НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача

В.П. Щедрик

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Львов
2017

ББК В152.2я44+В152.5я44
Щ 367
УДК 512.64+512.55

В.П. Щедрик. Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників. -Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2017. -304 с.

Монографія присвячена дослідженню арифметики кілець матриць над певними класами комутативних областей скінченно породжених головних ідеалів. Головна увага зосереджена на побудові теорії розкладності матриць на множники. Висвітлюється тісний зв'язок факторизовності матриць із певними властивостями підгруп повної лінійної групи та спеціальною нормальною формою матриць стосовно односторонньої еквівалентності. Ґрунтовно вивчаються властивості матриць над кільцями стабільного рангу 1,5.

Для спеціалістів з теорії кілець, лінійної алгебри та студентів і аспірантів.

Бібліогр. 114 назв.

V.P. Shchedryk. Factorization of matrices over elementary divisor rings. -Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, 2017. -304 p.

The book is devoted to investigation of arithmetic of the matrix rings over certain classes of commutative finitely generated principal ideals domains. We mainly concentrate on constructing of the matrix factorization theory. We reveal a close relationship between the matrix factorization and specific properties of subgroups of the complete linear group and the special normal form of matrices with respect to unilateral equivalence. The properties of matrices over rings of stable range 1.5 are thoroughly studied.

The book is intended for experts in the ring theory and linear algebra, senior and post-graduate students.

Ref. 114.

Рецензенты:

Ю.А. Дрозд, член-корреспондент НАН Украины, профессор, заведующий отделом алгебры и топологии Института математики НАН Украины;

Б.В. Забавский, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и логики Львовского национального университета им. И. Франко.

ISBN 978-966-02-8035-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Объектом исследования монографии являются матрицы над коммутативными областями элементарных делителей с точки зрения их разложимости на множители и сопутствующими задачами – установления взаимосвязей между определенными подгруппами и подмножествами полной линейной группы и приведения матриц односторонними преобразованиями к каноническому виду.

И. Капланский [1] ввел понятие кольца *элементарных делителей*, как такого кольца R, над которым каждая матрица обладает свойством канонической диагональной редукции. То есть над таким кольцом для каждой матрицы A существуют обратимые матрицы P, Q соответствующих размеров (в дальнейшем будем называть их преобразующими матрицами), что

$$PAQ = \operatorname{diag}(d_1, \ \ldots, d_r, 0, \ldots, 0),$$

где

$$Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \bigcap Rd_i, \ i = 1, \ \ldots \ , \ r-1. \qquad (1)$$

Если R – коммутативное кольцо, то условие (1) равносильно тому, что $d_i | d_{i+1}$, $i = 1 \ \ \ldots \ , \ r-1$. Исследование таких колец начал Г. Смит [2], который установил, что каждая целочисленная матрица элементарными преобразованиями над строками и столбцами приводится к диагональной матрице, в которой каждый следующий диагональный элемент делится на предыдущий. Л. Диксон [3], Д. Веддербарн [4, 5], Б. Ван дер Варден [6], Н. Джекобсон [7] обобщили результат Г. Смита на различные классы как коммутативных, так и некоммутативных колец без делителей нуля. К классу колец элементарных делителей принадлежат евклидовые кольца, кольца главных идеалов, адекватные кольца [8], кольца целых аналитических функций [4], кольцо непрерывных вещественных функций над вполне регулярным Хаусдорфовым пространством [10], кольцо формальных степенных рядов над полем рациональных чисел со свободным целым членом [11], кольцо целых алгебраических чисел [12].

С целью исследования колец элементарных делителей И. Капланский ввел понятие правого кольца Эрмита как такого, над которым каждая 1×2 матрица обладает свойством канонической диагональной редукции и показал, что правое кольцо Эрмита является правым кольцом Безу, то есть кольцом конечно порожденных правых главных идеалов. В случае коммутативных областей эти кольца совпадают [13]. Л. Гиллман и М. Хенриксен [10, 11], изучая коммутативные кольца Эрмита и кольца элементарных делителей с делителями нуля, указали пример коммутативного кольца Безу, которое не является кольцом Эрмита и кольца Эрмита, не являющегося кольцом элементарных делителей. Ими был поставлен вопрос совпадения этих колец в случае коммутативных областей, который теперь известен как *проблема колец элементарных делителей.* Без преувеличения можно сказать, что на сегодняшний день это одна из самых актуальных проблем алгебры. Среди большого количества работ, посвященных этой тематике, выделим исследования П. Кона [14], М. Ларсена, В. Левиса, Т. Шореса [15], В. Мак Говерна [16], которые решали ее как методами классической теории колец, так и методами теории модулей. Многообещающими исследованиями этой проблемы являются те, которые основываются на понятии стабильного ранга кольца – одного из важных инвариантов К-теории. Это понятие в 1964 году ввел Х. Басс [9]. Так Б. Забавский получил ряд структурных теорем, которые достаточно глубоко характеризируют кольца Безу конечного стабильного ранга [17, 18, 19]. В частности, он показал, что кольца элементарных делителей имеют стабильный ранг не более 2 [17]. Кроме этого, через понятие стабильного ранга элегантно вводятся теперь широко исследуемые коммутативные чистые кольца (clean rings) [20], кольца со свойством замены (exchange rings) [21], аккуратные кольца (neat rings) [22] . Более глубокие исследования этого понятия привели к введению идемпотентного стабильного ранга [22, 20] и единичного стабильного ранга [23].

Интерес к кольцам элементарных делителей, без сомнения, обусловлен не только тем, что подавляющее большинство классических колец обладают свойством канонической диагональной редукции. Их совершенная внутренняя структура дает возможность получать глубокие результаты и в смежных областях, в частности, в теории модулей и в алгебраической К-теории. Так И. Капланский [1] показал, что над кольцом элементарных делителей произвольный конечно представимый модуль разлагается в прямую сумму циклических модулей. Для коммутативных колец доказано и обратное утверждение: если конечно представимый модуль над кольцом разлагается в прямую сумму циклических модулей, то это кольцо является кольцом элементарных делителей [15].

Большой потенциал этих колец проявился и в возможности построения единой теории факторизации матриц над такими кольцами. Заметим, что задачами разложения матриц на множители начали интересоваться еще во второй половине XIX века. В частности, А. Келли [24], М. Сильвестр [25, 26], Ф. Фробениус [27] рассматривали задачу представления числовых матриц в виде произведения одинаковых матриц.

Наиболее глубоко факторизационные задачи исследовались в кольцах полиномиальных матриц. Это стимулировалось тем фактом, что согласно обобщенной теоремой Безу [28] выделение линейного унитального множителя, т.е. множителя вида $Ix - B$, где I – единичная матрица, с полиномиальной матрицы равносильно нахождению корня B соответствующего одностороннего матричного уравнения. Такими задачами занимались М. Инграгам [28, 29], В. Рот [30, 31, 32], П. Ланкастер [33, 34, 35], Г. Лангер [51] Г. Уиммер [37], Д. Деннис, Д. Трауб, Р. Вебер [38], И. Гохберг, Л. Родман [39] А. Маркус, И. Мереуца [40], А. Малышев [41] и др. (см. работы со списка литературы). Такие исследования были наиболее популярными во второй половине XX века, когда целые научные коллективы боролись за первенство в решении проблемы выделения унитального множителя с полиномиальной матрицы. Первым конструктивный метод ее решения предложил П. Казимирский [55, 56, 57]. Нужно отметить, что толчком к таким исследованиям стала статья [58] академика Я. Лопатинского – учителя П. Казимирского, в которой рассматривались системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этой работе Я. Лопатинский получил чисто алгебраический результат, касающийся выделения регулярного множителя с полиномиальной матрицы.

Весомые результаты, касающиеся факторизации матриц, получили ученики П. Казимирского – В. Зелиско [63, 64] и В. Петричкович [65] – [71]. В частности, рассмотренная В. Зелиско группа обратимых матриц, квазикомутирующих с диагональной матрицей является краеугольным камнем построенной в этой монографии теории факторизации матриц. В. Петричкович, основываясь на введенных им совместно с П. Казимирским понятиях полускалярной и обобщенной эквивалентности и некоторой треугольной формы матриц с инвариантными множителями на главной диагонали, существенно расширил класс абсолютно разложимых матричных многочленов, то есть тех многочленов, которые разлагаются в произведение линейных множителей (такие многочлены еще называют Веддербарновскими). Он указал необходимые и достаточные условия единственности, с точностью до ассоциированности, делителей с заданной формой Смита для матриц над адекватными областями. Ввел понятие факторизации матриц, параллельной к факторизации ее формы Смита, и описал классы матриц, имеющих такое свойство.

Факторизационные задачи не ограничивалось лишь рассмотрением полиномиальных матриц. Так изучались разложения матриц над телами и универсальными алгебрами [59, 60], над дедекиндовыми областями [61]. Здесь нужно особо выделить работу З. Боревича [62], в которой эти исследования были выведены на новый уровень. А именно, в ней было предложено классифицировать делители матриц над коммутативными областями главных идеалов их формами Смита и описывать с точностью до ассоциированности. Естественный на современный взгляд подход был в то время революционным. К сожалению, факторизационные задачи стояли несколько в стороне от научных предпочтений З. Боревича. Поэтому полученные им результаты (касающиеся единственности делителей), изложены лишь в виде тезисов его доклада на III Всесоюзном симпозиуме по теории колец, алгебр и модулей.

В монографии, предложенный З. Боревичем подход реализуется для матриц над областями элементарных делителей, над которыми такая задача еще не рассматривалась. Такие исследования стали возможными благодаря использованию принципиально нового подхода, основанного на изучении множества обратимых матриц $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, которое порождает все левые делители с заданной формой Смита Φ и на исследовании группы Зелиска $\mathbf{G}_{\Phi}$, которая отвечает за асоциированность матриц.

Представим содержание книги кратким осмотром ее розделов. Книга написана так, чтобы читатель, знакомый с университетским курсом линейной алгебры, имел возможность, не обращаясь к другим источникам, понять изложенный материал. С этой целью в первых двух разделах, кроме оригинальных результатов, также приведены уже и известные. Они касаются свойств элементов колец Безу, дополнения примитивных строк к обратимым матрицам, нормальных форм относительно одно- и двусторонней эквивалентности матриц. Особое внимание в первой главе уделено общим свойствам наибольших общих делителей и наименьших общих кратных матриц.

Во втором разделе изучаются свойства преобразующих матриц и группы Зелиска, которая является их генератором. Вводится понятие кольца стабильного ранга 1,5 и доказывается, что полная линейная группа этого кольца представляется в виде произведения группы Зелиска, групп нижних и верхних унитреугольных матриц. Также показано, что над коммутативной областью Безу R кольцо матриц второго порядка имеет стабильный ранг 1,5 тогда и только тогда, когда R имеет аналогичный стабильный ранг. Установлены условия, при которых форма Смита произведения двух матриц совпадает с произведением их форм Смита.

Третий раздел носит технический характер. В нем исследуются свойства миноров и инвариантных множителей блочно-треугольных матриц и их диагональных блоков. Эти результаты использованы при изложении последующих разделов.

В четвертом разделе вводится понятие порождающего множества и на этом основании формулируются критерии делимости и асоциированности матриц. Исследуется структура элементов этого множества и устанавливается ее взаимосвязь с группой Зелиска.

Пятый раздел посвящен исследованию факторизации матриц. В частности, указаны условия единственности (с точностью до асоциированности) делителей с заданной формой Смита. Введено понятие множества Казимирского и указаны условия, при которых это множество порождает все неасоциированные делители с заданной формой Смита. Особое внимание уделено факторизации полиномиальных матриц. Следствием этого стало построение эффективных методов поиска корней односторонних матричных уравнений и нахождения формы Жордана. Два заключительных подраздела этого раздела посвящены нахождению форм Смита и преобразующих матриц наибольших общих делителей и наименьших общих кратных матриц.

В шестом разделе исследуется действие группы Зелиска на примитивные матрицы. При этом указываются инварианты относительно такого действия.

Заключительный седьмой раздел посвящен исследованию односторонней эквивалентности матриц с фиксированной формой Смита. Показано, что поиск делителей, которые имеют заданную форму Смита распараллеливается и сводится к описанию определенных матриц с заданными Φ -скелетами. Следствием этих результатов стало описание всех неасоциированных матриц со стандартными Φ-скелетами, а также всех неразложимых делителей матриц.

Раздел 1.
Кольца Безу и матрицы над ними

В разделе приводятся основные свойства элементов коммутативных областей Безу, указывается нормальная форма матриц относительно односторонних преобразований с полной линейной группы (форма Эрмита). Особое внимание уделено равенству Безу.

1.1. Свойства элементов колец Безу

Понятие наибольшего общего делителя (н.о.д.) - одно из основополагающих в математике. Под н.о.д. элементов $a,\ b$ коммутативного кольца R понимают общий делитель этих элементов, который делится на все другие их общие делители. Для некоммутативных колец рассматривают (если они существуют) как правые, так и левые наибольшие общие делители. Следует заметить, что существуют кольца, в которых понятие наибольшего общего делителя некорректо. Примерами таких колец являются кольца многочленов над полями от бесконечного числа переменных. В этих кольцах среди общих делителей, вообще говоря, не существует такого многочлена, который делится на остальные. Кроме того, из определения наибольшего общего делителя не следует, что наибольший общий делитель определен однозначно с точностью до делителей единицы. Такое утверждение верно лишь в тех кольцах, в которых из условия взаимной делимости элементов вытекает их асоциированность, т.е. они отличаються обратимым множителем. Особенно "ценится"если $(a,\ b)$ – н.о.д. элементов $a,\ b$ линейно выражается через них, т.е.

$$(a,\ b) = au + bv, \tag{1.1}$$

где $u, v \in R$. Это равенство называется **равенством** либо **тождеством Безу.**

Заметим, что существование н.о.д. не гарантирует его представления в виде (1.1). В частности, в кольце $F[x, y]$ – многочленов от двух переменных над полем F элементы $x,\ y$ взаимно просты, т.е. $(x,\ y) = 1$, однако в $F[x, y]$ не существует таких $u,\ v$, что $xu + yv = 1$.

Выполнение условия (1.1) для всех элементов кольца R означает, что каждый идеал, порожденный двумя элементами этого кольца, является главным. Очевидно, что тогда и каждый конечно порожденный идеал R также является главным.

Определение 1.1. Кольцом Безу называется кольцо, в котором каждый конечно порожденный идеал является главным.

Заметим, что некоммутативное кольцо называется кольцом Безу, если каждый левый и правый конечно порожденный идеал является главным.

Примерами коммутативных колец Безу является кольцо целых чисел, кольца многочленов от одной переменной над полями, кольцо целых аналитических чисел. Очевидным образом, коммутативные кольца главных идеалов являются кольцами Безу. Обратное утверждение неверно. Например, адекватные кольца, речь о которых пойдет ниже, являются кольцами Безу, однако, не являются кольцами главных идеалов. Из этого следует, что элементы колец Безу нельзя представить в виде произведения неразложимых элементов этих колец, то есть кольца Безу, вообще говоря, нефакториальны. Некоммутативными кольцами Безу являются кольца матриц над коммутативными кольцами Безу.

В дальнейшем всюду, если это специально не оговорено, R – коммутативная область (кольцо без делителей нуля) Безу, с $1 \neq 0$.

Свойство 1.1. *Если* $(a,b)=1$ *и* $a|bc$, *то* $a|c$.

Доказательство. Существуют такие u, v , что

$$au+\ bv=1 \Rightarrow\ acu+\ bcv=c.$$

Поскольку $a|bc$, то $bc=am$. Следовательно,

$$acu+amv=c \Rightarrow c=a(cu+mv),$$

т.е. $a|c$. □

Свойство 1.2. *Если* $(a,b)=1$ *и* $(\ a,\ c\ )=1$, *то* $(\ a,\ bc\ )=1$.

Доказательство. Пусть $(a,\ bc)=\alpha$. Поскольку $\alpha|\ a$ и $(a,b)=1$, то $(\alpha,\ b)=1$. Также $\alpha|\ bc$. Тогда в соответствии со свойством 1.1 $\alpha|\ c$. Однако $(a,\ c)=1$. Следовательно, $(\ a,\ bc\ )=1$. □

Свойство 1.3. *Если* $(a,b)=1$, *то* $(a,\ bc)=(a,\ c)$, *где* a *и* c *одновременно не равны нулю.*

Доказательство. Имеем

$$(a,\ bc)=(a,\ c)\left(\frac{a}{(a,\ c)},\frac{c}{(a,\ c)}b\right).$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{(\,a,\ c\,)}, b\right) = 1, \left(\frac{a}{(\,a,\ c\,)}, \frac{c}{(\,a,\ c\,)}\right) = 1,$$

то в силу свойства 1.2

$$\left(\frac{a}{(\,a,\ c\,)}, \frac{c}{(\,a,\ c\,)}b\right) = 1.$$

Следовательно, $(\,a,\ bc\,) = (\,a,\ c\,)$. $\square$

Свойство 1.4. *Выполняется равенство*

$$\left(\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right) = \frac{(a,b)}{(a,b,c)},$$

где ab и c одновременно не равны нулю.

Доказательство. Имеем

$$\left(\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right) = \frac{(a,b)}{(a,b,c)} \left(\frac{(a^2,ab,ac)}{(a^2,ab,c(a,b))}, \frac{(b^2,ab,bc)}{(a^2,ab,c(a,b))}\right).$$

Поскольку

$$\frac{a}{(a,b)} \frac{\big(a^2,ab,c(a,b)\big)}{(a^2,ab,ac)} = \frac{\big(a^3,a^2b,ac(a,b)\big)}{(a^2(a,b),ab(a,b),(a,b)ac)} \in R,$$

то

$$\frac{(a^2,ab,ac)}{(a^2,ab,c(a,b))} \,\bigg|\, \frac{a}{(a,b)}\ .$$

Аналогично показываем, что

$$\frac{(b^2,ab,bc)}{(b^2,ab,c(a,b))} \,\bigg|\, \frac{b}{(a,b)}\ .$$

Из того, что

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1,$$

вытекает, что

$$\left(\frac{(a^2,ab,ac)}{(a^2,ab,c(a,b))}, \frac{(b^2,ab,bc)}{(b^2,ab,c(a,b))}\right) = 1.$$

А это значит, что

$$\left(\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right) = \frac{(a,b)}{(a,b,c)}.$$

$\square$

Свойство 1.5. *Выполняется равенство*

$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right)=\frac{a}{(a,[b,c])},$$

где a и bc одновременно не равны нулю.

Доказательство. Выполняется равенство

$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right)=\left(\frac{ac}{(ac,bc)},\frac{ab}{(ab,bc)}\right).$$

Воспользовавшись свойством 1.4, получаем

$$\left(\frac{ac}{(ac,bc)},\frac{ab}{(ab,bc)}\right)=\frac{(ab,ac)}{(ab,ac,bc)}=\frac{a(b,c)}{(a(b,c),bc)}=$$

$$=\frac{a(b,c)}{(b,c)\,(a,[b,c])}=\frac{a}{(a,[b,c])}.$$

□

Свойство 1.6. *Выполняется равенство*

$$\left[\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right]=\frac{a}{(a,(b,c))},$$

где a и bc одновременно не равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$\frac{a}{(a,[b,c])}\frac{a}{(a,(b,c))}=\frac{a^2}{(a^2,a\left([b,c],(b,c)\right),bc)}=$$

$$=\frac{a^2}{(a^2,a(b,c),bc)}=\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}.$$

Тогда

$$\left[\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right]=\frac{\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}}{\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right)}.$$

Из свойства 1.5 получаем:

$$\frac{\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}}{\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right)}=\frac{\frac{a}{(a,[b,c])}\frac{a}{(a,(b,c))}}{\frac{a}{(a,[b,c])}}=\frac{a}{(a,(b,c))}.$$

□

Свойство 1.7. *Выполняется равенство*

$$\left[\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right] = \frac{[a,b]}{([a,b],c)},$$

где ab и c одновременно не равны нулю.

Доказательство. Выполняется равенство

$$\left[\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right] = \left[\frac{ab}{(ab,cb)}, \frac{ab}{(ab,ac)}\right].$$

На основании свойства 1.6

$$\left[\frac{ab}{(ab,cb)}, \frac{ab}{(ab,ac)}\right] = \frac{ab}{(ab,(cb,ac))} =$$

$$= \frac{ab}{(ab,c(b,a))} = \frac{ab}{(a,b)\,([a,b],c)} = \frac{[a,b]}{([a,b],c)},$$

что и требовалось доказать. □

Свойство 1.8. *Если $(a,b)=1$, $a|c$ и $b|c$ то $ab|c$.*

Доказательство. Поскольку $c=a\mu$ и $c=b\nu$, то существуют такие u,v , что

$$au+\ bv=1 \Rightarrow\ (a\mu)u+\ b\mu v=\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cu+\ b\mu v=\mu \Rightarrow b\nu u+\ b\mu v=\mu.$$

Поэтому $b(\nu u+\ \mu v)=\mu$. Следовательно,

$$c=a\mu=ab(\nu u+\ \mu v).$$ □

Свойство 1.9. *Если $(a,\ mn)=(b,\ mn)$, то $(a,\ m)=(b,\ m)$.*

Доказательство. Поскольку

$$(a,\ m)|(a,\ mn)=(b,\ mn),$$

то $(a,\ m)|b$, i $(a,\ m)|m$. Поэтому $(a,\ m)|(b,\ m)$. По аналогичной схеме показываем, что $(b,\ m)|(a,\ m)$. Следовательно, $(a,\ m)=(b,\ m)$. □

Свойство 1.10. *Если $(a_1,\ldots,a_n)=1$, $n\geq 2$, и $\varepsilon_1|\varepsilon_2|\ldots|\varepsilon_k$, $\varepsilon_i\neq 0$, $i=1,\ldots,k, 1\leq k<n$, то*

$$(a_1\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1},\ldots,a_k\varepsilon_1,a_{k+1},\ldots,a_n)=(\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1},\ldots,a_k\varepsilon_1,a_{k+1},\ldots,a_n).$$

Доказательство. Обозначим

$$(a_1\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n) = \delta_k.$$

Поскольку

$$(\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n)|\delta_k,$$

то для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что $\delta_k|\varepsilon_k$.

Если $k = 1$, то

$$\delta_1 = (a_1\varepsilon_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1\varepsilon_1, (a_2, \ldots, a_n)) = (\varepsilon_1, (a_2, \ldots, a_n)),$$

то есть $\delta_1|\varepsilon_1$. Следовательно, при $k = 1$ наше утверждение верно.

Пусть $k \geq 2$ и предположим правильность этого утверждения для всех $m < k$. Тогда

$$\delta_k = (a_1\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\left(a_1\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}, \ldots, a_{k-1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_k\right), a_{k+1}, \ldots, a_n\right).$$

Поскольку

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}|\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}|\ldots|\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1},$$

то по предположению индукции

$$\left(a_1\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}, \ldots, a_{k-1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\right) = d_1|\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}.$$

Таким образом,

$$\delta_k = d_1\left(\varepsilon_1\frac{\left(a_1\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}, \ldots, a_{k-1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_k\right)}{d_1}, \left(\frac{a_{k+1}}{d_1}, \ldots, \frac{a_n}{d_1}\right)\right) =$$

$$= d_1\left(\varepsilon_1, \left(\frac{a_{k+1}}{d_1}, \ldots, \frac{a_n}{d_1}\right)\right) = d_1d_2,$$

где $d_2|\varepsilon_1$. Следовательно,

$$\delta_k = d_1d_2|\tfrac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}\varepsilon_1 = \varepsilon_k. \qquad \square$$

Свойство 1.11. *Пусть a, b, a_1, b_1, φ – ненулевые элементы кольца R, причем*

$$(a,\ b,\ \varphi) = (a_1,\ b_1,\ \varphi) = 1, \quad \varphi | \det \left\| \begin{matrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда для всех r с R выполняется условие

$$(ar + b,\ \varphi\ ) = (\ a_1 r + b_1,\ \varphi).$$

Доказательство. Пусть $(\ a,\ \varphi\ ) = \alpha$. Поскольку $ab_1 - a_1 b = \varphi\, t$, то $\alpha | a_1 b$. Заметив, что $(\alpha, b) = 1$, получаем $\alpha | a_1$. Следовательно, $\alpha | (a_1,\ \varphi) = \alpha_1$. Аналогично показываем, что $\alpha_1 | \alpha$. Это означает, что

$$(a,\ \varphi\ ) = (\ a_1,\ \varphi) = \alpha. \tag{1.2}$$

Пусть $r \in R$. Рассмотрим

$$d = (\ a_1(ar + b),\ \varphi\ ) = (\ a_1 ar + a_1 b,\ \varphi\ ) = (\ a_1 ar + a_1 b + \varphi\, t,\ \varphi).$$

Поскольку $ab_1 = a_1 b + \varphi t$, то

$$d = (a_1 ar + ab_1,\ \varphi) = (a(a_1 r + b_1),\ \varphi),$$

то есть

$$(a_1(ar + b),\ \varphi\ ) = (\ a(a_1 r + b_1),\ \varphi).$$

Разделив обе части этого равенства на α, получим

$$\left(\frac{a_1}{\alpha}(ar + b),\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(\frac{a}{\alpha}(a_1 r + b_1),\ \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Из равенства (1.2) вытекает, что

$$\left(\frac{a}{\alpha},\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(\frac{a_1}{\alpha},\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = 1.$$

Следовательно,

$$\left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(a_1 r + b_1,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \delta.$$

Поскольку $\alpha\ | a$ и $\alpha\ | a_1$, причем

$$(\alpha,\ b) = (\alpha,\ b_1) = 1,$$

то при всех значениях r из R

$$(ar + b,\ \alpha) = (a_1 r + b_1,\ \alpha) = 1.$$

Таким образом,

$$\delta = \left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\alpha\right) = (ar + b,\ \varphi).$$

Аналогично показываем, что $\delta = (a_1 r + b_1,\ \varphi)$. $\square$

Свойство 1.12. *Пусть*

$$(a_1,\ b_1,\ \varphi\ ) = 1, \tag{1.3}$$

$$\varphi|\det\left\|\begin{array}{cc} a & a_1 \\ b & b_1 \end{array}\right\|,$$

где $aba_1b_1 \neq 0$. *Тогда, если*

$$(a_1r + b_1,\ \varphi) = \alpha,$$

то

$$(ar + b,\ \varphi) = \alpha\left(a,\ b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Пусть $(a,\ b,\ \varphi) = \delta$, тогда

$$\left(\frac{a}{\delta},\ \frac{b}{\delta},\ \frac{\varphi}{\delta}\right) = 1.$$

Поскольку

$$\varphi|\left|\begin{array}{cc} a & a_1 \\ b & b_1 \end{array}\right| = \delta\left|\begin{array}{cc} \frac{a}{\delta} & a_1 \\ \frac{b}{\delta} & b_1 \end{array}\right|,$$

то

$$\frac{\varphi}{\delta}|\left|\begin{array}{cc} \frac{a}{\delta} & a_1 \\ \frac{b}{\delta} & b_1 \end{array}\right|.$$

Из условия (1.3) следует, что

$$\left(a_1,\ b_1,\ \frac{\varphi}{\delta}\right) = 1.$$

Тогда согласно свойству 1.11 для всех r из R выполняется условие

$$\left(a_1r + b_1,\ \frac{\varphi}{\delta}\right) = \left(\frac{a}{\delta}r + \frac{b}{\delta},\ \frac{\varphi}{\delta}\right).$$

Умножив это равенство на δ, получим

$$(ar + b,\ \varphi) = (\delta(a_1r + b_1),\ \varphi\ ) = \alpha\left(\delta\frac{a_1r + b_1}{\alpha},\ \ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \alpha\left(\delta,\ \ \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

То есть

$$(ar + b,\ \varphi) = \alpha\left(a,\ b,\ \varphi,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \alpha\left(a,\ b,\ \ \frac{\varphi}{\alpha}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Свойство 1.13. *Пусть*

$$(a_1 r + b_1,\ \varphi) = 1,\quad \varphi|\det\begin{Vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{Vmatrix},$$

где $ba_1b_1 \neq 0$. *Тогда*

$$(ar + b,\ \varphi\ ) = (\ a,\ b,\ \varphi).$$

Доказательство.Если $a = 0$, то доказывать нечего. Поэтому пусть $a \neq 0$. Из условия $(a_1 r + b_1,\ \varphi) = 1$ вытекает, что $(a_1, b_1,\ \varphi) = 1$. Тогда на основании свойства 1.12

$$(ar + b,\ \varphi) = (a,\ b,\ \varphi).$$

Что и требовалось доказать. □

Свойство 1.14. *Пусть* $(m,\ \ a_i) = (n,\ \ a_i)$, $i = 1,\ \dots\ ,\ k$. *Тогда*

$$(m,\ \ [a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_k]\ ) = (n,\ \ [a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_k]\ ).$$

То есть

$$\left(m,\ \ \frac{a_1\ a_2\ \dots\ a_k}{(a_2\ \dots\ a_k,\ a_1a_3\ \dots\ a_k,\ \dots\ ,\ a_1a_2\ \dots\ a_{k-1})}\right) =$$

$$= \left(n,\ \ \frac{a_1\ a_2\ \dots\ a_k}{(a_2\ \dots\ a_k,\ a_1a_3\ \dots\ a_k,\ \dots\ ,\ a_1a_2\ \dots\ a_{k-1})}\right).$$

Доказательство. Сначала пусть $i = 2$. Поскольку

$$(m,\ \ a_i) = (n,\ \ a_i) \quad \Rightarrow \quad (m,\ \ a_i)|\ n.$$

Поэтому $[(m,\ \ a_1),\ (m,\ \ a_2)\ ]\ |\ n$. Следовательно,

$$[(m,\ \ a_1),\ (m,\ \ a_2)\ ] = \frac{(m,\ \ a_1)(m,\ \ a_2)}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)} = \frac{(m^2,\ \ m(a_1,\ a_2),\ a_1a_2)}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)} =$$

$$= \left(m\left(\frac{m}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)},\ \frac{(a_1,\ \ a_2)}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)}\right)\ ,\ \ \frac{a_1a_2}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)}\right)\ |\ n. \tag{1.4}$$

Учитывая то, что

$$\left(m,\ \ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right)\ |\ m$$

и

$$\left(m,\ \ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right)\ |\ \ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\ |\ \ \frac{a_1a_2}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)},$$

из (1.4) получаем

$$\left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) \mid n.$$

Поэтому

$$\left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) \mid \left(n,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right).$$

Поскольку ситуация полностью симметричная, то

$$\left(n,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) \mid \left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right).$$

Таким образом,

$$\left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) = \left(n,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m,\ [a_1,\ a_2]) = (n,\ [a_1,\ a_2]).$$

Вернемся к общему случаю. Пусть

$$(m,\ a_1) = (n,\ a_1), (m,\ a_2) = (n,\ a_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (m,\ a_k) = (n,\ a_k).$$

Тогда

$$\begin{cases} (m,\ a_1) = (n,\ a_1), \\ (m,\ a_2) = (n,\ a_2) \end{cases} \Rightarrow\ (m,\ [a_1,\ a_2]) = (n,\ [a_1,\ a_2]).$$

Также

$$\begin{cases} (m,\ [a_1,\ a_2]) = (n,\ [a_1,\ a_2]), \\ (m,\ a_3) = (n,\ a_3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(m,\ [\,[a_1,\ a_2],\ a_3]) = (n,\ [\,[a_1,\ a_2],\ a_3]) \Rightarrow$$

$$(m,\ [\,a_1,\ a_2,\ a_3]) = (n,\ [\,a_1,\ a_2,\ a_3]).$$

Продолжая по аналогии, получаем

$$(m,\ [a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k]\,) = (n,\ [a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k]).$$ □

Свойство 1.15. *Пусть* $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k) = 1$, *причем* $\alpha_i | a, \quad \alpha_i, a \neq 0$, $i = 1,\ \dots,\ k$. *Тогда*

$$\left[\frac{a}{\alpha_1}, \frac{a}{\alpha_2}, \dots, \frac{a}{\alpha_k}\right] = a.$$

Доказательство. Имеем

$$\left[\frac{a}{\alpha_1}, \frac{a}{\alpha_2}, \dots, \frac{a}{\alpha_k}\right] =$$

$$= \frac{\frac{a}{\alpha_1}\frac{a}{\alpha_2}\ \dots\ \frac{a}{\alpha_k}}{\left(\frac{a}{\alpha_2}\ \dots\ \frac{a}{\alpha_k},\ \frac{a}{\alpha_1}\frac{a}{\alpha_3}\ \dots\ \frac{a}{\alpha_k},\ \dots,\ \frac{a}{\alpha_1}\frac{a}{\alpha_2}\ \dots\ \frac{a}{\alpha_{k-1}}\right)} =$$

$$= \frac{a^k}{(a^{k-1}\alpha_1,\ a^{k-1}\alpha_2,\ \dots,\ a^{k-1}\alpha_k)} = \frac{a^k}{a^{k-1}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k)} = a.$$

□

Свойство 1.16. *Пусть*

$$\left(m,\ \frac{a}{\alpha_i}\right) = \left(n,\ \frac{a}{\alpha_i}\right),$$

причем $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k) = 1$, $\alpha_i, a \neq 0$, $i = 1,\ \dots,\ k$. *Тогда*

$$(m,\ \ a) = (n,\ \ a).$$

Доказательство. В силу свойства 1.14 из того, что

$$\left(m,\ \frac{a}{\alpha_i}\right) = \left(n,\ \frac{a}{\alpha_i}\right),$$

$i = 1,\ \dots,\ k$, вытекает

$$\left(m,\ \left[\frac{a}{\alpha_1}, \frac{a}{\alpha_2}, \dots, \frac{a}{\alpha_k}\right]\right) = \left(n,\ \left[\frac{a}{\alpha_1}, \frac{a}{\alpha_2}, \dots, \frac{a}{\alpha_k}\right]\right).$$

Согласно свойству 1.15

$$\left[\frac{a}{\alpha_1}, \frac{a}{\alpha_2}, \dots, \frac{a}{\alpha_k}\right] = a.$$

Следовательно, $(m,\ \ a) = (n,\ \ a)$. □

Свойство 1.17. *Пусть*

$$\varphi | \det \begin{Vmatrix} a & a_i \\ b & b_i \end{Vmatrix}, \quad (a_i r + b_i,\ \varphi) = (a_i, b_i, \varphi),$$

где $b, a_i, b_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k,$ *причем*

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_1, b_1), \varphi) = 1.$$

Тогда

$$(ar + b,\ \varphi) = (a,\ b,\ \varphi).$$

Доказательство. При $a = 0$ доказывать нечего. Поэтому пусть $a \neq 0$. Обозначим $(a_i, b_i, \varphi) = \delta_i, \quad i = 1, \ldots, k$. Тогда

$$\left(\frac{a_i}{\delta_i} r + \frac{b_i}{\delta_i}, \frac{\varphi}{\delta_i}\right) = 1,$$

причем

$$\frac{\varphi}{\delta_i} | \begin{vmatrix} a & \frac{a_i}{\delta_i} \\ b & \frac{b_i}{\delta_i} \end{vmatrix}.$$

На основании свойства 1.13

$$\left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\delta_i}\right) = \left(a,\ b,\ \frac{\varphi}{\delta_i}\right),$$

$i = 1, \ldots, k$. По условию теоремы $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) = 1$. Тогда, приняв во внимание свойство 1.16, получим $(ar + b,\ \varphi) = (a,\ b,\ \varphi)$. □

Подавляющее большинство классических колец Безу являются адекватными кольцами, введенными О. Хелмером [8].

Определение 1.2. Кольцо R называется адекватным, если R – коммутативное кольцо Безу без делителей нуля, в котором для всех элементов $a \neq 0,\ b$ существуют такие элементы $c,\ d$, что $a = cd$, причем $(c,\ b) = 1$ и каждый необратимый делитель d_i элемента d имеет необратимый общий делитель с b.

Коммутативные области главных идеалов являются адекватными кольцами. С другой стороны, кольцо целых аналитических функций является адекватным кольцом однако не является кольцом главных идеалов.

Адекватные кольца обладают свойством, которое не характерно всем кольцам Безу.

Свойство 1.18. *Пусть* $a_1,\ a_2,\ a_3$ *– взаимно простые элементы адекватного кольца, где* $a_3 \neq 0$. *Тогда существует такое* r, *что*

$$(a_1 + a_2 r,\ a_3) = 1.$$

Доказательство. Разложим элемент a_3 в произведение $a_3 = st$, где

$$(s,\ a_1) = 1,$$

а каждый делитель δ элемента t удовлетворяет условию

$$(\delta,\ a_1) \neq 1. \tag{1.5}$$

Пусть

$$(a_1 + sa_2,\ a_3) = \tau.$$

Обозначим $(s,\ \tau) = \tau_1$. Поскольку $\tau_1|\ (a_1 + sa_2)$ и $\tau_1|\ s$, то $\tau_1|\ a_1$. Поэтому $\tau_1|\ (a_1,\ s)$, то есть $\tau_1 = 1$. Следовательно,

$$(s,\ \tau) = 1.$$

Поскольку $\tau_1|\ a_3 = st$, то $\tau|\ t$. Припустим, что $\tau \notin U(R)$. На основании условия (1.5) $(\tau,\ a_2) = \tau_2 \neq 1$. Кроме того $\tau_2|\ (a_1 + sa_2)$. Отсюда следует, что $\tau_2|a_2.$ Таким образом, $\tau_2|\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = 1$, что противоречит нашему предположению. Итак, $\tau = 1$, т.е. $s = r$ и является искомым элементом. □

Свойство 1.18 дает возможность оценить стабильный ранг адекватных колец – одного из важных кольцевых характеристик.

Определение 1.3. [9] Стабильным рангом кольца R называется такое наименьшее натуральное число n, что из условия

$$a_1 R + \cdots + a_{n+1} R = R, \tag{1.6}$$

где $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$, следует существование таких $b_1, \ldots, b_n \in R$, что

$$(a_1 + a_{n+1} b_1) R + \cdots + (a_n + a_{n+1} b_n) R = R.$$

В частности, кольцо R имеет стабильный ранг 2, если из условия

$$a_1 R + a_2 R + a_3 R = 1$$

вытекает существование таких $r_1,\ r_2$, что

$$(a_1 + a_3 r_1) R + (a_2 + a_3 r_2) R = 1.$$

Кольцо R имеет стабильный ранг 1, если $aR + bR = 1$, то существует такое r, что $a + br$ является обратимым элементом кольца R.

Примером кольца стабильного ранга 1 является $F[[x]]$ – кольцо формальных степенных рядов над полем F. Кольцо целых чисел, кольца главных идеалов, области Безу имеют стабильный ранг 2.

Свойство 1.18 показывает, что между кольцами стабильного ранга 1 и 2 находится еще один класс колец, который назовем кольцами стабильного ранга 1,5.

Определение 1.4. Кольцо R имеет стабильный ранг 1,5, если из условия

$$aR + bR + cR = R,$$

$a, b, c \in R$, $c \neq 0$, вытекает существование такого $r \in R$, что

$$(a + br)R + cR = R.$$

Свойство 1.19. *Пусть* $a_1, \ \dots \ , \ a_n$ *– взаимно простые элементы коммутативного кольца Безу стабильного ранга* 1,5, *причем* $a_n \neq 0$. *Тогда существуют такие* $r_2, \ \dots \ , r_{n-1}$, *что*

$$(a_1 + a_2 r_2 + \ \dots \ + a_{n-1} r_{n-1}, \ a_n) = 1.$$

Доказательство. Обозначим $\delta = (a_2, \ \dots \ , \ a_{n-1})$. Тогда существуют такие
$v_2, \ \dots \ , \ v_{n-1}$, что

$$\delta = v_2 a_2 + \ \dots \ + v_{n-1} a_{n-1}.$$

Поскольку $(a_1, \ \delta, \ a_n) = 1$, то на основании доказанного существует такое r, что

$$(a_1 + r\delta, \ a_n) = 1.$$

Следовательно,

$$(a_1 + a_2 r u_2 + \ \dots \ + a_{n-1} r u_{n-1}, \ a_n) = 1.$$

Что и требовалось доказать. □

Заметим, что не все коммутативные кольца Безу имеют стабильный ранг 1,5. Примером является кольцо, которое ввел М. Хенриксен.

Пример 1.1. [11] Рассмотрим Q – кольцо формальных степенных рядов, свободный член которых является целым числом, а коэффициенты у переменной x – элементы с поля рациональных чисел:

$$Q = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_0 \in \mathbb{Z}, \ a_i \in \mathbb{Q}, \ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Покажем, что Q является кольцом Безу, стабильный ранг которого равен 1,5. Группа $U(Q)$ единиц этого кольца состоит из всех элементов вида

$$\pm 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i. \tag{1.7}$$

Отсюда вытекает, что элементы кольца Q можно представить следующим образом:

если $a_0 \neq 0$, то

$$\alpha = a_0 e_\alpha,$$

где

$$a_0 \in \mathbb{Z}^*, \ \ e_\alpha = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{a_0} x^i\right) \in U(Q);$$

если $a_0 = 0$, то

$$\beta = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{p_i}{q_i} x^i = \frac{p_k}{q_k} x^k \left(1 + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{p_i q_k}{q_i p_k} x^i\right) = \frac{p_k}{q_k} x^k e_\beta,$$

где $p_k, q_k \in \mathbb{Z}^*$, $e_\beta \in U(R)$.

Убедимся, что Q является кольцом Безу.

Пусть $\mu = m e_\mu$, $\nu = n e_\nu$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $e_\mu, e_\nu \in U(Q)$. Существуют такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что

$$mu + nv = (m, \ n).$$

Тогда

$$m e_\mu (e_\mu^{-1} u) + n e_\nu (e_\nu^{-1} v) = (m, \ n) = (\mu, \nu).$$

Пусть

$$\alpha = \frac{s_l}{t_l} x^l e_\alpha, \ \beta = \frac{p_k}{q_k} x^k e_\beta, \ \ e_\alpha, e_\beta \in U(Q),$$

причем $0 \leqslant l < k$. Тогда

$$\beta = \alpha \frac{p_k t_l}{q_k s_l} x^{k-l} e_\beta e_\alpha^{-1}.$$

Следовательно,

$$(\alpha, \beta) = \alpha \Rightarrow \alpha 1 + \beta 0 = \alpha.$$

Остается рассмотреть случай, когда

$$\alpha = \frac{s_k}{t_k} x^k e_\alpha, \ \beta = \frac{p_k}{q_k} x^k e_\beta,$$

где $e_\alpha, e_\beta \in U(Q)$, причем $k \geqslant 1$. Пусть

$$(s_k q_k, \ t_k p_k) = d$$

и
$$(s_kq_k)u + (\ t_kp_k)v = d.$$
Тогда
$$(\alpha, \beta) = \frac{d}{t_kq_k}x^k\left(\frac{s_kq_k}{d}e_\alpha,\ \frac{p_kt_k}{d}e_\beta\right) = \frac{d}{t_kq_k}x^k.$$
При этом
$$\alpha u e_\alpha^{-1} + \beta v e_\beta^{-1} = (\alpha, \beta).$$
Следовательно, Q является кольцом Безу.

Выберем тройку взаимно простых элементов $3,\ 7,\ x$. Заметим, что элемент x взаимно простый лишь с единицами кольца R, которые имеют вид (1.7). Рассмотрим уравнение относительно неизвестного r
$$3 + 7r = \pm 1 + b_1x + b_2x^2 + \ \cdots\ .$$
Его решение имеет вид
$$r_1 = -\frac{4}{7} + c_1x + c_2x^2 + \ \cdots$$
или же
$$r_2 = -\frac{2}{7} + d_1x + d_2x^2 + \ \cdots\ .$$
Однако $r_1,\ r_2$ не являются элементами кольца Q. Это означает, что $(7 + 5k,\ x) \neq 1$ для каждого k с $\mathbb{Z}$. Поэтому Q не является кольцом стабильного ранга 1,5. $\diamondsuit$

1.2. Дополнение примитивной строки до обратимой матрицы

Одной из важных проблем, которая возникает при решении многих матричных задач, является задача дополнения строки (столбца), составленной из взаимно простых элементов, до обратимой матрицы. Оказывается, что уже сам выбор кольца, над которым решается эта задачу, существенно влияет на вид искомой обратимой матрицы.

Теорема 1.1. *Пусть* $\|\, a_1\ \ldots\ a_n \|$ *строка над кольцом Безу* R. *Существует такая матрица*
$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1.n-2} & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & u_{n-2.n-2} & u_{n-2.n-1} & u_{n-2.n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array} \right\|, \qquad (1.8)$$

что $\det A = (a_1, \ \dots \ , \ a_n) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $n = 2$ и

$$a_2 u_{11} - a_1 u_{12} = (a_1, \ a_2).$$

Тогда искомой будет матрица

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right\|.$$

Предположим правильность нашего утверждения для всех матриц порядка, меньше n. Тогда существует матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} & B & \\ \hline a_2 & \dots & a_n \end{array} \right\| = D$$

с определителем $(a_2, \dots, a_n)$. Поскольку

$$\det D = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+n-1} a_i d_i,$$

где d_i – соответствующий минор $(n-2)$-го порядка матрицы B, то

$$(a_2, \dots, a_n)(d_2, \dots, d_n) | (a_2, \dots, a_n).$$

Следовательно, $(d_2, \dots, d_n) = 1$. Поэтому существует обратимая матрица вида

$$\left\| \begin{array}{ccc} c_2 & \dots & c_n \\ \hline & & \\ & B & \end{array} \right\|.$$

Найдутся такие p, q, что

$$a_1 q + (a_2, \dots, a_{n-1}) p = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n).$$

Тогда искомой матрицей будет

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} p & (-1)^{n-1} q c_2 & \dots & (-1)^{n-1} q c_n \\ \hline \mathbf{0} & & B & \\ \hline a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array} \right\|.$$

$\square$

Впервые этот результат получил Ш. Эрмит [72] для целочисленных матриц третьего порядка.

