного загального розв'язку цього рівння (він буде містити дві довільні сталі) і, підставивши цей вираз у крайові умови (27), визначити відповідні сталі.

Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (26). Для цього помножимо це рівняння на r^2:

$$r^2 z'' + r z' - m^2 z = r^2 \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{28}$$

Очевидно, що рівняння (28) є рівнянням Ейлера. Зводимо його до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною змінних: $r = e^t,\ r \in [0,+\infty)$, $t \in \mathbb{R}$. Для цього запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$\mu(\mu - 1) + \mu - m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - m^2 = 0.$$

Тоді, як випливає з теорії рівнянь Ейлера, для функції $p(t) = z(r)$ при $r = e^t$ отримаємо рівняння

$$p'' - m^2 p = q_k(t), \quad \text{де} \;\; q_k(t) := e^{2t}\widehat{f}_k(e^t). \tag{29}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами і його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння

$$p'' - m^2 p = 0 \tag{30}$$

і часткового розв'язку даного рівняння. Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (30). Оскільки

$$\mu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm\, m, \text{ якщо } m \in \mathbb{N}, \text{ і } \mu_1 = 0, \text{ якщо } m = 0,$$

то маємо повний загальний розв'язок рівняння (30) у вигляді

$$p = A + Bt, \quad \text{якщо } m = 0,$$

$$p = Ae^{mt} + Be^{-mt}, \quad \text{якщо } m \in \mathbb{N},$$

де A, B – довільні сталі.

Далі шукаємо частковий розв'язок $\overset{*}{p}_k$ рівняння (29) або методом варіації сталих або, якщо вільний член даного рівняння є квазімногочленом, методом неозначених коефіцієнтів.

Тоді повний загальний розв'язок рівняння (29) має вигляд

$$p = A_1 + B_1 t + \overset{*}{p}_1(t), \quad \text{якщо } k = 1,$$

$$p = A_k e^{mt} + B_k e^{-mt} + \overset{*}{p}_k(t), \quad \text{якщо } k > 1,$$

де A_k, B_k – довільні сталі, $k \in \mathbb{N}$.

Звідси, вертаючись до змінної r (зауважимо, що $e^{\lambda t} = (e^t)^\lambda = r^\lambda$) і позначаючи $\overset{*}{z}_k(r) := \overset{*}{p}_k(\ln r),\;\; r \in (0, l)$, отримаємо

$$z = A_1 + B_1 \ln r + \overset{*}{z}_k(r), \quad \text{якщо } k = 1,$$

$$z = A_k r^m + B_k r^{-m} + \overset{*}{z}_k(r), \quad \text{якщо } k > 1,$$

– повний загальний розв'язок рівняння (26).

Тоді з крайових умов (27) маємо

$$z(0) < \infty \quad \Rightarrow \quad B_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

$$\alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \widehat{\psi}_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \overset{*}{z}{}_1'(l) + \beta_1(A_1 + \overset{*}{z}_1(l)) = \widehat{\psi}_1, \quad \alpha_1(A_k m l^{m-1} + \overset{*}{z}{}_k'(l)) + \beta_1(A_k l^m + \overset{*}{z}_k(l)) = \widehat{\psi}_k, \quad k > 1,$$

звідки

$$A_1 = \big[\widehat{\psi}_k - \alpha_1 \overset{*}{z}{}_1'(l) - \beta_1 \overset{*}{z}_1(l)\big]/\beta_1, \quad A_k = \big[\widehat{\psi}_k - \alpha_1 \overset{*}{z}{}_k'(l) - \beta_1 \overset{*}{z}_k(l)\big]\big/\big[\alpha_1 m l^{m-1} + \beta_1 l^m\big]. \tag{32}$$

Отже, ми знайшли розв'язок $z = A_k r^m + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0, l]$, задачі (26), (27), звідки

$$\widehat{u}_k(r) := A_k r^m + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0, l],$$

для довільного $k \in \mathbb{N},\ m = [k/2]$.

Тоді для отримання сильно узагальненого розв'язку задачі () – () потрібно підставити отримані вирази $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (19).

Зауваження 1. З вище сказаного очевидно випливає, що коли $\widehat{f}_k = 0$ і $\widehat{\psi}_k = 0$, то розв'язком задачі (26), (27) є тільки функція $z = 0,\ r \in (0, l]$.