Определение 1.5. Строка, составленная из взаимно простых элементов кольца Безу называется примитивной.

Следствие 1.1. *Пусть* $\| a_1 \ \ldots \ a_n \|$ *– примитивная строка. Тогда существует обратимая матрица вида* (1.8). □

Замечание. Переставляя строки или транспонируя и переставляя столбцы матрицы (1.8), можно построить обратимую матрицу, в которой заданная примитивная строка будет находиться на произвольной позиции.

Над кольцами Безу стабильного ранга 1,5 процесс дополнение примитивной строки до обратимой матрицы существенно упрощается.

Теорема 1.2. *Если* $\| a_1 \ \ldots \ a_n \|$ *примитивная строка над кольцом Безу стабильного ранга* 1,5, *причем* $a_1 \neq 0$, *то существует обратимая матрица вида*

$$\left\| \begin{array}{cccccc} u_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array} \right\| = U.$$

Доказательство. На основании свойства 1.19 существуют такие элементы $u_1, \ \ldots \ , u_{n-1}$, что

$$(a_n - u_{n-1}a_{n-1} - \ \ldots \ - \ u_2a_2, \ \ a_1) = 1.$$

Следовательно, найдутся такие $u_1, \ u_n$, что

$$u_n(a_n - u_{n-1}a_{n-1} - \ \ldots \ - \ u_2a_2) - u_1 \ a_1 = 1.$$

Тогда $\det U =$

$$= u_n \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & 0 & u_2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \\ a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array} \right\| + (-1)^{n+1}a_1 \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & u_1 \\ 1 & & & & u_2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \end{array} \right\| =$$

$$= u_n \left((-1)^n a_2 \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & u_2 \\ 1 & & 0 & 0 & u_3 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \end{array} \right\| + (-1)^{n+1}a_3 \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & \ldots & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & u_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & u_4 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \end{array} \right\| \right) +$$

$$+\ldots+u_n\left((-1)^{2(n-1)-1}a_{n-1}\begin{Vmatrix} 1 & & 0 & u_2 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & u_{n-1}\end{Vmatrix}+a_n\right)+(-1)^{2n+1}a_1u_1=$$

$$=u_n(a_n-u_{n-1}a_{n-1}-\ \ldots\ -\ u_2a_2)-u_1\,a_1=1.$$

□

Теперь мы можем установить одно из важных свойств матриц над кольцами Безу.

Теорема 1.3. *Пусть* $(a_1,\ \ldots\ ,\ a_n)=\alpha$. *Тогда существует такая обратимая матрица* U, *что*

$$U\,\|\, a_1\ \ldots\ a_n\|^T=\|\ \ \alpha\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \ \|^T.$$

Доказательство. Поскольку $(a_1,\ \ldots\ ,\ a_n)=\alpha$, то существуют такие элементы $u_1,\ \ldots\ ,\ u_n$, что

$$u_1\,a_1+\ \ldots\ +u_na_n=\alpha.$$

Поэтому

$$(u_1,\ \ldots\ ,\ u_n)=1.$$

Следовательно, строка $\|\,u_1\ \ldots\ u_n\|$ примитивная. На основании теоремы 1.1 ее можно дополнить до обратимой матрицы вида

$$\begin{Vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \ldots & v_{n-1.n} \\ u_1 & \ldots & u_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{Vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \ldots & v_{n-1.n} \\ u_1 & \ldots & u_n \end{Vmatrix}\|\,a_1\ \ldots\ a_n\|^T=\|\ \ b_1\ \ \ldots\ \ b_{n-1}\ \ \alpha\ \ \|^T,$$

где

$$b_i=v_{i1}\,a_1+\ \ldots\ +v_{in}a_n,\ i=1,\ \ldots\ ,\ n-1.$$

Заметив, что α является делителем всех элементов столбца $\| a_1 \ \dots \ a_n \|^T$, приходим к выводу, что $\alpha | b_i$, $i = 1, \ \dots \ , n-1$. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & -\frac{b_1}{\alpha} \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\frac{b_{n-1}}{\alpha} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} b_1 & \dots & b_{n-1} & \alpha \end{matrix} \right\|^T = \left\| \begin{matrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|^T.$$

Следовательно, искомой будет матрица

$$U = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & -\frac{b_1}{\alpha} \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\frac{b_{n-1}}{\alpha} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & v_{n-1.n} \\ u_1 & \dots & u_n \end{matrix} \right\|.$$

Теорема доказана. □

Перейдя в этой теореме к транспонированным матрицам, получим такой результат.

Следствие 1.2. *Пусть* $(a_1, \ \dots \ , a_n) = \alpha$. *Тогда существует такая обратимая матрица* V, *что*

$$\| a_1 \ \dots \ a_n \| V = \left\| \begin{matrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|. \qquad \square$$

1.3. Форма Эрмита

Совершая те или иные преобразования матриц, мы меняем их вид. Но есть величины, которые при этом не меняются, т.е. они являются инвариантами относительно таких преобразований. Одним из важных инвариантов матриц относительно преобразований из группы $\mathrm{GL}_n(R)$ является н.о.д. миноров фиксированного порядка.

Теорема 1.4. *Пусть* A – $m \times n$ *матрица,* $V \in \mathrm{GL}_m$, $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. *Тогда н.о.д. миноров порядка* k *матрицы* A *совпадает с н.о.д. миноров соответствующего порядка матрицы* VAU, $k = 1, 2, \dots, \min(m, n)$.

Доказательство. Для определенности положим $m \leqslant n$. Обозначим через δ_k н.о.д. миноров порядка k матрицы A, а Δ_k – матрицы AU.

Рассмотрим $AU =$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{matrix} \right\| = B.$$

На основании формулы Бине-Коши каждый минор k-го порядка этой матрицы имеет вид

$$\left|\begin{matrix} b_{i_1j_1} & \dots & b_{i_1j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i_kj_1} & \dots & b_{i_kj_k} \end{matrix}\right| = \sum_{1\leqslant l_1<\ldots<l_k\leqslant m} \left|\begin{matrix} a_{i_1l_1} & \dots & a_{i_1l_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kl_1} & \dots & a_{i_kl_k} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_{l_1j_1} & \dots & u_{l_1j_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{l_kj_1} & \dots & u_{l_kj_n} \end{matrix}\right|,$$

$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$. Поскольку δ_k делит все миноры k-го порядка матрицы A, то из этого равенства вытекает, что δ_k также будет делителем всех миноров k-го порядка матрицы AU. Это означает, что $\delta_k|\Delta_k$, $k = 1, \ \dots \ , m$.

С другой стороны, $A = BV$, где $V = U^{-1}$. Повторив только что приведенные рассуждения, показываем, что $\Delta_k|\delta_k$, $k = 1, \ \dots \ , m$. Следовательно, $\delta_k = \Delta_k$, $k = 1, \ \dots \ , m$.

Аналогично доказывается, что δ_k совпадает с н.о.д. миноров k-го порядка матрицы VA. И, наконец, учитывая ассоциативность операции умножения матриц, завершаем доказательство. □

Напомним, что под **рангом матрицы** понимается порядок наибольшего отличного от нуля минора этой матрицы. Будем говорить, что $m\times n$ матрица A имеет максимальный ранг, если $\operatorname{rang} A = \min(m, n)$, т.е. равен меньшему из m, n.

Следствие 1.3. *Пусть A – $m \times n$ матрица, $V \in \mathrm{GL}_m$, $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} VAU. \qquad \square$$

Матрицы A, B будем называть **ассоциированными справа**, если существует такая обратимая матрица V, что $A = BV$. Отношение быть ассоциированными справа является отношением эквивалентности. Класс, содержащий матрицу A, имеет вид $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ и называется классом смежности с представителем A. Естественно, возникает вопрос выбора в этом классе матрицы простейшей структуры. Для решения этой задачи нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. В этом разделе R – кольцо Безу.

Лемма 1.1. *Пусть A, B – $n \times n$ нижние треугольные матрицы над R, причем матрица A неособенная. Если*

$$AC = B, \tag{1.9}$$

то C также является нижней треугольной матрицей.

Доказательство. Если $n = 2$, то равенство (1.9) имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix}\right\|.$$

Следовательно, $a_{11}c_{12} = 0$. Поскольку $a_{11} \neq 0$ и кольцо R не имеет делителей нуля, то $c_{12} = 0$.

Допустим правильность нашего утверждения для матриц порядка $n-1$. Запишем равенство (1.9) в блочном виде:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} & A_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \hline a_{n1} & \dots & a_{n.n-1} & a_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc|c} & & & c_{1n} \\ & C_{n-1} & & \dots \\ & & & c_{n-1.n} \\ \hline c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & c_{nn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|c} & B_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \hline c_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & b_{nn} \end{array} \right\|, \tag{1.10}$$

где A_{n-1} и B_{n-1} – нижние треугольные матрицы. Из этого равенства вытекает, что

$$A_{n-1}C_{n-1} = B_{n-1}.$$

Матрица A неособенная. Поэтому неособенной также будет матрица A_{n-1}. На основании нашего предположения C_{n-1} является нижней треугольной матрицей. Из (1.10) также получаем, что

$$A_{n-1} \left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = \mathbf{0}.$$

В силу теоремы 1.3 существует такая обратимая матрица U, что

$$U \left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|^T.$$

Следовательно, выполняется равенство

$$(A_{n-1}U^{-1})U \left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = (A_{n-1}U^{-1}) \left\| \begin{array}{cccc} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|^T,$$

где $\alpha = (c_{1n}, \, \dots, \, c_{n-1.n})$. Из этого равенства следует, что

$$\alpha \left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & \dots & d_{n-1.1} \end{array} \right\| = \mathbf{0},$$

где $\left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & \dots & d_{n-1.1} \end{array} \right\|$ – первый столбец матрицы $A_{n-1}U^{-1}$. Поскольку матрица$A_{n-1}U^{-1}$ неособенная, то

$$\left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & \dots & d_{n-1.1} \end{array} \right\| \neq \mathbf{0}.$$

Это означает, что $\alpha = 0$ Поэтому

$$\left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = \mathbf{0}.$$

Таким образом, C также является нижней треугольной матрицей. $\square$

Пусть $a \in R$. Обозначим через $K(a)$ полную систему вычетов по модулю a, т.е. множество представителей смежных классов фактор-кольца R/Ra. Также обозначим через $Z(R)$ множество неассоциированных элементов кольца R, т.е. множество представителей смежных классов фактор-кольца $R/U(R)$.

Теорема 1.5. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|$ – $n \times m$ *матрица* $(n \leqslant m)$ *и* $\operatorname{rang} A = n$. *Тогда существует такая обратимая матрица* U, *что*

$$AU = \left\| \begin{matrix} H & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \ H = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\|, \tag{1.11}$$

где $\alpha_i \in Z(R)$, $i = 1, \dots, n$, $b_{ij} \in K(\alpha_i)$ *для всех* $i > j$, *причем в классе* $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ *матрица вида* (1.11) *единственная.*

Доказательство. Пусть

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}) = \alpha_1,$$

где $\alpha_1 \in Z(R)$. Согласно следствию 1.2 существует такая обратимая матрица U_1, что

$$\| a_{11} \ \dots \ a_{1m} \| U_1 = \| \ \alpha_1 \ \ 0 \ \dots \ 0 \ \|.$$

Следовательно,

$$AU_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{matrix} \right\|.$$

Пусть

$$(c_{22}, \dots, c_{2m}) = \alpha_2,$$

где $\alpha_2 \in Z(R)$. Тогда существует такая обратимая матрица U_2', что

$$\| c_{22} \ \dots \ c_{2m} \| U_2' = \| \ \alpha_2 \ \ 0 \ \dots \ 0 \ \|,$$

то есть

$$AU_1U_2' = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nm} \end{matrix} \right\|,$$

где $U = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2' \end{matrix} \right\|$. Продолжив наши рассуждения, получим такую обратимую матрицу V, которая является произведением обратимых матриц $U_1, U_2, \ \ldots \ , U_{n-1}$, что

$$AV = \left\| \begin{matrix} H_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = A_1, \ \ H_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ f_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ f_{n1} & \ldots & f_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\|,$$

где $\alpha_i \in Z(R)$, $i = 1, \ \ldots \ , n$. Поскольку $\mathrm{rang} A = n$, то на основании следствия 1.3 все $\alpha_i \neq 0$.

Множество $K(\alpha_2)$ содержит такой элемент b_{21}, что

$$f_{21} \equiv b_{21} (\mathrm{mod} \alpha_2),$$

т.е. $f_{21} = b_{21} + \alpha_2 r_{21}$, где $r_{21} \in R$. Тогда

$$A_1 \underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -r_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|}_{V_2} = \left\| \begin{matrix} H_2 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \ H_2 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & 0 & & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & 0 & & 0 \\ f_{31}' & f_{32} & \alpha_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ f_{n1}' & f_{n2} & \ldots & f_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\|.$$

Для элементов $f_{31}', \ f_{32}$ у множжестве $K(\alpha_3)$ существуют такие элементы $b_{31}, \ b_{32}$, что

$$f_{31}' = b_{31} + \alpha_3 r_{31}, \ \ f_{32} = b_{32} + \alpha_3 r_{32},$$

где $r_{31}, \ r_{32} \in R$. Тогда

$$A_1 V_2 \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -r_{31} & -r_{32} & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} H_3 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

$$H_3 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & 0 & 0 & & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \alpha_3 & 0 & & 0 \\ f_{41}'' & f_{42}' & f_{43} & \alpha_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ f_{n1}'' & f_{n2}' & f_{n3} & & & \alpha_n \end{matrix} \right\|.$$

Продолжая описанный процесс, в конце концов получим искомую обратимую матрицу U, которая является произведением всех обратимых матриц, на которые умножалась матрица A справа. Таким образом, мы доказали, что в классе $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ существует матрица вида (1.11). Покажем, что такая матрица единственная.

Предположим, что в классе $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ существует матрица вида $\left\| \begin{matrix} B & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$, где

$$B = \left\| \begin{matrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & \beta_n \end{matrix} \right\|,$$

причем $\beta_i \in Z(R)$, $i = 1, \ \dots \ , \ n$, $c_{ij} \in K(\beta_i)$, $i > j$. Тогда существует такая обратимая матрица L, что $B = AL$. В силу леммы 1.1 L является нижней треугольной матрицей. Поэтому

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & e_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{n.n-1} & e_n \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & \beta_n \end{matrix} \right\|. \tag{1.12}$$

Поскольку матрица L является обратимой, то $e_i \in U(R)$, $i = 1, \ \dots \ , \ n$. Тогда $\beta_i = \alpha_i e_i$, $i = 1, \ \dots \ , \ n$. Это означает, что β_i, α_i являются представителями одного и того же класса асоциированных между собой элементов кольца R. Следовательно, $\beta_i = \alpha_i$, $i = 1, \ \dots \ , \ n$. Поэтому $e_i = 1$, $i = 1, \ \dots \ , \ n$. С равенства (1.12) получаем

$$c_{i.i-1} = b_{i.i-1} + \alpha_i l_{i.i-1}, \ \ i = 2, \ \dots \ , \ n.$$

То есть

$$c_{i.i-1} \equiv b_{i.i-1} (\mathrm{mod} \alpha_i).$$

Следовательно, $c_{i.i-1}, \ b_{i.i-1} \in K(\alpha_i)$. Поэтому $c_{i.i-1} = b_{i.i-1}$, $l_{i.i-1} = 0$, $i = 2, \ \dots \ , \ n$. Продолжив аналогичные рассуждения, получим, что $A = B$. $\square$

Матрицу (1.11) называют **формой Эрмита** матрицы A. Такое название она получила в честь выдающегося французского математика Ш. Эрмита, который показал [72], что каждая целочисленных матрица односторонними преобразованиями с полной линейной группы сводится собственно к такому виду.

Теорема 1.6. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|$ – $m \times n$ *матрица и* $\operatorname{rang} A = r < \min(m, n)$. *Тогда существуют такие обратимые матрицы* U, V, *что*

$$UAV = \left\| \begin{array}{cc} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где M – *неособенная матрица порядка* r.

Доказательство. Для определенности положим $m \leqslant n$. Если матрица A имеет максимальный ранг, то $U = I$, а матрица V на основании теоремы 1.5 является матрицей, которая приводит матрицу A к ее форме Эрмита.

Пусть $\operatorname{rang} A = r < m$. Тогда в матрице A существует неособенная подматрица A_{11} порядка r. Перестановкой столбцов и строк, что равносильно умножению ее на неособенные матрицы U_1, V_1, добьемся того, чтобы матрица U_1AV_1 имела вид

$$U_1AV_1 = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|.$$

Поскольку матрица $\left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \right\|$ имеет максимальный ранг, то в силу теоремы 1.5 существует такая обратимая матрица V_2, что

$$\left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \right\| V_2 = \left\| \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & 0 & \mathbf{0} \\ * & * & \alpha_r & \mathbf{0} \end{array} \right\|$$

– форма Эрмита матрицы $\left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \right\|$, де $\alpha_1 \ldots \alpha_r \neq 0$.

Рассмотрим матрицу

$$U_1A(V_1V_2) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \alpha_r & 0 & \ldots & 0 \\ \hline b_{r+1.1} & \ldots & b_{r+1.r} & b_{r+1.r+1} & \ldots & b_{r+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mr} & b_{m.r+1} & \ldots & b_{mn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\|.$$

Поскольку все миноры порядка $r+1$ этой матрицы равны нулю, то, в частности, и

$$\alpha_1 \ldots \alpha_r b_{ij} = 0, \quad i = r+1, r+2, \ldots, m, \quad j = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что $b_{ij} = 0$, где $i = r+1, r+2, \ldots, m$, $j = r+1, r+2, \ldots, n$, т.е. $B_{22} = \mathbf{0}$. Матрица $\left\| \begin{array}{c} B_{11} \\ B_{21} \end{array} \right\|$ имеет максимальный ранг. Опять же, существует такая обратимая матрица U_2, что

$$U_2 \left\| \begin{array}{c} B_{11} \\ B_{21} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \beta_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ * & * & \beta_r \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} C \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где $\det C = \beta_1 \dots \beta_r \neq 0$. Таким образом,

$$(U_2 U_1) A (V_1 V_2) = \left\| \begin{array}{cc} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

что и требовалось доказать. □

Из способа приведения матрицы к ее форме Эрмита следует, что α_1 – н.о.д. элементов первой строки матрицы A. Воспользовавшись теоремой 1.5, можем найти также и другие диагональные элементы неособенной матрицы A. Действительно, из элементов первых двух строк матрицы AU можно построить только один отличный от нуля минор – $\alpha_1\alpha_2$. Таким образом, $\alpha_1\alpha_2$ является н.о.д. всех миноров второго порядка, построенных из элементов первых двух строк матрицы AU. На основании теоремы 1.5, элементы первых двух строк матрицы A имеют такое же свойство. Таким образом, произведение первых двух диагональных элементов матрицы AU равно н.о.д. миноров второго порядка, построенных из элементов первых двух строк матрицы A. Все другие произведения $\alpha_1 \dots \alpha_i$, $i = 1, \ \dots \ , n$, находятся по аналогичной схеме.

Теорема 1.7. *Пусть AU – форма Эрмита неособенной $n \times n$ матрицы A и α_i – ее диагональные элементы, $i = 1, \ \dots \ , n$. Тогда $\alpha_1 \dots \alpha_i$ является н.о.д. миноров максимального порядка матрицы A, построенных на ее первых i строках.* □

1.4. Равенство Безу и его свойства

Если $a_1, \ a_2$ взаимно простые элементы кольца Безу R, то существуют такие $u_1, \ u_2 \in R$, что

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 1.$$

Из этого равенства следует, что и для произвольной n-ки взаимно простых элементов $a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_n$ существуют такие $v_1, v_2, \dots, v_n$, что

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 1. \tag{1.13}$$

В матричной записи это равенство будет иметь вид

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\|^T = 1.$$

Будем говорить, что элементы строки $\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\|$ удовлетворяют равенство (1.13). Множество всех строк, элементы которых удовлетворяют равенство (1.13), будем обозначать $\mathbf{U}_{a_1,a_2,\dots,a_n}$.

Поскольку строка $\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|$ примитивная, то на основании теоремы 1.1 существует обратимая матрица вида

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & \\ a_2 & \\ \vdots & * \\ a_n & \end{matrix} \right\|. \tag{1.14}$$

Укажем метод нахождения всех строк, которые удовлетворяют равенство (1.13).

Теорема 1.8. *Пусть* $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, $n \geq 2$, *и* A *– обратимая матрица вида* (1.14). *Тогда*

$$\mathbf{U}_{a_1,a_2,\dots,a_n} = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| A^{-1} \right\},$$

где x_i *независимо друг от друга пробегают значения из* R, $i = 2, 3, \dots, n$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathbf{V} = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| A^{-1} \mid x_i \in R,\ i = 2, 3, \dots, n \right\}.$$

Пусть $\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\| \in \mathbf{V}$. Следовательно,

$$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\| A^{-1},$$

где $b_i \in R, i = 2, \dots, n$. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|^T =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\| A^{-1} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|^T =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|^T = 1.$$

Следовательно, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}_{a_1,a_2,\dots,a_n}$.

Наоборот, пусть $\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{matrix} \right\| \in \mathbf{U}_{a_1,a_2,\dots,a_n}$ и $A^{-1} = \|b_{ij}\|_1^n$. Рассмотрим матрицу

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{matrix} \right\| = U.$$

Тогда

$$UA = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & c_2 & \dots & c_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|.$$

Отсюда вытекает, что

$$\| \ u_1 \quad \dots \quad u_n \ \| = \| \ 1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \ \| A^{-1}.$$

То есть $\mathbf{U}_{a_1,a_2,\dots,a_n} \subseteq \mathbf{V}$. Следовательно, $\mathbf{U}_{a_1,a_2,\dots,a_n} = \mathbf{V}$. □

Следствие 1.4. *Если* $a,\ b \in R$ *и*

$$au + bv = (a,\ b),$$

то $\mathbf{U}_{a,b} = \{(u + br,\ \ v - ar)\}$, *где* $r \in R$. □

Равенство Безу в кольцах стабильного ранга 1,5 имеет дополнительные свойства, которые не выполняются во всех кольцах Безу стабильного ранга 2.

Теорема 1.9. *Пусть* R *– кольцо Безу стабильного ранга* $1,5$ *и*

$$(a_1, \dots, a_n) = 1,$$

$n \geq 2$ *и* ψ *– произвольный фиксированный отличный от нуля элемент кольца* R. *Тогда существуют элементы* $u_1, \dots, u_n$, *которые одновременно удовлетворяют такие равенства:*

1) $u_1a_1 + \ldots + u_na_n = 1$;

2) $(u_1, \dots, u_i) = 1$, *для произвольного фиксированного* i, $2 \leq i \leq n$;

3) $(u_i, \psi) = 1$, *для произвольного фиксированного* i, $2 \leq i \leq n$.

Доказательство. Сначала покажем, что столбец $\| \ a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \ \|^T$ можно дополнить до обратимой матрицы A таким образом, что элементы ее обратной матрицы $A^{-1} = \|b_{ij}\|_1^n$ будут удовлетворять условие

$$b_{3i} = \cdots = b_{ni} = 0.$$

Для этого рассмотрим произвольную обратимую матрицу вида

$$A = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & \\ a_2 & \\ \dots & * \\ a_n & \end{array} \right\|.$$

Предположим, что среди элементов $\bar{b}_{2i}, \dots, \bar{b}_{ni}$ матрицы $A_1^{-1} = \left\|\bar{b}_{ij}\right\|_1^n$ есть по крайней мере один ненулевой. Тогда существует такая матрица $D \in \mathrm{GL}_{n-1}(R)$, что

$$D \left\| \begin{array}{ccc} \bar{b}_{2i} & \dots & \bar{b}_{ni} \end{array} \right\|^T = \left\| \begin{array}{cccc} \gamma & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|^T.$$

Тогда матрица

$$((1 \oplus D)A_1^{-1})^{-1} = A_1(1 \oplus D^{-1}) = A$$

и будет искомой.

Рассмотрим матрицу, состоящую из первых i столбцов матрицы A^{-1}, которую запишем в блочном виде

$$\left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & \dots & b_{1,i-1} & b_{1i} \\ b_{21} & \dots & b_{2,i-1} & \gamma \\ b_{31} & \dots & b_{3,i-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{i,i-1} & 0 \\ \hline b_{i+1,1} & \dots & b_{i+1,i-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{n,i-1} & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} M \\ N \end{array} \right\|.$$

Согласно теореме 1.8 элементы $u_1, \dots, u_n$, которые удовлетворяют условию 1) можно записать так:

$$\left\| \begin{array}{ccc} u_1 & \dots & u_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \right\| A^{-1},$$

где $x_i \in R, i = 2, \dots, n$. Итак, для доказательства нашего утверждение достаточно показать, что существуют такие элементы $x_2, \dots, x_n$, что

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} M \\ N \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} q_1 & \dots & q_i \end{array} \right\|,$$

где

$$(q_1, \dots, q_i) = (q_i, \psi) = 1.$$

Пусть $\gamma = 0$. С примитивности матрицы $\left\| \begin{array}{c} M \\ N \end{array} \right\|$ вытекает, что $b_{1i} \in U(R)$. Поэтому $u_1 = b_{11}, \dots, u_n = b_{1n}$.

Пусть $\gamma \neq 0$, $N \neq \mathbf{0}$ и b_{tj} – отличный от нуля элемент этой матрицы, $i+1 \leq t \leq n, 1 \leq j \leq i-1$. Поскольку $(b_{1i}, \gamma) = 1$, то $(b_{1i}, \gamma, \psi b_{tj}) = 1$. Тогда на основании свойства 1.19 существует такой элемент l, что

$$(b_{1i} + \gamma l, \psi b_{tj}) = 1. \tag{1.15}$$

Обозначим $d_{1i} = b_{1i} + \gamma l$. Поскольку $\psi \neq 0$, то $d_{1i} \neq 0$. Из (1.15) вытекают следующие равенства:

$$i)\ (d_{1i}, \psi) = 1, \tag{1.16}$$

$$ii)\ (d_{1i}, b_{tj}) = 1.$$

С последнего получаем

$$(d_{1j}, b_{tj}, d_{1i}) = 1,$$

где $d_{1j} = b_{1j} + b_{2j} l$. Следовательно, согласно свойству 1.19 существует такое m, что

$$(d_{1j} + b_{tj} m, d_{1i}) = 1.$$

Приняв во внимание равенство (1.16), приходим к выводу, что элементы первой строки матрицы

$$\left(\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & l & 0 & \dots & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\| \oplus I_{n-t} \right) A^{-1}$$

удовлетворяют всем требованиям нашего утверждения.

Если $N = \mathbf{0}$ или же $i = n$ (в этом случае матрица N пустая) с обратимости матрицы A следует, что $M \in \mathrm{GL}_i(R)$. Поэтому $(b_{1i}, \gamma) = 1$. Тогда тем более $(b_{1i}, \gamma, \psi) = 1$. Как и в предыдущем случае, существует такое r, что $(b_{1i} + \gamma r, \psi) = 1$. Следовательно, элементы первой строки матрицы

$$\left(\left\| \begin{array}{cc} 1 & r \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \oplus I_{n-2} \right) A^{-1}$$

и будут искомыми. Теорема доказана. □

1.5. Наибольший общий делитель матриц

Если $A = BC$, то будем говорить, что матрица B является левым делителем матрицы A, а матрица A – правым кратным матрицы B. Если $A = DA_1$ и $B = DB_1$, то матрицу D будем называть левым общим делителем матриц A и B. Кроме этого, если матрица D является правым кратным каждого общего левого делителя матриц A и B, то ее будем называть **левым н.о.д.** матриц A и B (в обозначениях $(A,B)_l$). Докажем корректность этого понятия в кольцах матриц над кольцом Безу.

Пусть $A, B \in M_n(R)$. Рассмотрим $n \times 2n$ матрицу $\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\|$. Согласно теореме 1.5 существует такая обратимая $2n \times 2n$ матрица U, что

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где D – $n \times n$ матрица. Опираясь на этот результат, предложим способ нахождения левого н.о.д. матриц A, B.

Теорема 1.10. [52] *Пусть $A, B \in M_n(R)$ и U такая обратимая матрица, что*

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда $D = (A,B)_l$, причем существуют такие матрицы P, Q, что

$$(A,B)_l = AP + BQ.$$

Доказательство. Запишем матрицу U в блочном виде

$$U = \left\| \begin{matrix} P & S \\ Q & T \end{matrix} \right\|,$$

где каждый блок имеет порядок n. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P & S \\ Q & T \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда вытекает, что

$$D = AP + BQ. \tag{1.17}$$

Обозначим

$$U^{-1} = \left\| \begin{matrix} P_1 & S_1 \\ Q_1 & T_1 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1} = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P_1 & S_1 \\ Q_1 & T_1 \end{matrix} \right\|.$$

Это означает, что $A = DP_1,\ B = DQ_1$. Поэтому матрица D является левым общим делителем матриц A, B. Пусть D_1 другой левый общий делитель матриц A, B, т.е. $A = D_1 M,\ B = D_1 N$. Приняв во внимание равенство (1.17), получаем

$$D = D_1 MP + D_1 NQ = D_1(MP + NQ).$$

Таким образом, D_1 является левым делителем матрицы D. Следовательно, D является левым н.о.д. матриц A, B. □

Для того, чтобы доказать, что левый н.о.д. матриц определен однозначно с точностью до правой ассоциированности нужен следующий результат.

Теорема 1.11. *Пусть матрицы A, B – левые делители друг друга. Тогда они ассоциированны справа.*

Доказательство. Пусть $\det A \neq 0$. Заметив, что $A = BC$, делаем вывод, что и $\det B \neq 0$. Поскольку также $B = AD$, то

$$A = BC = A(DC) \quad \Rightarrow \quad \det A = \det A \det(DC).$$

Следовательно, $\det(DC) = 1$, т.е. матрицы DC, D, C – обратимые. Таким образом, матрицы A, B ассоциированны справа.

Пусть $\det A = 0$. Поскольку $B = AD$, то матрица B также является особенной. Рассмотрим матрицы второго порядка. На основании теоремы 1.5 для матриц A, B существуют такие обратимые матрицы U, V, что

$$AU = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad BV = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку $A = BC$, то

$$AU = (BV)(V^{-1}CU).$$

Поэтому

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{matrix} \right\|, \tag{1.18}$$

где $\| \, t_{ij} \, \|_1^2 = V^{-1}CU$. Отсюда следует, что $a_i = b_i t_{11}$, $i = 1, 2$. С другой стороны, из равенства $A = BC$ получаем, что $b_i = a_i k_{11}$, $i = 1, 2$. Это означает, что существует такое $e \in U(R)$, что $a_i = b_i e$. Из равенства (1.18) также получаем, что $b_i t_{12} = 0$, $i = 1, 2$. Матрица BV ненулевая, поэтому среди элементов b_1, b_2, по крайней мере, один ненулевой. Поэтому $t_{12} = 0$. Таким образом, равенство (1.18) имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{matrix} \right\|.$$

В частности, будет выполняться равенство

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Умножая его справа на матрицу U^{-1}, получим

$$A = B\left(V \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| U^{-1}\right).$$

Следовательно, матрицы A и B ассоциированны справа.

Допустим правильность нашего утверждения для всех матриц порядка меньше n. И пусть A, B – матрицы порядка n. Перестановкой строк, что равносильно умножению слева на некоторую обратимую матрицу T, сделаем так, что первая строка матрицы TA будет ненулевой. Пусть $TA = \| \ a_{ij} \ \|_1^n$, $TB = \| \ b_{ij} \ \|_1^n$. Из теоремы 1.5 вытекает, что существуют такие обратимые матрицы P, Q що

$$\| \ a_{11} \ \ \dots \ \ a_{1n} \ \| P = \| \ a \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \|,$$

$$\| \ b_{11} \ \ \dots \ \ b_{1n} \ \| Q = \| \ b \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \|,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Рассуждая аналогично, как и выше, показываем, что

$$T(AP) = \left\| \begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} b & \mathbf{0} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| \ \left\| \begin{array}{c|c} f & \mathbf{0} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right\|,$$

$$T(BQ) = \left\| \begin{array}{c|c} b & \mathbf{0} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \ \left\| \begin{array}{c|c} f & \mathbf{0} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right\|,$$

где $f \in U(R)$. Из этих равенств следует, что матрицы $(n-1)$-го порядка A_{22} и B_{22} являются левыми делителями друг друга. Тогда согласно предположению индукции $A_{22} = B_{22}K$, где $K \in \mathrm{GL}_{n-1}(R)$. Следовательно,

$$TAP = \left\| \begin{array}{cc} a & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| \ \left\| \begin{array}{cc} e & \mathbf{0} \\ F_{21} & K \end{array} \right\|.$$

Умножая это равенство слева на T^{-1}, а справа – на P^{-1}, получим

$$A = B\left(Q \left\| \begin{array}{cc} e & \mathbf{0} \\ F_{21} & K \end{array} \right\| P^{-1}\right).$$

Заметив, что

$$Q \left\| \begin{array}{cc} e & \mathbf{0} \\ F_{21} & K \end{array} \right\| P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R),$$

заканчиваем доказательство. □

Аналогично показываем, что когда матрицы A, B являются правыми делителями друг друга, то они ассоциированны слева.

Теорема 1.12. *Левый н.о.д. матриц над кольцом Безу определен однозначно с точностью до правой ассоциированности.*

Доказательство. Пусть D_1, D_2 – левые н.о.д. матриц A, B. Тогда они являются левыми делителями друг друга. На основании теоремы 1.11 матрицы D_1 и D_2 ассоциированны справа. □

Доказанная теорема показывает, что $M_n(R)$ является левым кольцом Безу. Рассмотрев матрицу $\left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\|$, показываем, что $M_n(R)$ является правым кольцом Безу. В этом случае находится такая обратимая матрица V, что

$$V \left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} C \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

При этом матрица C является правым н.о.д. матриц A, B. Таким образом, доказана такая теорема.

Теорема 1.13. *Если R кольцо Безу, то и $M_n(R)$ также является кольцом Безу.* □

Сразу же заметим, что левый и правый н.о.д. матриц, вообще говоря, между собой не связаны. Причина этого кроется в структуре левых и правых делителей матриц, которая будет показана в 5 разделе. А теперь просто продемонстрируем это на примере.

Пример 1.2. Рассмотрим матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} I & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$U = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -6 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

– обратимая матрица. Поэтому матрицы A, B – взаимно простые слева, но имеют правый н.о.д. $\mathrm{diag}(1,\ 2)$. ♢

1.6. Делители нуля в кольцах матриц

Особую роль в кольце $M_n(R)$ – $n \times n$ матриц над R играют делители нуля.

Определение 1.6. Ненулевую матрицу A назавают делителем нуля, если существует такая матрица $M \neq \mathbf{0}$, что $AM = \mathbf{0}$.

Теорема 1.14. *Для того чтобы матрица A была делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы* $\det A = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\det A \neq 0$ и $AM = \mathbf{0}$. Для матрицы A существует такая обратимая матрица U, что

$$AU = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{Vmatrix}$$

– форма Эрмита матрицы A. Поскольку матрица A неособенная, то $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ \dots \ , n$. Тогда

$$\mathbf{0} = AM = (AU)(U^{-1}M) = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{Vmatrix} \| \ v_{ij} \ \|_1^n, \qquad (1.19)$$

где $U^{-1}M = \| \ v_{ij} \ \|_1^n$. Из равенства (1.19) вытекает, что

$$\alpha_1 \| \ v_{11} \ \ \dots \ \ v_{1n} \ \| = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$\| \ v_{11} \ \ \dots \ \ v_{1n} \ \| = \mathbf{0}.$$

Рассматривая последовательно вторую, и т.д. n-ую строку произведения (1.19), убеждаемся, что $U^{-1}M = \mathbf{0}$, т.е. $M = \mathbf{0}$. Следовательно, матрица A не делитель нуля.

Достататочность. Пусть $\det A = 0$. Следовательно, $\operatorname{rang} A = r < n$. На основании теоремы 1.6 существуют такие обратимые матрицы P, Q, что

$$PAQ = \begin{Vmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

где D – неособенная матрица порядка r. Тогда для произвольной матрицы S вида

$$S = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ S_1 & S_2 \end{Vmatrix},$$

где S_1 – $(n-r) \times r$ матрица, выполняется равенство

$$PAQS = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ A(QS) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, матрица A – делитель нуля. $\square$

Аналогично показываем, что условие $NA = \mathbf{0}$, где $N \neq \mathbf{0}$ равносильно условию $\det A = 0$. Таким образом, матрица является одновременно левым и правым делителем нуля или же неособенной матрицей.

Обозначим через $Ann^r(D)$ множество правых аннуляторов матрицы D:

$$Ann^r(D) = \{Q \in M_n(R) \mid DQ = \mathbf{0}\}.$$

Очевидно, что $Ann^r(D)$ является правым идеалом кольца $M_n(R)$. Если матрица D неособенная, то из теоремы 1.14 следует, что равенство $DQ = \mathbf{0}$ выполняется только когда $Q = \mathbf{0}$. Поэтому $Ann^r(D) = \{\mathbf{0}\}$. Укажем вид матриц, из которых состоит множество $Ann^r(D)$, если матрица D особенная.

Теорема 1.15. *Пусть D – $n \times n$ матрица ранга $r < n$. Тогда $Ann^r(D)$ состоит из всех матриц вида*

$$U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\|, \text{ где } DU = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

D_1 – $n \times r$ матрица ранга r, B – произвольная $(n-r) \times n$ матрица.

Доказательство. Поскольку

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1},$$

то

$$DU \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1} U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

Следовательно, все матрицы вида $U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\|$ принадлежат $Ann^r(D)$.

Пусть $DQ = \mathbf{0}$, т.е.

$$\left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1} Q = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| V,$$

где $V = U^{-1}Q$. Запишем матрицу V в блочном виде $V = \left\| \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\|$, где V_1 – $r \times n$ матрица. Поскольку D_1 имеет максимальный ранг, то она содержит неособенную подматрицу порядка r. Без ограничения общности можно считать, что эта матрица состоит из первых r ее строк. Обозначим ее через B_1. Тогда

$$DQ = \left\| \begin{matrix} B_1 & \mathbf{0} \\ B_2 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $B_1 V_1 = \mathbf{0}$. Матрица B_1 неособенная, поэтому $V_1 = \mathbf{0}$. Очевидно, что равенство

$$\left\| \begin{matrix} B_1 & \mathbf{0} \\ B_2 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ V_2 \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}$$

выполняется без каких-либо ограничений на матрицу V_2, т.е. V_2 является произвольной $(n-r)\times n$ матрицей. Заметив, что

$$Q = UV = U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ V_2 \end{matrix} \right\|,$$

завершаем доказательство. □

1.7. Матричное равенство Безу

Будем говорить, что пара $(U,\ V)$ приводит матрицы $A,\ B$ к $(A,\ B)_l$, если

$$AU + BV = (A,\ B)_l = D.$$

Множество всех таких пар обозначим через $\mathbf{U}^r_{A,B}$.

Теорема 1.16. *Пусть*

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где $\left\| \begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{matrix} \right\|$ *– обратимая матрица. Множество* $\mathbf{U}^r_{A,B}$ *состоит из всех пар вида*

$$(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ \ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P),$$

где Q пробегает множество $Ann^r(D)$, а матрица P – кольцо $M_n(R)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{V}^r_{A,B}$ множество

$$\{(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P)\},$$

где Q пробегает множество $Ann^r(D)$, а матрица P – кольцо $M_n(R)$. Тогда

$$A(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P) + B(K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P) =$$
$$= (AK_{11} + BK_{21}) + (AK_{11} + BK_{21})Q + (AK_{12} + BK_{22})P =$$
$$= D + DQ + \mathbf{0}P = D.$$

Следовательно, $\mathbf{V}^r_{A,B} \subseteq \mathbf{U}^r_{A,B}$.

Пусть $(U,\ V) \in \mathbf{U}^r_{A,B}$ и

$$\left\| \begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{matrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда
$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом,
$$A = DL_{11},\ B = DL_{12}.$$

Рассмотрим произведение
$$\left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & K_{12} \\ V & K_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} T & \mathbf{0} \\ P & I \end{matrix} \right\|, \tag{1.20}$$

где I – единичная матрица и
$$T = L_{11}U + L_{12}V,\ P = L_{21}U + L_{22}V.$$

Тогда
$$DT = (DL_{11})U + (DL_{12})V = AU + BV = D.$$

Поэтому
$$DT = D \Rightarrow D(T - I) = \mathbf{0} \Rightarrow T - I = Q \in Ann^r(D).$$

Следовательно, $T = I + Q$. Из равенства (1.20) следует, что
$$\left\| \begin{matrix} U & K_{12} \\ V & K_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} I+Q & \mathbf{0} \\ P & I \end{matrix} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{matrix} K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P & K_{12} \\ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P & K_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,
$$U = K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ V = K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P.$$

Таким образом, $\mathbf{U}^r_{A,B} \subseteq \mathbf{V}^r_{A,B}$. Тому $\mathbf{U}^r_{A,B} = \mathbf{V}^r_{A,B}$. □

Теорема 1.17. *Пусть $A,\ B \in M_n(R)$. Тогда существует такая обратимая матрица* $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$, *что*
$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

причем
$$Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V). \tag{1.21}$$

Доказательство. Если матрица $D = (A,\ B)_l$ неособенная, то $Ann^r(D) = \mathbf{0}$ и, очевидно, что выполняется включение (1.21).

Пусть $(A,\ B)_l$ особенная матрица. Это означает, что и матрицы $A,\ B$ также особенные. Пусть $\operatorname{rang} B = k < n$. Тогда существуют такие обратимые матрицы $P_B,\ Q_B$, что

$$P_B B Q_B = \left\| \begin{matrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где B_{11} – $k \times k$ неособенная матрица.

Пусть $\operatorname{rang} A = r < n$. Следовательно, и $\operatorname{rang} P_B A = r$. Тогда существует такая обратимая матрица Q_A, что

$$(P_B A) Q_A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A_{11} \\ A_{21} \end{matrix} \right\| = r$$

и A_{11} – $k \times r$ матрица.

Пусть $\operatorname{rang} A_{21} = t \leqslant r$. Тогда существует такая обратимая матрица P_{21}, что

$$P_{21} A_{21} = \left\| \begin{matrix} A'_{21} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где A'_{21} – $t \times r$ матрица и $\operatorname{rang} A'_{21} = t$. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{21}^{-1} \end{matrix} \right\| \underbrace{\left\| \begin{array}{cc|cc} A_{11} & \mathbf{0} & B_{11} & \mathbf{0} \\ A'_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{F} \left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку матрица B_{11} неособенная и н.о.д. миноров максимального t-го порядка матрицы A'_{21} отличный от нуля, то

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = \operatorname{rang} B_{11} + \operatorname{rang} A'_{21}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = k + t.$$

Дополним матрицы $\left\| \begin{matrix} A_{11} \\ A'_{21} \end{matrix} \right\|$, B_{11} нулевыми блоками до матриц порядка $k+t$ вида

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A'_{21} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = A', \quad \left\| \begin{matrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = B'.$$

Пусть $(A',\ B')_l = D'$. Поскольку

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A' & B' \end{matrix} \right\| = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = k + t,$$

то матрица D' неособенная. Тогда существует такая обратимая матрица $\left\| \begin{matrix} U' & M' \\ V' & N' \end{matrix} \right\|$, что

$$\left\| \begin{matrix} A' & B' \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U' & M' \\ V' & N' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D' & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Запишем матрицу F в виде

$$F = \left\| \begin{array}{cc|cc} A' & \mathbf{0} & B' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$F \underbrace{\left\| \begin{array}{cc|cc} U' & \mathbf{0} & M' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline V' & \mathbf{0} & N' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\|}_{G} = \left\| \begin{array}{cc|cc} D' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где I_{n-k-t} – единичная матрица порядка $n-k-t$. Очевидно, что матрица G является обратимой. Обозначим

$$P = P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{21}^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left(\left\| \begin{matrix} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} U' & \mathbf{0} & M' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline V' & \mathbf{0} & N' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\| \right) =$$

$$= P \left\| \begin{array}{cc|cc} D' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|. \tag{1.22}$$

Следовательно,

$$(A,\ B)_l = P \left\| \begin{matrix} D' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D.$$

Поскольку матрица D' неособенная, то $Ann^r(D)$ состоит из всех матриц вида $\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ T \end{matrix} \right\|$, где T – $(n-k-t) \times n$ матрица. Из равенства (1.22) следует, что

$$A \underbrace{\left(Q_A \left\| \begin{matrix} U' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{matrix} \right\| \right)}_{U} + B \underbrace{\left(Q_B \left\| \begin{matrix} V' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \right)}_{V} = D.$$

Если матрица V' неособенная, то из вида матрицы V получаем $Ann^r(D) = Ann^r(V)$. Если же она особенная, то $Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V)$. Теорема доказана. $\square$

Если $M = AP = BQ$, то матрицу M называют общим правым кратным матриц A и B. Если же матрица M является левым делителем каждого общего правого кратного матриц A и B, то ее называют **правым н.о.к.** матриц A и B (в обозначениях $[A, B]_r$). По аналогии с утверждением теоремы 1.12 правое н.о.к. матриц над кольцом Безу определено однозначно с точностью до левой ассоциированности.

Теорема 1.18. *Пусть $A,\ B \in M_n(R)$. Тогда существует такая обратимая матрица F, что*

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{matrix} \right\| F = \left\| \begin{matrix} (A,\ B)_l & \mathbf{0} \\ * & [A,\ B]_r \end{matrix} \right\|.$$

Доказательство. Пусть $(A,\ B)_l = D$. В силу теоремы 1.17 существует такая обратимая матрица $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$, что

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \tag{1.23}$$

причем $Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V)$. Из равенства (1.23) вытекает, что $AM + BN = \mathbf{0}$. Следовательно, матрица $S = BN = -AM$ является правым общим кратным матриц $A,\ B$. Пусть $S_1 = AA_1 = BB_1$ – любое другое правое общее кратное матриц $A,\ B$. Покажем, что S является левым делителем матрицы S_1.

Рассмотрим пару матриц $(U - A_1,\ V + B_1)$. Тогда

$$A(U - A_1) + B(\ V + B_1) = (AU + BV) + (BB_1 - AA_1) = D.$$

Это значит, что $(U - A_1,\ V + B_1) \in \mathbf{U}^r_{A,B}$. На основании теоремы 1.16 существуют такие $Q \in Ann^r(D)$ и $P \in M_n(R)$, что

$$U - A_1 = U + UQ + MP,$$

$$V + B_1 = V + VQ + NP. \tag{1.24}$$

Поскольку $VQ = \mathbf{0}$, то из равенства (1.24) получаем, что $B_1 = NP$. Тогда

$$S_1 = BB_1 = B(NP) = (BN)P = SP.$$

Таким образом, $S = BN = [A,\ B]_r$. Из равенства (1.23) получаем

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \\ BV & BN \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (A,\ B)_l & \mathbf{0} \\ BV & [A,\ B]_r \end{matrix} \right\|.$$

Что и требовалось доказать. □

Следствие 1.5. *Выполняется равенство*

$$\det(AB) = \det(A,\ B)_l \det[A,\ B]_r. \qquad \square$$

Существование в кольце $M_n(R)$ делителей нуля приводит к тому, что некоторые свойства равенства Безу, н.о.к. и н.о.д., которые выполняются в кольце R, не наследуются кольцом матриц. В частности, из равенства

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где матрица $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$ обратимая, не следует, что матрица $S = BN$ (см. теорему 1.18) является правым н.о.к. $A,\ B$.

Из равенства $AU + BV = (A,\ B)_l$ не вытекает существование обратимой матрицы вида $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$.

Также из равенств $A = (A,\ B)_l A_1,\ B = (A,\ B)_l B_1$ не следует, что $(A_1,\ B_1)_l = I$.

Продемонстрируем эти специфические свойства кольца матриц на конкретном примере.

Пример 1.3. Рассмотрим матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,\ B = \left\| \begin{matrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где $\alpha u + \beta v = 1$. Тогда

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} u & -\beta & -\beta r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline v & \alpha & \alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Следовательно, $(A,\ B)_l = \operatorname{diag}(1,\ 0)$. Однако матрица

$$S = BN = \left\| \begin{matrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \alpha r & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha\beta r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

будет правым н.о.к. A, B тогда и только тогда, когда r будет обратимым элементом кольца R.

Очевидно, что равенство Безу для матриц A, B может иметь вид:

$$\left\| \begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} v & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

однако матрица

$$\left\| \begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline v & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

не дополняется до обратимой матрицы четвертого порядка.

Приняв во внимание вид матрицы $(A,B)_l$, получаем $A = (A,B)_l A$, $B = (A,B)_l B$, т.е. $A_1 = A$, $B_1 = B$. Следовательно, $(A_1,B_1)_l \neq I$. $\diamondsuit$

Покажем, что частные от деления слева матриц A, B на $(A,B)_l$ все же можно выбрать так, что они будут взаимно простыми слева.

Лемма 1.2. *Пусть A, B – $m \times n$ взаимно простые слева матрицы, $m < n$. Тогда их можно дополнить до кадратных взаимно простых слева матриц вида*

$$\left\| \begin{array}{c} A \\ M \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} B \\ N \end{array} \right\|.$$

Доказательство. Для матриц A, B существуют такие обратимые матрицы U, V, что

$$AU = \left\| \begin{array}{cc} A_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \quad BV = \left\| \begin{array}{cc} B_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где A_1, B_1 – $m \times m$ матрицы. Поскольку $(A,B)_l = I_m$, то найдется такая обратимая матрица T, что

$$\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| T = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тогда также

$$\left(\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{array} \right\| \right) \left(\left\| \begin{array}{cc} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{array} \right\| T \right) = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

То есть

$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\| T_1 = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где $T_1 = \left\| \begin{array}{cc} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{array} \right\| T$. Следовательно, $(A_1, B_1)_l = I_m$. Это означает, что существует такая обратимая матрица $P = \|P_{ij}\|_1^2$, что

$$\left\| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \end{array} \right\| P = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \underbrace{\left\| \begin{matrix} P_{11} & \mathbf{0} & P_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_{21} & \mathbf{0} & P_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-m} \end{matrix} \right\|}_{Q} = \left\| \begin{matrix} I_m & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим матрицу

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| Q = \left\| \begin{matrix} I_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда получаем

$$\left(\left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{matrix} \right\| \right) \left(\left\| \begin{matrix} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{matrix} \right\| Q \right) = \left\| \begin{matrix} I_m & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,

$$\left\| \begin{array}{c|c} A & B \\ * & * \end{array} \right\| \left(\left\| \begin{matrix} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{matrix} \right\| Q \right) = \left\| \begin{matrix} I_m & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

□

Теорема 1.19. *Пусть $D = (A, B)_l$. Тогда существуют такие M, N, что $A = DM$, $B = DN$, где $(M, N)_l = I$.*

Доказательство. Пусть $A = DM$, $B = DN$, причем $\det D \neq 0$ и $(M, N)_l = D_1$. Тогда $M = D_1 M_1$, $N = D_1 N_1$. Следовательно, $A = DD_1 M_1$, $B = DD_1 N_1$. Поскольку D – левый н.о.д. матриц A, B, то DD_1 является его левым делителем:

$$D = DD_1 L \;\Rightarrow\; D(I - D_1 L) = \mathbf{0}.$$

Матрица D не делитель нуля, поэтому $D_1 L = I$, т.е. $D_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$. Следовательно, $(M, N)_l = I$.

Пусть $\det D = 0$ и $\operatorname{rang} D = r < n$. Тогда существуют такие обратимые матрицы U, V, что

$$UDV = \left\| \begin{matrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где K – неособенная матрица порядка r. Тогда из равенств $A = DA_1$, $B = DB_1$ вытекает, что

$$UA = UDV(V^{-1}A_1) = \left\| \begin{matrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\|, \tag{1.25}$$

$$UB = UDV(V^{-1}B_1) = \begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (1.26)$$

Предположим, что матрицы $\| \ A_{11} \quad A_{12} \ \|$, $\| \ B_{11} \quad B_{12} \ \|$ имеют левый общий делитель T : $\| \ A_{11} \quad A_{12} \ \| = TL_1$, $\| \ B_{11} \quad B_{12} \ \| = TL_2$. Отсюда следует, что матрица $\begin{Vmatrix} KT & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$ является левым общим делителем матриц UA и UB, имеющих левый н.о.д. $\begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$. Итак, $K = KTS$. Поскольку матрица K неособенная, то $TS = I$, т.е. T является обратимой матрицей. Таким образом, матрицы $\| \ A_{11} \quad A_{12} \ \|$, $\| \ B_{11} \quad B_{12} \ \|$ взаимно простые слева. На основании леммы 1.2 существуют взаимно простые слева квадратные матрицы

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ S_1 & S_2 \end{Vmatrix} = A_1', \quad \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ L_1 & L_2 \end{Vmatrix} = B_1'.$$

Из (1.25) и (1.26) вытекает правильность следующих равенств

$$UA = UDV(V^{-1}A_1) = \begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ S_1 & S_2 \end{Vmatrix}}_{A_1'} = (UDV)A_1',$$

$$UB = UDV(V^{-1}B_1) = \begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix}}_{B_1'} = (UDV)B_1'.$$

Умножая эти равенства слева на U^{-1}, получим

$$A = D(VA_1'), \ B = D(VB_1').$$

Поскольку $(A_1', B_1')_l = I$, то и $(VA_1', VB_1')_l = I$, что и требовалось доказать. □

Теорема 1.20. *Матрицу $(A, B)_l$ можно вибрать так, что*

$$[A, B]_r = BA_1, \quad \text{\textit{де} } A = (A, B)_l A_1.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.18 существует такая обратимая матрица $U = \| \ U_{ij} \ \|_1^2$, что

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (A,\ B)_l & \mathbf{0} \\ * & [A,\ B]_r \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, $BU_{22} = [A, B]_r = M$. Пусть $U^{-1} = V = \left\| \ V_{ij} \ \right\|_1^2$. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ 0 & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \\ * & M \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{matrix} \right\|,$$

где $D = (A, B)_l$. Отсюда следует, что $A = DV_{11}$. Поскольку $U^{-1} = V$, то на основании следствия 3.4* (с. 119) матрицы U_{22} и V_{11} эквивалентны, т.е. $U_{22} = KV_{11}S$, где $K, S \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда

$$M = BU_{22} = BKV_{11}S \ \Rightarrow \ MS^{-1} = M_1 = B(KV_{11}) = BA_1,$$

где $A_1 = KV_{11}$. Также выполняются равенства

$$A = DV_{11} = D(K^{-1}K)V_{11} = (DK^{-1})(KV_{11}) = D_1A_1.$$

И для завершения доказательства достаточно заметить, что матрицы M, M_1 и D, D_1 ассоциированные справа. То есть M_1 является правым н.о.к., а D_1 – левым н.о.д. матриц A, B. $\square$

Раздел 2. Кольца элементарных делителей

2.1. Форма Смита

В предыдущем разделе изучались односторонние преобразования матриц над кольцами Безу. При этом была установлена каноническая форма относительно таких преобразований. Дальнейшие исследования будут направлены на поиск такой же формы относительно двусторонних преобразований матриц.

Определение 2.1. Матрицы A и B называются эквивалентными (в обозначениях $A \sim B$), если существуют такие обратимые матрицы P, Q, что $A = PBQ$.

Под **диагональной матрицей** подразумевается матрица, в которой все элементы вне главной диагонали являются нулями. Эта матрица может быть и прямоугольной. Если в диагональной матрице каждый предыдущий диагональный элемент делит следующий, то ее будем називать **d-матрицей**.

Теорема 2.1. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга* 1,5. *Тогда каждая $m \times n$ матрица A над R эквивалентна до d-матрицы $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ \ldots \ , \varphi_k)$, $k = \min(m, n)$, причем $\varphi_i \in Z(R)$, $i = 1, \ \ldots \ , \ k$. При этом матрица Φ единственная в классе эквивалентных до A матриц.*

Доказательство. Пусть сначала A – неособенная $n \times n$ матрица. Обозначим через B_1 подматрицу матрицы A, составленную из первых двух ее строк. На основании теоремы 1.5 существует такая обратимая матрица V_1, что

$$B_1 V_1 = \left\| \begin{matrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где $b_{11}, \ b_{22} \neq 0$. Существует такое r, что

$$(b_{21} + b_{11} r, \ b_{22}) = (b_{21}, \ b_{11}, \ b_{22}) = \beta.$$

Тогда

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{matrix} \right\|}_{U_1} B_1 V_1 = \left\| \begin{matrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b'_{21} & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где $b'_{21} = b_{21} + b_{11}r$. Поскольку $(b'_{21},\ b_{22}) = \beta$, то существуют такие u, v, что

$$ub'_{21} + vb_{22} = \beta.$$

Тогда

$$U_1B_1V_1 \left(\begin{Vmatrix} u & -\frac{b_{22}}{\beta} \\ v & \frac{b'_{21}}{\beta} \end{Vmatrix} \oplus I_{n-2} \right) = \begin{Vmatrix} b_{11}u & -b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = B_2,$$

где I_{n-2} – единичная матрица порядка $n-2$. Следовательно,

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{b_{11}}{\beta}u \end{Vmatrix} B_2 = \begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = B_3.$$

Поскольку $\beta | b_{11}$, то B_3 является d-матрицей. Согласно теореме 1.4 умножения матрицы на обратимые матрицы не меняет н.о.д. ее элементов. Поэтому β является н.о.д. всех элементов первых двух строк матрицы A. Очевидно, что

$$A \sim \begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} = A_1.$$

Тогда

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \oplus I_{n-3} \right) A_1 \sim \begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ 0 & 0 & b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & \dots & c_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} = A_2.$$

Обозначим через C_1 первые две строки этой матрицы. По аналогии
$C_1 \sim \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$, где $\gamma_1 = (\beta,\ c_{31},\ \dots\ ,\ c_{3n})$ и $\gamma_1 | \gamma_2$. Это означает, что

$$A \sim \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{Vmatrix} = A_3.$$

Заметим, что третья строка матрицы A_3 получается с третьей строки матрицы A_2 путем умножения на некоторую обратимую матрицу. Поэтому

$$(d_{31},\ \dots\ ,\ d_{3n}) = b_{11}\frac{b_{22}}{\beta}.$$

Поскольку $\gamma_1|\beta$, а $\beta|b_{11}$, то $\gamma_1|b_{11}\frac{b_{22}}{\beta}$. Это означает, что γ_1 является н.о.д. элементов первых трех строк матрицы A_3. Продолжая описанный процесс, в конце концов получим, что

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{matrix} \right\| = A',$$

где $\varphi_1 \in Z(R)$ и является н.о.д. всех элементов матрицы A'. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{f_{21}}{\varphi_1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{f_{n1}}{\varphi_1} & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\| A' = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Рассуждая так и с матрицей

$$F = \left\| \begin{matrix} f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

показываем, что

$$F \sim \left\| \begin{matrix} \varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

где $\varphi_2 \in Z(R)$ и является н.о.д. элементов матрицы F. Следовательно,

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку φ_1 – делитель всех элементов матрицы F, то $\varphi_1|\varphi_2$. Продолжая описанный процесс, показываем, что $A \sim \mathrm{diag}(\varphi_1, \ \dots \ , \ \varphi_n)$, $\varphi_i|\varphi_{i+1}$, $i = 1, \ \dots \ , \ n-1$.

Пусть $\mathrm{rang}\, A = k \leq \min(m,n)$. На основании теоремы 1.6 существуют такие обратимые матрицы U, V, что

$$UAV = \left\| \begin{matrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где M – неособенная $k \times k$ матрица. Согласно с только что доказанным, матрица M эквивалентна до d-матрицы $\mathrm{diag}(\mu_1, \ \dots \ , \ \mu_k)$, где $\mu_i \in Z(R)$, $i = 1, \ \dots \ , \ k$. Следовательно,

$$A \sim \mathrm{diag}(\mu_1, \ \dots \ , \ \mu_k, \ 0, \ \dots \ , \ 0) = \mathrm{M}_1.$$

Таким образом, в классе матриц, эквивалентных до A есть d-матрица, диагональные элементы которой выбраны из $Z(R)$.

Предположим, что

$$A \sim \mathrm{diag}(\nu_1, \ \dots \ , \ \nu_p, \ 0, \ \dots \ , \ 0) = \mathrm{N}, \ \ \nu_i | \nu_{i+1}, \ \ \nu_j \in Z(R).$$

Поскольку N является d-матрицей, то $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_i$ делит все миноры i-го порядка матрицы N. Поэтому $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_i$ есть н.о.д. i-го порядка этой матрицы. Поскольку $A \sim \mathrm{N}$ и $A \sim \mathrm{M}_1$, то $\mathrm{N} \sim \mathrm{M}_1$. Это означает, что н.о.д. соответствующих миноров этих матриц совпадают. Отсюда следует, что

$$\mathrm{rang}\, \mathrm{M}_1 = \mathrm{rang}\, \mathrm{N}.$$

Поэтому $k = p$. Учитывая то, что $\mu_1, \ \nu_1 \in Z(R)$ приходим к выводу, что $\mu_1 = \nu_1$. Из равенства $\mu_1 \mu_2 = \nu_1 \nu_2$ получаем, что $\mu_2 = \nu_2$. Продолжая описанный процесс, убеждаемся, что в классе матриц, эквивалентных до матрицы A, есть только одна d-матрица с условием делимости диагональных элементов, которые выбираются из множества $Z(R)$. $\square$

Замечание. Если выбор элементов множества $Z(R)$ не согласован, то инвариантные множители определены с точностью до делителей единицы.

Полученную в этой теореме d-матрицу называют формой Смита. Свое название она получила в честь английского математика Г. Смита (H.J. Smith), который в 1861 году показал [2], что каждая целочисленных матрица эквивалентными преобразованиями сводится к указанному виду.

При доказательстве теоремы 2.1 мы существенно опирались на тот факт, что кольцо R имеет стабильный ранг 1,5. Ниже покажем, что каждая матрица над кольцом Q – формальных степенных рядов над полем рациональных чисел с целым свободным членом сводится к форме Смита, причем это кольцо не является кольцом стабильного ранга 1,5, а стабильного ранга 2. Таким образом, класс колец, над которыми матрицы имеют форму Смита, является шире класса колец Безу стабильного ранга 1,5.

Будем говорить, что матрица A имеет свойство канонической диагональной редукции, если существуют такие обратимые матрицы P, Q соответствующих размеров, что

$$PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, 0, \dots, 0), \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_k \neq 0$, $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}, i = 1, \ldots, k-1$. При этом элементы ε_i называют **инвариантными множителями** а P, Q – **преобразующими матрицами** матрицы A. Множество матриц P, удовлетворяющих равенство (2.1), будем обозначать через $\mathbf{P}_A$.

Теорема 2.2. *Первый инвариантный множитель ε_1 формы Смита матрицы A равен н.о.д. ее элементов. Остальные инвариантные множители находятся по формуле*

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}},$$

где δ_i – н.о.д. миноров i-го порядка матрицы A, $i = 2, \ldots, k$, где k – номер последнего отличного от нуля н.о.д. минора соответствующего порядка.

Доказательство. Пусть A – $m \times n$ матрица, P, Q – ее преобразующие матрицы. Согласно теореме 1.4 н.о.д. миноров k-го порядка матриц A и PAQ совпадают, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку ε_1 является делителем всех элементов матрицы PAQ, то он равен н.о.д . элементов матрицы A. Н.о.д. миноров i-го порядка матрицы PAQ является $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_i$ и совпадает с δ_i – н.о.д. миноров соответствующего порядка матрицы A. Отсюда следует, что

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_i}{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{i-1}} = \varepsilon_i,$$

где $i = 2, \ldots, k$. □

И. Капланский [1] назвал кольца, матрицы над которыми обладают свойством канонической диагональной редукции, **кольцами элементарных делителей**.

Оказывается, что для проверки того факта, что R является кольцом элементарных делителей не нужно убеждаться в том, что все матрицы над R имеют свойство канонической диагональной редукции – достаточно рассмотреть только матрицы второго порядка.

Теорема 2.3. [*1*] *Для того чтобы каждая матрица над R имела свойство канонической диагональной редукции необходимо и достаточно, чтобы каждая 2×2 матрица над R имела такое же свойство.*

Доказательство. Пусть A – $m \times n$ матрица. Для определенности положим $m \leqslant n$. Рассмотрим сначала случай $m = 2$. В силу теремы 1.5 существует такая обратимая матрица V_1, что

$$AV_1 = \left\| \begin{array}{cc|ccc} a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b & c & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\| = \| \; A_1 \quad \mathbf{0} \; \|.$$

Матрица A_1 имеет свойство канонической диагональной редукции. Поэтому существуют такие обратимые матрицы $P_1,\ Q_1$, что

$$P_1A_1Q_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \ \alpha_1|\alpha_2,\ \ \alpha_1,\alpha_1 \in Z(R).$$

Тогда

$$P_1A_1V_1(Q_1 \oplus I_{n-2}) = \left\| \begin{array}{cc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, наше утверждение верно для матриц, состоящих из двух строк. Предположим его правильность для всех $k < m$ и рассмотрим $m \times n$ матрицу A. Запишем матрицу A в блочном виде: $A = \left\| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right\|$, где B_1 – первая строка матрицы A. Поскольку B_2 – $(m-1) \times n$ матрица, то существуют такие обратимые матрицы $P_2,\ Q_2$, что

$$P_2B_2Q_2 = \mathrm{diag}(\beta_1,\ \dots\ ,\ \beta_{m-1})$$

– форма Смита матрицы B_2 (некоторые β_i могут быть нулями). Тогда

$$(1 \oplus P_2) \left\| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right\| Q_2 = \left\| \begin{array}{c} B_1Q_2 \\ P_2B_2Q_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccc} * & * & * & \dots & * \\ \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \beta_{m-1} & & 0 \end{array} \right\| = B.$$

Запишем эту матрицу в блочном виде: $B = \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\|$, где C_1 – первые две строки матрицы B. Как уже было показано в начале доказательства, найдутся такие обратимые матрицы $P_3,\ Q_3$, что

$$(P_3 \oplus I_{m-2})\, BQ_3 = \left\| \begin{array}{ccccc} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & * \end{array} \right\| = C,$$

где $\gamma_1|\gamma_2,\ \gamma_1 \in Z(R)$. Заметив, что β_1 является н.о.д. элементов матрицы $P_2B_2Q_2$, а строка $\left\| \begin{array}{cccc} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$ – второй строкой матрицы C_1, приходим к выводу, что γ_1 является н.о.д. элементов матрицы C. Элементарными преобразованиями над строками матрицу C приведем к виду

$$\left\| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{array} \right\| = F \sim C.$$

Согласно предположению индукции существуют такие обратимые матрицы $P_4,\ Q_4$, что

$$P_4 D Q_4 = \mathrm{diag}(\delta_1,\ \ldots\ ,\ \delta_{m-1})$$

является формой Смита матрицы D. Таким образом,

$$C \sim (1 \oplus P_4)\, F Q_4 = \mathrm{diag}(\gamma_1,\ \delta_1,\ \ldots\ ,\ \delta_{m-1}).$$

Поскольку γ_1 – н.о.д. элементов матрицы C, то γ_1 является делителем всех элементов полученной матрицы. Поэтому формой Смита матрицы A является матрица $\mathrm{diag}(\gamma_1,\ \delta_1,\ \ldots\ ,\ \delta_{m-1})$. Теорема доказана. □

Используя результаты этой теоремы, можно сформулировать другие условия, которые будут касаться свойств элементов кольца R, при которых это кольцо будет кольцом элементарных делителей.

Теорема 2.4. [*1*] *Для того чтобы каждая матрица над R имела свойство канонической диагональной редукции, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *R было кольцом Безу,*

2) *для каждой взаимно простой тройки элементов $a, b, c \in R$ существовали такие p, q, что*

$$(pa + qb,\ qc) = 1.$$

Доказательство. **Необходимость**. Для каждой матрицы $\left\| \begin{matrix} a & b \end{matrix} \right\|$, $a, b \in R$, существует такая обратимая матрица U, что

$$\left\| \begin{matrix} a & b \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} (a,b) & 0 \end{matrix} \right\|.$$

А это равносильно тому, что R является кольцом Безу.

Рассмотрим матрицу $A = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ b & c \end{matrix} \right\|$. Поскольку $(a, b, c) = 1$, то $A \sim \mathrm{diag}(1,\ ac)$. Поэтому существуют такие обратимые матрицы $P = \|p_{ij}\|_1^2$, $Q = \|q_{ij}\|_1^2$, что

$$PAQ = \mathrm{diag}(1,\ ac).$$

Таким образом,

$$PAQ = \left\| \begin{matrix} p_{11}a + p_{12}b & p_{12}c \\ p_{21}a + p_{22}b & p_{22}c \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,

$$(p_{11}a + p_{12}b)q_{11} + (p_{12}c)q_{21} = 1.$$

Отсюда получаем

$$(p_{11}a + p_{12}b,\ p_{12}c) = 1.$$

Достаточность. Согласно теореме 2.3 нам достаточно показать, что каждая 2×2 матрица имеет свойство канонической диагональной редукции. Пусть B – произвольная 2×2 матрица над R. В силу теоремы 1.5 существует такая обратимая матрица U, что

$$BU = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \delta \left\| \begin{matrix} \frac{b_1}{\delta} & 0 \\ \frac{b_2}{\delta} & \frac{b_3}{\delta} \end{matrix} \right\|,$$

где $\delta = (b_1,\ b_2,\ b_3)$. Тогда

$$\left(p\frac{b_1}{\delta} + q\frac{b_2}{\delta}, q\frac{b_3}{\delta} \right) = 1$$

для некоторых $p,\ q$. Отсюда следует, что

$$(pb_1 + qb_2, qb_3) = \delta.$$

Поскольку $(p,\ q) = 1$, то существует обратимая матрица $\left\| \begin{matrix} p & q \\ u & v \end{matrix} \right\|$. Имеем

$$\left\| \begin{matrix} p & q \\ u & v \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} pb_1 + qb_2 & qb_3 \\ * & * \end{matrix} \right\| = B_1.$$

Существуют такие $m,\ n$, что

$$(pb_1 + qb_2)m + \ (qb_3)n = \delta.$$

Тогда

$$B_1 \left\| \begin{matrix} m & -\frac{b_3}{\delta} \\ n & p\frac{b_1}{\delta} + q\frac{b_2}{\delta} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ * & b_1 b_3 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & b_1 b_3 \end{matrix} \right\|.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Кольцо Безу является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда для каждой тройки взаимно простых элементов* $a,\ b,\ c$ *существуют такие* $p,\ q,\ u,\ v,$ *что*

$$a(pu) + b(qu) + c(qv) = 1. \qquad \square$$

Замечание. На основании теоремы 2.1 кольцо Безу стабильного ранга $1,5$ является кольцом элементарных делителей. Доказательство этого факта было достаточно громоздким. С использованием теоремы 2.4 этот процесс существенно упрощается. Действительно, если $(b, a, c) = 1$, $c \neq 0$, то существует такое r, что $(b + ar, c) = 1$, т.е. $p = r, q = 1$ (обозначения теоремы 2.4). Если $c = 0$, то p, q выбираются из равенства $ap + bq = 1$. Следовательно, в силу теоремы 2.4 кольцо Безу стабильного ранга $1,5$ является кольцом элементарных делителей.

Теорема 2.5. *[11] Кольцо*

$$Q = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{Q},\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

является кольцом элементарных делителей.

Доказательство. В примере 1.1 показано, что Q является кольцом Безу. Итак, выполнено первое условие теоремы 2.4.

Поскольку с элементом $x^k e$, $e \in U(R)$, взаимно простыми являются лишь единицы кольца Q, то возможны только такие варианты троек взаимно простых элементов кольца Q:

1) $ae_1,\ be_2,\ ce_3$, где a, b, c – взаимно простые целые числа, $e_1, e_2, e_3 \in U(R)$;

2) $x^k e_1,\ be_2,\ ce_3$, где b, c – взаимно простые целые числа;

3) $x^k e_1,\ x^p e_2,\ e_3$.

Рассмотрим случай 1). Без ограничения общности можно считать, что $c \neq 0$. В противном случае этого можно добиться перестановкой и переименованием элементов. Кольцо целых чисел является адекватным кольцом. Поэтому на основании свойства 1.18 оно имеет стабильный ранг 1,5. Это означает, что существует такое r, что $(a + rb,\ c) = 1$. Следовательно, и

$$((re_1 e_2^{-1}) be_2 + ae_1,\ ce_3) = 1.$$

Поэтому искомыми p, q будут $p = re_1 e_2^{-1},\ q = 1$.

2). Поскольку $(be_2\ ce_3) = 1$, то существуют такие p, q, что

$$pbe_2 + qce_3 = 1.$$

Тогда

$$(pbe_2 + qce_3,\ qx^k e_1) = 1.$$

В третьем случае достаточно выбрать q из группы $U(Q)$. Таким образом, на основании теоремы 2.4 кольцо Q является кольцом элементарных делителей. □

2.2. Преобразующие матрицы и группа Зелиска

Поиск инвариантных множителей, а следовательно, и формы Смита матриц согласно теореме 2.2 связан с нахождением н.о.д. миноров соответствующих порядков. Однако во многих задачах, в частности, задачах факторизации нужно знать не только саму форму Смита матриц но и ее преобразующие матрицы. Дальнейшие исследования будут сосредоточены на исследовании этих матриц.

Пусть Φ – d-матрица. Рассмотрим множество матриц

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists\, K \in \mathrm{GL}_n(R):\ H\Phi = \Phi K\}.$$

Свойство 2.1. *Множество* $\mathbf{G}_\Phi$ *является мультипликативной группой.*

Доказательство. Очевидно, что $I \in \mathbf{G}_\Phi$. Пусть $H_1, H_2 \in \mathbf{G}_\Phi$, т.е.

$$H_1\Phi = \Phi K_1, H_2\Phi = \Phi K_2, K_1, K_2 \in \mathrm{GL}_n(R).$$

Тогда

$$H_2H_1\Phi = H_2\Phi K_1 = \Phi K_1 K_2.$$

Поэтому множество $\mathbf{G}_\Phi$ мультипликативно замкнуто. Кроме того, из равенства $H\Phi = \Phi K$ получаем $H^{-1}\Phi = \Phi K^{-1}$, т.е. $H^{-1} \in \mathbf{G}_\Phi$. □

Группа $\mathbf{G}_\Phi$ называется **группой Зелиска**. Ее изучение началось в работе [63].

Свойство 2.2. *Если* $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$, *то* $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P$.

Доказательство. Пусть $P_1 \in \mathbf{P}_B$, т.е. $B = P_1^{-1}\Phi Q_1^{-1}$. Тогда

$$P^{-1}\Phi Q^{-1} = P_1^{-1}\Phi Q_1^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$P_1P^{-1}\Phi = \Phi Q_1^{-1}Q.$$

Таким образом, $P_1P^{-1} = H \in \mathbf{G}_\Phi$, т.е. $P_1 = HP$. Поэтому $\mathbf{P}_B \subseteq \mathbf{G}_\Phi P$.

Наоборот, если $P \in \mathbf{P}_B$ и $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то

$$HPB = HPP^{-1}\Phi Q^{-1} = H\Phi Q^{-1} = \Phi K Q^{-1}.$$

Следовательно, $(HP)B(QK^{-1}) = \Phi$, т.е. $HP \in \mathbf{P}_B$. Поэтому $\mathbf{P}_B \supseteq \mathbf{G}_\Phi P$. Таким образом, $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P$. □

Итак, множество $\mathbf{P}_B$ – левых преобразующих матриц матрицы B есть не что иное, как левый класс смежности полной линейной группы по группе $\mathbf{G}_\Phi$.

Охарактеризуем внутреннюю структуру элементов группы $\mathbf{G}_\Phi$.

Теорема 2.6. *Группа* $\mathbf{G}_\Phi$, *где* $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0)$ *состоит из всех обратимых матриц вида*

$$H = \begin{Vmatrix} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{Vmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$H_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1.t-1} & h_{1t} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2.t-1} & h_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_t}{\varphi_1}h_{t1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2}h_{t2} & \dots & \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}h_{t.t-1} & h_{tt} \end{array} \right\|, \quad H_2 \in \mathrm{GL}_{n-t}(R).$$

Доказательство. Пусть $H = \|p_{ij}\|_1^n \in \mathbf{G}_\Phi$. Это означает, что существует такая обратимая матрица $K = \|k_{ij}\|_1^n$, что

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \varphi_1 p_{11} & \dots & \varphi_t p_{1t} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1 p_{t1} & \dots & \varphi_t p_{tt} & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1 p_{t+1.1} & \dots & \varphi_t p_{t+1.t} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1 p_{n1} & \dots & \varphi_t p_{nt} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \varphi_1 k_{11} & \dots & \varphi_1 k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_t k_{t1} & \dots & \varphi_t k_{tn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|. \qquad (2.3)$$

Поскольку $\varphi_1, \dots, \varphi_t \neq 0$, то

$$\left\| \begin{array}{ccc} p_{t+1.1} & \dots & p_{t+1.t} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nt} \end{array} \right\| = \mathbf{0}.$$

Из равенства (2.3) также вытекает, что $\varphi_i | \varphi_j p_{ij}, \;\; i, j = 1, \dots, t$. Поскольку при $i \leq j$ $\varphi_i | \varphi_j$, то на элементы p_{ij} где $i \leq j$, не налагаются никакие ограничения. Если $i > j$, то $\varphi_j | \varphi_i$. Поэтому условие

$$\varphi_j p_{ij} = \varphi_i k_{ij}$$

равносильно тому, что

$$p_{ij} = \frac{\varphi_i}{\varphi_j} k_{ij}.$$

Таким образом, матрица H имеет вид (2.3).

Пусть теперь H – обратимая матрица вида (2.2). Тогда выполняется равенство

$$\left\| \begin{array}{cc} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{array} \right\| \Phi = \Phi \left\| \begin{array}{cc} K_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{array} \right\|,$$

где

$$K_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} h_{11} & \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{12} & \dots & \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_1}h_{1.t-1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_1}h_{1t} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_2}h_{2.t-1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2}h_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{t1} & h_{t2} & \dots & h_{t.t-1} & h_{tt} \end{array} \right\|.$$

Поскольку

$$\det H = \det H_1 \det H_2,$$

то матрицы H_1, H_2 обратимы. Матрицы H_1, K_1 удовлетворяют равенство

$$H_1 \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_t) = \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_t) K_1.$$

Учитывая то, что матрица $\mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_t)$ неособенная, приходим к выводу, что K_1 является обратимой матрицей. Таким образом, матрица $\begin{Vmatrix} K_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{Vmatrix}$ обратима, и следовательно, $H \in \mathbf{G}_\Phi$. □

Следствие 2.2. *Группа обратимых верхних треугольных матриц является подгруппой любой группы Зелиска.* □

Свойство 2.3. *Элемент $\frac{\varphi_i}{\varphi_j}$ является произведением частных первой поддиагонали матрицы H_1, находящихся выше и правее:*

$$\begin{matrix} h_{jj} & * & * & & * \\ \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} & h_{j+1.j+1} & * & & * \\ \vdots & \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_{j+1}} & h_{j+2.j+2} & & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} & \dots & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} & h_{ii} \end{matrix}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_{j+1}} \cdots \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}.$$

□

Следствие 2.3. *Если*

$$\left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_j}\right) = 1,$$

то элемент σ взаимно простый со всеми частными $\frac{\varphi_p}{\varphi_q}$ матрицы H_1, которые очерчены прямоугольным треугольником с вершинами $(j+1, j)$, $(i, i-1)$, (i, j). □

Свойство 2.4. *Элемент $\frac{\varphi_i}{\varphi_j}$, $i > j$, является делителем всех элементов матрицы H_1, которые очерчены прямоугольником с вершинами $(i, 1)$, (i, j), (t, j), $(t, 1)$:*

$$\begin{matrix} \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{i1} & \frac{\varphi_i}{\varphi_2} h_{i2} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij} \\ \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_1} h_{i+1.1} & \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_2} h_{i+1.2} & \dots & \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j} h_{i+1.j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_t}{\varphi_1} h_{t1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2} h_{t2} & \dots & \frac{\varphi_t}{\varphi_j} h_{tj}. \end{matrix}$$

Иными словами

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} \Big| \frac{\varphi_{i+p}}{\varphi_{j-q}} h_{i+p.j-q},\ p = 0, 1, \ \dots\ , n - i, \quad q = 0, 1, \ \dots\ , j - 1.$$

Доказательство. Приняв во внимание свойство 2.3, доказательство этого утверждения не вызывает никаких затруднений. □

Свойство 2.5. *Пусть*

$$\sigma \Big| \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad \left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}}\right) = 1,$$

Тогда

1) *элемент σ делит все элементы матрицы H_1, которые очерчены прямоугольником с вершинами $(j+1, 1)$, $(j+1, j)$, (n, j),*

$$\sigma \Big| \frac{\varphi_{j+1+p}}{\varphi_{j-q}},\ p = 0, 1, \ \dots\ , n - j - 1, \quad q = 0, 1, \ \dots\ , j - 1, \quad j + 1 + p > j - q.$$

2) *элемент σ взаимно простый со всеми частными $\frac{\varphi_p}{\varphi_q}$ матрицы H_1, которые очерчены прямоугольным треугольником с вершинами $(j+2, j+1)$, $(i, i-1)$, $(i, j+1)$, т.е.*

$$\left(\sigma, \frac{\varphi_{i-s}}{\varphi_{j+t}}\right) = 1,\ s = 0, 1, \ \dots\ , i - j - 2, \quad t = 1, 2, \ \dots\ , i - j - 1,\ i - s > j + t,$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} & * & * & \dots & * \\
\frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_j} & \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_{j+1}} & * & \dots & * \\
\frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_j} & \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_{j+1}} & \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_{j+2}} & \dots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{\varphi_i}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+2}} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} & * & * & \dots & *
\end{array}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}} \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j},$$

то, приняв во внимание, что

$$\sigma \Big| \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad \left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}}\right) = 1,$$

получаем, что $\sigma | \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}$. Использовав свойство 2.4, заканчиваем рассмотрение случая 1). Случай 2) получается из следствия 2.3. □

Объединяя результаты последних двух утверждений, получаем.

Следствие 2.4. *Пусть*

$$\sigma|\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\quad \left(\sigma, \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_j}\right) = \left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}}\right) = 1.$$

Тогда $j = i - 1$, *т.е.* $\sigma|\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$. □

2.3. Нижние унитреугольные преобразующие матрицы

Как было отмечено в предыдущем разделе, множество $\mathbf{P}_B$ – левых преобразующих матриц матрицы $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$ является классом смежности полной линейной группы по группе $\mathbf{G}_\Phi$. Укажем условия, при которых в этом множестве существует нижняя унитреугольная матрица.

Через $A_{(i)}$ будем обозначать подматрицу матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^n \in M_n(R)$ вида

$$A_{(i)} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{ii} & a_{i.i+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1.i} & a_{i+1.i+1} & \dots & a_{i+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni} & a_{n.i+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|,$$

$i = 1, \dots, n$.

Лемма 2.1. *Пусть* $P = \|p_{ij}\|_1^n$ *– обратимая матрица и* $HP = Q = \|q_{ij}\|_1^n$, *где* $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $\det \Phi \neq 0$. *Тогда*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \left|P_{(i+1)}\right|\right) = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \left|Q_{(i+1)}\right|\right),\quad i = 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.6 подматрица матрицы H, составленная из m ее последних строк имеет вид

$$K_s = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \frac{\varphi_s}{\varphi_1}h_{s1} & \dots & \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}h_{s.s-1} & h_{ss} & \dots & h_{s.n-1} & h_{sn} \\ \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_1}h_{s+1.1} & \dots & \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_{s-1}}h_{s+1.s-1} & \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_s}h_{s+1.s} & \dots & h_{s+1.n-1} & h_{s+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{s-1}}h_{n.s-1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_s}h_{ns} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n.n-1} & h_{n\,n} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} H_s' & H_s \end{array} \right\|,$$

где $s = n - m + 1$. Заметив, что

$$\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}|\frac{\varphi_{s+k}}{\varphi_{s-1-l}},$$

получаем, что все элементы матрицы H'_s делятся на $\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$. Поэтому все миноры порядка m матрицы K_s, за исключением минора $|H_s|$, делятся на $\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$. Следовательно,

$$\left(|H_s|, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = 1. \tag{2.4}$$

Поскольку

$$Q_{(s)} = K_s \begin{Vmatrix} p_{1s} & p_{1.s+1} & \dots & p_{1n} \\ p_{2s} & p_{2.s+1} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{ns} & p_{n.s+1} & \dots & p_{nn} \end{Vmatrix},$$

то согласно формуле Бине-Коши

$$|Q_{(s)}| = \sum_j |H_j||P_j| + |H_s||P_{(s)}|,$$

где $\sum_j |H_j||P_j|$ – сумма произведений всевозможных миноров m-го порядка матрицы K_s, за исключением минора $|H_s|$, на соответствующие миноры матрицы P. Поскольку все миноры $|H_j|$ делятся на $\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$, то

$$|Q_{(s)}| = \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}} d + |H_s||P_{(s)}|,$$

где $d \in R$. Тогда, приняв во внимание равенство (2.4), получаем

$$\left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, |Q_{(s)}|,\right) = \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, |H_s||P_{(s)}|\right) = \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, |P_{(s)}|\right).$$

□

Теорема 2.7. *Пусть $S \in \mathrm{GL}_n(R)$ и Φ – неособенная d-матрица. Для того, чтобы в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существовала такая матрица H, что HS – нижняя унитреугольная матрица, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ |S_{(i+1)}|\right) = 1, \ \ i = 1,\ \dots\ ,\ n-1. \tag{2.5}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $HS = T = \|t_{ij}\|_1^n$ – нижняя унитреугольная матрица. Тогда на основании леммы 2.1

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ |S_{(i+1)}|\right) = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ t_{i+2.i+1} & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & & \\ t_{n.i+1} & t_{n.i+2} & \dots\ t_{n.n-1} & 1 \end{vmatrix}\right) = 1,$$

$i = 1,\ \dots\ ,\ n-1$.

Достаточность. Пусть $S = \|s_{ij}\|_1^2$ – матрица над R. Поскольку $(s_{12},\ s_{22}) = 1$ і
$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ s_{22}\right) = 1,$$
то
$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}s_{12},\ s_{22}\right) = 1.$$
Тогда существуют такие $u_1,\ u_2$, что
$$s_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_1 + s_{22}u_2 = 1.$$
Это означает, что матрица
$$K = \left\|\begin{array}{cc} s_{22} & -s_{12} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_1 & u_2 \end{array}\right\|$$
является элементом группы $\mathbf{G}_\Phi$. Тогда
$$KS = \left\|\begin{array}{cc} d & 0 \\ c & 1 \end{array}\right\|.$$
С обратимости матрицы KS вытекает, что $d \in U(R)$. Поэтому матрица $H = \operatorname{diag}(d^{-1},\ 1)K$ и будет искомой. Таким образом, утверждение теоремы верно для матриц второго порядка.

Допустим правильность этого утверждения для всех матриц порядка меньше n и рассмотрим обратимую матрицу $S = \|s_{ij}\|_1^n$. Из равенств (2.5) следует, что
$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ (s_{n.i+1}, s_{n.i+2}, \ldots, s_{nn})\right) = 1,$$
$i = 1,\ \ldots\ ,\ n-1$. Следовательно, в частности,
$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ (s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1.$$
Также
$$(s_{n1},\ (s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn})) = 1.$$
Поэтому
$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}s_{n1},\ (s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = \left(\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}s_{n1}, s_{n2}\right),\ (s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1.$$
Учитывая то, что
$$\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2},\ (s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1,$$

получаем
$$\left(\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}s_{n1}, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}s_{n2}\right),\ (s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1.$$
Пошагово продолжая описанный процесс, получим
$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}s_{1n},\ \ldots,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}}s_{n-2.n},\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}s_{n-1.n},\ s_{nn}\right) = 1.$$
В кольце R существуют такие $u_{n1},\ u_{n2},\ \ldots,\ u_{nn}$, что
$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_{n1}s_{1n} + \ \ldots\ + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n.n-1}s_{n-1.n} + u_{nn}s_{nn} = 1.$$
Это означает, что строка
$$\left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_{n1} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n.n-1} & u_{nn} \end{matrix} \right\|$$
примитивная. Воспользовавшись теоремой 1.1, дополним эту строку до обратимой матрицы вида
$$H_1 = \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1.n-2} & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & u_{n-2.n-2} & u_{n-2.n-1} & u_{n-2.n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}}u_{n.n-2} & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n.n-1} & u_{nn} \end{matrix} \right\|,$$
которая является элементом группы $\mathbf{G}_\Phi$. Тогда
$$H_1 S = \left\| \begin{matrix} S_1 & \mathbf{q} \\ \mathbf{p} & 1 \end{matrix} \right\|,$$
где $\mathbf{p} = \left\| \begin{matrix} s'_{n1} & s'_{n2} & \ldots & s'_{n.n-1} \end{matrix} \right\|$, $\mathbf{q} = \left\| \begin{matrix} s'_{1n} & s'_{2n} & \ldots & s'_{n-1.n} \end{matrix} \right\|^T$. Отсюда
$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} I & -\mathbf{q} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|}_{H_2} H_1 S = \left\| \begin{matrix} S_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{p} & 1 \end{matrix} \right\|,$$
где $S_2 = \left\| \begin{matrix} s''_{ij} \end{matrix} \right\|_1^n$. Поскольку $H_2H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, то согласно лемме 2.1
$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \left| \begin{matrix} s''_{i+1.i+1} & \ldots & s''_{i+1.n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s''_{n-1.i+1} & \ldots & s''_{n-1.n-1} & 0 \\ s'_{n.i+1} & \ldots & s'_{n.n-1} & 1 \end{matrix} \right| \right) = 1,$$

$i = 1, \ldots, n-1$. Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \begin{vmatrix} s''_{i+1.i+1} & \ldots & s''_{i+1.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s''_{n-1.i+1} & \ldots & s''_{n-1.n-1} \end{vmatrix} \right) = 1, \ \ i = 1, \ldots, n-2.$$

Рассмотрим матрицу $\Phi_{n-1} = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ \ldots, \varphi_{n-1})$. Согласно предположению индукции в группе $\mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$ существует такая матрица K, что KS_2 – нижняя унитреугольная матрица. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| H_2 H_1 S$$

также будет нижней унитреугольной матрицей. И для завершения доказательства нужно лишь заметить, что $\left\| \begin{matrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|$ является элементом группы $\mathbf{G}_\Phi$. □

Теорема 2.8. *Пусть неособенная матрица B имеет форму Смита Φ и $S \in \mathbf{P}_B$. Множество $\mathbf{P}_B$ содержит нижнюю унитреугольную матрицу тогда и только тогда, когда матрица S удовлетворяет равенство* (2.5).