Зауваження 2. Відмітимо, що повний загальний розв'язок рівняння (26), яке є лінійним другого порядку, можна знайти безпосередньо, не роблячи заміни змінних. Для цього нагадаємо, що повний загальний розв'язок цього рівняння є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = 0, \quad r \in (0, l), \tag{33}$$

і часткового розв'язку даного неоднорідного рівняння.

Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (33). Спочатку розглянемо випадок $m \in \mathbb{N}$. Відшукаємо фундаментальну систему розв'язків даного рівняння, тобто будемо шукати два лінійно незалежних його розв'язки. Ці розв'язки спробуємо знайти у вигляді $z = r^\mu$, де $\mu \in \mathbb{R}$. Для знаходженя значень μ обчислимо $z' = \mu r^{\mu-1},\ z'' = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}$ і підставимо отримані вирази у рівняння (33):

$$\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + \mu r^{\mu-2} - m^2\mu r^{\mu-2} = 0 \quad \forall r \in (0, l) \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm m.$$

Отже, функції $z = r^m$, $z = r^{-m},\ r \in (0, l]$, є лінійно незалежними розв'язками рівняння (33), а тому

$$z = Ar^m + Br^{-m}, \quad r \in (0, l], \quad A, B \text{ – довільні сталі}, \tag{34}$$

– повний загальний розв'язок цього рівняння.

Тепер розглянемо випадок $m = 0$, тобто рівняння

$$z'' + \frac{1}{r}z' = 0, \quad r \in (0, l). \tag{35}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну: $y := z'$. Отримаємо

$$y' + \frac{1}{r}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dr} = -\frac{y}{r} \ \Big|\times\frac{dr}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r},\ y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y = -\ln r + \ln|B|,\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = B/r, \quad B \text{ – довільна стала}.$$

Звідси маємо $z' = B/r$, а отже,

$$z = A + B\ln r, \quad r \in (0, l], \quad A, B \text{ – довільні сталі}, \tag{36}$$

– повний загальний розв'язок рівняння (35).

Частковий розв'язок рівняння (26) можна шукати методом варіації сталих. Спочатку розглянемо випадок $k > 1$. Дивлячись на (34), запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (26):

$$z = a_k(r)r^m + b_k(r)r^{-m}, \quad r \in (0, l], \tag{37}$$

де a_k, b_k – функції, які знаходимо за умови, що функція (37) є розв'язком рівняння (26). Вирази a_k, b_k знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} r^m & r^{-m} \\ mr^{m-1} & -mr^{-m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(r) \\ b_k'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0, l].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(r)$ і $b_k'(r)$ для довільного фіксованого $r \in (0,l]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle(r) = \begin{vmatrix} r^m & r^{-m} \\ mr^{m-1} & -mr^{-m-1} \end{vmatrix} = -2mr^{-1},$$

$$\triangle_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & r^{-m} \\ \widehat{f}_k(r) & -mr^{-m-1} \end{vmatrix} = -r^{-m}\widehat{f}_k(r),$$

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} r^m & 0 \\ mr^{m-1} & \widehat{f}_k(r) \end{vmatrix} = r^m\widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l].$$

Звідси маємо

$$a_k'(r) = \frac{\triangle_1(r)}{\triangle(r)} = \frac{1}{2m} r^{-m+1}\widehat{f}_k(r); \quad a_k(r) = -\frac{1}{2m}\int\limits_r^l s^{-m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad r \in (0,l];$$

$$b_k'(r) = \frac{\triangle_2(r)}{\triangle(r)} = -\frac{1}{2m} r^{m+1}\widehat{f}_k(r); \quad b_k(r) = -\frac{1}{2m}\int\limits_0^r s^{m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad r \in (0,l],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}_k(r)$, $r \in (0,l]$, де

$$\overset{*}{z}_k(r) := -\frac{1}{2m} r^m \int\limits_r^l s^{-m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds - \frac{1}{2m} r^{-m} \int\limits_0^r s^{m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad r \in (0,l],$$

– частковий розв'язок рівняння (26).