Доказательство вытекает из свойства 2.2 и теоремы 2.7. □

2.4. Структура преобразующих матриц одного класса матриц

Как следует из доказательства теоремы 2.3, главную роль в установлении того факта, что R является кольцом элементарных делителей, играют матрицы второго порядка с одним нулевым элементом. Укажем явный вид преобразующих матриц для матриц собственно такого вида.

Теорема 2.9. *Пусть $A = \left\| \begin{matrix} b & c \\ a & 0 \end{matrix} \right\|$ — матрица над кольцом элементарных делителей R, причем $(a, b, c) = 1$. Тогда преобразующими матрицами P и Q матрицы A являются матрицы*

$$P = \left\| \begin{matrix} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{matrix} \right\|, \ Q = \left\| \begin{matrix} \alpha & c\beta \\ n & -b\beta - am \end{matrix} \right\|,$$

где

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Поскольку $(a, b, c) = 1$, то на основании следствия 2.1 в кольце R существуют такие m, n, α, β, что выполняется равенство (2.6). Тогда

$$\left\| \begin{matrix} b & c \\ a & 0 \end{matrix} \right\| = \underbrace{\left\| \begin{matrix} cn + \alpha b & -m \\ \alpha a & \beta \end{matrix} \right\|}_{M} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{matrix} \right\| \underbrace{\left\| \begin{matrix} \beta b + am & \beta c \\ n & -\alpha \end{matrix} \right\|}_{N}.$$

Заметив, что $M^{-1} = P$ и $N^{-1} = Q$, заканчиваем доказательство. □

Следствие 2.5. *Если $c = 0$ и $am + cn = 1$, то преобразующими матрицами P и Q матрицы A будут матрицы*

$$P = \left\| \begin{matrix} 1 & m \\ -a & cn \end{matrix} \right\|, \; Q = \left\| \begin{matrix} 1 & c \\ n & -am \end{matrix} \right\|. \qquad \square$$

Естественно, возникает вопрос о существовании преобразующих матриц, которые имеют другую структуру. Ответ отрицательный.

Теорема 2.10. *Все матрицы из множества $\mathbf{P}_A$ имеют вид*

$$\left\| \begin{matrix} \beta_1 & m_1 \\ -\alpha_1 a & \alpha_1 b + cn_1 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$a(m_1\alpha_1) + b(\alpha_1\beta_1) + c(\beta_1 n_1) = e \in U(R).$$

Доказательство. На основании свойства 2.2 $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Phi P$, где группа $\mathbf{G}_\Phi$ состоит из всех обратимых матриц вида

$$\left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ ack_{21} & k_{22} \end{matrix} \right\|.$$

В качестве матрицы P возьмем матрицу, полученную в теореме 2.9, т.е.

$$P = \left\| \begin{matrix} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{matrix} \right\|,$$

где

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1.$$

И пусть $P_1 \in \mathbf{P}_A$. Тогда в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица

$$H = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ach_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|,$$

что $P_1 = HP$. Следовательно,

$$P_1 = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ach_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 & m_1 \\ -\alpha_1 a & \alpha_1 b + cn_1 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$\alpha_1 = c\beta h_{21} + \alpha h_{22}, \;\; \beta_1 = \beta h_{11} - \alpha\beta a h_{22},$$

$$m_1 = mh_{11} + h_{22}(\alpha b + cn), \; n_1 = nh_{22} + h_{21}(\beta b + am).$$

Поскольку $\det H = e \in U(R)$, то и $\det P_1 = e$. Поэтому

$$a(m_1\alpha_1) + b(\alpha_1\beta_1) + c(\beta_1 n_1) = e. \qquad \square$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать относительно структуры правых преобразующих матриц матрицы A.

2.5. Некоторые свойства элементов колец элементарных делителей

В теореме 1.1 доказано, что над кольцом Безу R каждая примитивная строка $\left\| \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \right\|$ дополняется до обратимой матрицы вида

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{matrix} \right\|.$$

Над кольцом элементарных делителей этот результат можно несколько усилить.

Теорема 2.11. *Для того, чтобы кольцо Безу R было кольцом элементарных делителей, необходимо и достаточно, чтобы каждая примитивная строка $\left\| \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \right\|$ дополнялась до обратимой матрицы вида*

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & * & * \\ * & * & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Доказательство. Поскольку $(a, b, c) = 1$, то существуют такие m, n, α, β, что

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1.$$

Тогда искомой будет матрица

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & -n & \alpha \\ \beta & -m & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Обратные рассуждения очевидны. □

Заметим, что на основании свойства 1.18 над кольцами Безу стабильного ранга 1,5 каждая примитивная строка $\left\| \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \right\|$, $c \neq 0$, дополняется до обратимой матрицы вида

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ * & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{matrix} \right\|.$$

Следующая теорема определяет то свойство элементов кольца Безу R, при котором R становится кольцом элементарных делителей. Для доказательства этого результата нам нужно такое утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|_1^3$, $\det A = 1$ *и*

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|.$$

Для того чтобы $\det B = 1$*, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие элементы* s_2, s_3*, что*

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| A.$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку

$$\det B = b_{11} \det \left\| \begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\| - b_{12} \det \left\| \begin{matrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix} \right\| + b_{13} \det \left\| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right\| = 1,$$

то

$$BA^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,

$$B = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| A.$$

Поэтому

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| A.$$

Достататочность. Поскольку

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{matrix} \right\| A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| AA^{-1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| E = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\|,$$

то

$$BA^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Из этого равенства вытекает, что $\det B = 1$. □

Теорема 2.12. *Для того, чтобы кольцо Безу R было кольцом элементарных делителей, необходимо и достаточно, чтобы для каждой четверки таких элементов a_1, a_2, b_1, b_2, что*

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) = 1,$$

существовал такой элемент r, что

$$b_1 + rb_2 = \alpha\beta,$$

где

$$(\alpha, \beta) = (a_1, \alpha) = (a_2, \beta) = 1.$$

Доказательство. Необходимость. В кольце R существуют такие v_1, v_2, u_1, u_2, что

$$a_1 v_1 - a_2 v_2 = 1,$$

$$b_1 u_1 - b_2 u_2 = 1.$$

Поэтому матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} u_2 v_2 & b_1 & u_2 v_1 \\ u_1 v_2 & b_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & 0 & a_2 \end{array} \right\| = A$$

является унимодулярной, т.е.

$$\det A = a_2 b_2 (u_2 v_2) - \left| \begin{array}{cc} u_1 v_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & a_2 \end{array} \right| b_1 - a_1 b_2 (u_2 v_1) = 1.$$

Обозначим

$$a = u_2 v_2,\ b = \left| \begin{array}{cc} u_1 v_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & a_2 \end{array} \right|,\ c = v_1 u_2.$$

Очевидно, что

$$(a, b, c) = 1.$$

Тогда существуют такие элементы α, β, m, n, что

$$a(m\alpha) - b(\alpha\beta) - c(\beta n) = 1.$$

Отсюда вытекает, что
$$(\alpha, \beta) = 1.$$
Таким образом, матрица
$$\left\| \begin{matrix} \alpha m & \alpha\beta & \beta n \\ u_1 v_2 & b_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & 0 & a_2 \end{matrix} \right\| = B$$
снова является унимодулярной. На основании леммы 2.2 существуют такие элементы s_2, s_3, что
$$\left\| \begin{matrix} \alpha m & \alpha\beta & \beta n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| A.$$
Поэтому
$$b_1 + s_2 b_2 = \alpha\beta.$$
Поскольку
$$1 = \det B = a_1(-\beta n b_2) + a_1(\alpha\beta u_1 v_1) + \alpha \left(\left| \begin{matrix} m & \beta \\ u_1 v_2 & b_2 \end{matrix} \right| a_2 \right),$$
то
$$(\alpha, a_1) = 1.$$
Аналогично показываем, что
$$(\beta, a_2) = 1.$$
Положив $r = s_2$, завершаем доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть a, b, c – взаимно простые элементы кольца R, причем $(a, c) \neq 0$. Рассмотрим матрицу
$$\left\| \begin{matrix} bu & (a,c) & bv \\ -\frac{c}{(a,c)} & 0 & \frac{a}{(a,c)} \end{matrix} \right\|,$$
где
$$\frac{a}{(a,c)} u + \frac{c}{(a,c)} v = -1.$$
Для элементов a, b, c существуют такие m_1, m_2, m_3, что
$$a m_1 + b m_2 + c m_3 = 1.$$
Следовательно,
$$\det \underbrace{\left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ bu & (a,c) & bv \\ -\frac{c}{(a,c)} & 0 & \frac{a}{(a,c)} \end{matrix} \right\|}_{A} = \det A = 1.$$

Обозначим

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\|.$$

Очевидно, что

$$(a_{12}, a_{22}) = (a_{31}, a_{33}) = 1.$$

Согласно предположению существует такой элемент r, что

$$a_{12} + ra_{22} = \alpha\beta,$$

где

$$(\alpha, \beta) = (a_{31}, \alpha) = (a_{33}, \beta) = 1. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} + ra_{21} & \alpha\beta & a_{13} + ra_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} a'_{11} & \alpha\beta & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим систему конгруэнций

$$\begin{cases} a_{31}x \equiv a'_{11} (mod \alpha), \\ a_{33}x \equiv a'_{13} (mod \beta). \end{cases}$$

На основании равенств (2.7) эта система имеет решение $x = s$, т.е.

$$a_{31}s - a'_{11} = -\alpha m,$$

$$a_{33}s - a'_{13} = -\beta n.$$

Отсюда

$$a'_{11} + a_{31}(-s) = \alpha m,$$

$$a'_{13} + a_{33}(-s) = \beta n.$$

Поэтому,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} a'_{11} & \alpha\beta & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} m\alpha & \alpha\beta & \beta n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| = B.$$

Заметив, что

$$1 = \det B = a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n)$$

и воспользовавшись следствием 2.1, заканчиваем рассмотрение этого случая.

Если $a = c = 0$, то $b \in U(R)$. Тогда достаточно положить

$$\alpha = b^{-1},\ \beta = m = n = 1.$$

Доказательство завершено. $\square$

2.6. Группа Зелиска и стабильный ранг колец

Известно [74] – [76], что полная линейная группа как коммутативного, так и некоммутативными кольца R является произведением группы верхних треугольных матриц, групп нижних и верхних унитреугольных матриц тогда и только тогда, когда R является кольцом Эрмита стабильного ранга 1. Укажем подобные связи, в случае коммутативных колец стабильного ранга 1,5.

Напомним, что коммутативное кольцо R имеет стабильный ранг 1,5, если из условия $(a, b, c) = 1$, $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ вытекает существование такого $r \in R$, что

$$(a + br, c) = 1.$$

Обозначим через $U_n^{up}(R)$ и $U_n^{lw}(R)$ группы верхних и нижних унитреугольных $n \times n$ матриц над R, соответственно.

Теорема 2.13. *Пусть R – коммутативное кольцо Безу,* $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *– неособенная d-матрица. Следующие условия эквивалентны:*

1) *R имеет стабильный ранг* $1,5$;
2) $\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Phi U_2^{lw}(R) U_2^{up}(R)$ *для всех матриц* Φ;
3) $\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi U_n^{lw}(R) U_n^{up}(R)$ *для всех матриц* Φ *и для каждого* $n \geq 2$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $A = \|a_{ij}\|_1^2 \in \mathrm{GL}_2(R)$. Тогда

$$(a_{21},\ a_{22}) = 1 \ \Rightarrow\ \left(a_{21},\ a_{22},\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

В кольце R существует такое r, что

$$\left(a_{22} + a_{21}r,\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Рассмотрим матрицу $AU = \|a'_{ij}\|_1^2$, где

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку

$$\left(a'_{22},\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1,$$

то в силу теоремы 2.7 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что $HAU = V$ – нижняя унитреугольная матрица. Тогда $A = H^{-1}VU^{-1}$. Таким образом,

$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Phi U_2^{lw}(R) U_2^{up}(R).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(a,b,c) = 1,\ \ abc \neq 0$. Имеем

$$a = (a,b)a_1,\ \ b = (a,b)b_1,\ \ (a_1,b_1) = 1.$$

Существуют такие u, v, что

$$a_1u + b_1v = 1.$$

Следовательно, матрица

$$\left\| \begin{matrix} u & -v \\ b_1 & a_1 \end{matrix} \right\| = A$$

– обратима. Рассмотрим d-матрицу

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{matrix} \right\| = \Phi.$$

Согласно условию теоремы, матрица A является произведением трех матриц: $A = HUV$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi,\ \ U \in U_2^{lw}(R),\ \ V \in U_2^{up}(R)$. Заметив, что

$$H^{-1} = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ch_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|,\ U = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{matrix} \right\|,\ V^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

получаем

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{matrix} \right\| = H^{-1}AV^{-1} = H^{-1}\left(\left\| \begin{matrix} u & -v \\ b_1 & a_1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ch_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u & ur - v \\ b_1 & b_1r + a_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} * & * \\ * & ch_{21}(ur - v) + h_{22}(b_1r + a_1) \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,

$$ch_{21}(ur - v) + h_{22}(b_1r + a_1) = 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$(b_1r + a_1, c) = 1.$$

Учитывая то, что

$$((a,b),c) = 1,$$

получим
$$((a, b)(b_1 r + a_1), c) = (a + br, c) = 1.$$
А это значит, что кольцо R имеет стабильный ранг 1,5.

Случай, когда $a = 0$ или $b = 0$, очевидный.

3) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3). Для матриц второго порядканаше утверждение верно (см. доказательство условия 2)). Предположим его правильность для матриц порядка, меньше n. Поскольку 2) $\Leftrightarrow$ 1), то R является кольцом Безу стабильного ранга 1,5. Пусть $A = \|a_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда
$$(a_{n1},\ \ldots,\ a_{nn}) = 1 \quad\Rightarrow\quad \left(a_{n1},\ \ldots,\ a_{nn},\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$
На основании свойства 1.19 существуют такие $r_1,\ \ldots\ ,\ r_{n-1}$, что
$$\left(a_{nn} + a_{n.n-1} r_{n-1} + \ldots + a_{n1} r_1,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$
Рассмотрим матрицу $AU_n = \|a'_{ij}\|_1^n$, где
$$U_n = \left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & r_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & r_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$
Поскольку
$$((a'_{n1},\ \ldots,\ a'_{n.n-1}),\ a'_{nn}) = 1$$
и
$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\ a'_{nn}\right) = 1,$$
то
$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}(a'_{n1},\ \ldots,\ a'_{n.n-1}),\ a'_{nn}\right) = 1.$$
Отсюда вытекает, что
$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} a'_{n1},\ \frac{\varphi_n}{\varphi_2} a'_{n2},\ \ldots,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} a'_{n.n-1},\ a'_{nn}\right) = 1.$$
Использовав методы, которые были использованы при доказательстве достаточности теоремы 2.7, найдем в группе $\mathbf{G}_\Phi$ такую матрицу H_n, что
$$H_n A U_n = \left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим d-матрицу $\Phi_{n-1} = \mathrm{diag}\,(\varphi_1,\ \ldots,\varphi_{n-1})$. Поскольку $A_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(R)$, то согласно нашему предположению

$$A_1 = H_{n-1}V_{n-1}U_{n-1},$$

где $H_{n-1} \in \mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$, $V_{n-1} \in U^{lw}_{n-1}(R)$, $U_{n-1} \in U^{up}_{n-1}(R)$. Поэтому

$$H_nAU_n = \left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} H_{n-1}V_{n-1}U_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_2 & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \underbrace{\left\| \begin{matrix} H_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|}_{M} \underbrace{\left\| \begin{matrix} V_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_2U_{n-1}^{-1} & 1 \end{matrix} \right\|}_{S} \underbrace{\left\| \begin{matrix} U_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|}_{N} = MSN.$$

Таким образом, матрицу A можно записать в виде

$$A = (H_n^{-1}M)S(NU_n^{-1}).$$

Заметив, что $H_n^{-1}M \in \mathbf{G}_\Phi$, $S \in U^{lw}_n(R)$, $NU_n^{-1} \in U^{up}_n(R)$, получаем

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi U^{lw}_n(R)U^{up}_n(R).$$

Теорему доказано. □

2.7. Кольца матриц стабильного ранга 1,5

Все кольца стабильного ранга 1,5, которые ранее рассматривались были коммутативными кольцами без делителей нуля. В этом разделе будет показано, что кольца матриц второго порядка над коммутативными кольцами Безу стабильного ранга 1,5 имеют аналогичный стабильный ранг.

Пусть $A,\ B$ – 2×2 матрицы над кольцом элементарных делителей R, которые имеют, соответственно, формы Смита

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2),\ \ \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\ \delta_2),$$

$P_A \in \mathbf{P}_A,\ P_B \in \mathbf{P}_B$, причем $P_BP_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 = S$.

Лемма 2.3. *Элемент* $((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$ *является инвариантом относительно выбора преобразующих матриц* P_B *и* P_A.

Доказательство. 1). Пусть $A,\ B$ – неособенные матрицы и F_A, F_B – другие левые преобразующие матрицы, т.е. $F_A \in \mathbf{P}_A$, $F_B \in \mathbf{P}_B$. Тогда существуют такие $H_A \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$ и $H_B \in \mathbf{G}_\Delta$, что $F_A = H_AP_A$, $F_B = H_BP_B$.

Обозначим $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Для доказательства леммы нужно показать, что

$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = ((\varepsilon_2, \delta_2), s'_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Рассмотрим произведение матриц

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

где $S = P_B P_A^{-1}$. Обозначим $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Поскольку

$$H_B = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{matrix} \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} s_{11} \\ s_{21} \end{matrix} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}.$$

Рассмотрим

$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)) = \left((\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21})[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2) \right).$$

Поскольку

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{(\varepsilon_2, \delta_2)} = \frac{\delta_2 [\varepsilon_1, \delta_1]}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то

$$(\varepsilon_2, \delta_2) \mid \frac{\delta_2}{\delta_1} [\varepsilon_1, \delta_1].$$

Следовательно,

$$\left((\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21})[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2) \right) = (h_{22} s_{21} [\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)).$$

С обратимости матрицы H_B вытекает, что

$$\left(h_{22}, \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) = 1.$$

Поэтому и

$$(h_{22}, (\varepsilon_2, \delta_2)) = 1.$$

Таким образом,

$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)).$$

Рассмотрим $S H_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Поскольку

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то
$$t_{21} = \left\| \begin{array}{cc} s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21} \end{array} \right\| = s_{21}\nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21}s_{22}.$$
Заметив, что
$$(\varepsilon_2, \delta_2) \mid \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$$
и рассуждая аналогично, получаем
$$\left(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)\right) = \left(s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)\right).$$
Приняв во внимание ассоциативность кольца $M_2(R)$, убеждаемся в правильности нашего утверждения.

2). Пусть матрица A – неособенная и $B \sim \mathrm{diag}(\delta_1,\ 0)$. Тогда
$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\varepsilon_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$
Пусть F_A и F_B – другие левые преобразующие матрицы матриц A и B. Тогда существуют такие $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ и
$$H_B = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$
что $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Обозначим $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Для доказательства леммы нужно показать, что
$$(\varepsilon_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\varepsilon_2, s'_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$
Рассмотрим произведение матриц
$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$
где $S = P_B P_A^{-1}$. Обозначим $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Поскольку
$$H_B = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$
то
$$k_{21} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & e_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ s_{21} \end{array} \right\| = e_2 s_{21}.$$
Рассмотрим
$$\left(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2\right) = \left(e_2 s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2\right).$$
Поскольку e_2 обратимый элемент кольца, то
$$\left(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2\right) = \left(s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2\right).$$

Рассмотрим $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Поскольку

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$t_{21} = \left\| \begin{matrix} s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nu_{21} \end{matrix} \right\| = s_{21}\nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nu_{21} s_{22}.$$

Заметив, что

$$\varepsilon_2 \mid \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} [\varepsilon_1, \delta_1]$$

и рассуждая аналогично, как и в случае 1), получаем

$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2)\,.$$

Приняв во внимание ассоциативность кольца $M_2(R)$, завершаем рассмотрение этого случая.

3). Пусть матрица B неособенная и $A \sim \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ 0)$. Тогда

$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\delta_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Пусть F_A и F_B – другие левые преобразующие матрицы матриц A и B. Тогда существуют такие

$$H_A = \left\| \begin{matrix} e_1 & l_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|, \ H_B \in \mathbf{G}_\Delta,$$

что $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Обозначим $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Для доказательства леммы нужно показать, что

$$(\delta_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\delta_2, s'_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Рассмотрим произведение матриц

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

где $S = P_B P_A^{-1}$. Обозначим $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Поскольку

$$H_B = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{matrix} \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} s_{11} \\ s_{12} \end{matrix} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{12}.$$

Заметив, что
$$\delta_2 \mid \frac{\delta_2}{\delta_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$$
и рассуждая аналогично, как и в случае 1), получаем
$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2)\,.$$

Рассмотрим $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Поскольку
$$H_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & -l_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$
то
$$t_{21} = \left\| \begin{array}{cc} s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} e_1 \\ 0 \end{array} \right\| = e_1 s_{21}.$$
Рассмотрим
$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2) = (e_1 s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2)\,.$$
Поскольку e_1 обратимый элемент кольца, то
$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2)\,.$$
Приняв во внимание ассоциативность кольца $M_2(R)$, завершаем рассмотрение этого случая.

4). Пусть
$$A \sim \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \;\; B \sim \left\| \begin{array}{cc} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$
и F_A и F_B – другие левые преобразующие матрицы этих матриц. Тогда существуют такие
$$H_A = \left\| \begin{array}{cc} e_1' & v_{12} \\ 0 & e_2' \end{array} \right\|, \;\; H_B = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$
что $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Обозначим $F_B F_A^{-1} = \|s_{ij}'\|_1^2 = S'$. Для доказательства леммы нужно показать, что s_{21} и s_{21}' отличаются на обратимый элемент кольца. Рассмотрим произведение матриц
$$S' = F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$
где $S = P_B P_A^{-1}$. Запишем эти матрицы в явном виде, т.е.
$$\left\| \begin{array}{cc} s_{11}' & s_{12}' \\ s_{21}' & s_{22}' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} e_1'^{-1} & * \\ 0 & e_2'^{-1} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} s''_{11} & s''_{12} \\ s_{21}u & s''_{22} \end{matrix} \right\|,$$

где $u = e_2 e_2'^{-1}$ – обратимый элемент кольца R. Следовательно, $s'_{21} = s_{21}u$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.14. *Формой Смита матрицы* $(A,\ B)_l$ *является матрица*

$$\operatorname{diag}\left((\varepsilon_1,\ \delta_1),\ \ (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})\right).$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\|$. На основании теоремы 1.10 существует такая обратимая матрица U, что

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

причем $D = (A,\ B)_l$. Выполняются равенства

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| = P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} P_B P_A^{-1}\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Умножим это равенство справа на U :

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left(P_B^{-1}\right) \left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \left(\left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| U \right).$$

Следовательно,

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

– форма Смита этих матриц. На основании теоремы 2.2 ν_1 равен н.о.д. элементов матриц $S\mathrm{E}$, Δ или же матрицы D. Также

$$\nu_2 = \frac{\mu_2}{\nu_1},$$

где μ_2 н.о.д. миноров второго порядка этих матриц. Отсюда вытекает, что формой Смита матрицы $D = (A,\ B)_l$ является матрица $\operatorname{diag}(\nu_1,\ \nu_2)$. Поскольку н.о.д. элементов матрицы $S\mathrm{E}$ является ε_1, а Δ является δ_1, то

$$\nu_1 = (\varepsilon_1, \delta_1).$$

Рассмотрим матрицу

$$\|\ SE \quad \Delta\ \| = \left\| \begin{matrix} s_{11}\varepsilon_1 & s_{12}\varepsilon_2 & \delta_1 & 0 \\ s_{21}\varepsilon_1 & s_{22}\varepsilon_2 & 0 & \delta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Заметив, что s_{ij}-ые являются элементами обратимой матрицы S, получаем

$$\mu_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2 s_{11},\ \varepsilon_2\delta_2 s_{12},\ \varepsilon_1\delta_1 s_{21},\ \varepsilon_2\delta_1 s_{22}) =$$
$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2\left(s_{11},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}s_{12}\right),\ \varepsilon_1\delta_1\left(s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}s_{22}\right)\right) =$$
$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2\left(s_{11},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right),\ \varepsilon_1\delta_1\left(s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$
$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\left(s_{11},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right),\ s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$
$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}s_{11},\ \frac{\delta_2\varepsilon_2}{\delta_1\varepsilon_1},\ s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$
$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}s_{11},\ s_{21}\right),\ \left(\frac{\delta_2\varepsilon_2}{\delta_1\varepsilon_1},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)\right) =$$
$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1},\ s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$
$$= (\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \varepsilon_2\delta_1,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 s_{21}) =$$
$$= (\varepsilon_1,\ \delta_1)\left(\varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)},\ \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}\right),\ \delta_2\left(\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)},\ \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}\right),\ \frac{\varepsilon_1\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}s_{21}\right) =$$
$$= (\varepsilon_1,\ \delta_1)\,(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})\,.$$

Следовательно,

$$\nu_2 = \frac{\mu_2}{\nu_1} = (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})\,.$$

В завершение доказательства вспомним тему 2.3, которая показывает инвариантность выражения $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})$ относительно выбора преобразующих матриц P_B и P_A. □

Следствие 2.6. *Для того чтобы* $(A,\ B)_l = I$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}) = 1.$$

Доказательство. Для того чтобы $(A,\ B)_l = I$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\varepsilon_1,\ \delta_1)\,(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}) = 1. \tag{2.8}$$

Поскольку $(\varepsilon_1,\ \delta_1)$ является делителем $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})$, то равенство (2.8) равносильно условию

$$(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}) = 1.$$ □

Следствие 2.7. *Если* $\varepsilon_2 = 0,\ \delta_2 \neq 0$, *то* $(A,\ B)_l = I$ *тогда и только тогда, когда*
$$\delta_1 = 1 \ \ i \ \ (\delta_2,\ \varepsilon_1 s_{21}) = 1. \qquad \square$$

Следствие 2.8. *Если* $\varepsilon_2,\ \delta_2 = 0$, *то* $(A,\ B)_l = I$ *тогда и только тогда, когда* $\varepsilon_1\delta_1 s_{21}$ *является обратимым элементом кольца* R. $\square$

Следствие 2.9. *Если* $(A,\ B)_l = I$ *и* $s_{21} = 0$, *то* $A,\ B$ *– неособенные матрицы, причем*
$$(\det A,\ \det B) = 1. \qquad \square$$

Теорема 2.15. *Пусть* $A,\ B \in M_2(R)$ *и, по крайней мере, одна из них является неособенной матрицей. Тогда во множестве* $\boldsymbol{P}_B\boldsymbol{P}_A^{-1}$ *существует нижняя унитреугольная матрица.*

Доказательство. Останемся в обозначениях теоремы 2.6. Поскольку $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B$, $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, то
$$\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1} = \mathbf{G}_\Delta P_B(\mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A)^{-1} = \mathbf{G}_\Delta P_B P_A^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \mathbf{G}_\Delta S\mathbf{G}_{\mathrm{E}}.$$
Таким образом, умножая матрицу $P_B P_A^{-1} = S$ слева на элементы группы $\mathbf{G}_\Delta$ а справа – на элементы группы $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, остаемся в пределах множества $\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Пусть $\det\Delta \neq 0$. На основании теоремы 2.13
$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Delta U_2^{\mathrm{lw}}(R)U_2^{\mathrm{up}}(R).$$
Поскольку $S \in \mathrm{GL}_2(R)$, то
$$S = HUV,\ \ H \in \mathbf{G}_\Delta,\ \ U \in U_2^{\mathrm{lw}}(R),\ \ V \in U_2^{\mathrm{up}}(R).$$
Следовательно, $U = H^{-1}SV^{-1}$. Заметив, что $H^{-1} \in \mathbf{G}_\Delta$, $V^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, приходим к выводу, что $U \in \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Пусть $\det \mathrm{E} \neq 0$. Тогда выполняется равенство
$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} U_2^{\mathrm{lw}}(R)U_2^{\mathrm{up}}(R).$$
Переходя к обратным матрицам, получаем
$$\mathrm{GL}_2(R) = U_2^{\mathrm{up}}(R)U_2^{\mathrm{lw}}(R)\mathbf{G}_{\mathrm{E}}.$$
То есть
$$S = MNK,\ \ M \in U_2^{\mathrm{up}}(R),\ \ N \in U_2^{\mathrm{lw}}(R),\ \ K \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}.$$
Поэтому, $N = M^{-1}SK^{-1}$. Поскольку $U_2^{\mathrm{up}}(R) \subset \mathbf{G}_\Delta$, то $M^{-1} \in \mathbf{G}_\Delta$. Заметив, что $K^{-1} \in U_2^{\mathrm{up}}(R)$, приходим к заключению, что $N \in \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.16. *Пусть матрицы* A, B *имеют, соответственно, формы Смита* E, Δ, *причем* $AB \sim \mathrm{E}\Delta$. *Тогда* $\boldsymbol{P}_{AB} \subseteq \boldsymbol{P}_A$.

Доказательство. На основании теоремы 2.20 (см. с. 102)

$$AB = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}\, P_B^{-1}\mathrm{E}Q_B^{-1} \sim \mathrm{E}\Delta$$

тогда и только тогда, когда матрицу $Q_A^{-1}P_B^{-1}$ можно записать в виде $Q_A^{-1}P_B^{-1} = K_1K_2$, где $K_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}^T$, т.е. $\mathrm{E}K_1 = L_1\mathrm{E}$, где $L_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ и $K_2 \in \mathbf{G}_{\Delta}$. Тогда

$$AB = P_A^{-1}\mathrm{E}(Q_A^{-1}P_B^{-1})\Delta Q_B^{-1} = P_A^{-1}\mathrm{E}K_1K_2\Delta Q_B^{-1} = (L_1^{-1}P_A)^{-1}\mathrm{E}\Delta(Q_BL_2^{-1})^{-1}.$$

Это означает, что $L_1^{-1}P_A \in \mathbf{P}_{AB}$. Следовательно, $\mathbf{P}_{AB} = \mathbf{G}_{\mathrm{E}\Delta}(L_1^{-1}P_A)$. В свою очередь $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A$. Заметив, что $L_1^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, получаем

$$\mathbf{G}_{\mathrm{E}}(L_1^{-1}P_A) = (\mathbf{G}_{\mathrm{E}}L_1^{-1})P_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A = \mathbf{P}_A.$$

Поскольку $\mathbf{G}_{\mathrm{E}\Delta} \subseteq \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то приходим к выводу, что $\boldsymbol{P}_{AB} \subseteq \boldsymbol{P}_A$. □

Теорема 2.17. *Пусть* A, B – *ненулевые взаимно простые слева* 2×2 *матрицы над кольцом Безу* R *стабильного ранга* $1,5$. *Тогда, если матрица* A *особенная, то существует такая матрица* T, *что*

$$A + BT \in \mathrm{GL}_2(R).$$

Если матрица A *неособенная, то для каждого фиксированного* $\varphi \neq 0$ *из* R *существует такая матрица* F_φ, *что*

$$A + BF_\varphi \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{array} \right\|,$$

причем $(\mu,\ \varphi) = 1$.

Для доказательства этой теоремы нужны такие утверждения.

Лемма 2.4. *Матрицы* $(A,\ B)_l$ *и* $P_B^{-1}(P_BP_A^{-1}\mathrm{E},\ \Delta)_l$ *ассоциированны справа.*

Доказательство. Обозначим $P_BP_A^{-1} = S$. Как было отмечено во время доказательства теоремы 2.14 $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = D$, где

$$\left\| \begin{array}{cc} S\mathrm{E} & \Delta \end{array} \right\| U = \left\| \begin{array}{cc} D & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

$U \in \mathrm{GL}_4(R)$. Умножив это равенство слева на P_B^{-1}, получаем

$$\left\| \begin{array}{cc} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{array} \right\| \left(\left\| \begin{array}{cc} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{array} \right\| U \right) = \left\| \begin{array}{cc} P_B^{-1}D & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

То есть $(A,\ B)_l = P_B^{-1}D = P_B^{-1}(S\mathrm{E},\ \Delta)_l$. □

Лемма 2.5. *Матрицы* $P_B P_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta V$ *и* $A + B(Q_B V Q_A^{-1})$ *эквивалентны.*

Доказательство. Действительно,

$$A + B(Q_B V Q_A^{-1}) = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} + P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}(Q_B V Q_A^{-1}) =$$

$$= P_B^{-1}(P_B P_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta V)Q_A^{-1}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2.17. Пусть $\det A = 0$, т.е. $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ 0)$. В силу следствия 2.7 матрица B имеет вид $B = P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}$, $\Delta = \mathrm{diag}(1,\ \delta_2)$. Пусть $V = \|v_{ij}\|_1^2$ – параметрическая матрица.

Поскольку $(A,\ B)_l = I$, то из леммы 2.4 вытекает, что и $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = I$.

1). Пусть $\delta_2 \neq 0$. Согласно теореме 2.15 матрицы $P_A\ P_B$ можно выбрать так, что

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{matrix} \right\| = S.$$

Заметив, что $P_{S\mathrm{E}} = S^{-1}$ и $P_\Delta = I$, получаем

$$P_{S\mathrm{E}} P_\Delta^{-1} = S^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = I$, то из следствия 2.7

$$(\delta_2,\ -s\varepsilon_1) = 1 \Rightarrow (\delta_2,\ s\varepsilon_1) = 1.$$

Рассмотрим равенство

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + v_{11} & v_{12} \\ s\varepsilon_1 + v_{21}\delta_2 & v_{22}\delta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Положим $v_{21}^0 = 0,\ v_{22}^0 = 1$. Существуют такие m, n, что

$$m\delta_2 - ns\varepsilon_1 = 1.$$

Положим $v_{11}^0 = m - \varepsilon_1, \quad v_{12}^0 = n$. Матрицу $\|v_{ij}^0\|_1^2$ обозначим через V^0. Полученная матрица $S\mathrm{E} + \Delta V^0$ является обратимой. На основании леммы 2.5 $A + BU \in \mathrm{GL}_2(R)$, где $U = Q_B V^0 Q_A^{-1}$.

2). Пусть $\delta_2 = 0$ и $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$. Тогда

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{matrix} s_{11}\varepsilon_1 + v_{11} & v_{12} \\ s_{21}\varepsilon_1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку

$$S^{-1} = e^{-1} \left\| \begin{matrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{matrix} \right\|,$$

где $e = \det S \in U(R)$, то, учитывая предыдущие рассуждения, из следствия 2.8 получим

$$-e\varepsilon_1 s_{21} \in U(R) \Rightarrow \varepsilon_1 s_{21} \in U(R).$$

Положим

$$V^0 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Тогда $S\mathrm{E} + \Delta V^0 \in \mathrm{GL}_2(R)$. Согласно лемме 2.5 существует такая матрица T, что $A + BT \in \mathrm{GL}_2(R)$.

3). Пусть $\det A \neq 0,\ \det B \neq 0$. Выберем матрицы $P_A,\ P_B$ так, что

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ s & 1 \end{array} \right\| = S.$$

В параметрической матрице V положим $v_{22} = 0$. Рассмотрим равенство

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ s\varepsilon_1 + v_{21}\delta_2 & \varepsilon_2 \end{array} \right\|.$$

Поскольку $(\varepsilon_1,\ \delta_1) \mid (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s)$, то $(\varepsilon_1,\ \delta_1) = 1$. Поэтому

$$(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s) = (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 s) = 1. \tag{2.9}$$

Поскольку $\delta_1 | \delta_2$, то и $(\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 s) = 1$. Существует такое u, что

$$(\varepsilon_1\delta_1 s + \delta_1\delta_2 u,\ \ \varepsilon_2) = 1.$$

Положим $v_{21}^0 = u,\ v_{22}^0 = 0$. Тогда

$$\left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 s + \delta_2 v_{21}^0 & \varepsilon_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a & \varepsilon_2 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right\|. \tag{2.10}$$

Из (2.9) вытекает, что $(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1) = 1$. Тогда для произвольного $\varphi \neq 0$ с R также $(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1, \varphi) = 1$. Поэтому существует такое r, что

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ \delta_1 r, \varphi) = 1.$$

Найдутся такие p, q, что

$$p(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ \delta_1 r) + q\varphi = 1.$$

В параметрической матрице V положим $v_{21} = v_{22} = 0$. Рассмотрим

$$\det \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ a & \varepsilon_2 \end{array} \right\| = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \delta_1(\varepsilon_2 v_{11} - a v_{12}).$$

Поскольку $(a,\ \varepsilon_2) = 1$, то существуют такие $v_{11}^0,\ v_{12}^0$, что $\varepsilon_2 v_{11}^0 - a v_{12}^0 = r$. Обозначим $\|v_{ij}^0\|_1^2 = V^0$. Тогда $(\det(S\mathrm{E} + \Delta V^0),\ \varphi) = 1$, причем с (2.10) вытекает, что

$$S\mathrm{E} + \Delta V^0 \sim \mathrm{diag}(1,\ \mu), \quad \mu = \det(S\mathrm{E} + \Delta V^0).$$

Для завершения рассмотрения этого случая достаточно воспользоваться леммой 2.5.

4). Пусть $\det A \neq 0,\ \det B = 0$. Тогда

$$A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}, \mathrm{E} = \mathrm{diag}(1,\ \varepsilon_2),\ B = P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1},$$

$$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\ 0),\ P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{matrix} \right\| = S.$$

Рассмотрим равенство

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{matrix} 1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ s & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$\det(S\mathrm{E} + \Delta V) = \varepsilon_2 + (v_{11}\varepsilon_2 - s v_{12})\,\delta_1.$$

Поскольку $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = I$, то на основании следствия 2.7

$$(\varepsilon_2,\ -\delta_1 s) = (\varepsilon_2,\ \delta_1 s) = 1. \tag{2.11}$$

Поэтому $(\varepsilon_2,\ \delta_1) = 1$. Тогда для произвольного $\varphi \neq 0$ с R $(\varepsilon_2,\ \delta_1, \varphi) = 1$. Поэтому существует такое d, что

$$(\varepsilon_2 + \delta_1 d,\ \varphi) = 1.$$

Из равенства (2.11) вытекает, что $(\varepsilon_2,\ s) = 1$. Выберем такие $v_{11}^0,\ v_{12}^0$, что

$$v_{11}^0\varepsilon_2 - s v_{12}^0 = d.$$

Обозначим

$$\left\| \begin{matrix} v_{11}^0 & v_{12}^0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = V^0.$$

Тогда $(\det(S\mathrm{E} + \Delta V^0),\ \varphi) = 1$. Поэтому согласно лемме 2.5

$$A + B(Q_B V^0 Q_A^{-1}) \sim \mathrm{diag}(1,\ \nu),$$

где $(\nu,\ \varphi) = 1$. □

Следствие 2.10. *Пусть A, B – ненулевые взаимно простые слева матрицы с $M_2(R)$ и C – неособенная матрица. Тогда существует такая матрица F_C, что*

$$(\det(A+\ BF_C),\ \det C)=1. \qquad \square$$

Лемма 2.6. *Пусть A, B – особенные 2×2 матрицы над кольцом элементарных делителей. Тогда существуют такие A_1, B_1, что*

$$A=(A,\ B)_l A_1,\ B=(A,\ B)_l B_1,$$

причем

$$(A_1,\ B_1)_l=I,\ \ \det A_1=\det B_1=0.$$

Доказательство. Матрицы A, B имеют вид

$$A=P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1},\ \ \mathrm{E}=\mathrm{diag}(\varepsilon_1,0),\ \ B=P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1},\ \ \Delta=\mathrm{diag}(\delta_1,0).$$

Из теоремы 2.6 вытекает, что матрица $(A,\ B)_l$ является особенной тогда и только тогда, когда $s_{21}=0$, где $P_BP_A^{-1}=S=\|s_{ij}\|_1^2$, т.е. $P_BP_A^{-1}\in\mathbf{G}_{\mathrm{E}}=\mathbf{G}_{\Delta}$ – группа обратимых верхних треугольных матриц. Это означает, что $\mathbf{P}_B\cap\mathbf{P}_A\neq\varnothing$. Пусть $P\in\mathbf{P}_B\cap\mathbf{P}_A$. Следовательно, матрицы A и B имеют вид $A=P^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, $B=P^{-1}\Delta Q_B^{-1}$. Тогда следующее разложение матриц на множители

$$A=\left(P^{-1}\left\|\begin{matrix}(\varepsilon_1,\ \delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\right)\left(\left\|\begin{matrix}\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)} & 0\\ u & 0\end{matrix}\right\|Q_A^{-1}\right),$$

$$B=\left(P^{-1}\left\|\begin{matrix}(\varepsilon_1,\ \delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\right)\left(\left\|\begin{matrix}\frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)} & 0\\ v & 0\end{matrix}\right\|Q_B^{-1}\right),$$

где

$$\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}v-\frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}u=1,$$

и будет искомым. $\square$

Теорема 2.18. *Пусть R – коммутативное кольцо Безу. Для того, чтобы кольцо $M_2(R)$ имело стабильный ранг* 1,5*, необходимо и достаточно, чтобы кольцо R имело стабильный ранг* 1,5.

Доказательство. Достататочность. Пусть A, B, C – ненулевые взаимно простые слева матрицы с $M_2(R)$.

1). Пусть $\det A=0$ и $(A,\ B)_l=D$. Тогда $A=DA_1$, $B=DB_1$. На основании леммы 2.6 матрицы A_1, B_1 можно выбрать так, что $(A_1,\ B_1)_l=I$.

Тогда, если матрица D неособенная, то матрица A_1 является особенной. Если матрица D особенная, то особенной будет и матрица B. Тогда согласно лемме 2.6 матрицу A_1 можно выбрать особенной. Следовательно, будем считать, что в этом случае всегда $\det A_1 = 0$.

Использовав теорему 2.17 найдем такое T, что

$$A_1 + B_1T = U \in \mathrm{GL}_2(R).$$

Поскольку $P_D = P_{DU}$, а также то, что $(D,\ C)_l = I$, из теоремы 2.6 вытекает, что $(A + BT,\ C)_l = I$.

2). Пусть $\det A \neq 0,\ \det C \neq 0$ и $(A,\ B)_l = I$. На основании следствия 2.10 существует такая матрица T, что

$$(\det(A + BT),\ \det C) = 1.$$

Тогда$(A + BT,\ C)_l = I$.

Пусть $(A,\ B)_l = D \neq I$. Поэтому $A = DA_1,\ B = DB_1$, где

$$D = P_D^{-1}\Gamma Q_D^{-1},\ \Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2),\ C = P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1},\ \Omega = \mathrm{diag}(\omega_1,\ \omega_2).$$

Согласно следствию 2.10 существует такая матрица L, что

$$(\det(A_1 + B_1L),\ \det D \det C) = 1. \tag{2.12}$$

Отсюда вытекает, что $(A_1 + B_1L,\ C)_l = I$. Рассмотрим матрицу

$$D(A_1 + B_1L) = F.$$

Пусть $\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2)$ – форма Смита матрицы $A_1 + B_1L$. Учитывая (2.12), на основании теоремы 4.7 (стр. 166), получаем, что

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Delta^T \mathbf{G}_\Psi.$$

Таким образом, выполняется условие теоремы 2.20 (стр. 102), следовательно

$$F = D(A_1 + B_1L) \sim \Delta\Psi = \mathrm{diag}(\gamma_1\psi_1,\ \gamma_2\psi_2) = \Gamma.$$

На основании теоремы 2.16 $\mathbf{P}_F \subseteq \mathbf{P}_D$. Поэтому F можна записать в виде $F = P_D^{-1}\Gamma Q_F^{-1}$. Учтя (2.12), получаем, что

$$(\psi_1\psi_2,\ \gamma_1\gamma_2) = (\psi_1\psi_2,\ \omega_1\omega_2) = 1.$$

Поэтому,

$$(\psi_2,\ \omega_2) = (\psi_1,\ \omega_1) = (\psi_1,\ \omega_2) = 1.$$

Пусть $P_D P_C^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$. Рассмотрим

$$(\psi_2\gamma_2,\ \omega_2,\ [\psi_1\gamma_1,\ \omega_1]s_{21}) = \left((\psi_2\gamma_2,\ \omega_2),\ \frac{\psi_1\gamma_1\omega_1}{(\psi_1\gamma_1,\ \omega_1)}s_{21}\right) =$$

$$= \left(\gamma_2,\ \omega_2,\ \frac{\psi_1\gamma_1\omega_1}{(\gamma_1,\ \omega_1)}s_{21}\right) = \left(\gamma_2,\ \omega_2,\ \frac{\gamma_1\omega_1}{(\gamma_1,\ \omega_1)}\psi_1 s_{21}\right) =$$

$$= (\gamma_2,\ (\omega_2,\ [\gamma_1,\ \omega_1]\psi_1)s_{21}) = (\gamma_2,\ \omega_2,\ [\gamma_1,\ \omega_1]s_{21})\,.$$

Поскольку $(D,\ C)_l = I$, то

$$(\gamma_2,\ \omega_2,\ [\gamma_1,\ \omega_1]s_{21}) = 1.$$

Таким образом,

$$(\psi_2\gamma_2,\ \omega_2,\ [\psi_1\gamma_1,\ \omega_1]s_{21}) = 1.$$

А это значит, что $(D(A_1 +\ B_1L),\ C)_l = I,$ т.е. $(A+BL,\ C)_l = I$.