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (26) у випадку $k > 1$ має вигляд

$$z = A_k r^m + B_k r^{-m} + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0,l], \quad A_k, B_k \text{ – довільні сталі.} \tag{38}$$

Тепер розглянемо випадок $k = 1$ (тоді $m = 0$). Дивлячись на (36), запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (26):

$$z = a_1(r) + b_1(r)\ln r, \quad r \in (0,l], \tag{39}$$

де a_1, b_1 – функції, які знаходимо за умови, що функція (39) є розв'язком рівняння (26). Вирази a_1, b_1 знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'(r) \\ b_1'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_1(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0,l].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_0'(r)$ і $b_0'(r)$ для довільного фіксованого $r \in (0,l]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle(r) = \begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & r^{-1} \end{vmatrix} = r^{-1}, \quad \triangle_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & \ln r \\ \widehat{f}_1(r) & r^{-1} \end{vmatrix} = -\widehat{f}_1(r)\ln r,$$

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{f}_1(r) \end{vmatrix} = \widehat{f}_1(r), \quad r \in (0,l].$$

Звідси маємо

$$a_1'(r) = \frac{\triangle_1(r)}{\triangle(r)} = -\widehat{f}_1(r) r \ln r; \quad a_0(r) = \int\limits_r^l h(s) s \ln s\, ds;$$

$$b_1'(r) = \frac{\triangle_2(r)}{\triangle(r)} = r \widehat{f}_1(r); \quad b_1(r) = \int\limits_0^r \widehat{f}_1(r) s\, ds, \quad r \in (0, l],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}_1(r)$, $r \in (0, l]$, де

$$\overset{*}{z}_1(r) := \int\limits_r^l \widehat{f}_1(s) s \ln s\, ds + \int\limits_0^r \widehat{f}_1(s) s\, ds \cdot \ln r, \quad r \in (0, l],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (26) при $k = 1$.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (26) у випадку $k = 1$ має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r + \overset{*}{z}_1(r), \qquad r \in (0, l], \quad A_1, B_1 \text{ – довільні сталі.} \tag{40}$$

Зауваження 3. Частковий розв'язок рівняння (26), коли

$$\widehat{f}_k(r) = a_k r^\rho, \ r \in (0, l), \quad \text{де} \ \ \rho \in \mathbb{R}, \ \rho \neq \pm m - 2,$$

можна шукати методом неозначених коефіцієнтів у вигляді

$$z = b_k r^{\rho+2}, \quad r \in (0, l],$$

де b_k – неозначений коефіцієнт. Справді, обчисливши $z' = b_k(\rho+2) r^{\rho+1}$, $z'' = b_k(\rho+2)(\rho+1) r^\rho$ і підставивши ці вирази в рівняння (26), отримаємо

$$b_k(\rho+2)(\rho+1) r^\rho + b_k(\rho+2) r^\rho - m^2 b_k r^\rho = a_k r^\rho, \quad r \in (0, l), \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\rho+2)^2 - m^2) b_k = a_k \quad \Leftrightarrow \quad b_k = \frac{a_k}{(\rho+2)^2 - m^2},$$

тобто частковий розв'язок матиме вигляд

$$z = \frac{a_k}{(\rho+2)^2 - m^2} r^\rho, \quad r \in (0, l].$$

Аналогічно як вище наведено розв'язують і такі завдання:

Завдання №2: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > l^2\} \ \text{— зовнішність круга радіуса } l > 0,$$

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = l^2\} \ \text{— межа } \ \Omega \ \text{— коло радіуса } \ l,$$

$$\nu \ \text{— одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \ \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона поза кругом***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_0 \frac{\partial}{\partial \nu} w(x,y) + \beta_0 w(x,y) = p(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

$$w \text{ – обмежена,}$$

де

$$p \in C(\partial\Omega), \quad g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}, \ \alpha_0\beta_0 \geqslant 0, \ |\alpha_0| + |\beta_0| > 0.$$

В полярній системі координат ця задача записується так:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l, +\infty), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad r \in [l, +\infty), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha_0 u_r + \beta_0 u)\big|_{r=l} = \psi(\theta), \quad u\big|_{r=+\infty} < \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Тут і далі під умовою $u\big|_{r=+\infty} < \infty$ розумітимемо обмеженість функції u в околі нескінченності.

Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad f(r,\theta) = f(r, \theta + 2\pi), \quad r \in (l, +\infty), \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Завдання №3: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, l_1^2 < x^2 + y^2 < l_2^2\} \ \text{— кільце, обмежене колами радіусів } \ l_1 > 0, l_2 > 0,$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ \text{— межа } \ \Omega,$$

$$\Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = l_1^2\} \ \text{— коло радіуса } l_1,$$

$$\Gamma_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \ x^2 + y^2 = l_2^2\} \ \text{— коло радіуса } l_2,$$

$$\nu \ \text{— одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \ \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона в кільці***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_0 \frac{\partial}{\partial \nu} w(x,y) + \beta_0 w(x,y) = p_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1,$$

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \nu} w(x,y) + \beta_1 w(x,y) = p_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2,$$