3). Пусть $\det A \neq 0,\ \det C = 0$. Тогда $C = P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1}$, $\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1,\ 0)$. Сначала рассмотрим случай, когда $(A,\ B)_l = D \neq I,$ т.е. $D = P_D^{-1}\Gamma Q_D^{-1}$, $\Gamma = \operatorname{diag}(1,\ \gamma_2)$. Поскольку $(D,\ C)_l = I$, то

$$(\gamma_2,\ \omega_1 s) = 1, \tag{2.13}$$

где $P_D P_C^{-1} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{matrix}\right\|$. Тогда $s \neq 0$. На основании теоремы 2.17 существует такая матрица K, что $A_1 +\ B_1K \sim \operatorname{diag}(1,\ \mu)$, где $(\mu,\ \omega_1 s \det D) = 1$. Поскольку $(\mu,\ \det D) = 1$, то по аналогии со случаем 2) показываем, что

$$A + BK = D(A_1 +\ B_1K) \sim P_D^{-1}\operatorname{diag}(1,\ \gamma_2\mu).$$

Поскольку также $(\mu,\ \omega_1 s) = 1$, то с (2.13) получаем, что $(\mu\gamma_2,\ \omega_1 s) = 1$. А это значит, что $(A+BK,\ C)_l = I$.

Пусть $(A,\ B)_l = I$. Выберем матрицы P_A и P_B так, что $P_B P_A^{-1} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{matrix}\right\|$.

Сначала рассмотрим случай, когда $c \neq 0$. Обозначим $P_B P_C^{-1} = \|p_{ij}\|_1^2$. Из равенства $(\varepsilon_1,\ \delta_1) = 1$ следует, что и $(\varepsilon_1,\ \delta_1,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Выберем элемент t_{11} так, что

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 t_{11},\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1, \tag{2.14}$$

причем

$$\det\left\|\begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{matrix}\right\| \neq 0.$$

Это можно сделать, поскольку уравнение

$$\det\left\|\begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 x & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{matrix}\right\| = 0$$

относительно переменной x имеет не более одного решения, а элементов, которые удовлетворяют равенство (2.14), есть больше. В частности, каждый элемент из смежного класса $t_{11} + (\varepsilon_1\delta_1 c)R$ также будет удовлетворять равенство (2.14).

Поскольку $(A,\ B)_l = I$, то $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Поэтому найдется такое t_{22}, что

$$(\varepsilon_2 + \delta_2 t_{22},\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1.$$

Если $\delta_2 = 0$, то можем положить $t_{22} = 0$, поскольку $(\varepsilon_2,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Таким образом, $(ab,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$, где $a = \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11}$, $b = \varepsilon_2 + \delta_2 t_{22}$. Следовательно, и

$$\left(ab,\ \varepsilon_1\delta_1 c,\ \det\left\|\begin{matrix} a & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21}\end{matrix}\right\|\omega\right) = 1.$$

Поэтому существует такое t_{12}, что

$$\left(ab - \ \varepsilon_1\delta_1 c t_{12},\ \det\left\|\begin{matrix} a & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21}\end{matrix}\right\|\omega\right) = 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left\|\begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & \delta_1 t_{12} & \omega p_{11} & 0 \\ \varepsilon_1 c & \varepsilon_2 + \delta_2 t_{22} & \omega p_{21} & 0 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} I & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Поэтому

$$\left(P_B P_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta\left\|\begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22}\end{matrix}\right\|,\ P_B P_C^{-1}\Omega\right)_l = I.$$

Тогда и

$$\left(P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} + P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}\left(Q_B\left\|\begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22}\end{matrix}\right\|\right),\ P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1}\right)_l = (A{+}BU,\ C)_l = I,$$

где $U = Q_B\left\|\begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22}\end{matrix}\right\|$.

В завершение остается рассмотреть случай, когда $(A,\ B)_l = I$, причем $P_B P_A^{-1} = I$, т.е. $P_A = P_B$. На основании следствия 2.9 матрицы A, B неособенные и $(\det A,\ \det B) = 1$. Следовательно, $(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2) = 1$. Отсюда вытекает, что $(\varepsilon_1,\ \delta_1,\ \omega) = 1$, и $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ \omega) = 1$. Выберем q_{11}, q_{22} так, что

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 q_{11},\ \omega) = 1,\ (\varepsilon_2 + \delta_2 q_{22},\ \omega) = 1.$$

Отсюда получаем, що

$$\left\|\begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & 0 & \omega p_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 + \delta_2 q_{22} & \omega p_{21} & 0 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} I & 0 \end{matrix}\right\|,$$

где $P_B P_C^{-1} = \|p_{ij}\|_1^2$. Следовательно, $(A+BV,\ C)_l = I$, где $V = Q_B \mathrm{diag}(q_{11},\ q_{22})$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть R – кольцо Безу и $(a,\ b,\ c) = 1,\ c \neq 0$. Рассмотрим матрицы $A = \mathrm{diag}(1,\ a)$, $B = \mathrm{diag}(0,\ b)$, $C = \mathrm{diag}(0,\ c)$. Очевидно, что $(A,\ B,\ C)_l = I$. Тогда существует такая матрица $T = \|t_{ij}\|_1^2$, что $(A + BT,\ C)_l = I$. Поскольку

$$A + BT = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ bt_{21} & a + bt_{22} \end{Vmatrix},$$

то

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bt_{21} & a + bt_{22} & 0 & c \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} I & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что $(a + bt_{22},\ c) = 1$. □

Стабильный ранг кольца R (в обозначениях $\mathrm{st.r.}(R)$) тесно связан со стабильным рангом кольца $M_n(R)$ – $n \times n$ матриц над ним. Эта связь была установлена Л. Васерштейном [77]:

$$\mathrm{st.r.}(M_n(R)) = 1 - \left[-\tfrac{\mathrm{st.r.}(R)-1}{n}\right].$$

Здесь символ $[*]$ означает целую часть числа. Согласно этой формуле, если $\mathrm{st.r.}(R)$ равен 1 или 2, то кольцо $M_n(R)$ имеет аналогичный стабильный ранг. Из теоремы 2.18 вытекает, что кольцо матриц второго порядка над кольцом Безу стабильного ранга 1,5 наследует это замечательное свойство.

В завершение этого подраздела укажем еще одно важное свойство колец Безу стабильного ранга $1,5$. На основании теоремы 2.1 это кольцо является кольцом элементарных делителей.

Теорема 2.19. *Пусть A – $n \times m$ матрица над R – кольцом Безу стабильного ранга* $1,5$, *и* $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_k,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ *– ее форма Смита, причем* $k > 1$. *Тогда существует такая строка* $u = \begin{Vmatrix} 1 & u_2 & \ldots & u_n \end{Vmatrix}$, *что*

$$uA = \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{Vmatrix},$$

где $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m) = \varphi_1$.

Доказательство. Для определенности положим $m \geq n$. Существуют такие матрицы $P \in \mathrm{GL}_n(R)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(R)$, что $PAQ = \Phi$. Рассмотрим матрицу

$$U = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{k-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k} \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$(UP)A(QU) = \mathrm{diag}(\varphi_k,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{k-1},\ \varphi_1,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \Phi'.$$

Положим $P_1 = UP\det(UP)^{-1}$, $Q_1 = QU\det UP$. Тогда $P_1AQ_1 = \Phi'$, причем $\det P_1 = 1$. Рассмотрим матрицу $P_1^{-1} = \|p_{ij}\|_1^n$. Имеем

$$\det P_1^{-1} = p_{11}\Delta_1 + \ldots + p_{1n}\Delta_n = 1,$$

где Δ_i – соответствующие алгебраические дополнения. Согласно теореме 1.9 существуют такие $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}$, что выполняются равенства

$$\begin{gathered} s_{11}\Delta_1 + s_{12}\Delta_2 + \ldots + s_{1n}\Delta_n = 1, \\ (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1k}) = 1, \\ (s_{1k}, \varphi_k) = 1. \end{gathered}$$

На основании теоремы 1.8 элементы $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}$ находятся так:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & t_2 & \ldots & t_n \end{matrix} \right\| P_1^{-1} = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \end{matrix} \right\|,$$

где $t_2, \ldots, t_n \in R$. Из равенства $P_1AQ_1 = \Phi'$ вытекает, что $AQ_1 = P_1^{-1}\Phi'$. Умножив слева это равенство на матрицу

$$\left\| \begin{matrix} 1 & t_2 & \ldots & t_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

получим

$$\left\| \begin{matrix} 1 & t_2 & \ldots & t_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\| AQ_1 = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\| \Phi' =$$

$$= \left\| \begin{matrix} s_{11}\varphi_k & s_{12}\varphi_2 & \ldots & s_{1.k-1}\varphi_{k-1} & s_{1k}\varphi_1 & \mathbf{0} \\ p_{21}\varphi_k & p_{22}\varphi_2 & \ldots & p_{2.k-1}\varphi_{k-1} & p_{2k}\varphi_1 & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}\varphi_k & p_{n2}\varphi_2 & \ldots & p_{n.k-1}\varphi_{k-1} & p_{nk}\varphi_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|. \tag{2.15}$$

Н.о.д. элементов первой строки полученной матрицы равен

$$(s_{11}\varphi_k, s_{12}\varphi_2, \ldots, s_{1.k-1}\varphi_{k-1}, s_{1k}\varphi_1) =$$

$$= \varphi_1\left(s_{11}\frac{\varphi_k}{\varphi_1}, s_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_1}s_{1.k-1}, s_{1k}\right) =$$

$$= \varphi_1 \left(\left(s_{1k}, s_{11}\frac{\varphi_k}{\varphi_1} \right), \left(s_{1k}, s_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right), \ldots, \left(s_{1k}, s_{1.k-1}\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_1} \right) \right) =$$
$$= \varphi_1(s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1k}) = \varphi_1.$$

Из равенства (2.15) и проведенных рассуждений вытекает, что

$$\| \; 1 \quad t_2 \quad \ldots \quad t_n \; \| AQ_1 = \| \; s_{11} \quad s_{12} \quad \ldots \quad s_{1n} \; \| \Phi' \sim \| \; \varphi_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \; \|.$$

Следовательно, и

$$\| \; 1 \quad t_2 \quad \ldots \quad t_n \; \| A \sim \| \; \varphi_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \; \|.$$

Что и требовалось доказать. □

Заметим, что подобный результат для адекватных колец получил О. Хелмер [8], который был уточнен и обобщен В. Петричковичем [71].

2.8. Мультипликативные свойства формы Смита

Определитель матрицы имеет свойство мультипликативности: определитель произведения двух матриц равен произведению определителей матриц сомножителей. Форма Смита, вообще говоря, не имеет такого свойства. Так матрицы

$$A = \mathrm{diag}(1,\ 2),\ B = \mathrm{diag}(2,\ 1)$$

имеют форму Смита $\mathrm{diag}(1,\ 2)$, однако их произведение

$$AB = \mathrm{diag}(1,\ 2)\ \mathrm{diag}(2,\ 1) = \mathrm{diag}(2,\ 2),$$

которое одновременно совпадает с формой Смита полученной матрицы, не равно $\mathrm{diag}(1,\ 4)$. Однако, при определенных условиях, форма Смита имеет это свойство. В частности, таким свойством обладают матрицы, имеющие взаимно простые определители [78].

В этом разделе изучаем мультипликативность формы Смита с точки зрения разложимости обратимых матриц в произведение матриц из групп Зелиска. Здесь R является кольцом элементарных делителей.

Пусть

$$B = P_B^{-1}\Gamma Q_B^{-1},\ \ C = P_C^{-1}\Delta Q_C^{-1},$$

где

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_t, 0, \ldots, 0),\ \ \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_k, 0, \ldots, 0)$$

– формы Смита соответственно матриц B и C. Рассмотрим группу $\mathbf{G}_\Delta$ и множество обратимых матриц

$$\mathbf{G}_\Gamma^T = \{L \in \mathrm{GL}_n(R) |\ \exists\ L_1 \in \mathrm{GL}_n(R) : \Gamma L = L_1 \Gamma.\}.$$

Легко заметить, что множество $\mathbf{G}_\Gamma^T$ также является мультипликативной группой, которую можно получить из группы $\mathbf{G}_\Gamma$ транспонированием. Таким образом, согласно теореме 2.6 группы $\mathbf{G}_\Delta$ та $\mathbf{G}_\Gamma^T$ состоят соответственно с обратимых матриц вида

$$H = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & H_2 \\ \mathbf{0} & H_3 \end{array} \right\|, L = \left\| \begin{array}{cc} L_1 & \mathbf{0} \\ L_2 & L_3 \end{array} \right\|,$$

где

$$H_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,k-1} & h_{1k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,k-1} & h_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_k}{\delta_1} h_{k1} & \frac{\delta_k}{\delta_2} h_{k2} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} h_{k,k-1} & h_{kk} \end{array} \right\|,$$

$$L_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} l_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} l_{12} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_1} l_{1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_1} l_{1t} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_2} l_{2,k-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_1} l_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{t1} & l_{t2} & \dots & l_{t,t-1} & l_{tt} \end{array} \right\|,$$

$H_3 \in \mathrm{GL}_{n-k}(R), L_3 \in \mathrm{GL}_{n-t}(R)$. Поскольку

$$BC = P_B^{-1} \Gamma U \Delta Q_C^{-1} \sim \Gamma U \Delta,$$

где $U = Q_B^{-1} P_C^{-1}$, то условие $BC \sim \Gamma\Delta$ равносильно условию $\Gamma U \Delta \sim \Gamma\Delta$. Если предположить, что обратимую матрицу U можно записать в виде $U = LH$, где $L \in \mathbf{G}_\Gamma^T$, а $H \in \mathbf{G}_\Delta$, то

$$BC \sim \Gamma U \Delta = \Gamma L H \Delta = L_1 \Gamma \Delta H_1 \sim \Gamma\Delta.$$

То есть, это условие является достаточным, для того чтобы форма Смита произведения матриц B и C равнялась произведению форм Смита этих матриц. Возникает вопрос о необходимости этого условия. Положительный ответ на это дает следующая теорема.

Теорема 2.20. *Пусть*

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_t, 0, \dots, 0), \quad \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_k, 0, \dots, 0)$$

– формы Смита матриц $B = P_B^{-1} \Gamma Q_B^{-1}$, $C = P_C^{-1} \Delta Q_C^{-1}$. Для того, чтобы форма Смита произведения этих матриц имела свойство мультипликативности, необходимо и достаточно, чтобы матрицу $U = Q_B^{-1} P_C^{-1}$ можно было представить в виде $U = LH$, где $L \in \mathbf{G}_\Gamma^T$, $H \in \mathbf{G}_\Delta$.

Доказательство. Пусть

$$BC \sim \Gamma U\Delta = A = \left\| \begin{matrix} U_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \sim \Gamma\Delta, \tag{2.16}$$

где U_1 – $t \times k$ матрица. Для определенности положим $t \geqslant k$. Таким образом, матрицу A можно записать в виде $A = P\Gamma\Delta Q$, где $P = \|p_{ij}\|_1^n$ и $Q = \|q_{ij}\|_1^n$ – некоторые обратимые матрицы.

Сначала покажем, что матрицы P и Q можно выбрать так, что они будут иметь вид

$$P = \left\| \begin{matrix} * & * \\ \mathbf{0}_{(n-t)\times t} & I_{n-t} \end{matrix} \right\|, Q = \left\| \begin{matrix} * & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \\ * & * \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathbf{0}_{i\times j}$ – нулевой блок размера $i \times j$ (если из контекста понятен размер нулевого блока, то его указывать не будем). Пусть $U = \|u_{ij}\|_1^n$. Согласно равенству (2.16)

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1 u_{11}\delta_1 & \ldots & \gamma_1 u_{1k}\delta_k & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \gamma_k u_{k1}\delta_1 & \ldots & \gamma_k u_{kk}\delta_k & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \gamma_t u_{t1}\delta_1 & \ldots & \gamma_t u_{tk}\delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccc|c} p_{11}\gamma_1 & \ldots & p_{1k}\gamma_k & \ldots & p_{1t}\gamma_t & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ p_{k1}\gamma_1 & \ldots & p_{kk}\gamma_k & \ldots & p_{kt}\gamma_t & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ p_{t1}\gamma_1 & \ldots & p_{tk}\gamma_k & \ldots & p_{tt}\gamma_t & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ p_{n1}\gamma_1 & \ldots & p_{nk}\gamma_k & \ldots & p_{nt}\gamma_t & \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{ccccccc} \delta_1 q_{11} & \ldots & \delta_1 q_{1k} & \ldots & \delta_1 q_{1t} & \ldots & \delta_1 q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_k q_{k1} & \ldots & \delta_k q_{kk} & \ldots & \delta_k q_{kt} & \ldots & \delta_k q_{kn} \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & \end{array} \right\|.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left\| \begin{matrix} p_{t+1,1}\gamma_1 & \ldots & p_{t+1,k}\gamma_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}\gamma_1 & \ldots & p_{nk}\gamma_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \delta_1 q_{11} & \ldots & \delta_1 q_{1k} & \ldots & \delta_1 q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_k q_{k1} & \ldots & \delta_k q_{kk} & \ldots & \delta_k q_{kn} \end{matrix} \right\| = \mathbf{0},$$

т.е.

$$\left\| \begin{matrix} p_{t+1,1} & \ldots & p_{t+1,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nk} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \gamma_1\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_k\delta_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{11} & \ldots & q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & \ldots & q_{kn} \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}. \tag{2.17}$$

Поскольку

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_k\delta_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{11} & \ldots & q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & \ldots & q_{kn} \end{matrix} \right\| Q^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1\delta_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \gamma_k\delta_k & \end{array} \right\|,$$

то матрица

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_k\delta_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \end{matrix} \right\|$$

имеет максимальный ранг, а следовательно, не является делителем нуля. Тогда из равенства (2.17) следует, что

$$\left\| \begin{matrix} p_{t+1,1} & \dots & p_{t+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nk} \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

Из этого равенства и обратимости матрицы P вытекает, что н.о.д. миноров максимального $(n-t)$-го порядка матрицы

$$K = \left\| \begin{matrix} p_{t+1,k+1} & \dots & p_{t+1,t} & p_{t+1,t+1} & \dots & p_{t+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,k+1} & \dots & p_{nt} & p_{n,t+1} & \dots & p_{nn} \end{matrix} \right\|$$

равен единице. Поэтому в группе $\mathrm{GL}_{n-k}(R)$ существует такая матрица V_{n-k}, что

$$KV_{n-k} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & I_{n-t} \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим матрицу

$$H = \left\| \begin{matrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{n-k} \end{matrix} \right\|.$$

Заметив, что

$$H^{-1} = \left\| \begin{matrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{n-k}^{-1} \end{matrix} \right\|,$$

а также то, что

$$H^{-1}(\Gamma\Delta) = (\Gamma\Delta)H^{-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} A = P\Gamma\Delta Q = (PH)H^{-1}(\Gamma\Delta)Q = \\ = (PH)(\Gamma\Delta)(H^{-1}Q) = P_1\Gamma\Delta Q_1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Поскольку матрица $P_1 = PH$ имеет вид

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cccccc|ccc} p_{11} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} & p'_{1,t+1} & \dots & p'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} & p'_{t,t+1} & \dots & p'_{tn} \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\mathbf{0}} & \multicolumn{3}{c}{I_{n-t}} \end{array} \right\|,$$

а матрица $Q_1 = H^{-1}Q$ – вид

$$Q_1 = \left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \\ q'_{k+1,1} & \dots & q'_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q'_{n1} & \dots & q'_{nn} \end{array} \right\|,$$

то, учитывая вид матрицы A, из равенства (2.18) получаем

$$\mathbf{0} = \left\| \begin{array}{cccccc} p_{11}\gamma_1 & \dots & p_{1k}\gamma_k & p'_{1,k+1}\gamma_{k+1} & \dots & p'_{1t}\gamma_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1}\gamma_1 & \dots & p_{tk}\gamma_k & p'_{t,k+1}\gamma_{k+1} & \dots & p'_{tt}\gamma_t \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccc} \delta_1 q_{1,k+1} & \delta_1 q_{1,k+2} & \dots & \delta_1 q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_k q_{k,k+1} & \delta_k q_{k,k+2} & \dots & \delta_k q_{kn} \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccccc} p_{11} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1\delta_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \gamma_k\delta_k & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccc} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn} \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\|. \qquad (2.19)$$

С обратимости матрицы P_1 вытекает, что матрица

$$\left\| \begin{array}{cccccc} p_{11} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} \end{array} \right\|$$

является обратимой. Поэтому равенство (2.19) равносильно равенству

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1\delta_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \gamma_k\delta_k & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn} \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\| = \mathbf{0}$$

или же

$$\left\|\begin{matrix}\gamma_1\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_k\delta_k\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn}\end{matrix}\right\| = \mathbf{0}.$$

А это возможно лишь когда

$$\left\|\begin{matrix} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn}\end{matrix}\right\| = \mathbf{0}.$$

Таким образом, матрица Q_1 имеет вид

$$Q_1 = \left\|\begin{matrix} q_{11} & \dots & q_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ q'_{k+1,1} & \dots & q'_{k+1,k} & q'_{k+1,k+1} & \dots & q'_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q'_{n1} & \dots & q'_{nk} & q'_{n,k+1} & \dots & q'_{nn}\end{matrix}\right\|.$$

Итак, первая часть доказательства завершена. Теперь покажем, что $P_1 \in \mathbf{G}_\Gamma$, $Q_1 \in \mathbf{G}^T_\Delta$. Имеем

$$A = P_1\Gamma\Delta Q_1 = P_1\Gamma \left\|\begin{array}{ccc|c} \delta_1 q_{11} & \dots & \delta_1 q_{1k} & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \delta_k q_{k1} & \dots & \delta_k q_{kk} & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\end{array}\right\| =$$

$$= P_1\Gamma \left\|\begin{array}{ccc|c} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\end{array}\right\| \underbrace{\left\|\begin{array}{ccc|c} q_{11} & \dots & q_{1k} & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} & \\ \hline & \mathbf{0} & & I_{n-k}\end{array}\right\|}_{K_1}. \qquad (2.20)$$

Поскольку $Q_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$, то

$$\left\|\begin{matrix} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{kk} & \dots & q_{kk}\end{matrix}\right\| \in \mathrm{GL}_k(R).$$

Следовательно, матрица K_1 также обратимая. Умномножив равенство (2.20) справа на K_1^{-1}, получаем

$$AK_1^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc|c} p_{11}\gamma_1\delta_1 & \dots & p_{1k}\gamma_k\delta_k & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ p_{t1}\gamma_1\delta_1 & \dots & p_{tk}\gamma_k\delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\end{array}\right\| =$$

$$= \delta_1 \underbrace{\left\| \begin{array}{cccc|c} p_{11}\gamma_1 & p_{12}\frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_2 & \ldots\ldots & p_{1k}\frac{\delta_k}{\delta_1}\gamma_k & \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ p_{t1}\gamma_1 & p_{t1}\frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_2 & \ldots\ldots & p_{tk}\frac{\delta_k}{\delta_1}\gamma_k & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{C_1} = \delta_1 C_1.$$

С другой стороны,

$$AK_1^{-1} = (\Gamma U \Delta)K_1^{-1} =$$

$$= \delta_1 \Gamma (U \operatorname{diag}(1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \ldots, \frac{\delta_k}{\delta_1}, 0, \ldots, 0)K_1^{-1}) = \delta_1 \Gamma B_1,$$

т.е. $\delta_1 \Gamma B_1 = \delta_1 C_1$. Поэтому $\Gamma B_1 = C_1$. Из этого равенства вытекает, что $\gamma_i | p_{i1}\gamma_1$, $i = 2, \ldots, t$, т.е. $\frac{\gamma_i}{\gamma_1} | p_{i1}$. Следовательно,

$$p_{i1} = \frac{\gamma_i}{\gamma_1} h_{i1}, \;\; i = 2, \ldots, t.$$

По аналогичной схеме, умножив равенство (2.20) слева наматрицу P_1^{-1}, показываем, что

$$q_{1i} = \frac{\delta_i}{\delta_1} l_{i1}, \;\; i = 2, \ldots, k.$$

Таким образом, выполняются следующие равенства:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccccc|c} \gamma_1 p_{11} & \gamma_2 p_{12} & \ldots & \gamma_k p_{1k} & \gamma_{k+1} p'_{1,k+1} & \ldots & \gamma_t p'_{1t} & \\ \gamma_2 h_{21} & \gamma_2 p_{22} & \ldots & \gamma_k p_{2k} & \gamma_{k+1} p'_{2,k+1} & \ldots & \gamma_t p'_{2t} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_t h_{t1} & \gamma_2 p_{t2} & \ldots & \gamma_k p_{tk} & \gamma_{k+1} p'_{t,k+1} & \ldots & \gamma_t p'_{tt} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccc|c} \delta_1 q_{11} & \delta_2 l_{12} & \ldots & \delta_k l_{1k} & \\ \delta_2 q_{21} & \delta_2 l_{22} & \ldots & \delta_2 l_{2k} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \delta_k q_{k1} & \delta_k l_{k2} & \ldots & \delta_k l_{kk} & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_2) \times$$

$$\times \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccccc|c} p_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{12} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_1} p_{1k} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1} p'_{1,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_1} p'_{1t} & \\ h_{21} & p_{22} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_2} p_{2k} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_2} p'_{2,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} p'_{2t} & \\ \frac{\gamma_3}{\gamma_2} h_{31} & p_{32} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_2} p_{3k} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_2} p'_{3,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} p'_{3t} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_2} h_{t1} & p_{t2} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_2} p_{tk} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_2} p'_{t,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} p'_{tt} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{P_2} \times$$

$$\times \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc|c} q_{11} & l_{12} & \frac{\delta_3}{\delta_2} l_{13} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{1k} & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2k} & \\ \frac{\delta_3}{\delta_1} q_{31} & \frac{\delta_3}{\delta_2} q_{32} & \frac{\delta_3}{\delta_2} q_{33} & \dots & \frac{\delta_3}{\delta_2} q_{3k} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\delta_k}{\delta_1} q_{k1} & \frac{\delta_k}{\delta_2} q_{k2} & \frac{\delta_k}{\delta_2} q_{k3} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2} q_{kk} & \\ \hline & & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{Q_2} \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_2). \qquad (2.21)$$

Запишем матрицу Q_2 в виде

$$Q_2 = \operatorname{diag}(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \dots, \frac{\delta_k}{\delta_2}, 0, \dots, 0) \times$$

$$\times \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc|c} q_{11} & l_{12} & \frac{\delta_3}{\delta_2} l_{13} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{1k} & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2k} & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & q_{3k} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \dots & q_{kk} & \\ \hline & & \mathbf{0} & & & E_{n-k} \end{array} \right\|}_{K_2}.$$

Поскольку

$$\operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_k) \left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{array} \right\| = \operatorname{diag}(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \dots, \frac{\delta_k}{\delta_2}) \times$$

$$\times \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc} q_{11} & l_{12} & \frac{\delta_3}{\delta_2} l_{13} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{1k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & q_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \dots & q_{kk} \end{array} \right\|}_{K_2'} \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_2),$$

то, перейдя в этом равенстве к определителям, получим, что $\det K_2' \in U(R)$, т.е. матрица K_2' обратима, а следовательно, обратимой будет и матрица

$$K_2' \oplus I_{n-k} = K_2.$$

Тогда с равенства (2.21) вытекает, что

$$\operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\gamma_3}{\gamma_2}, \dots, \frac{\gamma_t}{\gamma_2}, 0, \dots, 0\right) U \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \dots, \frac{\delta_k}{\delta_2}, 0, \dots, 0\right) K_2^{-1} =$$

$$= P_2 \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \ldots, \frac{\delta_k}{\delta_2}, 0, \ldots, 0\right).$$

Приняв во внимание структуру матрицы P_2, получаем $\frac{\gamma_i}{\gamma_2} | p_{i2}$, $i = 3, \ldots, t$. Следовательно, $p_{i2} = \frac{\gamma_i}{\gamma_2} h_{i2}$, $i = 3, \ldots, t$. Запишем матрицу P_2 в виде

$$P_2 = \underbrace{\left\| \begin{array}{cccccccc|c} p_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{12} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{13} & \ldots & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{1k} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p'_{1,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p'_{1t} & \\ h_{21} & p_{22} & p_{23} & \ldots & p_{2k} & p'_{2,k+1} & \ldots & p'_{2t} & \\ \frac{\gamma_3}{\gamma_2} h_{31} & \frac{\gamma_3}{\gamma_2} h_{32} & p_{33} & \ldots & p_{3k} & p'_{3,k+1} & \ldots & p'_{3t} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_2} h_{t1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} h_{t2} & p_{t3} & \ldots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \ldots & p'_{tt} & \\ \hline & & & & \mathbf{0} & & & & E_{n-t} \end{array} \right\|}_{L_2} \times$$

$$\times \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\gamma_3}{\gamma_2}, \ldots, \frac{\gamma_t}{\gamma_2}, 0, \ldots, 0\right).$$

По аналогии с доказательством обратимости матрицы K_2 показываем, что матрица L_2 является обратимой, а также то, что $q_{2i} = \frac{\delta_i}{\delta_2} l_{2i}$, $i = 3, \ldots, t$. Продолжая описанный процесс, показываем, что матрицы P_1 и Q_1 имеют вид

$$P_1 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cc} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \ldots & p'_{1t} & \ldots & p'_{1n} \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2k} & p'_{2,k+1} & \ldots & p'_{2t} & \ldots & p'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\gamma_k}{\gamma_1} h_{k1} & p_{k2} & \ldots & p_{kk} & p'_{k,k+1} & \ldots & p'_{kt} & \ldots & p'_{kn} \\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1} h_{k+1,1} & & \ldots & & p'_{k+1,k+1} & \ldots & p'_{k+1,t} & \ldots & p'_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_1} h_{t1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} h_{t2} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_k} h_{tk} & p'_{t,k+1} & \ldots & p'_{tt} & \ldots & p'_{tn} \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & & I_{n-t} & \end{array} \right\|,$$

$$Q_1 = \left\| \begin{array}{ccccccc} q_{11} & \frac{\delta_2}{\delta_1} l_{21} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_1} l_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{2k} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k-1,1} & q_{k-1,2} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{k-1,k} & 0 & \ldots & 0 \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{kk} & 0 & \ldots & 0 \\ q'_{k+1,1} & q'_{k+1,2} & \ldots & q'_{k+1,k} & q'_{k+1,k+1} & \ldots & q'_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nk} & q_{n,n+1} & \ldots & q_{nn} \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим подматрицу матрицы P_1 :

$$\left\| \begin{array}{ccc} p'_{1,k+1} & \ldots & p'_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p'_{t,k+1} & \ldots & p'_{tt} \end{array} \right\| = F.$$

Для нее существует такая матрица $V \in \mathrm{GL}_{t-k}(R)$, что

$$FV = \left\| \begin{array}{ccccc} h_{1,k+1} & h_{1,k+2} & \dots & h_{1,t-1} & h_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k+1,k+1} & h_{k+1,k+2} & \dots & h_{k+1,t-1} & h_{k+1,t} \\ 0 & h_{k+2,k+2} & \dots & h_{k+2,t-1} & h_{k+2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{tt} \end{array} \right\| = V_1.$$

Пусть

$$S_1 = \left\| \begin{array}{ccc} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_{21} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1} h_{k+1,1} & \dots & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} h_{k+1,k} \\ \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_1} h_{k+2,1} & \dots & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_k} h_{k+2,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_1} h_{t1} & \dots & \frac{\gamma_t}{\gamma_k} h_{tk} \end{array} \right\|, \quad S_2 = \left\| \begin{array}{ccc} h_{1,t+1} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{t,t+1} & \dots & h_{tn} \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$A = P_1 \Gamma \Delta Q_1 = P_1((I_k \oplus V \oplus I_{n-t})\,\mathrm{diag}(\gamma_1\delta_1, \dots, \gamma_k\delta_k, \dots, 0, \dots, 0))Q_1 =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} S_1 & V_1 & S_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-t} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \Gamma\Delta \left\| \begin{array}{cccccccc} l_{11} & \frac{\delta_2}{\delta_1} l_{12} & \dots & \frac{\delta_{k-1}}{\delta_1} l_{1,k-1} & \frac{\delta_k}{\delta_1} l_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \dots & l_{k-1,k-1} & \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} l_{k-1,k} & 0 & \dots & 0 \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{k,k-1} & l_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ l_{k+1,1} & l_{k+1,2} & \dots & l_{k+1,k-1} & l_{k+1,k} & l_{k+1,k+1} & \dots & l_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,k-1} & l_{nk} & l_{n,k+1} & \dots & l_{nn} \end{array} \right\| =$$

$$= \Gamma H L \Delta, \tag{2.22}$$

где

$$H = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & \mathbf{0} \\ H_2 & I_{n-t} \end{array} \right\|, \quad H_1 = \left\| \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \end{array} \right\|,$$

$$H_{11} = \left\| \begin{array}{cccc} p_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{12} & \dots & \frac{\gamma_k}{\gamma_1} p_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k-1,1} & h_{k-1,2} & \dots & \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} h_{k-1,k} \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & h_{kk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{t1} & h_{t2} & \dots & h_{tk} \end{array} \right\|,$$

$$H_{12} = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1}h_{1,k+1} & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_1}h_{1,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_1}h_{1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_1}h_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}h_{k,k+1} & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_k}h_{k,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_k}h_{k,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_k}h_{kt} \\ h_{k+1,k+1} & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_{k+1}}h_{k+1,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_{k+1}}h_{k+1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_{k+1}}h_{k+1,t} \\ 0 & h_{k+2,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_{k+2}}h_{k+2,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_{k+2}}h_{k+2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{t-1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_{t-1}}h_{t-1,t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{tt} \end{array} \right\|,$$

H_2 – произвольная $(n-t)\times t$ матрица, $L = \left\| \begin{array}{cc} L_1 & L_2 \\ \mathbf{0} & L_3 \end{array} \right\|$,

$$L_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1,k-1} & l_{1k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2,k-1} & l_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_k}{\delta_1}l_{k1} & \frac{\delta_k}{\delta_2}l_{k2} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}l_{k,k-1} & l_{kk} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{\mathbf{0}_{(t-k)\times k}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \overline{L}_1 \\ \mathbf{0}_{(t-k)\times k} \end{array} \right\|,$$

L_2 – $t\times(n-k)$, L_3 – $(n-t)\times(n-k)$ – произвольные матрицы. Покажем, что матрицы H и L можно выбрать так, что $U = HL$. Запишем матрицу U в блочномвиде

$$U = \left\| \begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array} \right\|,$$

где U_{11} – $t\times k$ матрица. Из равенства (2.22) вытекает, что $\overline{\Gamma}U_{11}\overline{\Delta} = \overline{\Gamma}H_1L_1\overline{\Delta}$, где $\overline{\Gamma} = \operatorname{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_t)$, $\overline{\Delta} = \operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_k)$. Следовательно, $U_{11} = H_1L_1$. Рассмотрим уравнение $H_1X = U_{12}$. Поскольку H_1 – обратимая матрица, то это уравнение имеет решение $X_0 = H_1^{-1}U_{12}$. Положим $L_2 = X_0$. Рассмотрим еще одно уравнение $Y\overline{L}_1 = U_{21}$. Оно имеет решение $Y_0 = \overline{L}_1^{-1}U_{21}$. Положим $H_2 = \left\| \begin{array}{cc} Y_0 & \mathbf{0}_{k\times(t-k)} \end{array} \right\|$. И, наконец, положим $L_3 = U_{22} - H_2X_0$. Тогда легко убедиться, что $U = HL$. Доказательство завершено. □

Раздел 3.
Техника линейной алгебры в матричных кольцах

Раздел посвящен исследованию свойств миноров матриц над кольцами Безу и нахождению форм Смита матриц определенного вида. Полученные результаты будут использованы в последующих разделах.

3.1. Свойства миноров матриц над кольцами Безу

Обозначим через $\langle A\rangle_i$ н.о.д. миноров i-го порядка матрицы A, а через $\langle A\rangle$ – н.о.д. миноров максимального порядка этой матрицы.

Утверждение 3.1. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ – $n \times n$ матрица и B – ее $t \times k$ подматрица. Тогда, если $t + k > n$, то* $\langle B\rangle_1 \,|\, \det A$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что матрица A имеет вид

$$A = \left\| \begin{matrix} B & C \\ * & * \end{matrix} \right\|.$$

Если это не так, то перестановкой строк и столбцов приведем матрицу A к нужному виду. Такие преобразования, согласно теореме 1.4 не меняют н.о.д. миноров соответствующих порядков.

Пусть сначала $t + k = n + 1$. В этом случае матрица C имеет размеры

$$t \times (n - k) = t \times (t - 1).$$

Это означает, что все $t \times t$ подматрицы матрицы $\left\| \begin{matrix} B & C \end{matrix} \right\|$ содержат, по крайней мере, один столбец матрицы B. Поэтому каждый минор t-го порядка матрицы $\left\| \begin{matrix} B & C \end{matrix} \right\|$ делится на $\langle B\rangle_1$. Тогда на основании теоремы Лапласа о разложении определителя матрицы по элементах нескольких строк, получим, что $\langle B\rangle_1 \,|\, \det A$.

Очевидно, что это утверждение будет правильным, если $t + k > n + 1$. $\Box$

Из доказательства этого утверждения легко получить такой результат.

Следствие 3.1. *Если $n \times n$ матрица A содержит нулевую $t \times k$ подматрицу, причем $t + k > n$, то* $\det A = 0$. $\square$

Следствие 3.2. *Если $n \times n$ матрица A имеет вид*

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \mathbf{0}_{(n-p)\times p} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right\|,$$

где $\mathbf{0}_{(n-p)\times p}$ – нулевая $(n-p) \times p$ матрица, причем $\langle A_{23} \rangle = 0$, то $\det A = 0$.

Доказательство. Матрица $\left\| \begin{array}{cc} A_{22} & A_{23} \end{array} \right\|$ является квадратной, порядка $n-p$. Поскольку $\langle A_{23} \rangle = 0$, то по теореме Лапласа $\det \left\| \begin{array}{cc} A_{22} & A_{23} \end{array} \right\| = 0$. Значит все миноры максимального порядка матрицы $\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{0}_{(n-p)\times p} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right\|$ равны нулю. Отсюда вытекает, что $\det A = 0$. $\square$

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ – $m \times n$ матрица, $m > n$. Обозначим через $\delta_k(A)$ наибольший общий делитель миноров максимального порядка этой матрицы, которые содержат k ее последние строки, $k \leqslant n$.

Лемма 3.1. *Если $U = \|u_{ij}\| \in \mathrm{GL}_{m-k}(R)$, то*

$$\delta_k(A) = \delta_k((U \oplus I_k)A).$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$B = (U \oplus I_k)A = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m-k.1} & \dots & b_{m-k.n} \\ a_{m-k+1.1} & \dots & a_{m-k+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Каждую подматрицу n-го порядка матрицы B, которая содержит k ее последние строки, можно записать так:

$$\underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} b_{i_1 1} & \dots & b_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i_{n-k} 1} & \dots & b_{i_{n-k} n} \\ a_{m-k+1.1} & \dots & a_{m-k+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|}_{B_{i_1,\dots,i_{n-k}}} = \underbrace{\left\| \begin{array}{cccccc} u_{i_1 1} & \dots & u_{i_1 m-k} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \mathbf{0} & \\ u_{i_{n-k} 1} & \dots & u_{i_{n-k}.m-k} & & & \\ & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array} \right\|}_{U_{i_1,\dots,i_{n-k}}} \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m-k.1} & \dots & a_{m-k.n} \\ a_{m-k+1.1} & \dots & a_{m-k+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|,$$

где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-k} \leqslant m-k$. Очевидно, что необходимым условием отличия от нуля минора максимального (n-го) порядка матрицы $U_{i_1,\dots,i_{n-k}}$ является присутствие в нем последних k строк этой матрицы. Распишем $\det B_{i_1,\dots,i_{n-k}}$ как сумму произведений соответствующих миноров n-гопорядка матриц $U_{i_1,\dots,i_{n-k}}$ и A. Из сделанного замечания вытекает, что каждое отличное от нуля слагаемое является произведением минора матрицы A, который содержит ее последние k строки, на соответствующий минор матрицы $U_{i_1,\dots,i_{n-k}}$. Поэтому $\delta_k(A)|\det B_{i_1,\dots,i_{n-k}}$. Отсюда получаем, что

$$\delta_k(A)|\delta_k((U \oplus I_k)A).$$

По аналогичным соображениям

$$\delta_k(B)|\delta_k((U^{-1} \oplus I_k)B) = \delta_k((U^{-1} \oplus I_k)(U \oplus I_k)A) = \delta_k(A).$$

Поскольку н.о.д. определяется с точностью до ассоциированности, то $\delta_k(A) = \delta_k(B)$. Доказательство завершено. □

Пусть $A = \|a_{ij}\| - m \times n$ матрица. Вычеркнем ее i-ую строку и j-ый столбец. Н.о.д. миноров максимального порядка полученной матрицы обозначим через b_{ij}. Матрицу $A^* = \|b_{ij}\|$ будем назавать **дополняющей матрицей матрицы** A.

Утверждение 3.2. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ – $n \times n$ матрица. Н.о.д. элементов каждой $t \times k$, $t + k > n$, подматрицы матрицы A^* является делителем* $\det A$.

Доказательство. Пусть

$$\left\langle \begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{tk} \end{array} \right\rangle_1 = \beta,$$

где $t + k = n + 1$. Рассмотрим матрицу

$$A_{tk} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t.k+1} & \dots & a_{tn} \end{array} \right\|,$$

которая является $t \times (t-1)$ подматрицей матрицы A. В группе $\mathrm{GL}_t(R)$ существует такая матрица U, что

$$UA_{tk} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{t.t-1} \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,

$$(U \oplus I_{n-t})A = \left\| \begin{matrix} f_{11} & \dots & f_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & \dots & f_{2k} & c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ f_{31} & \dots & f_{3k} & c_{31} & c_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{t1} & \dots & f_{tk} & c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{t.t-1} \\ a_{t+1.1} & \dots & a_{t+1.k} & a_{t+1.k+1} & a_{t+1.k+2} & \dots & a_{t+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n.k+1} & a_{n.k+2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = C.$$

Заметим, что миноры b_{11} , b_{21} , $\dots$, b_{t1} еще можно охарактеризовать как все миноры максимального порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = F_1,$$

которые содержат ее последние $n-t$ строки, т.е.

$$\delta_{n-t}(F_1) = (b_{11} \ , \ b_{21} \ , \ \dots \ , \ b_{t1}).$$

Обозначим через L_1 матрицу, полученную из матрицы C путем вычеркивания ее первого столбца. Пусть $C^* = \|d_{ij}\|_1^n$. Поскольку $L_1 = (U \oplus I_{n-t})F_1$, то в силу леммы 3.1

$$\delta_{n-t}(F_1) = \delta_{n-t}(L_1).$$

При этом

$$\delta_{n-t}(L_1) = (d_{11} \ , \ d_{21} \ , \ \dots \ , \ d_{t1}).$$

Следовательно,

$$(b_{11} \ , \ b_{21} \ , \ \dots \ , \ b_{t1}) = (d_{11} \ , \ d_{21} \ , \ \dots \ , \ d_{t1}).$$

Аналогично показываем, что

$$(b_{1i} \ , \ b_{2i} \ , \ \dots \ , \ b_{ti}) = (d_{1i} \ , \ d_{2i} \ , \ \dots \ , \ d_{ti}),$$

$i = 1, \ \dots \ , k$. Это означает, что

$$\beta | \left\langle \begin{matrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 ,$$

Поэтому $\beta|(d_{11} \ , \ d_{12} \ , \ \dots \ , \ d_{1k})$. Учитывая то, что

$$\det C = f_{11}d_{11} - f_{12}d_{12} + \ \cdots \ (-1)^{k+1} f_{1k}d_{1k},$$

получаем $\beta|\det C$. Заметив, что $\det A$ отличаетсяот $\det C$ только обратимым множителем, приходим к выводу, что $\beta|\det A$.

Если $t \times k$ подматрица матрицы A^* находится не в левом верхнем углу, то перестановкой строк и столбцов матрицы A, получим матрицу B, в которой выделенная подматрица будет находиться в нужном месте. Тогда $\beta|\det B$. Поскольку $\det A = \pm \det B$, то $\beta|\det A$. Доказано завершено. □

Поскольку элементы взаимной матрицы A_* матрицы A отличаются от элементов дополняющей матрицы только знаком и расположением элементов, получаем.

Следствие 3.3. *Н.о.д. элементов каждой $t \times k$, $t + k > n$, подматрицы взаимной матрицы A_* является делителем* $\det A$. □

Утверждение 3.3. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ – $m \times n$ матрица. Тогда н.о.д. элементов каждой $t \times k$, $t + k > \min(m, n)$, подматрицы матрицы $A^* = \|b_{ij}\|$ является делителем $\langle A \rangle$.*

Доказательство. Для определенности положим $m \geqslant n$. Случай, когда $m = n$ рассмотрен в утверждении 3.2. Поэтому пусть $m > n$. Обозначим

$$\beta = \left\langle \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 .$$

Рассмотрим $n \times n$ подматрицу матрицы A вида

$$C = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & \dots & a_{tn} \\ * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * \end{matrix} \right\| .$$

И пусть $C^* = \| d_{ij} \|_1^n$ – ее дополняющая матрица. Поскольку $b_{ij}|d_{ij}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, k$, то

$$\beta \left| \left\| \begin{matrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{matrix} \right\| \right. .$$

Тогда, если

$$\left\langle \begin{matrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 = \gamma,$$

то $\beta|\gamma$. По утверждению 3.2 $\gamma|\det C$, а следовательно, и $\beta|\det C$.

Теперь рассмотрим подматрицу матрицы A

$$D_j = \left\| \begin{matrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 1} & \dots & a_{i_n n} \end{matrix} \right\|,$$

$1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant m$, которая не содержит ее j-ой строки, $1 \leqslant j \leqslant t$. По определению b_{j1} равен н.о.д. миноров $(n-1)$-го порядка матрицы

$$A_{j1} = \left\| \begin{matrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1.2} & \cdots & a_{j-1.n} \\ a_{j+1.2} & \cdots & a_{j+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку матрица

$$\left\| \begin{matrix} a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 2} & \dots & a_{i_n n} \end{matrix} \right\|$$

является подматрицей матрицы A_{j1}, то

$$b_{j1} \left| \left\langle \begin{matrix} a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 2} & \dots & a_{i_n n} \end{matrix} \right\rangle \right. .$$

Отсюда вытекает, что $b_{j1}|\det D_j$. Поскольку $\beta|b_{j1}$, то $\beta|\det D_j$, т.е. $\beta|\langle A \rangle$. Заметив, что расположение выбранной $t \times k$ подматрицы матрицы A^*, как и в утверждении 3.2, не влияет на конечный результат, заканчиваем доказательство. □

Пусть U – примитивная $m \times n$, $m \leqslant n$, матрица. Обозначим через $U_{i_1 \dots i_k}$ матрицу, состоящую из столбцов $i_1, \dots, i_k$ матрицы U, $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$.

Утверждение 3.4. *Н.о.д. миноров максимального порядка матрицы U, содержащих матрицу $U_{i_1 \dots i_k}$, равен* $\langle U_{i_1 \dots i_k} \rangle$.

Доказательство. Если $k = m$, то утверждение очевидно. Пусть $1 \leqslant k < m$. Умножим матрицу U справа на такую обратимую матрицу L, что

$$UL = \left\| \begin{matrix} S & U_{i_1 \dots i_k} \end{matrix} \right\|.$$

Для матрицы $U_{i_1 \dots i_k}$ существует такая обратимая матрица K, что

$$KU_{i_1 \dots i_k} = \left\| \begin{matrix} u_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & u_k \\ & \mathbf{0} & \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} U'_{i_1 \dots i_k} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где $U'_{i_1 \dots i_k}$ – $k \times k$ матрица. Тогда

$$KUL = K \left\| \begin{matrix} S & U_{i_1 \dots i_k} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} * & U'_{i_1 \dots i_k} \\ T & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Каждый минор максимального порядка матрицы KUL, содержащий матрицу

$$\left\| \begin{matrix} U'_{i_1 \dots i_k} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

имеет вид

$$\det \left\| \begin{matrix} * & U'_{i_1 \dots i_k} \\ T_{m-k} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где T_{m-k} – $(m-k) \times (n-k)$ – подматрица матрицы T. Поэтому н.о.д. таких миноров равен $u_1 \dots . u_k \tau$, где $\tau = \langle T \rangle$. Поскольку матрица KUL является примитивной, то примитивной будет и матрица T. Поэтому $\tau = 1$. Учтя теперь, что каждый необходимый нам минор максимального порядка матрицы U отличается от соответствующего ему минора матрицы KUL, в крайнем случае, на единицу кольца R, а именно, на определитель обратимой матрицы, убеждаемся в правильности нашего утверждения. $\square$

Введем сокращенное обозначение миноров матрицы $A = \|a_{ij}\|$:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_{n-p} \end{pmatrix} = \det \left\| \begin{matrix} a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1} & \dots & a_{i_p k_p} \end{matrix} \right\|.$$

Следствие 3.4. *Пусть* $U = \|U_{ij}\|_1^2$ *– обратимая блочная матрица, где* U_{ij} *–* $n \times n$ *матрицы. Пусть также* $U^{-1} = \|V_{ij}\|_1^2$ *и* $\delta_k(U_{ij})$, $\delta_k(V_{ij})$ *– н.о.д. миноров* k*-го порядка соответственно матриц* U_{ij}, V_{ij}. *Тогда*

$$\delta_k(U_{11}) = \delta_k(V_{22}),\ \ \delta_k(U_{21}) = \delta_k(V_{21}),\ \ \delta_k(U_{12}) = \delta_k(V_{12}),\ \ \delta_k(U_{22}) = \delta_k(V_{11}),$$

$k = 1, \ldots, n.$

Доказательство. Миноры матриц U, U^{-1} повязаны между собой следующим образом:

$$U^{-1}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = \pm(\det U)^{-1} U \begin{pmatrix} k_1' & \ldots & k_{n-p}' \\ i_1' & \ldots & i_{n-p}' \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ вместе с $i_1' < i_2' < \ldots < i_{n-p}'$ и $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ вместе с $k_1' < k_2' < \ldots < k_{n-p}'$ образуют полную систему индексов $1, 2, \ldots, 2n$ (см. 30 стр. [79]). Использовав утверждение 3.4 и формулу (3.1), завершаем доказательство. □

Приняв во внимание теорему 2.2 это следствие можно сформулировать еще так.

Следствие 3.4*. *Формы Смита матриц* U_{11} *и* V_{22}, U_{12} *и* V_{12}, U_{21} *и* V_{22}, U_{22} *и* V_{11} *совпадают а следовательно, соответствующие матрицы эквивалентны.* □

Аналогичный результат получен в [73].

Утверждение 3.5. *Пусть* $U = \|u_{ij}\|_1^n$ *і* $U^{-1} = V = \|v_{ij}\|_1^n$, *причем*

$$U' = \begin{Vmatrix} u_{i_1k_1} & u_{i_1k_2} & \ldots & u_{i_1k_p} \\ u_{i_2k_1} & u_{i_2k_2} & \ldots & u_{i_2k_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i_sk_1} & u_{i_sk_2} & \ldots & u_{i_sk_p} \end{Vmatrix}$$

и

$$V' = \begin{Vmatrix} v_{k_1'i_1'} & v_{k_1'i_2'} & \ldots & v_{k_1'i_{n-s}'} \\ v_{k_2'i_1'} & v_{k_2'i_2'} & \ldots & v_{k_2'i_{n-s}'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{k_{n-p}'i_1'} & v_{k_{n-p}'i_2'} & \ldots & v_{k_{n-p}'i_{n-s}'} \end{Vmatrix}.$$

Тогда если $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ *вместе с* $i_1' < i_2' < \ldots < i_{n-s}'$ *і* $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ *вместе с* $k_1' < k_2' < \ldots < k_{n-p}'$ *образуют полную систему индексов* $1, 2, \ldots, n$, *то* $\langle U' \rangle = \langle V' \rangle$.

Доказательство. Предположим, что $s \geq p$. Из равенства (3.1) вытекает, что миноры

$$U\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix}, \quad V\begin{pmatrix} k'_1 \dots k'_{n-p} \\ i'_1 \dots i'_{n-p} \end{pmatrix}$$

ассоциированны в кольце R. При этом миноры $V\begin{pmatrix} k'_1 \dots k'_{n-p} \\ i'_1 \dots i'_{n-p} \end{pmatrix}$ можно охарактеризовать как все миноры, содержащие подматрицу V'. Использовав утверждение 3.4 завершаем рассмотрение этого случая. Случай $s < p$ аналогичный. □

Утверждение 3.6. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ – элементы кольца Безу. Тогда существует такая $(n-1)\times n$ матрица, в которой миноры $(n-1)$- го порядка равны $a_1, \dots, a_n$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $n = 3$. Если $(a_1, a_2) \neq 0$, то искомой будет матрица

$$\left\| \begin{matrix} (a_1, a_2) & ua_3 & -va_3 \\ 0 & \frac{a_1}{(a_1,a_2)} & \frac{a_2}{(a_1,a_2)} \end{matrix} \right\|,$$

где элементы u, v удовлетворяют равенство

$$u\frac{a_2}{(a_1, a_2)} + v\frac{a_1}{(a_1, a_2)} = 1.$$

Если $a_1 = a_2 = 0$, то такой будет матрица

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{matrix} \right\|.$$

Пусть $(a_1, \dots, a_{n-1}) = \delta$. Предположим, что существует такая $(n-2)\times(n-1)$ матрица S, минорами $(n-2)$-го порядка которой являются

$$\frac{a_1}{\delta}, \dots, \frac{a_{n-1}}{\delta}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a_1}{\delta}, \dots, \frac{a_{n-1}}{\delta}\right) = 1,$$

то существуют такие $v_1, \dots, v_{n-1}$, что матрица

$$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} \\ & & S & \end{matrix} \right\|$$

будет иметь определитель 1. Тогда искомой будет матрица

$$\left\| \begin{matrix} \delta & v_1 a_n & v_2 a_n & \dots & v_{n-1} a_n \\ \mathbf{0} & & S & & \end{matrix} \right\|.$$

Доказательство завершено. □

Лемма 3.2. *Пусть*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{matrix} \right\|$$

– примитивная матрица, в которой $\alpha_i | \ \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. *Тогда*

$$(a_{n-i+1,i}, \ \alpha_i) = 1, i = 1, \ \dots \ , \ n.$$

Доказательство. Из примитивности матрицы A вытекает примитивность всех ее столбцов, в частности, последнего. Это означает, что $(a_{1n}, \ \alpha_n) = 1$. Поэтому, существуют такие u и v, что $ua_{1n} + v\alpha_n = 1$. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} u & \mathbf{0} & v \\ \mathbf{0} & I_{2n-2} & \mathbf{0} \\ -\alpha_n & \mathbf{0} & a_{1n} \end{matrix} \right\| A =$$

$$= \left\| \begin{matrix} ua_{11} & ua_{12} & \dots & ua_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_{n-1} & 0 \\ -\alpha_n a_{11} & -\alpha_n a_{12} & \dots & -\alpha_n a_{1,n-1} & 0 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| = A_1.$$

С примитивности матрицы A_1 вытекает, что

$$(a_{2,n-1},\ \alpha_{n-1}) = 1$$

и дальнейшее доказательство этой леммы выполняется по уже описанной схеме. □

Утверждение 3.7. *Пусть R – кольцо элементарных делителей и A – $m \times s$ матрица над R с формой Смита*

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_s),$$

где $\alpha_{k+1} \notin U(R)$, $m \geq s$. Тогда для того, чтобы матрица A была подматрицей некоторой обратимой $n \times n$ матрицы, необходимои достаточно, чтобы $n \geq m + s - k$.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A является подматрицей обратимой $n \times n$ матрицы U. Без ограничения общности можем считать, что матрица U имеет вид

$$U = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\|,$$

где B, C, D – матрицы соответствующих размеров. Пусть P и Q – преобразующие матрицы матрицы A, т.е.

$$PAQ = \left\| \begin{array}{cc} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\| = \Phi,$$

где $S = \operatorname{diag}(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_s)$. Тогда

$$\left\| \begin{array}{cc} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} \end{array} \right\| U \left\| \begin{array}{cc} Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-s} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \Phi & PB \\ CQ & D \end{array} \right\|.$$

Пусть $F - n \times (s-k)$ матрица, состоящая с $k+1, k+2, \dots, s$ столбцов матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \Phi & PB \\ CQ & D \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$F = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ S \\ \mathbf{0} \\ C_k \end{matrix} \right\|,$$

где C_k – подматрица матрицы C. Поскольку $\alpha_{k+1}|\alpha_j$, $j = k+1, \dots, s$, то α_{k+1} будет делить все миноры максимального $(s-k)$-го порядка матрицы F, в которых содержится хотя бы одна из первых m строк этой матрицы. Поскольку матрица F примитивная, то среди ее миноров максимального порядка должен быть минор, который не содержит первых m строк этой матрицы. Поэтому $(n-m) \times (s-k)$ матрица C_k содержит не менее $s-k$ строк, т.е.

$$n - m \geq s - k \ \Rightarrow \ n \geq m + s - k.$$

Достаточность. Пусть

$$U = \left\| \begin{matrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{s-k} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} I_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{m-k} \\ \mathbf{0} & I_{s-k} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-k} \end{matrix} \right\|.$$

Матрица U и будет примером искомой обратимой матрицы порядка $N = m + s - k$. Доказательство завершено. □

Из доказательства этого утверждения вытекают следующие результаты, по которым можно судить о количестве инвариантных множителей равных 1 для подматриц примитивной матрицы, в зависимости от размеров этих подматриц.

Следствие 3.5. *Пусть A – $m \times s$ матрица, $m \geq s$, имеющая l отличных от единицы инвариантных множителей. Тогда матрица A дополняется до примитивной l строками.* □

Следствие 3.6. *Если $m \times s$ матрица, $m \geq s$, дополняется до примитивной l строками, то количество отличных от единицы ее инвариантных множителей не превышает l.* □

3.2. Инвариантные множители блочно-треугольных матриц и их диагональных блоков

В 1952 году У. Рот [80] предложил критерии разрешимости линейных матричных уравнениях типа Сильвестра:

$$AX - YB = C, \tag{3.2}$$

$$AX - XB = C. \tag{3.3}$$

А именно, доказал, что матричное уравнение (3.2) над полем имеет решение тогда и только тогда, когда матрицы

$$\left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{matrix} \right\|$$

эквивалентны, а уравнения (3.3) – подобны между собой. Понятно желание других исследователей обобщить эти элегантные результаты. Среди многих работ, посвященных этой тематике, выделим лишь несколько. Так в [81] доказано, что результат Рота, который касается разрешимости уравнения (3.2) (далее свойство Рта), остается правильным для коммутативных областей главных идеалов. В [82] этот результат обобщен на случай произвольных коммутативных колец. Подчеркивая важность полученных результатов, в работе [83] было введено понятие колец со свойством Рота как таких, над которыми правильно свойство Рота. В частности, примером таких колец являются коммутативные области элементарных делителей. Над такими кольцами эквивалентность матриц равносильна равенству(с точностью до ассоциированности) соответствующих инвариантных множителей этих матриц. То есть, в этом случае, проблема решения матричного уравнения (3.2) сводится к установлению взаимосвязи между инвариантными множителями блочно-треугольной матрицы и ее диагональных блоков. Первый результат в этом направлении получил М. Ньюмен [84], который показал, что над коммутативных областями главных идеалов, когда

$$(\det A,\ \det B) = 1,$$

множество элементарных делителей матрицы

$$\left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{matrix} \right\|$$

является объединением элементарных делителей матриц A и B. Этот подраздел посвящен исследованию взаимосвязи между инвариантными множителями матриц

$$\left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{matrix} \right\|,\ A,\ B.$$

Пусть R – кольцо элементарных делителей.

Теорема 3.1. *Пусть D_1 и D_3 – $k \times k$ неособенные матрицы, имеющие, соответственно, формы Смита*

$$\Delta_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_k),\ \ \Delta_3 = \operatorname{diag}(\beta_1,\ \beta_2,\ \ \dots\ ,\beta_k),$$

причем

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_1 & \mathbf{0} \\ D_2 & D_3 \end{array} \right\| \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{k}\,,\ \underbrace{\varphi\ ,\ \dots\ ,\ \varphi}_{k}\ ).$$

Тогда инвариантные множители α_i и β_j можно выбрать так, что

$$\alpha_t\beta_{k-t+1} = \varphi, \quad i = 1,\ \dots\ ,k.$$

Доказательство. Для матриц D_1 и D_3 существуют такие обратимые матрицы P_1, Q_1, P_3, Q_3, что

$$P_1 D_1\, Q_1 = \Delta_1, P_3 D_3 Q_3 = \Delta_3.$$

Тогда

$$\left\| \begin{array}{cc} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_3 \end{array} \right\| D \left\| \begin{array}{cc} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} P_1 D_1 Q_1 & \mathbf{0} \\ P_3 D_2 Q_1 & P_3 D_3 Q_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ D_2' & \Delta_3 \end{array} \right\|.$$

Следовательно, без ограничения общности, можно считать, что матрица D имеет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cccccccccccc}
\alpha_1 & & & & & \mathbf{0} & & & & & & \mathbf{0} \\
 & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & \alpha_{s-1} & & & & & & & & & \\
 & & & \alpha_s & & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \\
\mathbf{0} & & & & & \alpha_k & & & & & & \\
a_{11} & \dots & a_{1.s-1} & a_{1s} & \dots & a_{1k} & \beta_1 & & & & & \mathbf{0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & & & & \\
a_{t-1.1} & \dots & a_{t-1.s-1} & a_{t-1.s} & \dots & a_{t-1.k} & & & \beta_{t-1} & & & \\
a_{t1} & \dots & a_{t.s-1} & a_{ts} & \dots & a_{tk} & & & & \beta_t & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \ddots & \\
a_{k1} & \dots & a_{k.s-1} & a_{ks} & \dots & a_{kk} & \mathbf{0} & & & & & \beta_k
\end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ A & \Delta_3 \end{array} \right\|.$$

Пусть $t+s=k+1$. Сперва покажем, что $\varphi|\alpha_s\beta_t$. Пусть $(\alpha_s\beta_t,\varphi)=\tau_s$, т.е. $\varphi=\tau_s\sigma_s$, причем

$$\left(\frac{\alpha_s\beta_t}{\tau_s},\ \sigma_s\right)=1. \tag{3.4}$$

Докажем, что σ_s является делителем всех миноров k-го порядка матрицы D. Вычеркнем в этой матрице t-ую строку и s-ый столбец. Полученную матрицу обозначим через D_{st} :

$$D_{st}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}
\alpha_1 & & & & & & \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0}\\
 & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & \alpha_{s-1} & & & & & & & & & \\
 & & & \alpha_{s+1} & & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \\
\mathbf{0} & & & & & \alpha_k & & & & & & \\
a_{11} & \dots & a_{1.s-1} & a_{1.s+1} & \dots & a_{1k} & \beta_1 & & & & & \mathbf{0}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & & & & \\
a_{t-1.1} & \dots & a_{t-1.s-1} & a_{t-1.s+1} & \dots & a_{t-1.k} & & & \beta_{t-1} & & & \\
a_{t+1.1} & \dots & a_{t+1.s-1} & a_{t+1.s+1} & \dots & a_{t+1.k} & & & & \beta_{t+1} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \ddots & \\
a_{k1} & \dots & a_{k.s-1} & a_{k.s+1} & \dots & a_{kk} & \mathbf{0} & & & & & \beta_k
\end{matrix}\right\|.$$

Пусть $d_{st}^{(k-1)}$ – произвольный минор $(k-1)$-го порядка матрицы D_{st}. Поскольку

$$D\sim\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \dots\ ,1}_{k},\ \ \varphi\ ,\ \dots\ ,\varphi),$$

то каждый минор $(k+1)$-го порядка матрицы D делится на φ, в частности, и минор $\alpha_s\beta_t d_{st}^{(k-1)}$. Поэтому

$$\sigma_s|\frac{\alpha_s\beta_t}{\tau_s}d_{st}^{(k-1)}.$$

Из равенства (3.4) вытекает, что $\sigma_s|d_{st}^{(k-1)}$. Таким образом, σ_s является делителем всех миноров $(k-1)$-го порядка матрицы D_{st}, в том числе, и

$$\sigma_s|\ \alpha_1\,\beta_1\,\beta_2\ \ \dots\ \ \beta_{t-1}\,\beta_{t+1}\ \dots\ \ \beta_{k-1}\ \ \Rightarrow\ \ \sigma_s|\ \alpha_1\,\beta_1\,\beta_2\ \ \dots\ \ \beta_{k-1};$$

$$\sigma_s|\ \alpha_1\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2\ \ \dots\ \ \beta_{t-1}\,\beta_{t+1}\ \dots\ \ \beta_{k-2}\ \ \Rightarrow\ \ \sigma_s|\ \alpha_1\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2\ \ \dots\ \ \beta_{k-2};$$

$$\dots\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \ \dots\ \dots$$

$$\sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_{s-1}\,\beta_1\,\beta_2\ \ \ldots\ \ \beta_{t-1}\quad\Rightarrow\quad\sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_{s-1}\,\beta_1\,\beta_2\ \ \ldots\ \ \beta_t.$$

А также

$$\sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_{s-1}\,\beta_1\,\beta_2\ \ \ldots\ \ \beta_{t-1}\quad\Rightarrow\quad\sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_s\,\beta_1\,\beta_2\ \ \ldots\ \ \beta_{t-1};$$

$$\sigma_s|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{s-1}\alpha_{s+1}\beta_1\beta_2\ \ldots\ \beta_{t-2}\ \Rightarrow\ \ \sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_{s+1}\,\beta_1\,\beta_2\ \ldots\ \ \beta_{t-2};$$

$$\ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots$$

$$\sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_{s-1}\alpha_{s+1}\ldots\ \alpha_{k-1}\beta_1\quad\Rightarrow\quad\sigma_s|\ \alpha_1\,\alpha_2\ldots\ \alpha_{k-1}\,\beta_1.$$

Каждый минор k-го порядка, составленный из диагональных элементов матрицы D, имеет вид $\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\beta_{j_1}\ldots\beta_{j_{1q}}$, где индексы

$$i_1,\ \ldots\ ,i_p,\ j_1,\ \ldots\ ,j_q\in\{1,\ \ldots\ ,k\},$$

$p+q=k$. Поскольку $\alpha_1\ldots\alpha_p\mid\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}$ й $\beta_1\ldots\beta_q\mid\beta_{j_1}\ldots\beta_{j_{1q}}$, то

$$\alpha_1\ldots\alpha_p\beta_1\ldots\beta_q|\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\beta_{j_1}\ldots\beta_{j_{1q}}.$$

Тогда из выписанных делимостей следует, что $\sigma_s|\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\beta_{j_1}\ldots\beta_{j_{1q}}$. Пусть $l,\ m$ такие индексы, что $1\leqslant l\leqslant s,\ 1\leqslant m\leqslant t$. Тогда $\varphi|\alpha_l\beta_m d_{lm}^{(k-1)}$, где $d_{lm}^{(k-1)}$ –произвольный минор $(k-1)$-го порядка матрицыD_{lm}. Поскольку $\alpha_l|\ \alpha_s$, і $\beta_m|\ \beta_t$, то $\varphi|\ \alpha_s\beta_t d_{lm}^{(k-1)}$. Поэтому, как и в предыдущем случае, $\sigma_s|\ d_{lm}^{(k-1)}$. Таким образом, σ_s является делителем всехминоров $(k-1)$-го порядка матриц

$$\begin{gathered}D_{11}\ ,\ \ \ldots\ \ ,\ D_{1s},\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ D_{t1}\ ,\ \ \ldots\ \ ,\ D_{ts}.\end{gathered}$$

Рассмотрим матрицу

$$\left\|\begin{matrix}A\\ \Delta_1\end{matrix}\right\|.$$

Пусть

$$\left\|\begin{matrix}A\\ \Delta_1\end{matrix}\right\|^*=\left\|\begin{matrix}b_{11}&\ldots&b_{1s}&\ldots&b_{1k}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ b_{t1}&\ldots&b_{ts}&\ldots&b_{tk}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ b_{2k.1}&\ldots&b_{2k.s}&\ldots&b_{2k.k}\end{matrix}\right\|$$

– ее дополняющая матрица. Поскольку σ_s является делителем всех миноров $(k-1)$-го порядка матрицы D_{ij}, то $\sigma_s|b_{ij},\ 1\leqslant i\leqslant t$, $1\leqslant j\leqslant s$. Поэтому

$$\sigma_s|\left\|\begin{matrix}b_{11}&\ldots&b_{1s}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ b_{t1}&\ldots&b_{ts}\end{matrix}\right\|.$$

Поскольку $t+s=k+1>k$, то согласно утверждению 3.3 σ_s является делителем всех миноров k-го порядка матрицы $\left\| \begin{array}{c} A \\ \Delta_1 \end{array} \right\|$, а следовательно, и матрицы $\left\| \begin{array}{c} \Delta_1 \\ A \end{array} \right\|$.

Аналогично рассуждая, показываем, что σ_s делит все миноры k-го порядка матрицы $\left\| \begin{array}{cc} A & \Delta_3 \end{array} \right\|$.

Рассмотрим минор k-го порядка $\alpha_1\ldots\alpha_\mu\beta_1\ldots\beta_\nu \det K$, $\mu \geqslant \nu$, где K – подматрицы соответствующего порядка матрицы A. Согласно с только что доказанным

$$\sigma_s |\ \alpha_1\ldots\alpha_\mu \left\langle \begin{array}{ccc} a_{1.\mu+1} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu.\mu+1} & \ldots & a_{\nu k} \\ a_{\nu+1.\mu+1} & \ldots & a_{\nu+1.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k.\mu+1} & \ldots & a_{kk} \end{array} \right\rangle .$$

Тогда тем более

$$\sigma_s |\ \alpha_1\ldots\alpha_\mu \left\langle \begin{array}{ccc} a_{\nu+1.\mu+1} & \ldots & a_{\nu+1.k} \\ a_{\nu+2.\mu+1} & \ldots & a_{\nu+2.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k.\mu+1} & \ldots & a_{kk} \end{array} \right\rangle e\beta_1\ldots\beta_\nu .$$

Следовательно, $\sigma_s|\alpha_1\ldots\alpha_\mu\beta_1\ldots\beta_\nu \det K$. Если же $\nu>\mu$, то искомый результат получаем из того, что

$$\sigma_s |\ \beta_1\ldots\beta_\nu \left\langle \begin{array}{ccc} a_{\nu+1.1} & \ldots & a_{\nu+1.k} \\ a_{\nu+2.1} & \ldots & a_{\nu+2.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{array} \right\rangle .$$

Аналогично показываем, что $\sigma_s|\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\beta_{j_1}\ldots\beta_{j_{1q}}$, где $i_1,\ \ldots\ ,i_p,\ j_1,\ \ldots\ ,j_q \in \{1,\ \ldots\ ,k\}$, $p+q=k$. Таким образом, мы доказали, что σ_s является делителем всех миноров k-го порядка матрицы D. Приняв во внимание, что

$$D \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,1}_{k},\ \ \varphi\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi), \tag{3.5}$$

получаем, что $\sigma_s \in U(R)$. Вспомнив, что $\varphi=\tau_s\sigma_s$, получаем, что φ и τ_s ассоциированны между собой. Поскольку н.о.д. элементов определяется с точностью до асоциированности, то $(\alpha_s\beta_t,\ \varphi)=\varphi$. Отсюда вытекает, что

$$\varphi \mid \alpha_s\beta_t,\ \ t+s=k+1.$$

Следовательно, $\alpha_s\beta_t = \varphi u_s$. Тогда

$$\det D = \alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_k\beta_1\beta_2\cdots\ \beta_k =$$
$$= (\alpha_1\beta_k)(\alpha_2\beta_{k-1})\ \cdots\ (\alpha_k\beta_1) = \varphi^k u_1u_2\ \cdots\ u_k.$$

С другой стороны, согласно (3.5) $\det D = \varphi^k e$, где $e \in U(R)$. Таким образом, $u_1u_2\ \cdots\ u_k = e \in U(R)$. Заметив, что инвариантные множители матриц выбирают с точностью до ассоциированности, приходим к выводу, что мы можем подобрать α_I и β_j так, чтобы

$$\alpha_1\beta_k = \alpha_2\beta_{k-1} = \cdots = \alpha_k\beta_1 = \varphi.$$

Теорема доказана. □

Для рассмотрения общего случая установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.3. *Если*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1.k-1} & a_{1k} & a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s.k-1} & a_{sk} & a_{s.k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s+2.1} & \dots & a_{s+2.k-1} & a_{s+2.k} & a_{s+2.k+1} & \dots & a_{s+2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m.k-1} & a_{mk} & a_{m.k+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \sim$$
$$\sim \mathrm{diag}(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_k),$$

где $k = \min(m,\ n)$, $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$, $i = 1,\ \dots\ ,\ k-1$, *то*

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1.k-1} & a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s.k-1} & a_{s.k+1} & \dots & a_{sn} \\ a_{s+2.1} & \dots & a_{s+2.k-1} & a_{s+2.k+1} & \dots & a_{s+2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m.k-1} & a_{m.k+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \sim$$
$$\sim \mathrm{diag}(\alpha_2\ ,\ \alpha_3\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_k).$$

Доказательство. Легко убедиться в правильности таких эквивалентностей

$$A \sim \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1.k-1} & 0 & a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s.k-1} & 0 & a_{s.k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s+2.1} & \dots & a_{s+2.k-1} & 0 & a_{s+2.k+1} & \dots & a_{s+2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m.k-1} & 0 & a_{m.k+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & \dots & a_{1.k-1} & a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{s1} & \dots & a_{s.k-1} & a_{s.k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & a_{s+2.1} & \dots & a_{s+2.k-1} & a_{s+2.k+1} & \dots & a_{s+2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{m.k-1} & a_{m.k+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{diag}(\beta_2 \, , \, \dots \, , \, \beta_k) \end{array} \right\|,$$

где

$$A_1 \sim \operatorname{diag}(\beta_2, \, \dots \, , \beta_k),$$

$\beta_i \mid \beta_{i+1}$, $i = 2, \, \dots \, , k-1$. Отсюда вытекает, что α_i и β_i, $i = 2, \, \dots \, , k$, ассоциированны между собой. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть*

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \sim \operatorname{diag}(\alpha_1, \, \alpha_2 \, , \, \dots \, , \alpha_n) = \Delta,$$

где $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$, $i = 1, \, \dots \, , \, n-1$. *Тогда*

$$B = \left\| \begin{array}{ccc} A_{11} & \mathbf{0} & A_{12} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ A_{21} & \mathbf{0} & A_{22} \end{array} \right\| \sim \operatorname{diag}(1, \;\; \alpha_1, \, \alpha_2 \, , \, \dots \, , \alpha_n).$$

Доказательство. Существуют такие обратимые матрицы $P, \; Q, U, \; V$, что

$$PBQ = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{array} \right\| = B_1, \; UAV = \Delta.$$

Тогда

$$B \sim B_1 \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{array} \right\| B_1 \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & UAV \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{array} \right\| = \operatorname{diag}(1, \;\; \alpha_1, \, \alpha_2, \, \dots \, , \alpha_n),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть*

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_1 & \mathbf{0} \\ D_2 & D_3 \end{array} \right\| \sim \operatorname{diag}(\overbrace{1, \, \dots \, , \, 1 \, , \, \underbrace{\varphi \, , \, \dots \, , \, \varphi}_{s}}^{p+q}),$$

$\varphi \neq 0$, где D_1 и D_3 – квадратные матрицы с формами Смита

$$\Delta_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_q), \Delta_3 = \mathrm{diag}(\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ ,\beta_p),$$

соответственно. Тогда инвариантные множители α_i и β_j можно выбрать так, что в случае

1) $p \leq s \leq q$, будем иметь

$$\alpha_1\ =\ \alpha_2\ =\ \dots\ = \alpha_{q-s} = 1,$$

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi,$$

$$\alpha_{q-s+p+1}\ =\ \alpha_{q-s+p+2}\ =\ \dots\ =\ \alpha_q = \varphi;$$

2) $p, q \geq s$,

$$\alpha_1\ =\ \alpha_2\ =\ \dots\ = \alpha_{q-s} = 1,$$

$$\beta_1\ =\ \beta_2\ =\ \dots\ = \beta_{p-s} = 1,$$

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi;$$

3) $p, q \leq s$,

$$\alpha_1\beta_{q+p-s} = \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \dots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi,$$

$$\alpha_{q+p-s+1} = \alpha_{q+p-s+2} = \dots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} \dots = \beta_p = \varphi.$$

Доказательство.Пусть $p \leq s \leq q$. На основании следствия 3.6

$$\alpha_1\ =\ \alpha_2\ =\ \dots\ = \alpha_{q-s} = 1.$$

Вычеркнув в матрице D первые $q-s$ строк и столбцов, получим матрицу

$$\left\| \begin{array}{cc} C_1 & \mathbf{0} \\ C_2 & D_3 \end{array} \right\|,$$

которая в силу леммы 3.3 имеет форму Смита

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{p},\ \underbrace{\varphi\ ,\ \dots\ ,\ \varphi}_{s}).$$

Воспользовавшись леммой 3.4, получим

$$\left\| \begin{array}{c|cc} C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & E_{s-p} & \mathbf{0} \\ C_2 & \mathbf{0} & D_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} C_1' & \mathbf{0} \\ C_2' & D_3' \end{array} \right\| \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{s},\ \underbrace{\varphi\ ,\ \dots\ ,\ \varphi}_{s}),$$

где

$$C_1' \sim \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_{q-s+1},\ \alpha_{q-s+2},\ \dots\ ,\alpha_q}_{s}),$$

$$D_3' \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,1}_{s-p},\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ ,\beta_p).$$

На основании теоремы 3.1

$$\alpha_{q-s}\beta_p = \alpha_{q-s+1}\beta_{p-1} = \cdots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi;$$

$$\alpha_{q-s+p+1} = \alpha_{q-s+p+2} = \ldots = \alpha_q = \varphi.$$

Пусть $p, q \geq s$. Опять же, согласно следствию 3.6

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{q-s} = 1,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{p-s} = 1.$$

Вычеркнув строки и столбцы, в которых находятся эти единицы, и воспользовавшись леммой 3.3, получим

$$\left\| \begin{array}{cc} F_1 & \mathbf{0} \\ F_2 & F_3 \end{array} \right\| \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,\ 1}_{s},\ \underbrace{\varphi\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi}_{s}),$$

где

$$F_1 \sim \operatorname{diag}(\underbrace{\alpha_{q-s+1},\ \alpha_{q-s+2},\ldots,\alpha_q}_{s}),$$

$$F_3 \sim \operatorname{diag}(\underbrace{\beta_{p-s+1},\beta_{p-s+2},\ldots,\beta_p}_{s}).$$

Тогда на основании теоремы 3.1

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \cdots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi.$$

Пусть $p, q \leq s$. Согласно лемме 3.4

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} D_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{s-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline D_2 & \mathbf{0} & D_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{s-p} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & \mathbf{0} \\ H_2 & H_3 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,\ 1}_{s},\ \underbrace{\varphi\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi}_{s}),$$

причем

$$H_1 \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,1}_{s-q},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_q),$$

$$H_3 \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,1}_{s-p},\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ ,\beta_p).$$

Следовательно,

$$\alpha_1\beta_{q+p-s} = \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \cdots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi,$$

$$\alpha_{q+p-s+1} = \alpha_{q+p-s+2} = \cdots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} \cdots = \beta_p = \varphi.$$

Теорему доказано. □

Замечание. Случай $q \le s \le p$ является симметричным до случая $p \le s \le q$, поэтому мы его не рассматриваем.

Если R – кольцо главных идеалов, то полученные результаты можно использовать для установления взаимосвязи между инвариантными множителями неособенной блочно-треугольной матрицы

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \\ D_2 & D_3 \end{matrix} \right\| \sim \Phi = \mathrm{diag}(\ \varphi_1,\ \ldots, \varphi_n)$$

с ее диагональными блоками D_1, D_3, когда

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ \frac{\varphi_3}{\varphi_2},\ \ldots\ ,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$$

являются попарно взаимно простыми. Для этого применим локально глобальный метод, предложенный Л. Герстейном [85].

Пусть p – неразложимый элемент кольца R. Через $R_{(p)}$ обозначим локализацию кольца R за простым идеалом (p), т.е. $R_{(p)}$ – кольцо, которое состоит из элементов вида $x = p^\nu \frac{a}{b}$, где $a,\ b$ – элементы кольца R, взаимно простые с p, $\nu \in N\bigcup\{0\}$. Поскольку

$$\Phi = I\varphi_1\,\mathrm{diag}\left(1,\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ \ldots\ ,\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \times$$

$$\times\,\mathrm{diag}\left(1,\ \ 1,\ \frac{\varphi_3}{\varphi_2},\ \ldots\ ,\ \ \frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right)\ \cdots\ \mathrm{diag}\left(1,\ \ldots\ ,\ \ 1, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right),$$

то матрицу Φ можно записать как произведение матриц вида

$$\mathrm{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ p^\mu,\ \ldots\ ,\ p^\mu).$$

Согласно теореме 5.6 из работы [85] матрица D в кольце $R_{(p)}$ имеет форму Смита $\mathrm{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ p^\mu,\ \ldots\ , p^\mu)$. Следовательно, инвариантные множители матриц D_1 и D_3 в кольце $R_{(p)}$ связаны между собой равенствами, которые выписаны в теореме 3.2. Тогда, для того чтобы найти формы Смита матриц D_1 и D_3 в кольце R нужно найти формы Смита матриц D_1 и D_3 во всех локализациях кольца R по неразложимых делителях элемента φ_n и перемножить соответствующие инвариантные множители этих матриц.

3.3. Форма Смита некоторых матриц

Пусть $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособенная d-матрица.

Лемма 3.5. *Пусть S – $n \times m$ матрицы и*

$$\Phi_i = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big),$$

$i = 2, \ldots, n$. *Тогда если $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то*

$$\Phi_i H S \overset{l}{\sim} \Phi_i S, \ \ i = 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Поскольку матрица Φ неособенная, то согласно теореме 2.6 группа $\mathbf{G}_\Phi$ состоит из всех обратимых матриц вида

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1.n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2.n-1} & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n.n-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, j-ый столбец матрицы H имеет вид

$$h_j = \left\| h_{1j} \quad \cdots \quad h_{jj} \quad \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1.j} \quad \cdots \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Тогда $\Phi_i h_j =$

$$= \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{1j} \cdots \frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \quad \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{jj} \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{j+1.j} \cdots \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij} \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j} h_{i+1.j} \cdots \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T =$$

$$= \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left\| \frac{\varphi_j}{\varphi_1} h_{1j} \ \cdots \ \frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \ h_{jj} \ \cdots \ h_{ij} \ \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} h_{i+1.j} \ \cdots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_i} h_{nj} \right\|^T,$$

$i = 2, \ldots, n, \ i > j$. Это означает, что все элементы первого столбца матрицы $\Phi_i H$ делятся на $\frac{\varphi_i}{\varphi_1}$, второго на $\frac{\varphi_i}{\varphi_2}$, и т.д., $(i-1)$-го на $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$. Следовательно,

$$\Phi_i H = K_i \Phi_i,$$

где матрица K_i являются частным от деления справа матрицы $\Phi_i H$ на матрицу Φ_i. Поскольку матрица Φ_i неособенная и $H \in \mathrm{GL}_n(R)$, то и $K_i \in \mathrm{GL}_n(R)$. Поэтому

$$K_i^{-1} \Phi_i H = \Phi_i.$$

Умножим справа это равенство на $n \times m$ матрицу S

$$K_i^{-1}\Phi_i HS = \Phi_i S.$$

Отсюда вытекает, что

$$\Phi_i S \overset{l}{\sim} \Phi_i HS,$$

$i = 2, \ldots, n$. □

Обозначим

$$F_i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Лемма 3.6. *Если $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то существуют такие обратимые матрицы H_i, что $F_i H = H_i F_i$, $i = 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\Delta^i = \operatorname{diag}\Big(\varphi_{i-1}, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_i, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big).$$

Согласно обозначений леммы 3.5

$$\Delta_i^i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big) = F_i.$$

Из доказательства леммы 3.5 вытекает, что существует такая обратимая матрица H_i, что $\Delta_i^i H = H_i \Delta_i^i$, т.е. $F_i H = H_i F_i$, $i = 2, \ldots, n$. □

Пусть $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – обратная матрица. Обозначим

$$P_{ij} = \begin{Vmatrix} p_{ij} & p_{i.j+1} & \cdots & p_{in} \\ p_{i+1.j} & p_{i+1.j+1} & \cdots & p_{i+1.n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}, \ P_j = \begin{Vmatrix} p_{1j} & p_{1.j+1} & \cdots & p_{1n} \\ p_{2j} & p_{2.j+1} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}$$

– ее подматрицы, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Форма Смита матрицы P_{ij} имеет вид

$$S(P_{ij}) = \begin{Vmatrix} Q_j^i & \mathbf{0} \end{Vmatrix}, Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \ldots, q_{j,n-i+1}^i),$$

если $i > j$ и

$$S(P_{ij}) = \begin{Vmatrix} Q_j^i \\ \mathbf{0} \end{Vmatrix}, Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \ldots, q_{j,n-j+1}^i),$$

если $i \leqslant j$.

Утверждение 3.8. *Форма Смита матрицы* F_iP_j, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, *равна*

$$\left\| \begin{matrix} \mathrm{E}_j^i \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathrm{E}_j^i =$

$$= \begin{cases} \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j1}^i\right), \dots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j,n-i+1}^i\right)\right) \oplus \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} E_{i-j}, & \textit{якщо} \quad i > j; \\ \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j1}^i\right), \dots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j,n-j+1}^i\right)\right), & \textit{якщо} \quad i \leqslant j. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $i > j, n - i + 1 > j - 1$. Для матрицы P_{ij} существуют такие обратимые матрицы U, V, что

$$UP_{ij}V = S(P_{ij}) = \left\| \begin{matrix} Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

– Форма Смита матрицы P_{ij}, где

$$Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \dots, q_{j,n-i+1}^i).$$

Тогда

$$(I_{i-1} \oplus U)P_jV = \left\| \begin{matrix} M_1 & M_2 \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_1.$$

С примитивности матрицы D_1 вытекает примитивность матрицы

$$\left\| \begin{matrix} M_2 \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

а следовательно, и $(i-1) \times (i-j)$ матрицы M_2. Из того, что $i > j$ вытекает, что $i - 1 \geqslant i - j$. Поэтому существует такая обратимая матрица L, что

$$LM_2 = \left\| \begin{matrix} I_{i-j} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$(L \oplus I_{n-i+1})D_1 = \left\| \begin{matrix} K_1 & I_{i-j} \\ K_2 & \mathbf{0} \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_2.$$

Следовательно,

$$D_2 \left\| \begin{matrix} I_{n-i+1} & \mathbf{0} \\ -K_1 & I_{i-j} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & I_{i-j} \\ K_2 & \mathbf{0} \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_3,$$

где матрица K_2 имеет размеры $(j-1)\times(n-i+1)$. Рассмотрим примитивную матрицу P^i, составленную из последних $n-i+1$ строк матрицы P :

$$P^i = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} p_{i1} & \dots & p_{i.j-1} & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{n.j-1} & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} p_{i1} & \dots & p_{i.j-1} & \\ \dots & \dots & \dots & P_{ij} \\ p_{n1} & \dots & p_{n.j-1} & \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$UP^i(I_{j-1}\oplus V) = \left\| \begin{array}{cccccc} p'_{i1} & \dots & p'_{i.j-1} & q^i_{j1} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & & \mathbf{0} \\ p'_{n1} & \dots & p'_{n.j-1} & 0 & & q^i_{j,n-i+1} \end{array} \right\|.$$

Из примитивности этой матрицы вытекает примитивность матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccccc} p'_{i1} & \dots & p'_{i.j-1} & q^i_{j1} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ p'_{n1} & \dots & p'_{n.j-1} & 0 & & q^i_{j,n-i+1} \end{array} \right\|.$$

Это означает, что d-матрица $\mathrm{diag}(q^i_{j1},\ \dots,\ q^i_{j,n-i+1})$ дополняется $j-1$ столбцами до примитивной матрицы. Согласно следствию 3.6 это означает, что количество отличных от единицы инвариантных множителей матрицы $\mathrm{diag}(q^i_{j1},\ \dots,\ q^i_{j,n-i+1})$ не превышает $j-1$. Согласно предположению $n-i+1>j-1$. Отсюда вытекает, что

$$q^i_{j1}=q^i_{j2}=\dots=q^i_{jt}=1,$$

где $t=n-i-j+2$, т.е.

$$D_3 = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{i-j} \\ K_2^1 & K_2^2 & \mathbf{0} \\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где $Q^i_{j,t+1}=\mathrm{diag}(q^i_{j,t+1},\dots,q^i_{j,n-i+1}), K_2^2$ – матрица порядка $j-1$. Тогда

$$\left\| \begin{array}{cccc} I_{i-j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{j-1} & -K_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{j-1} \end{array} \right\| D_3 = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{i-j} \\ \mathbf{0} & K_2^2 & \mathbf{0} \\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = D_4.$$

В группе $\mathrm{GL}_{j-1}(R)$ существует такая матрица S, что

$$SK_2^2 = \left\| \begin{array}{ccccc} k_{1,t+1} & k_{1,t+2} & \dots & k_{1,\bar{i}-1} & k_{1\bar{i}} \\ k_{2,t+1} & k_{2,t+2} & \dots & k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j-1,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| = \bar{K}_2^2, \tag{3.6}$$

где $\bar{i} = n - i + 1$. Следовательно,

$$(I_{i-j} \oplus S \oplus I_{\bar{i}})D_4 = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{i-j} \\ \mathbf{0} & \bar{K}_2^2 & \mathbf{0} \\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = D_5.$$

Таким образом, $D_5 = NP_jM$, где матрица N (M) – произведение всех обратимых матриц, на которые умножали матрицу P_j слева (справа). При этом матрица N имеет вид

$$N = \left\| \begin{array}{cc} N_1 & N_2 \\ \mathbf{0} & N_3 \end{array} \right\|,$$

где матрица N_3 имеет порядок $n - i + 1$. Тогда

$$F_iN = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_1 & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_2 \\ \mathbf{0} & N_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} N_1 & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_2 \\ \mathbf{0} & N_3 \end{array} \right\| F_i = \bar{N}F_i.$$

Поскольку матрица F_i неособенная, то $\det N = \det \bar{N}$. Поэтому матрица $\bar{N}$ обратима. Тогда

$$F_iD_5 = F_iNP_jM = \bar{N}F_iP_jM.$$

Отсюда вытекает, что $F_iP_j \sim F_iD_5$. Очевидно, что

$$F_iD_5 = \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & I_{i-j} \\ 0 & \bar{K}_2^2\Gamma^i_{j,t+1} & 0 \\ I_t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^i_{j,t+1} & 0 \end{array} \right\|}_{D_6} \times$$

$$\times \Big(I_t \oplus \operatorname{diag}((\psi_i, q^i_{j,t+1}), \ldots, (\psi_i, q^i_{j\bar{i}})) \oplus \psi_i I_{i-j} \Big),$$

где

$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \Gamma^i_{j,t+1} = \operatorname{diag}(\gamma_{t+1}, \gamma_{t+2}, \ldots, \gamma_{\bar{i}}), \gamma_l = \frac{\psi_i}{(\psi_i, q^i_{jl})},$$

$$\Delta^i_{j,t+1} = \operatorname{diag}(\delta^i_{j,t+1}, \delta^i_{j,t+2}, \ldots, \delta^i_{j\bar{i}}),\ \delta^i_{jl} = \frac{q^i_{jl}}{(\psi_i, q^i_{jl})},$$

$l = t+1, t+2, \ldots, \bar{i}$. Для завершения доказательства нужно показать, что матрица D_6 примитивна. Для этого достаточно доказать, что матрица

$$D_7 = \left\| \begin{array}{c} \bar{K}_2^2\Gamma^i_{j,t+1} \\ \Delta^i_{j,t+1} \end{array} \right\|$$

являются примитивной. С примитивности матрицы D_5 вытекает примитивность матрицы
$$\left\| \begin{matrix} \bar{K}_2^2 \\ Q^i_{j,t+1} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда на основании леммы 3.2 выполняются равенства

$$(q^i_{j,t+1}, k_{j-1,t+1}) = (q^i_{j,t+2}, k_{j-2,t+2}) = \ldots = (q^i_{j\bar{i}}, k_{1\bar{i}}) = 1. \tag{3.7}$$

Поскольку $\delta^i_{j\bar{i}} | q^i_{j\bar{i}}$ и согласно равенству (3.7)

$$(q^i_{j\bar{i}}, k_{1\bar{i}}) = 1 \Rightarrow (\delta^i_{j\bar{i}}, k_{1\bar{i}}) = 1.$$

Также приняв во внимание то, что

$$(\delta^i_{j\bar{i}}, \gamma_{\bar{i}}) = 1,$$

получаем
$$(\gamma_{\bar{i}} k_{1\bar{i}}, \delta^i_{j\bar{i}}) = 1.$$

Следовательно, существуют такие u и v, что

$$u\gamma_{\bar{i}} k_{1\bar{i}} + v\delta^i_{j\bar{i}} = 1.$$

Ввиду того что $\delta^i_{j,t+1} | \delta^i_{j,t+2} | \ldots | \delta^i_{j\bar{i}}$, получаем

$$\left\| \begin{matrix} u & \mathbf{0} & v \\ \mathbf{0} & I_{2j-4} & \mathbf{0} \\ -\delta^i_{j\bar{i}} & \mathbf{0} & \gamma_{\bar{i}} k_{1\bar{i}} \end{matrix} \right\| D_7 =$$

$$= \left\| \begin{matrix} * & * & \ldots & * & 1 \\ \gamma_{t+1} k_{2,t+1} & \gamma_{t+2} k_{2,t+2} & \ldots & \gamma_{\bar{i}-1} k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{t+1} k_{j-1,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \delta^i_{j,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i_{j,t+2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \delta^i_{j,\bar{i}-1} & 0 \\ \delta^i_{j\bar{i}} s_{t+1} & \delta^i_{j\bar{i}} s_{t+2} & \ldots & \delta^i_{j\bar{i}} s_{\bar{i}-1} & 0 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \gamma_{t+1}k_{2,t+1} & \gamma_{t+2}k_{2,t+2} & \dots & \gamma_{\bar{i}-1}k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{t+1}k_{j-1,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta^i_{j,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i_{j,t+2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \delta^i_{j,\bar{i}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| = D_8.$$

Продолжив описанный процесс, получим, что матрица D_8 является примитивной, а следовательно, примитивной будет и матрица D_6. Заметив, что

$$I_t \oplus \mathrm{diag}((\psi_i, q^i_{j,t+1}), \dots, (\psi_i, q^i_{j\bar{i}})) \oplus \psi_i I_{i-j} =$$

$$= \mathrm{diag}\Big((\psi_i, q^i_{j1}), \dots, (\psi_i, q^i_{j\bar{i}})\Big) \oplus \psi_i I_{i-j} = \mathrm{E}^i_j,$$

убеждаемся в правильности нашего утверждения.