де

$$p_1 \in C(\Gamma_1),\ p_2 \in C(\Gamma_2), \qquad g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega),$$

$$\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R},\ \alpha_0\beta_0 \leqslant 0,\ |\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_1\beta_1 \geqslant 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0.$$

В полярній системі координат ця задача записується так:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l_1, l_2), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad r \in [l_1, l_2], \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha_0 u_r + \beta_0 u)\big|_{r=l_1} = \varphi(\theta), \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)\big|_{r=l_2} = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi), \quad \psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad f(r,\theta) = f(r, \theta + 2\pi), \quad r \in (l_1, l_2),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Приклади розв'язування крайових задач для рівняння Пуассона в кругових областях

Приклад № 1. Розв'язати задачу:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (0,l), \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

$$u\big|_{r=0} < \infty, \quad u(l,\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

де $l > 0$;

$$f(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{1/2}, \quad r \in (0,l), \ \theta \in \mathbb{R}; \quad \psi(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}} \sin 5\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування.

1-ий крок. Визначимо оператор

$$A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A) = H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

та введемо позначення

$$(0,l] \ni r \to u(r) := u(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad (0,l) \ni r \to f(r) := f(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\psi := \psi(\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (41) – (43) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (0,l), \tag{44}$$

з крайовими умовами

$$u(0) < \infty, \quad u(l) = \psi. \tag{45}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k = \lambda_k w_k, \ k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{47}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (47) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності отримуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тобто нуль є власним значенням. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2\, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2\, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{48}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (47):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (47) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{49}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1(\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) + C_2(\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$(C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta) \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, звідки маємо

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \;\; m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{51}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (51) у рівність (50). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (49) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$ у вигляді

$$w(x) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{52}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (52) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (52), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} w^2(\theta)\, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Як легко переконатися, ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{53}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots \ . \tag{54}$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 5\theta =: \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1}\sin m\theta, \tag{55}$$

де $\widehat{\psi}_k = 0$, якщо $k \notin \{6, 11\}$, і $\widehat{\psi}_6 = 2, \ \widehat{\psi}_{11} = 5$;

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{1/2} =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \quad r \in (0,l), \ \theta \in \mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_1(r) = 2r^{1/2}, \ \widehat{f}_k(r) = 0, \ r \in (0,l), \ k > 1.$

4-ий крок. Розв'язок задачі (41) – (43) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \tag{56}$$

$r \in (0,l], \ \theta \in \mathbb{R}$, де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (56) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{57}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = \widehat{\psi}_k, \tag{58}$$

де $m := [k/2]$ — ціла частина числа $k/2$.

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{f}_k, \widehat{\psi}_k, \ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_1, \ \widehat{\psi}_6, \ \widehat{\psi}_{11}$, то *тільки* коефіцієнти $\widehat{u}_1, \ \widehat{u}_6, \ \widehat{u}_{11}$ ряду (56) є відміними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_1$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' = 2r^{1/2}, \quad r \in (0,l), \tag{59}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 0, \tag{60}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_6$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{9}{r^2}z = 0, \quad r \in (0, l), \tag{61}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 2, \tag{62}$$

а коефіцієнт $\widehat{u}_{11}$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{25}{r^2}z = 0, \quad r \in (0, l), \tag{63}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 5. \tag{64}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (59), (60). Повний загальний розв'язок відповідного рівнянню (59) однорідного рівняння має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r, \quad r \in (0, l], \quad A_1, B_1 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_1 r^{5/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (59):

$$(5/2)(3/2)b_1 r^{1/2} + 5/2 b_1 r^{1/2} = 2r^{1/2} \;\Big|\; : r^{1/2} \;\Big|\; \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad 10b_1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 0,8.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (59) має вигляд $z = 0,8r^{5/2}, \quad r \in (0, l]$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (59) має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r + 0,8r^{5/2}, \quad r \in (0, l].$$

Знаходимо, підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, значення A_1, B_1:

$$B_1 = 0, \quad A_1 + 0,8l^{5/2} = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = -0,8l^{5/2},$$

тобто

$$\widehat{u}_1(r) = -0,8l^{5/2} + 0,8r^{5/2} \equiv 0,8(r^{5/2} - l^{5/2}), \quad r \in (0, l].$$

Тепер розв'яжемо задачу (61), (62). Повний загальний розв'язок рівняння (61) має вигляд

$$z = A_6 r^3 + B_6 r^{-3}, \quad r \in (0, l], \quad A_6, B_6 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (62), отримаємо

$$B_6 = 0, \quad A_6 l^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A_6 = 2l^{-3}.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_6(r) = 2l^{-3}r^3, \quad r \in (0, l].$$