Если $i > j,\ n - i + 1 \leqslant j - 1$, матрицу P_j правосторонними преобразованиями из $\mathrm{GL}_{n-j+1}(R)$ и допустимыми левостороннего преобразованиями, то есть такими, которые не меняют форму Смита матрицы F_iP_j, приводим к виду

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & I_{i-j} \\ L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

если $i < j$ —

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ L_2 \\ \mathbf{0} \\ Q^i_{j,t+1} \end{array} \right\|,$$

где матрицы L_1, L_2 имеют вид (3.6), т.е. эти случаи являются частными случаями первого, поэтому их доказывают по аналогичной схеме. Утверждение доказано полностью. □

Поставим в соответствие каждой матрице P_{ij} диагональную матрицу

$$S(\Phi, P_{ij}) = \mathrm{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q^i_{j1}\right), \dots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q^i_{jk}\right)\right),$$

где $k = n - i + 1$, если $i > j$, и $k = n - j + 1$, если $i \leqslant j$.

Теорема 3.3. *Если* $H \in \mathbf{G}_\Phi$, *то диагональные элементы матриц* $S(\Phi, P_{ij})$, $S(\Phi, (HP)_{ij},)$ $i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ *являются ассоциированными.*

Доказательство. На основании леммы 3.6

$$F_i H = H_i F_i, \ \ i = 2, \ldots, n.$$

Поскольку матрицы F_i неособенные, то

$$\det H = \det H_i,$$

а следовательно, матрицы H_i обратимы. Обозначим через P_j и U_j матрицы, составленные из последних $n-j+1$ столбцов матриц P и U, соответственно. Заметив, что $U_j = HP_j$ получаем

$$F_i U_j = F_i H P_j = H_i F_i P_j \sim F_i P_j.$$

То есть инвариантные множители форм Смита матриц $F_i U_j$ и $F_i P_j$ могут отличаться лишь на единицы кольца R, явный вид которых указан в утверждении 3.8. Таким образом, ненулевые элементы матриц $S(\Phi, P_{ij}), S(\Phi', U_{ij})$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{js}^i\right), \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{js}^i l_{ijs}\right),$$

где $l_{ijs} \in U(R)$. Очевидно, что они могут отличаться лишь на единицу кольца R, т.е. являются ассоциированными. $\square$

Раздел 4. Делимость и ассоциированность матриц

В этом разделе начинается систематическое изучение делителей матриц, которое базируется на предложенных критериях делимости и ассоциированности матриц. Доказывается, что генератором делителей является порождающее множество. В свою очередь, группа Зелиска отвечает за ассоциированность матриц.

В этом разделе R – кольцо элементарных делителей.

4.1. Делимость матриц и порождающее множество

Пусть A и B – $n \times n$ матрицы над R. Тогда существуют такие обратимые матрицы P_A, P_B, Q_A, Q_B, что

$$P_A A Q_A = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0) = \mathrm{E},$$

$$P_B B Q_B = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0) = \Phi,$$

где $\varepsilon_k \neq 0, \varphi_t \neq 0$, $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, \varphi_j | \varphi_{j+1}, i = 1, \ldots, k-1, j = 1, \ldots, t-1$.

Определение 4.1. Порождающим множеством называется множество

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \{L \in \mathrm{GL}_n(R) | \ \exists\ S \in M_n(R): \ L\mathrm{E} = \Phi S\}.$$

Введенное множество играет главную роль в описании делителей матриц.

Теорема 4.1. *Матрица $B = P_B^{-1} \Phi Q_B^{-1}$ является левым делителем матрицы $A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}$, т.е. $A = BC$ тогда и только тогда, когда $P_B = L P_A$, где $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$.*

Доказательство. Необходимость. Умножив матрицу A слева на P_B, получим

$$P_B A = P_B (BC) = (P_B B) C = (\Phi Q_B^{-1}) C = \Phi (Q_B^{-1} C).$$

С другой стороны,

$$P_B A = (P_B P_A^{-1})(P_A A) = (P_B P_A^{-1})\mathrm{E}Q_A^{-1}.$$

Следовательно,

$$(P_B P_A^{-1})\mathrm{E}Q_A^{-1} = \Phi(Q_B^{-1}C).$$

Таким образом,

$$(P_B P_A^{-1})\mathrm{E} = \Phi S,$$

где $S = Q_B^{-1}CQ_A$. Это означает, что

$$P_B P_A^{-1} = L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi),$$

т.е. $P_B = LP_A$.

Достаточность. Пусть

$$(P_B P_A^{-1})\mathrm{E} = \Phi S.$$

Тогда

$$P_B A = P_B(P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}) = (P_B P_A^{-1})\mathrm{E}Q_A^{-1} = \Phi S Q_A^{-1},$$

т.е.

$$A = P_B^{-1}\Phi S Q_A^{-1} = (P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1})(Q_B S Q_A^{-1}) = BC,$$

где $C = Q_B S Q_A^{-1}$. □

Очевидным следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Все делители матрицы $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ с формой Смита Φ имеют вид $(LP_A)^{-1}\Phi Q^{-1}$, где $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi), Q^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R)$.* □

Следствие 4.1. *Множество $(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ является множеством всех левых делителей матрицы $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ с формой Смита Φ.* □

Будем говорить, что матрицы A, B ассоциированны справа (слева), если существует такая обратимая матрица U, что $A = BU$ $(A = UB)$. Тот факт, что матрица A ассоциированная справа (слева) до матрицы B будем обозначать $A \overset{r}{\sim} B$ $(A \overset{l}{\sim} B)$.

С правой (левой) ассоциированности матриц следует их эквивалентность. Поэтому ассоциированные матрицы имеют одинаковые формы Смита. Таким образом, если матрицы A, B ассоциированные справа (слева), то их всегда можно записать в виде

$$A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}, \; B = P_B^{-1}\Phi V_B^{-1}.$$

Теорема 4.3. *Пусть* $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $A \overset{r}{\sim} B$;

2) $P_B = HP_A$, *где* $H \in \mathbf{G}_\Phi$;

3) $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_A$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1). Тогда существует такая обратимая матрица U, что $A = BU$, т.е.

$$P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1} = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}U.$$

Следовательно,

$$P_B P_A^{-1}\Phi = \Phi Q_B^{-1}UQ_A.$$

Это означает, что

$$P_B P_A^{-1} = H \in \mathbf{G}_\Phi,$$

т.е. $P_B = HP_A$.

Наоборот, пусть $P_B = HP_A$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Заметив, что из равенства

$$H\Phi = \Phi K,$$

где $K \in \mathrm{GL}_n(R)$, вытекает

$$H^{-1}\Phi = \Phi K^{-1},$$

получаем

$$B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1} = (HP_A)^{-1}\Phi Q_B^{-1} = P_A^{-1}H^{-1}\Phi Q_B^{-1} =$$

$$= P_A^{-1}\Phi K^{-1}Q_B^{-1} = (P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1})(Q_A K^{-1}Q_B^{-1}) = AV,$$

где $V = Q_A K^{-1}Q_B^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R)$. Следовательно, $A \overset{r}{\sim} B$. Таким образом, условия 1) и 2) эквивалентны.

Теперь покажем эквивалентность условий 2) и 3). Согласно свойству 2.2

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Phi P_A, \ \ \mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P_B.$$

Тогда, если $P_B = HP_A$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P_B = \mathbf{G}_\Phi HP_A = \mathbf{G}_\Phi P_A = \mathbf{P}_A.$$

Пусть $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_A$, т.е. $\mathbf{G}_\Phi P_B = \mathbf{G}_\Phi P_A$. Поскольку $I \in \mathbf{G}_\Phi$, то $P_B \in \mathbf{G}_\Phi P_A$. Значит существует такая матрица $H \in \mathbf{G}_\Phi$, что $P_B = HP_A$. $\square$

Пусть B – левый делитель матрицы A. Тогда для произвольной обратимой матрицы U выполняется равенство

$$A = BC = (BU)(U^{-1}C),$$

т.е. все матрицы, которые ассоциированны справа до матрицы B снова являются левыми делителями матрицы A. Поэтому, естественно, в множестве всех левых делителей матрицы A искать только те, которые неассоциированны справа.

Согласно следствию 4.1 множество всех левых делителей матрицы A с формой Смита Φ имеет вид $(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$. Следовательно, наша задача заключается в том, чтобы из этого множества выбрать все неассоциированные между собой матрицы. Для этого нам понадобятся следующие свойства группы $\mathbf{G}_\Phi$.

Свойство 4.1. *Выполняется равенство*

$$\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Доказательство. Пусть $H \in \mathbf{G}_\Phi, L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, т.е.

$$H\Phi = \Phi K, L\mathrm{E} = \Phi S, K \in \mathrm{GL}_n(R), S \in M_n(R).$$

Тогда

$$HL\mathrm{E} = H\Phi S = \Phi K S,$$

т.е. $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. С другой стороны, $I \in \mathbf{G}(\Phi)$ и следовательно, $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Поэтому $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. □

Свойство 4.2. *Выполняется равенство*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)\mathbf{G}_\mathrm{E} = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Доказательство подобно доказательству свойства 4.1. □

Со свойства 4.1 вытекает, что множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ можно разбить на классы смежности $\mathbf{G}_\Phi L$, где $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Обозначим через $\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$ множество представителей этих классов.

Теорема 4.4. *Множество* $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ *состоит из всех левых неассоциированных справа делителей матрицы* A, *которые имеют форму Смита* Φ.

Доказательство. Пусть $L_1, L_2 \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) \subset \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Согласно теореме 4.2 матрицы $(L_1 P_A)^{-1}\Phi$ и $(L_2 P_A)^{-1}\Phi$ являются левыми делителями матрицы A. Предположим, что матрицы $B_1 = (L_1 P_A)^{-1}\Phi$ и $B_2 = (L_2 P_A)^{-1}\Phi$ ассоциированны справа. Поскольку

$$L_1 P_A \in \mathbf{P}_{B_1}, \quad L_2 P_A \in \mathbf{P}_{B_2},$$

то согласно теореме 4.3

$$L_2 P_A = H L_1 P_A,$$

где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Из этого равенства вытекает, что $L_2 = H L_1$. Учитывая то, что $L_1, L_2 \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$, получаем $L_1 = L_2$, т.е. множество $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ состоит из левых неассоциированных справа делителей матрицы A, которые имеют форму Смита Φ.

Пусть теперь B – левый делитель матрицы A с формой Смита Φ. В силу теоремы 4.2 матрица B имеет вид $B = (L P_A)^{-1}\Phi Q^{-1}$, где $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Пусть $W \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$ и является представителем класса $\mathbf{G}_\Phi L$, т.е. $L = HW$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. В множестве $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ рассмотрим матрицу $B_1 = (W P_A)^{-1}\Phi$. Поскольку $L P_A = H(W P_A)$, то согласно теореме 4.3 матрицы B, B_1 ассоциированны справа, т.е. для каждого делителя матрицы A, имеющего форму Смита Φ, в множестве $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ существует матрица, ассоциированная к ней справа.

Матрица P_A определена неоднозначно. Пусть $P \in \mathbf{P}_A$ и $B = (WP)^{-1}\Phi$, где $W \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$. На основании свойства 2.2 в группе $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ существует такая матрица S, что $P = S P_A$. Следовательно, $B = (W S P_A)^{-1}\Phi$. Согласно свойству 4.2 $WS \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ и поэтому попадает внекоторый класс смежности $\mathbf{G}_\Phi V$, где $V \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$. Поэтому в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что $WS = HV$. Тогда

$$B = (WP)^{-1}\Phi = (W S P_A)^{-1}\Phi = (H V P_A)^{-1}\Phi =$$

$$= (V P_A)^{-1} H^{-1}\Phi = (V P_A)^{-1}\Phi K^{-1} = B_1 K^{-1},$$

где $B_1 \in (\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$. То есть для каждой матрицы из $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P)^{-1}\Phi$ в множестве $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ существует ассоциированная к ней справа матрица. Обратные рассуждения также будут правильными. Следовательно, независимо от выбора преобразующей матрицы P_A множество $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ состоит из всех левых неассоциированных справа делителей матрицы A, которые имеют форму Смита Φ. □

4.2. Структура матриц порождающего множества

Опишем структуру элементов порождающего множества $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Теорема 4.5. *Пусть* $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0)$,

$$\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0),$$

где $\varepsilon_k \neq 0, \varphi_t \neq 0,\ \varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}, \varphi_j|\varphi_{j+1}, i = 1, \ldots, k-1, j = 1, \ldots, t-1,\ k, t \leq n$.

Если $\Phi|\mathrm{E}$, *то множество* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ *состоит из всех обратимых матриц вида*

$$\left\| \begin{matrix} L_1 & * \\ L_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{matrix} \right\|, \tag{4.1}$$

где

$$L_1 = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1.k-1} & l_{1k} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2.k-1} & l_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_1)} l_{k1} & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_2)} l_{k2} & \ldots & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_{k-1})} l_{k.k-1} & l_{kk} \end{matrix} \right\|,$$

$$L_2 = \left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_1)} l_{k+1.1} & \ldots & \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_k)} l_{k+1.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_t}{(\varphi_t,\varepsilon_1)} l_{t1} & \ldots & \frac{\varphi_t}{(\varphi_t,\varepsilon_k)} l_{tk} \end{matrix} \right\|.$$

Если $\Phi \nmid \mathrm{E}$, *то* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $L = \|p_{ij}\|_1^n \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, т.е. L – обратимая матрица, для которой существует такая матрица $S = \|s_{ij}\|_1^n \in M_n(R)$, что

$$L\mathrm{E} = \Phi S.$$

Таким образом,

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 p_{11} & \ldots & \varepsilon_k p_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 p_{t1} & \ldots & \varepsilon_k p_{tk} & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_1 p_{t+1.1} & \ldots & \varepsilon_k p_{t+1.k} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 p_{n1} & \ldots & \varepsilon_k p_{nk} & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 s_{11} & \ldots & \varphi_1 s_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_t s_{t1} & \ldots & \varphi_t s_{tn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{4.2}$$

Поскольку $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \neq 0$, то

$$\left\| \begin{matrix} p_{t+1.1} & \ldots & p_{t+1.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nk} \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

То есть обратимая матрица L содержит нулевую $(n-t) \times k$ подматрицу. Тогда из следствия 3.1 вытекает, что $(n-t) + k \leq n$. Следовательно, $t \geq k$. С равенства (4.2) получаем $\varphi_i|\varepsilon_j p_{ij}$, $i = 1, \ldots, t, j = 1, \ldots, k$, т.е.

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} \Big| \frac{\varepsilon_j}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} p_{ij}.$$

Отсюда $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}|p_{ij}$. Поэтому

$$p_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}p'_{ij}.$$

Таким образом, матрица L имеет вид

$$L = \begin{Vmatrix} \frac{\varphi_1}{(\varphi_1,\varepsilon_1)}p'_{11} & \dots & \frac{\varphi_1}{(\varphi_1,\varepsilon_k)}p'_{1k} & p_{1.k+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_1)}p'_{k1} & \dots & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_k)}p'_{kk} & p_{k.k+1} & \dots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_t}{(\varphi_t,\varepsilon_1)}p'_{t1} & \dots & \frac{\varphi_t}{(\varphi_t,\varepsilon_k)}p'_{tk} & p_{t.k+1} & \dots & p_{tn} \\ 0 & \dots & 0 & p_{t+1.k+1} & \dots & p_{t+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & p_{n.k+1} & \dots & p_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (4.3)$$

Рассмотрим подматрицы

$$L_i = \begin{Vmatrix} p_{i1} & \dots & p_{ii} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{ni} \end{Vmatrix},$$

$i = 1, \dots, k$, матрицы L. Поскольку

$$\frac{\varphi_{i+r}}{(\varphi_{i+r},\varepsilon_{j-l})} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)} \frac{\left(\varphi_{i+r}, \frac{\varphi_{i+r}}{\varphi_i}\varepsilon_j\right)}{(\varphi_{i+r},\varepsilon_{j-l})}, \quad l < j, \qquad (4.4)$$

то $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_i)}|\left\langle L_i\right\rangle_1$. Матрицы L_i имеют размеры $(n-i+1)\times i$. Учитывая то, что

$$n - i + 1 + i = n + 1 > n,$$

на основании утверждения 3.1 получаем $\left\langle L_i\right\rangle_1 |\det L \in U(R)$. Поэтому $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_i)} \in U(R)$, $i = 1, \dots, k$. Поскольку н.о.д. элементов определяется с точностью до делителей единицы, можем считать, что

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_i)} = 1.$$

Следовательно, $\varphi_i = (\varphi_i, \varepsilon_i)$. Отсюда $\varphi_i|\varepsilon_i, i = 1, \dots, k$. Поэтому $\Phi|\mathrm{E}$. Таким образом, полученное условие является необходимым для того, чтобы множество $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ было непустым. Следовательно, если $\Phi \nmid \mathrm{E}$, то $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) = \varnothing$.

С делимости $\Phi|\mathrm{E}$ вытекает, что $\varphi_i|\varepsilon_{i+j}$, $j = 0, \dots, k-i$. Поэтому

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i+j})} \in U(R).$$

Таким образом, на элементы $p_{i.i+j}$ не накладываются никакие ограничения. То есть матрица L имеет вид (4.1).

Наоборот, предположим, что $\Phi|\mathrm{E}$ и матрица L имеет вид (4.1). Тогда легко убедиться, что

$$L\mathrm{E} = \Phi S,$$

где

$$S = \left\| \begin{array}{cc} M_1 & * \\ M_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{array} \right\|,$$

$$M_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\varepsilon_1}{\varphi_1} l_{11} & \frac{\varepsilon_2}{\varphi_1} l_{12} & \dots & \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varphi_1} l_{1.k-1} & \frac{\varepsilon_k}{\varphi_1} l_{1k} \\ \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & \frac{\varepsilon_2}{\varphi_2} l_{22} & \dots & \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varphi_2} l_{2.k-1} & \frac{\varepsilon_k}{\varphi_2} l_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_k,\varepsilon_1)} l_{k1} & \dots & \dots & \frac{\varepsilon_{k-1}}{(\varphi_k,\varepsilon_{k-1})} l_{k.k-1} & \frac{\varepsilon_k}{\varphi_k} l_{kk} \end{array} \right\|,$$

$$M_2 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_1)} l_{k+1.1} & \dots & \frac{\varepsilon_k}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_k)} l_{k+1.k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_t,\varepsilon_1)} l_{t1} & \dots & \frac{\varepsilon_k}{(\varphi_t,\varepsilon_k)} l_{tk} \end{array} \right\|.$$

Теорему доказано. $\square$

Объединяя результаты теорем 4.5, 4.1, получаем.

Теорема 4.6. *Матрица $B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$ является левым делителем матрицы $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\Phi|\mathrm{E}$ и $P_B = LP_A$, где L – обратимая матрица вида* (4.1). $\square$

Свойство 4.3. *Элемент $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}$, $i > j$, является делителем всех элементов матриц L_1, L_2, которые ограничены прямоугольником с вершинами $(i,1)$, (i,j), (t,j), $(t,1)$:*

$$\begin{array}{cccc} f_{i1}h_{i1} & f_{i2}h_{i2} & \dots & f_{ij}h_{ij} \\ f_{i+1.1}h_{i+1.1} & f_{i+1.2}h_{i+1.2} & \dots & f_{i+1.j}h_{i+1.j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{t1}h_{t1} & f_{t2}h_{t2} & \dots & f_{tj}h_{tj}, \end{array}$$

где

$$f_{pq} = \frac{\varphi_p}{(\varphi_p, \varepsilon_q)}.$$

То есть

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} | \frac{\varphi_{i+p}}{\varphi_{j-q}} h_{i+p.j-q},\ p = 0, 1, \ \dots\ , n-i, \ \ q = 0, 1, \ \dots\ , j-1.$$

Доказательство вытекает из равенства (4.4). $\square$

4.3. Свойства группы Зелиска и порождающего множества

Исследуем связи между полной линейной группой, группой Зелиска и порождающим множеством.

Пусть Е и Ф – d-матрицы над кольцом элементарных делителей R, причем $\Phi|\mathrm{E}$.

Свойство 4.4. *Выполняются включения*

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\mathrm{E} \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Доказательство. Пусть $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Поскольку $\mathrm{E} = \Phi\Delta$, то выполняются равенства

$$(HK)\mathrm{E} = H\mathrm{E}K_1 = H\Phi\Delta K_1 = \Phi(H_1\Delta K_1).$$

То есть $HK \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Поэтому $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\mathrm{E} \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. □

Чтобы сформулировать условие равенства множеств $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ и $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\mathrm{E}$, установим несколько вспомогательных утверждений.

Позначим через S_i матрицу, полученную из $n \times n$ матрицы S вычеркиванием ее первых i строк и первых i столбцов, а через $\overline{S}_i$ – матрицу, полученную вычеркиванием ее первых i строк и последних $n-i$ столбцов.

Лемма 4.1. *Пусть* E, Φ *– неособенные матрицы и* F *– нижняя унитреугольная матрица, которая записана в виде*

$$F = HS, \tag{4.5}$$

где $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $S \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. *Тогда в группах* $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ *существуют, соответственно, такие нижние унитреугольные матрицы* H_1, S_1, *что* $F = H_1 S_1$.

Доказательство. Из равенства (4.5) вытекает, что для матрицы S в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что матрица HS является нижней унитреугольной. Согласно теореме 2.7 это означает, что

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \det S_i\right) = 1, \quad i = 1,\ \dots\ ,\ n-1.$$

На основании свойства 2.4 $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \mid \left\langle \overline{S}_i \right\rangle_1$. Приняв во внимание, что матрица $\|\overline{S}_i S_i\|$ примитивная, приходим к выводу, что

$$\left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i},\ \det S_i\right) = 1, \quad i = 1,\ \dots\ ,\ n-1.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_{i+1}}{\varepsilon_i\varphi_i},\ \det S_i\right) = 1, \quad i = 1,\ \dots\ ,\ n-1. \tag{4.6}$$

Рассмотрим d-матрицу $\Gamma = \mathrm{diag}(\varepsilon_1\varphi_1,\ \dots\ ,\ \varepsilon_n\varphi_n)$. Приняв во внимание равенство (4.6) и использовав теорему 2.7, получим, что в группе $\mathbf{G}_\Gamma$ существует такая матрица K, что $KS = S_1$ является нижней унитреугольной матрицей. Заметив, что $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E} \bigcap \mathbf{G}_\Phi$, получаем

$$F = HS = (HK^{-1})(KS) = H_1 S_1,$$

где $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, $S_1 \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Поскольку F и S_1 нижние унитреугольные матрицы, то такой же будет и матрица H_1. □

Лемма 4.2. *Пусть* $(a_1,\ \dots\ ,\ a_n) = 1$ *и* $\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1},\ a_n\right) = 1$. *Тогда в группе* $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ *существует матрица с последним столбцом* $\|a_1\ \dots\ a_n\|^T$ *и определителем* 1.

Доказательство. Пусть $n = 2$. Поскольку $(a_1,\ a_2) = 1$ и

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\ a_2\right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1,\ a_2\right) = 1.$$

Поэтому существуют такие u, v, что

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1 u + a_2 v = 1.$$

Тогда искомой будет матрица

$$\left\| \begin{matrix} v & a_1 \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}u & a_2 \end{matrix} \right\|.$$

Предположим, что это утверждение верно для всех матриц, порядка меньшего за n. Пусть $(a_2,\ \dots\ ,\ a_n) = \delta$. Тогда

$$\left(\frac{a_2}{\delta},\ \dots\ ,\ \frac{a_n}{\delta}\right) = 1.$$

Поскольку $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} \mid \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}$ и $\frac{a_n}{\delta} \mid a_n$, то

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2},\ \frac{a_n}{\delta}\right) = 1.$$

По предположению индукции в группе $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)}$ существует матрица вида

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} & \frac{a_2}{\delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} & \frac{a_n}{\delta} \end{matrix} \right\| = U_1,$$

причем $\det D = 1$. Следовательно,

$$\det \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} & a_n \end{matrix} \right\| = \delta.$$

Рассмотрим матрицу

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} x_2 & u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} x_n & u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} & a_n \end{matrix} \right\| = V,$$

где $x_1, \ \ldots \ , \ x_n$ – неизвестные. Тогда

$$\det V = x_1\delta - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} x_2 a_1 \Delta_1 + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} x_n a_1 \Delta_{n-1},$$

где

$$\Delta_i = \det \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i-1.1} & \ldots & u_{i-1.n-2} \\ u_{i+1.1} & \ldots & u_{i+1.n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку матрица

$$D = \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} \end{matrix} \right\|$$

состоит из первых $n-2$ столбцов обратимой матрицы U_1, то

$$\langle D \rangle = (\Delta_1, \ \ldots \ , \ \Delta_{n-1}) = 1.$$

Учитывая то, что $\delta | a_n$ и

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}, \ a_n \right) = 1,$$

получаем

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}, \ \delta \right) = 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1},\ \delta\right) = 1,\ \ i = 2,\ \dots,\ n.$$

Тогда

$$\left(\delta,\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1\Delta_1,\ \dots\ ,\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}a_1\Delta_{n-1}\right) = \left(\left(\delta,\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1\Delta_1\right),\ \dots\ ,\ \left(\delta,\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}a_1\Delta_{n-1}\right)\right) =$$

$$= (\delta,\ a_1\Delta_1,\ \dots\ ,\ a_1\Delta_{n-1}) = (\delta,\ a_1(\Delta_1,\ \dots\ ,\ \Delta_{n-1})) = (\delta,\ a_1) = 1.$$

Поэтому существуют такие $x_1 = v_1,\ \dots\ ,\ x_n = v_n$, что $\det V = 1$. □

Лемма 4.3. *Пусть* Е *– неособенная матрица, причем* Ф|Е *и*

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right),$$

$i = 2,\ \dots\ ,\ n, j = 1,\ \dots\ ,\ n-1, i > j$. *Если* L *– нижняя унитреугольная матрица с* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, *то в группах* $\mathbf{G}_{\Phi}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ *существуют такие нижние унитреугольные матрицы* H, K, *что* $L = HK$.

Доказательство. Пусть $n = 2$. Рассмотрим матрицу

$$L = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21}l & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\ \varepsilon_1)} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

В кольце R существуют такие u, v, что

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v.$$

Тогда

$$L = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21}l & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}ul & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}vl & 1 \end{matrix} \right\| = HK.$$

значит, наше утверждение верно для матриц второго порядка.

Предположим его правильность для всех матриц порядка, меньше n и рассмотрим нижнюю унитреугольную матрицу

$$L = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ f_{21}l_{21} & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ f_{n-1.1}l_{n-1.1} & f_{n-1.2}l_{n-1.2} & & 1 & 0 \\ \hline f_{n1}l_{n1} & f_{n2}l_{n2} & \dots & f_{n.n-1}l_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где $f_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)}$. Обозначим

$$\Phi_n = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \dots\ ,\ \varphi_{n-1}),\ \ \mathrm{E}_n = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1}),$$

$$\Phi_1 = \operatorname{diag}(\varphi_2,\ \dots\ ,\ \varphi_n),\ \ \mathrm{E}_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_2,\ \dots\ ,\ \varepsilon_n).$$

Поскольку $L_{11} \in \mathbf{L}(\mathrm{E}_n, \Phi_n)$, то в группах $\mathbf{G}_{\Phi_n}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}_n}$ существуют, соответственно, такие нижние унитреугольные матрицы $H_1,\ K_1$, что $L_{11} = H_1 K_1$. Учитывая то, что

$$\left\| \begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\Phi,\ \left\| \begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\mathrm{E},$$

а также воспользовавшись свойствами 4.1, 4.2, получаем

$$\left\| \begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| L \left\| \begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} l'_{n1} & f_{n2} l'_{n2} & \dots & f_{n.n-1} l'_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix} \right\| = S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Поскольку $S_{22} \in \mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$, то согласно предположению индукции в группах $\mathbf{G}_{\Phi_1}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}_1}$ существуют такие нижние унитреугольные матрицы $H_2,\ K_2$, что $S_{22} = H_2 K_2$. Тогда

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2^{-1} \end{matrix} \right\| S \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2^{-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где $a \in R$. Поскольку

$$f_{n1} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right),$$

то в кольце R существуют такие $u_n,\ v_n$, что

$$f_{n1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_n + \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_n.$$

Тогда

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1}a & 0 & & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \underbrace{\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_na & 0 & & 0 & 1 \end{matrix}\right\|}_{M} \underbrace{\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}v_na & 0 & & 0 & 1 \end{matrix}\right\|}_{N}.$$

Таким образом, выполняется равенство

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2^{-1} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix}\right\| L \left\|\begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2^{-1} \end{matrix}\right\| = MN.$$

То есть

$$L = \left(\left\|\begin{matrix} H_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2 \end{matrix}\right\| M\right) \left(N \left\|\begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} K_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix}\right\|\right) = HK,$$

где $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. □

Свойство 4.5. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга $1,5$ и E – неособенная матрица, причем $\Phi|\mathrm{E}$. Для того, чтобы*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\mathrm{E}\mathbf{G}_\Phi,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right)$$

для всех $i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, n-1, i > j$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $n = 2$. Поскольку в множестве $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ существует матрица

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21} & 1 \end{matrix}\right\|, \quad f_{21} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\ \varepsilon_1)},$$

то $F = HK$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$, причем согласно лемме 4.1 матрицы H, K можно считать нижними унитреугольными, т.е.

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21} & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Следовательно,

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k.$$

Заметив, что $f_{21} | \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ и $f_{21} | \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, получаем

$$f_{21} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right).$$

Предположим, что наше утверждение верно для всех матриц порядка, меньше n. Тогда из равенства

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}_n, \Phi_n) = \mathbf{G}_{\Phi_n} \mathbf{G}_{\mathrm{E}_n}$$

вытекает

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \right),$$

$i = 2, \ \dots \ , \ n-1, \ \ j = 1, \ \dots \ , \ n-2, \ \ i > j$. Также с равенства

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1) = \mathbf{G}_{\Phi_1} \mathbf{G}_{\mathrm{E}_1}$$

вытекает

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \right),$$

$i = 3, \ \dots \ , \ n, \ \ j = 2, \ \dots \ , \ n, \ \ i > j$. И для завершения доказательства необходимости нужно показать, что

$$f_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \ \ \varepsilon_1)} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right).$$

В множестве $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ существует матрица

$$L = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

которую согласно предположению нашей теоремы и леммы 4.1 можно записать в виде $L = HS$, где H и S – нижние унитреугольные матрицы из групп $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$, соответственно. Тогда

$$H = LS^{-1} = L \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & & 0 \\ s_{21} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ s_{n-1.1} & s_{n-1.2} & & 1 & 0 \\ f_{n1}+s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| \in \mathbf{G}_\Phi.$$

С этого включения вытекает, что

$$f_{n1} + s_{n1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1}.$$

Заметив, что $s_{n1} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} s'_{n1}$, получаем

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right) | f_{n1}.$$

С другой стороны, $f_{n1} | \frac{\varphi_n}{\varphi_1}$ и $f_{n1} | \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}$, т.е.

$$f_{n1} | \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right),$$

Следовательно,

$$f_{n1} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right).$$

Достаточность. Пусть $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. На основании теоремы 2.13 матрицу L можно записать в виде $L = HVK$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$, а матрицы V, K, – нижняя и верхняя унитреугольные матрицы, соответственно. Согласно следствию 2.2 группа верхних унитреугольных матриц является подгруппой любой группы Зелиска. Поэтому $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. С учетом свойства 4.1, 4.2 из равенства

$$V = H^{-1} L K^{-1}$$

вытекает, что $V \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. В силу леммы 4.3 матрицу V можно записать в виде $V = H_1 K_1$, где $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, $K_1 \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Таким образом,

$$L = (HH_1)(K_1 K),$$

что и требовалось доказать. □

Свойство 4.6. *Выполняется равенство*

$$\mathbf{L}(\Phi, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi.$$

Доказательство этого свойства непосредственно следует из сравнения структуры матриц, из которых состоит множество $\mathbf{L}(\Phi,\Phi)$ (теорема 4.5) и групы $\mathbf{G}_\Phi$ (теорема 2.6). □

Проанализируем элементы матриц из множества $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$.

Обозначим

$$d_{ij}=\left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}\left(\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}}\left(\cdots\left(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}},\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\right),\cdots\right),\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j}\right),\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_j}\right),$$

где $i>j+1$.

Лемма 4.4. *Выполняется равенство*

$$(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}\cdots\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}=(\varphi_i,\varepsilon_j d_{ij})=s_{ij}.$$

Доказательство. Имеем

$$(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}=\left(\varphi_{j+2},\varepsilon_j\left(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}},\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\right)\right)=$$

$$=(\varphi_{j+2},\varepsilon_j d_{j+2.j})=s_{j+2.j}.$$

Предположим, что

$$(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}\cdots\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}}=(\varphi_{i-1},\varepsilon_j d_{i-1.j})=s_{i-1.j}.$$

Тогда

$$s_{i-1.j}\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_1}=$$

$$=\Bigg(\varphi_{i-1},\varepsilon_j\Bigg(\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}}\Bigg(\cdots\Bigg(\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{j+2})}{\varphi_{j+2}}\Bigg(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}},\frac{\varepsilon_{j+2}}{\varepsilon_j}\Bigg),$$

$$\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j}\Bigg),\cdots\Bigg),\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j}\Bigg)\Bigg)\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}=(\varphi_i,\varepsilon_j d_{ij})=s_{ij}.$$

Лемму доказано. □

Обозначим $f_{ij}=\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}$, $i>j$.

Свойство 4.7. *Выполняется равенство*

$$f_{ij}=f_{j+1.j}f_{j+2.j+1}\cdots f_{i.i-1}(f_{ij},d_{ij}),$$

где $i=3,4,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n-2; i>j+1.$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f_{ij}}{f_{j+1.j}f_{j+2.j+1}\cdots f_{i.i-1}} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}\frac{(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)}{\varphi_{j+1}}\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+2}}\cdots\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_i} =$$

$$= \frac{1}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}\cdots\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} = \frac{s_{ij}}{(\varphi_i,\varepsilon_j)} =$$

$$= \frac{(\varphi_i,\varepsilon_j d_{ij})}{(\varphi_i,\varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}, \frac{\varepsilon_j}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}d_{ij}\right) = (f_{ij}, d_{ij}),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.5. *Выполняется делимость* $(f_{ij}, d_{ij})|(f_{i+k.j-s}, d_{i+k.j-s})$.

Доказательство. Имеем

$$d_{i+k.j-s} = \Big(\frac{(\varphi_{i+k},\varepsilon_{i+k-1})}{\varphi_{i+k-1}}\Big(\cdots\Big(\frac{(\varphi_{j-s+3},\varepsilon_{j-s+2})}{\varphi_{j-s+2}}\Big(\frac{(\varphi_{j-s+2},\varepsilon_{j-s+1})}{\varphi_{j-s+1}},$$

$$\frac{\varepsilon_{j-s+1}}{\varepsilon_{j-s}}\Big), \frac{\varepsilon_{j-s+2}}{\varepsilon_{j-s}}\Big),\cdots\Big), \frac{\varepsilon_{i+k-1}}{\varepsilon_{j-s}}\Big) =$$

$$= \Big(\frac{(\varphi_{i+k},\varepsilon_{i+k-1})}{\varphi_{i+k-1}}\Big(\cdots\Big(\frac{(\varphi_{j-s+3},\varepsilon_{j-s+2})}{\varphi_{j-s+2}}\Big(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}d_{j+1.j-s},$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j-s}}\Big), \frac{\varepsilon_{j-s+2}}{\varepsilon_{j-s}}\Big),\cdots\Big), \frac{\varepsilon_{i+k-1}}{\varepsilon_{j-s}}\Big).$$

Поскольку $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}|\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{j-s}}$, то

$$d_{ij}|\left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}\left(\cdots\left(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}d_{j+1.j-s}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j-s}}\right),\cdots\right), \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{j-s}}\right).$$

Следовательно, $d_{ij}|d_{i+k.j-s}$. Заметив также, что $f_{ij}|f_{i+k.j-s}$, получаем $(f_{ij}, d_{ij})|(f_{i+k.j-s}, d_{i+k.j-s})$. Лемму доказано. □

Сравнивая структуру элементов матриц из группы $\mathbf{G}_\Phi$ (свойство 2.3) и множества $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ (свойство 4.7), видим их очевидное сходство. Поэтому, естественно, возникает вопрос о существовании такой d-матрицы Δ, что $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) = \mathbf{G}_\Delta$. В случае матриц второго порядка такая d-матрица Δ существует всегда. Так, если $\varphi_2 \neq 0$, то

$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) = \mathbf{G}_{\Delta_2}, \quad \text{где} \quad \Delta_2 = \operatorname{diag}\left(1,\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\right).$$

Если же $\varphi_2 = 0$, то множество $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ является группой единиц кольца верхних треугольных матриц. В случае матриц порядка, превышающего 2, такое утверждение правильно не всегда.

Пример 4.1. Пусть $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(2, 6, 12)$ и $\Phi = \mathrm{diag}(1, 2, 6)$ – целочисленные d-матрицы. На основании теоремы 4.5 множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ состоит из всех обратимых матриц вида

$$\left\| \begin{array}{ccc} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ 3l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array} \right\|.$$

Следовательно,

$$L = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right\| \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Однако матрица

$$L^2 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{array} \right\|$$

уже не принадлежит множеству $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. То есть, в этом случае, множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ мультипликативно не замкнуто. $\diamondsuit$

Ответ на вопрос, когда $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ является мультипликативной группой для матриц высших порядков, дает следующее утверждение.

Свойство 4.8. *Для того, чтобы существовала такая d-матрица Δ, что* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Delta$, *где*

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0), \ \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0),$$

$1 \le k \le n, \ 1 \le t \le n, \ n > 2, \ \Phi | \mathrm{E}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *в случае* $\det\Phi \neq 0$ *выполнялись условия* $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$ *или же*

$$\frac{f_{n1}}{f_{21} f_{32} \cdots f_{n.n-1}} \in U(R);$$

2) *в случае* $\det\Phi = 0$ *выполнялись условия* $k = t$, $(f_{k1}, d_{k1}) = 1$ *или же*

$$\frac{f_{k1}}{f_{21} f_{32} \cdots f_{k.k-1}} \in U(R).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ – неособенная матрица. Рассмотрим матрицы порядка 3. Множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ содержит матрицу

$$A_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{array} \right\|.$$

Поэтому и

$$A_3^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2f_{21} & 1 & 0 \\ 2f_{31}+f_{21}f_{32} & 2f_{32} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Следовательно,

$$2f_{31} + f_{21}f_{32} = f_{31}l_{31}.$$

На основании свойства 4.7

$$f_{31} = f_{21}f_{32}(f_{31}, d_{31}).$$

Тогда

$$f_{21}f_{32}(f_{31}, d_{31})(l_{31} - 2) = f_{21}f_{32}.$$

Поэтому

$$(f_{31}, d_{31})(l_{31} - 2) = 1.$$

Таким образом, $(f_{31}, d_{31}) = 1$.

Предположим, что наше утверждение верно для матриц, порядка меньше n. И пусть $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ – мультипликативная группа порядка n. Эта группа содержит подгруппу $1 \oplus \mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$, где

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \Phi_1 = \mathrm{diag}(\varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Отсюда следует, что множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$ также является мультипликативной группой. Поскольку множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$ состоит из обратимых матриц порядка $n-1$ вида

$$\left\| \begin{matrix} l_{22} & l_{23} & \ldots & l_{2n} \\ f_{32}l_{32} & l_{33} & \ldots & l_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n2}l_{n2} & f_{n3}l_{n3} & \ldots & l_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

то согласно предположению

$$(f_{n2}, d_{n2}) = 1. \tag{4.7}$$

Рассмотрим матрицу

$$A_n = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} & f_{n2} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Поскольку $A_n^2 = \|a_{ij}\|_1^n \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, то

$$a_{n1} = 2f_{n1} + f_{n2}f_{21} = f_{n1}l_{n1}.$$

Приняв во внимание равенство (4.7) и учитывая свойство 4.7, получим

$$f_{n2} = f_{32} \dots f_{n.n-1},$$

$$f_{n1} = f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}(f_{n1}, d_{n1}).$$

Следовательно,

$$f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}(f_{n1}, d_{n1})(l_{n1} - 2) = f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}.$$

Отсюда вытекает, что $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$.

Пусть E, Φ – особенные матрицы. На основании теоремы 4.5 множество $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ содержит нулевой $(n-t) \times k$ блок. С другой стороны, поскольку $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ является группой $\mathbf{G}_\Delta$, которая согласно теореме 2.6 содержит нулевой $(n-s) \times s$ блок. Поэтому $k = t$. Из теоремы 2.6 также вытекает, что

$$\mathbf{L}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k),\ \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)) = \mathbf{G}_{\Delta_k}.$$

Тогда на основании только что доказанного $(f_{k1}, d_{k1}) = 1$.