Залишилося розв'язати задачу (63), (64). Повний загальний розв'язок рівняння (63) має вигляд

$$z = A_{11} r^5 + B_{11} r^{-5}, \quad r \in (0, l], \quad A_{11},\, B_{11} \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (62), отримаємо

$$B_{11} = 0, \quad A_{11} l^5 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad A_{11} = 5l^{-5}.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_{11}(r) = 5l^{-5}r^5, \quad r \in (0, l].$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (56). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (41) – (43):

$$u(r,\theta) = \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}}(r^{5/2} - l^{5/2}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^3 \cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^5 \sin 5\theta, \quad r \in (0, l],\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Приклад № 2. Розв'язати задачу:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{65}$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{66}$$

$$u(l,\theta) = \varphi(\theta), \quad u|_{r=+\infty} < \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{67}$$

де $l > 0$;

$$f(r,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{-3/2}\cos\theta, \quad r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi(\theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор

$$A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A) = H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

та введемо позначення

$$[l,+\infty) \ni r \to u(r) := u(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad (l,+\infty) \ni r \to f(r) := f(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\varphi := \varphi(\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (65) – (67) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (l,+\infty), \tag{68}$$

з крайовими умовами

$$u(l) = \varphi, \quad u(+\infty) < \infty. \tag{69}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k = \lambda_k w_k,\ k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{70}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{71}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (71) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності отримуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тобто нуль є власним значенням. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2\, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2\, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{72}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (71):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (71) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{73}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1(\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) + C_2(\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{74}$$

Після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$(C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta) \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, звідки маємо

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \ \ m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{75}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (75) у рівність (74). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (73) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$ у вигляді

$$w(x) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{76}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (76) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (76), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} w^2(\theta)\, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Як легко переконатися, ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{aligned} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{77}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots \ . \tag{78}$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta =: \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\varphi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\varphi}_{2m+1}\sin m\theta, \tag{79}$$

де $\widehat{\varphi}_k = 0$, якщо $k \neq 4$, і $\widehat{\varphi}_7 = 5$;

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi}} r^{-5/2}\cos\theta =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r)\sin m\theta,$$

$r \in (l, +\infty),\ \theta \in \mathbb{R}$,
де $\widehat{f}_2(r) = (3/4)r^{-5/2},\ \widehat{f}_k(r) = 0,\ r \in (l, +\infty),\ k \neq 2$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (65) – (67) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \tag{80}$$

$r \in (0, l],\ \theta \in \mathbb{R}$,
де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (80) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0, l), \tag{81}$$

$$z(l) = \widehat{\varphi}_k, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{82}$$

де $m := [k/2]$ (як відомо, $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$).

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{\varphi}_k,\ \widehat{f}_k,\ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_2,\ \widehat{\varphi}_7$, то тільки коефіцієнти $\widehat{u}_2,\ \widehat{u}_7$ ряду (80) є відмінними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_2$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{1}{r^2}z = \frac{3}{4}r^{-5/2}, \quad r \in (l, +\infty), \tag{83}$$

$$z(l) = 0, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{84}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_7$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{9}{r^2}z = 0, \quad r \in (l, +\infty), \tag{85}$$

$$z(l) = 5, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{86}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (83), (84). Повний загальний розв'язок рівняння (83) має вигляд

$$z = A_2 r + B_2 r^{-1}, \quad r \in [l, +\infty), \quad A_2, B_2 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_2 r^{-1/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (83):

$$(-1/2)(-3/2)b_2 r^{-5/2} - 1/2 b_2 r^{-5/2} - b_2 r^{-5/2} = \frac{3}{4} r^{-5/2} \,\Big|\, : r^{-5/2} \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad b_2 = -1.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (83) має вигляд $z = -r^{-1/2}, \;\; r \in [l, +\infty)$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (83) має вигляд

$$z = A_2 r + B_2 r^{-1} - r^{-1/2}, \;\; r \in [l, +\infty).$$

Знаходимо, підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, значення A_2, B_2:

$$A_2 = 0, \quad B_2 l^{-1} - l^{-1/2} = 0 \;\Rightarrow\; B_2 = l^{1/2},$$

тобто

$$\widehat{u}_2(r) = l^{1/2} r^{-1} - r^{-1/2}, \;\; r \in [l, +\infty).$$

Тепер розв'яжемо задачу (85), (86). Повний загальний розв'язок рівняння (85) має вигляд

$$z = A_7 r^3 + B_7 r^{-3}, \quad r \in [l, +\infty), \quad A_7, B_7 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (86), отримаємо

$$z(+\infty) < \infty \quad \Rightarrow \quad A_7 = 0, \quad z(l) = 5 \quad \Rightarrow \quad B_7 l^{-3} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad B_7 = 5l^3.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_7(r) = 5l^3 r^{-3}, \quad r \in [l, +\infty).$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k, \; k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (80). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (65) – (67):

$$u(r, \theta) = \frac{l^{1/2} r^{-1} - r^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \cos\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{l}{r}\right)^3 \sin 3\theta, \quad r \in [l, +\infty), \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Приклад № 3. Розв'язати задачу:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l_1, l_2),\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{87}$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \quad r \in [l_1, l_2],\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{88}$$

$$u(l_1,\theta) = \varphi(\theta), \quad u_r(l_2,\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{89}$$

де $0 < l_1 < l_2 < +\infty$;

$$f(r,\theta) = \frac{9}{\sqrt{\pi}} r^{1/2} \cos 2\theta, \quad r \in (l_1, l_2),\ \theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi(\theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}} \sin 4\theta, \quad \psi(\theta) = 0, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор

$$A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A) = H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

та введемо позначення

$$[l_1, l_2] \ni r \to u(r) := u(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad (l_1, l_2) \ni r \to f(r) := f(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\varphi := \varphi(\cdot),\ \psi := \psi(\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (87) – (89) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (l_1, l_2), \tag{90}$$

з крайовими умовами

$$u(l_1) = \varphi, \quad u'(l_2) = \psi. \tag{91}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k = \lambda_k w_k,\ k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{92}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{93}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (93) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності отримуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тобто нуль є власним значенням. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2\, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2\, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{94}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (93):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (93) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{95}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\big[\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi)\big] + C_2\big[\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi)\big] = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{96}$$

Після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$[C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta] \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, звідки маємо

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \;\; m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{97}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (97) у рівність (96). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (95) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$ у вигляді

$$w(x) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{98}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (98) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (98), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} w^2(\theta)\, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Як легко переконатися, ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{aligned} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta, \dots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \dots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{99}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \dots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \dots . \tag{100}$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{7}{\sqrt{\pi}} \sin 4\theta =: \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\varphi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\varphi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{101}$$

де $\widehat{\varphi}_k = 0$, якщо $k \neq 9$, і $\widehat{\varphi}_9 = 7$;

$$0 =: \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{102}$$

де $\widehat{\psi}_k = 0, \ k \in \mathbb{N}$;

$$\frac{9}{\sqrt{\pi}} r^{1/2} \cos 2\theta =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r) \sin m\theta,$$

$r \in (l_1, l_2), \ \theta \in \mathbb{R}$,
де $\widehat{f}_4(r) = 9r^{1/2}, \ \widehat{f}_k(r) = 0, \ r \in (l_1, l_2), \ k \neq 4$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (87) – (89) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{103}$$

$r \in (l_1, l_2), \ \theta \in \mathbb{R}$,
де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (103) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{m^2}{r^2} z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (l_1, l_2), \tag{104}$$

$$z(l_1) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(l_2) = \widehat{\psi}_k, \tag{105}$$

де $m := [k/2]$ (як відомо, $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$).

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{\varphi}_k, \widehat{\psi}_k, \ \widehat{f}_k, \ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_4, \ \widehat{\varphi}_9$, то тільки коефіцієнти $\widehat{u}_4, \ \widehat{u}_9$ ряду (103) є відмінними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_4$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{4}{r^2}z = 9r^{1/2}, \quad r \in (l_1, l_2), \tag{106}$$

$$z(l_1) = 0, \quad z'(l_2) = 0, \tag{107}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_9$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{16}{r^2}z = 0, \quad r \in (l_1, l_2), \tag{108}$$

$$z(l_1) = 7, \quad z'(l_2) = 0. \tag{109}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (106), (107). Повний загальний розв'язок рівняння (106) має вигляд

$$z = A_4 r^2 + B_4 r^{-2}, \quad r \in [l_1, l_2], \quad A_4, B_4 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_4 r^{5/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (106):

$$(5/2)(3/2)b_4 r^{1/2} + 5/2 b_4 r^{1/2} - 4b_4 r^{1/2} = 9r^{1/2} \,\Big|\, : r^{1/2} \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad b_4 = 4.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (106) має вигляд $z = 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2]$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (106) має вигляд

$$z = A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, отримуємо систему рівнянь для знаходження значень A_4, B_4:

$$A_4 l_1^2 + B_4 l_1^{-2} + 4l_1^{5/2} = 0, \quad 2A_4 l_1 - 2B_4 l_2^{-3} + 10 l_2^{3/2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad l_1^2 A_4 + l_1^{-2} B_4 = -4l_1^{5/2}, \quad 2l_1 A_4 - 2l_2^{-3} B_4 = -10 l_2^{3/2}.$$

Звідси знаходимо значення A_4, B_4 і записуємо

$$\widehat{u}_4(r) = A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Тепер розв'язуємо задачу (108), (109). Повний загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$z = A_9 r^4 + B_9 r^{-4}, \quad r \in [l_1, l_2], \quad A_9, B_9 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (109), отримаємо

$$A_9 l_1^4 + B_9 l_1^{-4} = 7, \quad 4A_9 l_2^3 - 4B_9 l_2^{-5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_1^4 A_9 + l_1^{-4} B_9 = 7, \quad 4l_2^3 A_9 - 4l_2^{-5} B_9 = 0.$$

Звідси знаходимо значення A_9, B_9 і записуємо

$$\widehat{u}_9(r) = A_9 r^4 + B_9 r^{-4}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k, \ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (103). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (87) – (89):

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}) \cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big(A_9 r^4 + B_9 r^{-4}\big) \sin 4\theta, \quad r \in [l_1, l_2], \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Розв'язати крайові задачі для рівнянь еліптичного типу:

1) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty,\quad u\,|_{r=l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^2\theta,\quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$

2) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty,\quad u_r\,|_{r=l} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin^3\theta,\quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$

3) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty,\quad (u_r + 2u)\,|_{r=l} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 4\theta,\quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$

4) $\Delta u = 0\,;\ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=l_1} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 2\theta,\quad u\,|_{r=l_2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\cos^2\theta,\quad r \in (l_1,l_2),\ \theta \in \mathbb{R}.$

5) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=l} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos^4\theta,\quad u\,|_{r=+\infty} < \infty,\qquad r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$

6) $\Delta u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{1/2}\cos 2\theta\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^4\theta,\quad u\,|_{r=+\infty} < \infty,$
$r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$

7) $\Delta u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{1/2}\cos 2\theta\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty, u\,|_{r=l} = \psi(\theta),$
$r \in (0,l)$, $\theta \in \mathbb{R}$, де $\psi \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, причому $\psi(\theta) = \theta(2\pi - \theta)$, якщо $\theta \in [0,2\pi]$.

Контрольна робота №4

Варіант № 1

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 3e^{2x}y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2} = 0, \\ u_y|_{y=0} = \sin 2x, \quad u|_{y=4} = 3. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{3/2}\cos 3\theta\,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\ |_{r=0} < \infty, \\ u\ |_{r=4} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 2\theta + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sin 6\theta. \end{cases}$$

Варіант № 2

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2e^{x}y,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=3} = 0, \\ u_y|_{y=0} = \cos 2x, \quad u|_{y=5} = e^{x}. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{7/4}\cos\theta\,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\ |_{r=3} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 2\theta, \\ u\ |_{r=5} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\cos\theta. \end{cases}$$

Варіант № 3

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2y\sin 2x,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 2y, \quad u_x|_{x=2} = 3y, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=4} = 0. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{-7/4}\,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\ |_{r=2} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos 5\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 7\theta, \\ u\ |_{r=+\infty} < \infty. \end{cases}$$

Варіант № 4

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=3xy,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=4}=0, \\ u|_{y=0}=\cos 2x, \quad u_y|_{y=3}=6. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=3r^{5/2}\cos 3\theta\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=0}<\infty, \\ u\,|_{r=4}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sin 7\theta. \end{cases}$$

Варіант № 5

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=2y\sin x,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=\cos y, \quad u|_{x=5}=3y, \\ u_y|_{y=0}=0, \quad u|_{y=4}=0. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=3r^{9/4}\cos 2\theta\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=4}=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta, \\ u\,|_{r=6}=\frac{5}{\sqrt{\pi}}\cos 2\theta. \end{cases}$$

Варіант № 6

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=2x\cos y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=5}=0, \\ u_y|_{y=0}=2e^x, \quad u|_{y=5}=3x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=3r^{-9/4}\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=6}=\frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos 5\theta+\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 7\theta, \\ u\,|_{r=+\infty}<\infty. \end{cases}$$

Варіант № 7

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=3xe^y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=3}=0, \\ u_y|_{y=0}=\cos 3x, \quad u_y|_{y=5}=6. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=3r^{7/2}\cos\theta\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=0}<\infty, \\ u\,|_{r=2}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 4\theta+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sin 8\theta. \end{cases}$$

Варіант № 8

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 3y \sin 2x,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = \cos y, \quad u|_{x=4} = 3y, \\ u_y|_{y=0} = 2x, \quad u|_{y=5} = \cos x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{11/4} \cos 3\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u \mid_{r=1} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \sin 2\theta, \\ u \mid_{r=4} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos 3\theta. \end{cases}$$

Варіант № 9

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2x \cos 2y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=3} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 2\cos x, \quad u_y|_{y=6} = 3x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{-11/4} \cos 2\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u \mid_{r=3} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}} \sin 8\theta, \\ u \mid_{r=+\infty} < \infty. \end{cases}$$

Варіант № 10

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 3e^{2x} \cos y,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 2y, \quad u|_{x=2} = 2\cos y, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=4} = 0. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{7/2} \cos 2\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u \mid_{r=0} < \infty, \\ u \mid_{r=4} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos 3\theta + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sin 4\theta. \end{cases}$$

Варіант № 11

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2xy,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=4} = 0, \\ u_y|_{y=0} = \cos 2x, \quad u|_{y=8} = x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{7/4} \cos 2\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u \mid_{r=2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \sin 3\theta, \\ u \mid_{r=5} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cos 2\theta. \end{cases}$$

Варіант № 12

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=7y\sin 3x,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=2y, \quad u_x|_{x=3}=3y, \\ u_y|_{y=0}=0, \quad u|_{y=5}=0. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=4r^{-11/4}\cos\theta\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=2}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 6\theta+\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta, \\ u\,|_{r=+\infty}<\infty. \end{cases}$$

Варіант № 13

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=3xy,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=4}=0, \\ u|_{y=0}=\cos 2x, \quad u_y|_{y=3}=6. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=3r^{5/2}\cos 3\theta\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=0}<\infty, \\ u\,|_{r=4}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sin 7\theta. \end{cases}$$

Варіант № 14

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=2y\cos 2x,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=\cos y, \quad u|_{x=6}=4y, \\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=4}=0. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=4r^{9/4}\cos 3\theta\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=3}=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 2\theta, \\ u\,|_{r=6}=\frac{9}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta. \end{cases}$$

Варіант № 15

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=3xy,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=4}=0, \\ u_y|_{y=0}=2e^x, \quad u|_{y=3}=3x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u=3r^{-9/4}\,,$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=6}=\frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos 5\theta+\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 7\theta, \\ u\,|_{r=+\infty}<\infty. \end{cases}$$

Варіант № 16

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 3xe^y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=3} = 0, \\ u_y|_{y=0} = \cos 3x, \quad u_y|_{y=5} = 6. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 4r^{7/2} \cos 2\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=0} < \infty, \\ u\,|_{r=2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cos 5\theta + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sin 2\theta. \end{cases}$$

Варіант № 17

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2y \sin 3x,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = \cos y, \quad u|_{x=5} = 3y, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=5} = 0. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{11/4} \cos 3\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=1} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \sin 2\theta, \\ u\,|_{r=4} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos 3\theta. \end{cases}$$

Варіант № 18

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2x \cos 3y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=4} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 2\cos x, \quad u_y|_{y=6} = 3x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{-13/4} \cos 3\theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=3} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cos 2\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}} \sin 5\theta, \\ u\,|_{r=+\infty} < \infty. \end{cases}$$

Варіант № 19

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 3x \cos 2y,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2} = 0, \\ u_y|_{y=0} = \cos 4x, \quad u_y|_{y=6} = 5. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{9/2} \cos \theta \,,$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=0} < \infty, \\ u\,|_{r=2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos 3\theta + \frac{6}{\sqrt{\pi}} \sin 9\theta. \end{cases}$$

Варіант № 20

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 3y \sin 2x,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 0, \\ u_y|_{y=0} = 2x, \quad u_y|_{y=5} = \cos x. \end{cases}$$

2.

$$\Delta u = 3r^{13/4} \cos 2\theta\,,$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \qquad \begin{cases} u\,|_{r=2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sin 3\theta, \\ u\,|_{r=4} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cos 4\theta. \end{cases}$$