Достаточность. Пусть Φ – неособенная матрица. Согласно лемме 4.5

$$(f_{ij}, d_{ij}) | (f_{n1}, d_{n1}) = 1,\ i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$$

Таким образом,

$$(f_{ij}, d_{ij}) = 1,\ i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$$

Тогда основании леммы 4.7

$$f_{ij} = f_{j+1.j}f_{j+2.j+1} \dots f_{i.i-1},\ i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$$

Следовательно, искомой d-матрицей будет матрица

$$\Delta = \mathrm{diag}(1, f_{21}, f_{21}f_{32}, \dots, f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}).$$

Если Φ, E особенные матрицы, то легко убедиться, что тогда

$$\Delta = \mathrm{diag}(1, f_{21}, f_{21}f_{32}, \dots, f_{21}f_{32} \dots f_{k.k-1}, 0, \dots, 0).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что согласно свойству 4.7 условия $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$ и

$$\frac{f_{n1}}{f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}} \in U(R)$$

еквивалентны. □

Свойство 4.9. *Для того чтобы*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_{\Phi},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *если* $k = t = n$, *то* $(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ *;*

2) *если* $k < n, t = n$, *то*
   i) $\varphi_{k+1} = \varphi_{k+2} = \ldots = \varphi_n$,
   ii) $(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, k$ *;*

3) *если* $k, t < n$, *то*
   iii) $k = t$,
   iiii) $(\varphi_k, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, k-1$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $k = t = n$. Равенство множеств $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $\mathbf{G}_{\Phi}$ равносильно тому, что $L_1 = H_1$. Следовательно,

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, \quad i = 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1, i > j.$$

В частности,

$$(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Наоборот, если

$$(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right) = 1.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right) = 1, \quad i = j+1, j+2, \ldots, n.$$

Поэтому,

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right) = \varphi_j, \quad i = 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1, i > j.$$

Случай 2). Равенство множеств $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ и $\mathbf{G}_{\Phi}$ в этом случае равносильно тому, что

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} L_1 & * \\ L_2 & * \end{matrix} \right\|.$$

То есть

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = 1, i = k+2, k+3, \ldots, n, j = k+1, k+2, \ldots, n-1, i > j \tag{4.8}$$

и

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, k, i > j. \tag{4.9}$$

В частности,

$$\frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_{k+1}} = \frac{\varphi_{k+3}}{\varphi_{k+2}} = \cdots = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} = 1.$$

Таким образом,

$$\varphi_{k+1} = \varphi_{k+2} = \ldots = \varphi_n. \tag{4.10}$$

Заметив, что

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_q} = \frac{\varphi_p}{\varphi_{p-1}} \frac{\varphi_{p-1}}{\varphi_{p-2}} \cdots \frac{\varphi_{q+1}}{\varphi_q},$$

где $p > q$, получаем, что равенства (4.8) и (4.10) эквивалентны. Аналогично как и выше убеждаемся, что условия ii), (4.9) эквивалентны.

В завершение рассмотрим случай 3). Имеем

$$\left\| \begin{array}{cc} L_1 & * \\ L_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{array} \right\|.$$

Размерами нулевых подматриц будут $(n - t) \times k$ и $(n - t) \times t$. Следовательно, $k = t$. Это означает, что матрица L_2 пуста. Кроме того, рассуждения, подобные до проведенных выше, показывают, что

$$(\varphi_k, \varepsilon_j) = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, k - 1.$$

□

Свойство 4.10. *Пусть* E – *неособенная матрица и* E $=$ $\Phi\Delta$. *Если* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi$, *то* Δ *является* d*-матрицей.*

Доказательство. Матрица Δ имеет вид

$$\Delta = \operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_2}{\varphi_2}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\varphi_n}\right).$$

Рассмотрим произведение

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varphi_{i+1}} \frac{\varphi_i}{\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_i}{\varphi_{i+1}\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_i}{(\varphi_{i+1}, \varepsilon_i)[\varphi_{i+1}, \varepsilon_i]} = \mu_{i+1.i},$$

$i = 1, \ldots, n - 1$. Поскольку $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi$, то из свойства 4.9 вытекает, что $(\varphi_{i+1}, \varepsilon_i) = \varphi_i$. Поэтому

$$\mu_{i+1.i} = \frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_i}{\varphi_i[\varphi_{i+1}, \varepsilon_i]} = \frac{\varepsilon_{i+1}}{[\varphi_{i+1}, \varepsilon_i]}.$$

Поскольку $\varphi_{i+1}|\varepsilon_{i+1}$ и $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$, то $[\varphi_{i+1},\varepsilon_i]|\varepsilon_{i+1}$. Тобто $\mu_{i+1.i}\in R$ и
$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varphi_{i+1}}=\frac{\varepsilon_i}{\varphi_i}\mu_{i+1.i}.$$
$i=1,\ldots,n-1$. Таким образом, Δ является d-матрицей. $\square$

Заметим, что из того условия, что Δ является d-матрицей, не следует, что $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathbf{G}_\Phi$.

Пример 4.2. Пусть $\mathrm{E}=\mathrm{diag}(a,a^3)$, $\Phi=\mathrm{diag}(1,a)$, $a\neq0$. Тогда $\Delta=\mathrm{diag}(a,a^2)$. При этом $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_2(R)$, а группа $\mathbf{G}_\Phi$ состоит из всех обратимых матриц вида
$$\left\|\begin{matrix} h_{11} & h_{12}\\ ah_{21} & h_{22}\end{matrix}\right\|.$$

Свойство 4.11. *Для того, чтобы*
$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_n(R),$$
необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_n|\varepsilon_1$.

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 4.5 множество $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ состоит из матриц вида (4.1). Поскольку
$$\left\|\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & \ldots & 1 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & \ldots & 0 & 0\end{matrix}\right\|\in\mathrm{GL}_n(R)=\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi),$$
то матрицы из множества $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ не содержат в нижнем левом углу нулевой блок. Это равносильно тому, что $\varphi_n\neq0$, причем
$$\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}=1.$$
То есть $\varphi_n=(\varphi_n,\varepsilon_1)$. Следовательно, $\varphi_n|\varepsilon_1$.

Достаточность. Поскольку $\varphi_n|\varepsilon_1$, то $\varphi_n|\varepsilon_j$, $j=1,\ldots,n$. Отсюда вытекает, что $\varphi_i|\varepsilon_j$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,k$. Тогда
$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}=1.$$
То есть
$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_n(R).$$ $\square$

Пусть
$$\Gamma=\mathrm{diag}\,(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n),\ \ \Delta=\mathrm{diag}\,(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_n),$$
– неособенные d-матрицы.

Теорема 4.7. *Для того, чтобы* $\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left(\det \frac{1}{\delta_1}\Delta,\ \det \frac{1}{\gamma_1}\Gamma\right) = 1.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\left(\det \frac{1}{\delta_1}\Delta,\ \det \frac{1}{\gamma_1}\Gamma\right) = \sigma \neq 1$$

и $\frac{\gamma_r}{\gamma_1}$ – такой первый из диагональных элементов матрицы $\frac{1}{\gamma_1}\Gamma$, что

$$\left(\frac{\gamma_r}{\gamma_1}, \sigma\right) = \sigma_1 \neq 1.$$

Пусть также $\frac{\delta_s}{\delta_1}$ – такой первый из диагональных элементов матрицы $\frac{1}{\delta_1}\Delta$, что

$$\left(\frac{\delta_s}{\delta_1}, \sigma_1\right) = \sigma_2 \neq 1.$$

При этом

$$\left(\frac{\delta_{s-1}}{\delta_1}, \sigma_2\right) = \left(\frac{\gamma_{r-1}}{\gamma_1}, \sigma_2\right) = 1.$$

Поскольку

$$\frac{\delta_s}{\delta_1} = \frac{\delta_{s-1}}{\delta_1}\frac{\delta_s}{\delta_{s-1}},$$

то, учитывая предыдущее равенство, получаем, что

$$\sigma_2 | \frac{\delta_s}{\delta_{s-1}}.$$

Отсюда вытекает, что σ_2 является делителем всех элементов матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\delta_s}{\delta_1} & \dots & \frac{\delta_s}{\delta_{s-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_n}{\delta_1} & \dots & \frac{\delta_n}{\delta_{s-1}} \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, в каждой матрице из группы $\mathbf{G}_\Delta$ в нижнем левом углу находится $(n-s+1)\times(s-1)$ матрица, все элементы которой делятся на σ_2.

Аналогично показываем, что в каждой матрице из группы $\mathbf{G}_\Gamma^T$ в верхнем правом углу находится $(r-1)\times(n-r+1)$ матрица, все элементы которой делятся на σ_2. Поскольку

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta,$$

то существуют такие матрицы $L \in \mathbf{G}_\Gamma^T$ и $H \in \mathbf{G}_\Delta$, что

$$LH = \left\| \begin{matrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{matrix} \right\| = T.$$

Тогда $L = TH^{-1}$. Матрица H^{-1} имеет такую же структуру, что и матрица H. Поэтому в матрице L в левом верхнем углу находится $(n-s+1)\times(s-1)$ матрица, а в правом верхнем углу – $(r-1)\times(n-r+1)$ матрица, все элементы которых делятся на σ_2.

Если $n - s + 1 \leqslant r - 1$, то матрица L содержит

$$(n-s+1) \times ((s-1) + (n-r+1))$$

подматрицу, все элементы которой делятся на σ_2. Поскольку

$$(n-s+1) + (s-1) + (n-r+1) = (n+1) + (n-r) \geqslant n+1,$$

то согласно утверждению 3.1 $\sigma_2 \mid \det L$, что противоречит обратимости этой матрицы.

Если $n - s + 1 > r - 1$, то матрица L содержит

$$(r-1) \times ((s-1) + (n-r+1))$$

подматрицу, все элементы которой делятся на σ_2. Поскольку

$$(r-1) + (s-1) + (n-r+1) = n+s-1 = (n+1) + (s-2) \geqslant n+1,$$

то и в этом случае $\sigma_2 \mid \det L$ – противоречие. Таким образом, $T \notin \mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta$. Следовательно, $\mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta \neq \mathrm{GL}_n(R)$ – противоречие.

Достаточность. Пусть $A = \|a_{ij}\|_1^2 \in \mathrm{GL}_2(R)$ и

$$\left(a_{11},\ \frac{\delta_2}{\delta_1} a_{12} \right) \ = \ \sigma.$$

Из теоремы 6.3 вытекает, что в группе $\mathbf{G}_\Delta$ существует такая матрица H, что

$$AH = \left\| \begin{matrix} \sigma & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\delta_2}{\delta_1},\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \ = \ 1, \quad \text{и} \quad \sigma \,\Big|\, \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

то

$$\left(\sigma,\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \ = \ 1.$$

Поэтому в группе $\mathbf{G}_\Gamma^T$ найдется такая матрица L, для которой

$$\det(LAH) = 1$$

и

$$LAH = \begin{Vmatrix} 1 & a \\ b & c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$A = \underbrace{\left(L^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}\right)}_{L_1} \underbrace{\left(\begin{Vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} H^{-1}\right)}_{H_1},$$

где $L_1 \in \mathbf{G}_\Gamma^T$ и $H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$. Таким образом, теорема верна для матриц второго порядка.

Будем считать, что наше предположение верно для матриц порядка $n-1$. Пусть $A = \|a_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$. Рассуждая аналогично, как и выше, найдем в группах $\mathbf{G}_\Gamma^T$ и $\mathbf{G}_\Delta$ такие матрицы L и H, что

$$LAH = \begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Согласно предположению обратимую матрицу A_{n-1} можно записать в виде

$$A_{n-1} = L_{n-1} H_{n-1},$$

где

$$L_{n-1} \in \mathbf{G}_{\Gamma_1}^T, \quad H_{n-1} \in \mathbf{G}_{\Delta_1}, \quad \Gamma_1 = \mathrm{diag}\,(\gamma_2, \ \ldots, \ \gamma_n),$$
$$\Delta_1 = \mathrm{diag}\,(\delta_2, \ \ldots, \delta_n).$$

Следовательно,

$$A = \left(L^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{n-1} \end{Vmatrix}\right) \left(\begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{n-1} \end{Vmatrix} H^{-1}\right).$$

Заметив, что

$$\begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{n-1} \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_\Gamma^T, \quad \begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{n-1} \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_\Delta,$$

убеждаемся в правильности нашего утверждения. Теорема доказана. □

Раздел 5.
Факторизация матриц

5.1. Отдельные случаи факторизаций матриц

В предыдущем разделе установлены условия делимости и ассоциированности матриц. В этом разделе показывается взаимосвязь свойств множества $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ со свойствами делителей матриц, которые порождены этим множеством.

Везде, если это специально не оговорено, R – кольцо элементарных делителей.

Теорема 5.1. *Матрица $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ имеет единственный с точностью до ассоциированности делитель с формой Смита Φ тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi.$$

Доказательство. С теоремы 4.4 вытекает, что матрица A имеет единственный с точностью до ассоциированности делитель с формой Смита Φ, тогда и только тогда, когда $\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) = \{I\}$, т.е. $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi$. □

Условия равенства множеств $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $\mathbf{G}_\Phi$ в терминах инвариантных множителей указаны в свойстве 4.9.

Если матрица A имеет форму Смита E, $P \in \mathbf{P}_A$ и Φ – d-матрица такая, что $\mathrm{E} = \Phi\Delta$, то

$$A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1} = (P^{-1}\Phi)(\Delta Q^{-1}) = (P^{-1}\Phi U^{-1})(U\Delta Q^{-1}),$$

где $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. Отсюда вытекает, что множество $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ является множеством левых делителей матрицы A с формой Смита Φ. Сразу же возникает вопрос о том – исчерпывает ли это множество все левые делители матрицы A с формой Смита Φ. Полный ответ получен в следующей теореме.

Теорема 5.2. *Множество $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ состоит из всех левых делителей матрицы $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ с формой Смита Φ тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\mathrm{E}.$$

Доказательство. Необходимость. На основании следствия 4.1 множество $(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ является множеством всех левых делителей матрицы A с формой Смита Φ. Пусть

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R).$$

Это равносильно тому, что для каждой матрицы L с $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ и V с $\mathrm{GL}_n(R)$ существуют такие матрицы $P \in \mathbf{P}_A$ и $U \in \mathrm{GL}_n(R)$, что

$$(LP_A)^{-1}\Phi V = P^{-1}\Phi U.$$

Поскольку $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A$, то в группе $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ существует такая матрица K, что $P = KP_A$. Следовательно,

$$(LP_A)^{-1}\Phi V = (KP_A)^{-1}\Phi U.$$

Отсюда получаем

$$(KL^{-1})\Phi = \Phi(UV^{-1}).$$

Это означает, что $KL^{-1} = H \in \mathbf{G}_{\Phi}$, т.е. $L = H^{-1}K$. Учитывая то, что $H^{-1} \in \mathbf{G}_{\Phi}$, получаем $L \in \mathbf{G}_{\Phi}\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Следовательно, $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) \subseteq \mathbf{G}_{\Phi}\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Поскольку согласно свойству 4.4 $\mathbf{G}_{\Phi}\mathbf{G}_{\mathrm{E}} \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$, то $\mathbf{G}_{\Phi}\mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$.

Достаточность. Имеем

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = (\mathbf{G}_{\Phi}\mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = (\mathbf{G}_{\Phi}(\mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A))^{-1}\times$$

$$\times\Phi\mathrm{GL}_n(R) = (\mathbf{G}_{\Phi}\mathbf{P}_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{G}_{\Phi}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R).$$

Теорема доказана. □

Условия равенства множеств $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}\mathbf{G}_{\Phi}$ над кольцом Безу стабильного ранга 1,5 сформулированы в свойстве 4.5.

В теореме 5.1 указаны условия, при которых матрица A имеет только один с точностью до ассоциированности делитель с формой Смита Φ. В следующей теореме рассмотрен другой "крайний"случай – когда все матрицы с заданной формой Смита являются делителями матрицы A.

Теорема 5.3. *Для того, чтобы каждая матрица с формой Смита Φ была левым делителем матрицы $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi|\mathrm{E}$ и*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) = \mathrm{GL}_n(R).$$

Доказательство. Необходимость условия $\Phi|\mathrm{E}$ доказано в теореме 4.6.

Пусть U – обратимая матрица. Тогда матрица $(UP_A)^{-1}\Phi$ является левым делителем матрицы A. Множество всех левых делителей матрицы A с формой Смита Φ имеет вид $(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$. Следовательно, во множестве $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ найдется такая матрица L, а в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ такая V, что

$$(UP_A)^{-1}\Phi = (LP_A)^{-1}\Phi V^{-1}.$$

Отсюда получаем $LU^{-1}\Phi = \Phi V^{-1}$. Это означает, что $LU^{-1} = H \in \mathbf{G}_\Phi$, т.е. $U = H^{-1}L$. Следовательно, каждую обратимую матрицу U можно представить как произведение матриц из группы $\mathbf{G}_\Phi$ и множества $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Таким образом,

$$\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Поскольку выполняется и обратное включение, то

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Согласно свойству 4.1

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Поэтому $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathrm{GL}_n(R)$.

Достаточность. Пусть $B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$ – произвольная матрица с формой Смита Φ. Поскольку

$$P_B P_A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi),$$

то на основании теоремы 4.1 матрица B является левым делителем матрицы A. $\square$

Условия равенства множеств $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $\mathrm{GL}_n(R)$ на языке инвариантных множителей сформулированы в свойстве 4.11.

Согласно теореме 1.11, если матрицы A, B – левые делители друг друга, то они ассоциированны справа. Рассмотрим случай, когда они одновременно являются левыми и правыми делителями друг друга.

Теорема 5.4. *Пусть матрица B – левый делитель матрицы A, а матрица A – правый делитель матрицы B. Тогда матрицы A, B ассоциированны справа и слева.*

Доказательство. Пусть матрицы A, B имеют формы Смита E, Φ, соответственно. Поскольку $A = BC$, то на основании теоремы 4.1 $\Phi | \mathrm{E}$. Также выполняется равенство $B = DA$. Перейдя к транспонированным матрицам, получим $B^T = A^T D^T$, т.е. матрица A^T – левый делитель матрицы B^T. Поскольку операция транспонирования не меняет определителей всех подматриц матрицы A, то учтя теорему 2.2 получаем $A^T \sim A \sim \mathrm{E}$. Поэтому $\mathrm{E} | \Phi$. Это означает, что соответствующие инвариантные множители матриц Φ и E ассоциированны. Отсюда следует, что матрицы A, B можно записать в виде

$$A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}, \ B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}.$$

Поскольку $A = BC$, то согласно теореме 4.1 $P_B = LP_A^{-1}$, где $L \in \mathbf{L}(\Phi, \Phi)$. На основании свойства 4.6 $\mathbf{L}(\Phi, \Phi) = \mathbf{G_\Phi}$. Приняв во внимание теорему 4.3, приходим к выводу, что матрицы A и B ассоциированны справа.

По аналогичным соображениям из равенства $B^T = A^T D^T$ вытекает, что и матрицы B^T и A^T являются ассоциированными справа. Следовательно, матрицы A и B ассоциированны слева. □

Пример 5.1. Чтобы построить пример матриц, одновременно являющихся левыми и правыми делителями друг друга, можно поступить так. Пусть

$$A = P_1^{-1}\Phi Q_1^{-1} = P_2^{-1}\Phi Q_2^{-1}.$$

Тогда матрицы

$$M = P_1^{-1}\Phi Q_2^{-1}, \quad N = P_2^{-1}\Phi Q_1^{-1}$$

собственно и будут такими. Действительно,

$$M = P_1^{-1}\Phi Q_2^{-1} = (P_1^{-1}P_2)P_2^{-1}\Phi Q_2^{-1} =$$

$$= (P_1^{-1}P_2)P_1^{-1}\Phi Q_2^{-1} = (P_1^{-1}P_2)^2 P_2^{-1}\Phi Q_2^{-1} = (P_1^{-1}P_2)^2 N.$$

Сходно показывается, что $N = M(Q_2 Q_1^{-1})^2$. ♢

5.2. Неассоциированные делители матриц и множество Казимирского

Наши дальнейшие исследования направлены на нахождение множества $\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Пусть $f \in R$. Рассмотрим фактор-кольцо R/R_f. Обозначим через $K(f)$ множество представителей смежных классов этого фактор-кольца.

Пусть

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

– неособенные d-матрицы, причем $\Phi | \mathrm{E}$. Обозначим через $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ множество нижних унитреугольных матриц вида

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} k_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} k_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} k_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} k_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

где $k_{ij} \in K\left(\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j}\right)$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i > j$.

Множество $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ называется **множеством Казимирского** в честь известного украинского алгебраиста, который впервые рассмотрел матрицы такого вида.

Установим взаимосвязь между порождающим множеством $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, множеством Казимирского $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ и группами $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$.

Теорема 5.5. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга* 1,5. *Если Φ – неособенная d-матрица, которая является делителем d-матрицы* E*, то*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R).$$

Доказательство. Пусть $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Согласно теореме 2.13 существуют $H \in \mathbf{G}_\Phi$, нижняя унитреугольная матрица S и верхняя унитреугольная матрица U, что $L = HSU$, т.е. $S = H^{-1}LU^{-1}$. Согласно следствию 2.2 группа верхних унитреугольных матриц является подгруппой любой группы Зелиска. Поэтому $U \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Воспользовавшись свойствами 4.1, 4.2, получаем, что $S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. На основании леммы 5.3 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ найдется такая матрица H_1, что $H_1 S = V \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тогда

$$L = HSU = (HH_1^{-1})(H_1 S)U = H_2 VU.$$

Заметив, что $H_2 \in \mathbf{G}_\Phi$, получаем

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R).$$

Согласно свойствам 4.1, 4.2

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi), \quad \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \mathbf{G}_\mathrm{E} = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Поскольку $U_n^{up}(R) \subset \mathbf{G}_\mathrm{E}$ і $I \in U_n^{up}(R)$, то

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Тогда из включения $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) \subset \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ вытекает, что

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R) \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Следовательно,

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R).$$

Теорема доказана. □

Следствие 5.1. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга* 1,5. *Множество*

$$(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)\, U_n^{up}(R) P)^{-1}\, \Phi \mathrm{GL}_n(R)$$

является множеством всех левых делителей матрицы $A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1}$ с формой Смита Φ.

Доказательство. На основании следствия 4.1 множество $(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ является множеством всех левых делителей матрицы A с формой Смита Φ. Приняв во внимание теорему 5.5, получаем

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = (\mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)U_n^{up}(R)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) =$$

$$= P^{-1}U_n^{up}(R)\mathbf{V}^{-1}(\mathrm{E},\Phi)\mathbf{G}_\Phi\Phi\mathrm{GL}_n(R) = P^{-1}U_n^{up}(R)\mathbf{V}^{-1}(\mathrm{E},\Phi)\Phi\mathrm{GL}_n(R) =$$

$$= (\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)\, U_n^{up}(R)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R). \qquad \square$$

Теорема 5.6. *Множество* $\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)$ *можно выбрать так, чтобы*

$$\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi) \subseteq \mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi).$$

Доказательство. Пусть $U, V \in \mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)$. Запишем их в блочном виде

$$U = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}u_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}u_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}u_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}u_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} M_1^U & \mathbf{0} \\ \hline M_2^U & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline N_1^U & N_2^U \end{array} \right\|,$$

$$V = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}v_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}v_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}v_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}v_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} M_1^V & \mathbf{0} \\ \hline M_2^V & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline N_1^V & N_2^V \end{array} \right\|.$$

Предположим, что эти матрицы являются представителями одного класса смежности множества $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ по группе $\mathbf{G}_\Phi$, т.е. $HV = U$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Поскольку множество нижних унитреугольных матриц образует группу, то матрица H также является нижней унитреугольной матрицей вида

$$H = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} M_1^H & \mathbf{0} \\ \hline M_2^H & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline N_1^H & N_2^H \end{array} \right\|.$$

Сначала рассмотрим матрицы второго порядка:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}u_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}v_{21} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}u_{21} - \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}v_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21}.$$

Заметив, что

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1},$$

получаем

$$u_{21} - v_{21} = \frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1}h_{21}.$$

То есть

$$u_{21} \equiv v_{21} \left(\operatorname{mod} \frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1} \right).$$

Поскольку

$$u_{21}, v_{21} \in K\left(\frac{\varphi_2,\varepsilon_1}{\varphi_1}\right),$$

то $u_{21} = v_{21}$. Следовательно, $V = V_1$.

Будем считать, что наше предположение верно для матриц порядка, меньше n и рассмотрим матрицы порядка n. Равенство $HV = U$ запишем в виде

$$\left\| \begin{matrix} M_1^H & \mathbf{0} \\ M_2^H & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} M_1^V & \mathbf{0} \\ M_2^V & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} M_1^U & \mathbf{0} \\ M_2^U & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку

$$M_1^H \in \mathbf{G}_{diag(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}, \quad M_1^V, M_1^U \in \mathbf{V}(\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}), \operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})),$$

то по предположению индукции $M_1^V = M_1^U$.

Аналогично из равенства

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_1^H & N_2^H \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_1^V & N_2^V \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_1^U & N_2^U \end{matrix} \right\|$$

и включений

$$N_2^H \in \mathbf{G}_{\operatorname{diag}(\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}, \quad N_2^V, N_2^U \in \mathbf{V}(\operatorname{diag}(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n), \operatorname{diag}(\varphi_2,\ldots,\varphi_n))$$

вытекает, что $N_2^V = N_2^U$, т.е. матрицы V, U отличаются друг от друга лишь элементом, который находится на позиции $(n1)$. Тогда

$$UV^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & \\ s_{n1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\| = H,$$

где

$$s_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)}(u_{n1} - v_{n1}) = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{n1}.$$

Следовательно,

$$u_{n1} - v_{n1} = \frac{(\varphi_n, \varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{n1},$$

т.е.

$$u_{n1} \equiv v_{n1} \left(\mathrm{mod} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_1)}{\varphi_1} \right).$$

Поскольку

$$u_{n1}, v_{n1} \in K\left(\frac{\varphi_n, \varepsilon_1}{\varphi_1} \right),$$

то $u_{n1} = v_{n1}$. Поэтому $V = U$, что и требовалось доказать. □

Пусть $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – неособенная d-матрица и $2 \le j_1 < j_2 \dots < j_g \le n$ – множество индексов, при которых элементы φ_i, φ_{i-1} являются неассоциированными в кольце R, $i \in \{j_1, j_2, \dots, j_g\}$.

Теорема 5.7. *Для того чтобы*

$$\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi),$$

необходимо и достаточно, чтобы каждый делитель элемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ *имел общий нетривиальный делитель с элементом* $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}$, $i = j_1, j_2, \dots, j_g$.

Перед доказательством этой теоремы установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5.1. *Пусть каждый нетривиальный делитель элемента* $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ *имеет общий делитель с* $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}$. *Тогда, если для некоторого* d *выполняется условие*

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, d \right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1}, d)} \right) = 1.$$

Доказательство. Пусть

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1}, d)}\right) = \alpha_i \neq 1.$$

Отсюда вытекает, что α_i является делителем элемента $\frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1})}$. Тогда согласно предположению леммы

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, \alpha_i\right) \neq 1$$

– противоречие. □

Лемма 5.2. *Пусть L – обратимая матрица вида*

$$L = \left\| \begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1.n-1} & l_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2.n-1} & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{array} \right\| = \|l'_{ij}\|_1^n.$$

Тогда

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, l'_{ij}, l'_{i+1.j}, \dots, l'_{nj}\right) = 1,$$

$i = 2, 3, \dots, n, \;\; j = i, i+1, \dots, n.$

Доказательство. Предположим, что

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, l'_{ij}, l'_{i+1.j}, \dots, l'_{nj}\right) = \delta_{ij} \neq 1.$$

Рассмотрим подматрицу

$$L_{ij} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_1)} l_{i1} & \dots & \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} l_{i.i-1} & l'_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{i-1})} l_{n.i-1} & l'_{nj} \end{array} \right\|$$

матрицы L. Из свойства 4.3 вытекает, что $\delta_{ij} | \langle L_{ij} \rangle_1$. Матрица L_{ij} имеет размеры $(n-i+1) \times i$. Заметив, что $n - i + 1 + i = n + 1 > n$, на основании утверждения 3.1 получаем $\delta_{ij} | \det L$. А это противоречит тому, что матрица L обратима. □

Лемма 5.3. *Пусть S – нижняя унитреугольная матрица с $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тогда в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что $HS \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.5 матрица S имеет вид

$$S = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим матрицу

$$H_0 = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

где h_{ij} – параметры, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, $i > j$.

Если $n = 2$, то

$$H_0 S = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} s_{21} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} \left(\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{21} + s_{21} \right) & 1 \end{array} \right\| = S_1.$$

Пусть

$$s_{21} \equiv k_{21} \left(\operatorname{mod} \frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} \right),$$

где $k_{21} \in K \left(\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1} \right)$. Тогда

$$k_{21} = s_{21} + \frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} r_{21},$$

где $r_{21} \in R$. Положив $h_{21} = r_{21}$, получаем $S_1 \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Будем считать, что наше предположение верно для матриц порядка меньше n и рассмотрим матрицы порядка n. Пусть $H_0 S = \|d_{ij}\|_1^n$. Тогда

$$d_{nj} = \left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} \cdots \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n.n-1} \quad 1 \right\| \times$$

$$\times \left\| \underbrace{0 \dots 0}_{j-1} \quad 1 \quad \frac{\varphi_{j+1}}{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)} s_{j+1.j} \cdots \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_j)} s_{nj} \right\|^T =$$

$$= \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} + \frac{\varphi_n}{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)} h_{n.j+1} s_{j+1.j} + \dots + \frac{\varphi_n}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_j)} h_{n.n-1} s_{n-1.j} + \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_j)} s_{nj} =$$

$$= \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_j)} \times$$

$$\times \left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{\varphi_j} h_{nj} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)} h_{n.j+1} s_{j+1.j} + \dots + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_j)} h_{n.n-1} s_{n-1.j} + s_{nj} \right),$$

$j = 1, \dots, n-1$. Пусть $j = n-1$ и

$$s_{n.n-1} \equiv k_{n.n-1} \left(\operatorname{mod} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}{\varphi_{n-1}} \right),$$

где $k_{n.n-1} \in K\left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}{\varphi_{n-1}}\right)$. Следовательно,

$$k_{n.n-1} = s_{n.n-1} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}{\varphi_{n-1}} r_{n.n-1},$$

где $r_{n.n-1} \in R$. Положим $h_{n.n-1} = r_{n.n-1}$. Пусть $j = n-2$ и

$$s_{n.n-2} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_{n-2})} r_{n.n-1} s_{n-1.n-2} \equiv k_{n.n-2} \left(\operatorname{mod} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{\varphi_{n-2}} \right),$$

где $k_{n.n-2} \in K\left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{\varphi_{n-2}}\right)$. Тогда существует такое $r_{n.n-2} \in R$, что

$$k_{n.n-2} = s_{n.n-2} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_{n-2})} r_{n.n-1} s_{n-1.n-2} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{\varphi_{n-2}} r_{n.n-2}.$$

Положим $h_{n.n-2} = r_{n.n-2}$. Продолжая описанный процесс, получим такую нижнюю унитреугольную матрицу

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} I & \mathbf{0} \\ h & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$h = \left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1} r_{n1} \quad \dots \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} r_{n.n-1} \right\|,$$

что

$$H_1 S = \left\| \begin{matrix} S' & \mathbf{0} \\ g & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где S' – нижняя унитреугольная матрица из множества

$$\mathbf{L}(\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})),$$

$$g = \left\| \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} k_{n1} \quad \dots \quad \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} k_{n.n-1} \right\|,$$

$k_{nj} \in K\left(\frac{(\varphi_n,\varepsilon_j)}{\varphi_j}\right)$, $j = 1,\ldots,n-1$. Согласно предположению индукции в группе $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}$ существует такая матрица H', что

$$H'S' \in \mathbf{V}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}),\mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})).$$

Следовательно, $(H'\oplus 1)H_1S \in \mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)$, что и требовалось доказать. □

Лемма 5.4. *Пусть* $\bar{l} = \left\| \begin{matrix} l_1 & \ldots & l_n \end{matrix} \right\|^T$ *– примитивный столбец, причем*

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}l_1,\cdots,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}l_{n-1},l_n\right)=1.$$

Тогда в группе $\mathbf{G}_\Phi$ *существует такая матрица* H, *что* $H\bar{l} = \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|^T$.

Доказательство. Существуют такие элементы $u_1,\ldots,u_n$, что

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}l_1u_1+\ldots+\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}l_{n-1}u_{n-1}+l_nu_n=1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1,\cdots,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1},u_n\right)=1.$$

Воспользовавшись теоремой 1.1 дополним примитивную строку

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 & \cdots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} & u_n \end{matrix} \right\|$$

до обратимой матрицы вида

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2 & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} & u_n \end{matrix} \right\|.$$

На основании теоремы 2.6 $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$. Поскольку

$$H_1\bar{l} = \left\| \begin{matrix} t_1 & \ldots & t_{n-1} & 1 \end{matrix} \right\|^T,$$

то

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -t_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & -t_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}_{H_2} H_1\bar{l} = \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|^T.$$

Матрица H_2 принадлежит группе $\mathbf{G}_\Phi$. Следовательно, искомой будет матрица $H = H_2 H_1$. Лемму доказано. $\square$

Вернемся к доказательству **теоремы 5.7.**

Доказательство. Необходимость. Пусть δ_i – нетривиальный делитель $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $i_1 \leqslant i \leqslant i_g$. Предположим, что

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, \delta_i\right) = 1.$$

Тогда существуют такие u, v, что

$$u\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})} + v\delta_i = 1.$$

Рассмотрим матрицу

$$L_i = I_{i-2} \oplus \left\| \begin{matrix} v & -u \\ \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})} & \delta_i \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-i}.$$

Согласно теореме 4.5 $L_i \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Матрица, составленная из последних $n-i+1$ столбцов матрицы L_i, имеет вид

$$S_i = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|,$$

Умножив ее слева на Φ_i, получим

$$\Phi_i S_i = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -u\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку $\delta_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, то

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} = \delta_i \gamma_i.$$

Тогда

$$\left(I_{i-2} \oplus \begin{Vmatrix} 1 & u\gamma_i \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \oplus I_{n-i} \right) \Phi_i S_i =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}.$$

То есть

$$\Phi_i S_i \overset{l}{\sim} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}.$$

С другой стороны, последние $n - i + 1$ столбцы каждой матрицы из множества $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ имеют вид

$$M_i = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_{i+1}}{(\varphi_{i+1}, \varepsilon_i)} l_{i+1.i} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_i)} l_{ni} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{i+1})} l_{n.i+1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi_i M_i = M_i \overset{l}{\sim} \begin{Vmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{Vmatrix}.$$

Предположим, что матрица $V_i \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ является представителем смежного класса $\mathbf{G}_\Phi L_i$, т.е. в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что $V_i = HL_i$.

На основании леммы 3.5 $\Phi_i V_i \overset{l}{\sim} \Phi_i L_i$. С этой эквивалентности вытекает, что $\Phi_i S_i \overset{l}{\sim} \Phi_i M_i$. Однако матрица $\Phi_i S_i$ имеет левую форму Эрмита

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

а матрица $\Phi_i M_i$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ I_{n-i+1} \end{matrix} \right\|.$$

Пришли к противоречию.

Достаточность. Пусть

$$L = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1.n-1} & l_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2.n-1} & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{matrix} \right\|$$

– матрица с $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$. Для доказательства нашего утверждения нужно показать, что существует такая матрица $H \in \mathbf{G}_\Phi$, что $HL \in \mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)$. Процесс доказательства разобьем на два этапа. Сначала найдем такую матрицу $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, что матрица $H_1 L$ будет нижней унитреугольной.

Если $n = 2$, то с обратимости матрицы L вытекает, что

$$\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}, l_{22} \right) = 1.$$

Согласно лемме 5.1

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, l_{22} \right) = 1.$$

Для завершения рассмотрения этого случая достаточно воспользоваться теоремой 2.7.

Предположим, что наше предположение верно для матриц порядка, меньше n и рассмотрим матрицы порядка n. На основании леммы 5.2

$$\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}, l_{nn} \right) = 1.$$

В силу леммы 5.1 также

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, l_{nn}\right) = 1.$$

Тогда

$$\delta = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n-1.n}, l_{nn}\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} l_{n-2.n}, l_{n-1.n}\right), l_{nn}\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} l_{n-2.n}, l_{n-1.n}, l_{nn}\right).$$

Опять же, согласно лемме 5.2

$$\left(\frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_{n-2})}, (l_{n-1.n}, l_{nn})\right) = 1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}}, (l_{n-1.n}, l_{nn})\right) = 1.$$

Тогда

$$\delta = \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}}\left(\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-3}} l_{n-3.n}, l_{n-2.n}\right), (l_{n-1.n}, l_{nn})\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-3}} l_{n-3.n}, l_{n-2.n}, l_{n-1.n}, l_{nn}\right).$$

Продолжая описанный процесс, получим

$$\delta = (l_{1n}, \ldots, l_{nn}) = 1.$$

согласно лемме 5.4 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H_0 , что

$$H_0 L = \left\| \begin{matrix} L' & \mathbf{0} \\ g & 1 \end{matrix} \right\|.$$

На основании свойства 4.1 $H_0 L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Поэтому

$$L' \in \mathbf{L}(\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}), \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})).$$

Согласно предположению индукции существует такая матрица $H' \in \mathbf{G}_{\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}$, что матрица $H'L'$ является нижней унитреугольной, т.е. матрица $H_1 = (H' \oplus 1) H_0' H_0$ является искомой и матрица $H_1 L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ является нижней унитреугольной.

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться леммой 5.3 и найти такую матрицу $H_2 \in \mathbf{G}_\Phi$, что $H_2 H_1 L \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$, а также использовать результаты теоремы 4.4. □

Объединяя теоремы 4.4, 5.7, получим следующий результат.

Теорема 5.8. *Множество* $(\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ *состоит из всех левых неассоциированных справа делителей матрицы* A, *которые имеют форму Смита* Φ *тогда и только тогда, когда каждый делитель элемента* $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ *имеет общий нетривиальный делитель с элементом* $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$, $i=j_1,j_2,\ldots,j_g$. □

Заметим, что если условия этой теоремы не выполняются, то множество $(\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ описывает лишь часть делителей матрицыA с формой Смита Φ.

Пример 5.2. Рассмотрим матрицу

$$A=\left\|\begin{array}{cc}5 & 0\\ 0 & 5x^3\end{array}\right\|=\mathrm{E}$$

над кольцом

$$Q=\left\{a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i \mid a_0\in\mathbb{Z},\ a_i\in\mathbb{Q},\ i\in\mathbb{N}\right\},$$

которая совпадает со своей формой Смита E. Найдем все ее левые неассоциированные справа делители матрицы с формой Смита

$$\Phi=\left\|\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 5x\end{array}\right\|.$$

Поскольку

$$x=5\left(\frac{1}{5}x\right),$$

то каждый делитель элемента $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=5x$ имеет общий делитель с элементом

$$\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}=\frac{5x}{(5x,5)}=x.$$

Тогда согласно теореме 5.8 искомое множество делителей имеет вид

$$\left\{\left\|\begin{array}{cc}1 & 0\\ xk & 1\end{array}\right\|^{-1}\Phi\right\}=\left\{\left\|\begin{array}{cc}1 & 0\\ -xk & 5x\end{array}\right\|\right\},$$

где $k\in K\left(\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1}\right)=K(5)=\{0,1,2,3,4\}$. ♢

Для кольца главных идеалов теорему 5.8 можно переформулировать на языке степеней неразложимых делителей инвариантных множителей матриц E и Φ.

Разложим элементы $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}}$, $i=j_1,j_2,\ldots,j_g$, в произведение степеней неразложимых множителей:

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}=g_{i1}^{k_{i1}}\cdots g_{il}^{k_{il}},\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}}=g_{i1}^{q_{i1}}\cdots g_{il}^{q_{il}}h_{i1}^{p_{i1}}\cdots h_{ir}^{p_{ir}}.$$

Теорема 5.9. *Пусть R – кольцо главных идеалов. Множество $(\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ состоит из всех левых неассоциированных справа делителей матрицы A, имеющих форму Смита Φ тогда и только тогда, когда $k_{ij} > q_{ij}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$, $j = 1, \ldots, l$.*

Доказательство. Запишем элемент $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$ в виде

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} = \frac{\varphi_i/\varphi_{i-1}}{\left(\varphi_i/\varphi_{i-1}, \varepsilon_{i-1}/\varphi_{i-1}\right)}, \tag{5.1}$$

$i = j_1, j_2, \ldots, j_g$. Согласно теореме 5.7 для того чтобы множество $(\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ состояло из всех левых неассоциированных справа делителей матрицы A, имеющих форму Смита Φ, необходимо и достаточно, чтобы каждый делитель элемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ имел общий делитель с элементом $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$. Приняв во внимание равенство (5.1), для того, чтобы g_{im} было делителем $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$ нужно чтобы

$$g_{im} \Big| \frac{g_{im}^{k_{im}}}{(g_{im}^{k_{im}}, g_{im}^{q_{im}})}.$$

А это возможно только тогда, когда $k_{im} > q_{im}$. □

Пример 5.3. Пусть A – целочисленная матрица с формой Смита

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(1,\ 2,\ 2^3 3^1 5^1,\ 2^5 3^2 5^2).$$

Опишем левые неассоциированные справа делители матрицы A, имеющие форму Смита $\Phi = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 2^3,\ 2^4 3^2)$. В этом случае

$$\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 r_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 2^3 3^2 r_{42} & 2\ 3\ r_{43} & 1 \end{Vmatrix},$$

где $r_{32}, r_{42} \in K(2) = \{0, 1\}$, $r_{43} \in K(3) = \{0, 1, 2\}$.

Множеством индексов, при которых элементы φ_i и φ_{i-1} не являются ассоциированными будет $\{3, 4\}$. Тогда

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_2} = 2^3 \Rightarrow k_{31} = 3,$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varphi_2} = 2^1 \Rightarrow q_{31} = 1.$$

Следовательно, $k_{31} > q_{31}$. Также

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_3} = 2^1 3^2 \Rightarrow k_{41} = 1, k_{42} = 2,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varphi_3} = 2^0 3^1 5^1 \Rightarrow q_{41} = 0, q_{42} = 1$$

и

$$k_{41} > q_{41}, k_{42} > q_{42}.$$

Поскольку выполняются все условия теоремы 5.9, то множество всех левых неассоциированных справа делителей матрицы A, имеющих форму Смита Φ, имеет вид $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$.

Если же искать делители матрицы A с формой Смита

$$\Phi_1 = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 2^3,\ 2^4 3),$$

то

$$\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi_1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 r_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 2^3 3\, r_{42} & 2\, r_{43} & 1 \end{Vmatrix},$$

где $r_{32}, r_{42} \in K(2)$, $r_{43} \in K(3)$. В этом случае

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_3} = 2^1 3^1 \Rightarrow k_{41} = k_{42} = 1,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varphi_3} = 2^0 3^1 \Rightarrow q_{41} = 0,\ q_{42} = 1.$$

и $k_{42} = q_{42} = 1$. То есть условия теоремы 5.9 не выполняются и множество $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ не исчерпывает всех левых неассоциированных справа делителей матрицы A, имеющих форму Смита Φ_1. В частности, в множестве $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1}\Phi$ не существует матрицы ассоциированной справа к матрице

$$P_A^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi_1,$$

которая является левым делителем матрицы A. $\diamondsuit$

5.3. Значение матрицы на системе корней диагональных элементов d-матрицы

Воспользуемся полученными результаты для описания делителей полиномиальных матриц. Для их изложения нам понадобятся результаты этого подраздела.

Пусть F – алгебраически замкнутое поле характеристики ноль и $G(x) = \|g_{ij}(x)\|$ – $n \times p$ матрица над $F[x]$. Под производной матрицы $G(x)$ будем понимать $G'(x) = \|g'_{ij}(x)\|$. Производные высших порядков будем обозначать через $G''(x)$, $G'''(x)$, $\ldots$, $G^{(t)}(x)$.

Пусть
$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_1)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}$$
– унитальный полином над F.

Определение 5.1. [54] Значением матрицы $G(x)$ на системе корней полинома $\varphi(x)$ называют числовую матрицу
$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ \cdots \\ H_r \end{matrix} \right\|, \quad H_i = \left\| \begin{matrix} G'(\alpha_i) \\ G''(\alpha_i) \\ \cdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{matrix} \right\|,$$
$i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ r.$

В определении матрицы $M_{G(x)}(\varphi)$ существенную роль играет порядок записи полинома $\varphi(x)$ в виде произведения сомножителей $(x-\alpha_j)^{k_j}$. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, матрицу $M_{G(x)}(\varphi)$ также будем обозначать через $M_{G(x)}[\alpha_1^{k_1},\ \ldots\ ,\ \alpha_r^{k_r}]$.

Пусть $g_i(x)$ — i-ая строка $n \times m$ матрицы $G(x)$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ n$, и
$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ \ldots\ ,\ \ \varphi_n(x)),$$
где $\varphi_i(x)$ – унитальные полиномы, $i = 1,\ \ldots\ ,\ n$.

Определение 5.2. Значением матрицы $G(x)$ на системе корней диагональных элементов матрицы $\Phi(x)$ называют матрицу
$$M_{G(x)}(\Phi) = \left\| \begin{matrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ M_{g_2(x)}(\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{matrix} \right\|,$$
где блок $M_{g_j(x)}(\varphi_j)$ отсутствует, если $\deg \varphi_j(x) = 0$.

Свойство 5.1. *Если* $L = \|l_{ij}\|$ *–* $p \times t$ *матрица над* F, *то*

$$M_{G(x)L}(\Phi) = M_{G(x)}(\Phi)L.$$

Доказательство. Поскольку

$$g_i(x)L = \left\| \begin{matrix} g_{i1}(x) & \dots & g_{ip}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} l_{11} & \dots & l_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{p1} & \dots & l_{pt} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} g_{i1}(x)l_{11} + \dots + g_{ip}(x)l_{p1} & \dots & g_{i1}(x)l_{1t} + \dots + g_{ip}(x)l_{pt} \end{matrix} \right\|,$$

то $(g_i(x)L)' =$

$$= \left\| \begin{matrix} g'_{i1}(x)l_{11} + \dots + g'_{ip}(x)l_{p1} & \dots & g'_{i1}(x)l_{1t} + \dots + g'_{ip}(x)l_{pt} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} g'_{i1}(x) & \dots & g'_{ip}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} l_{11} & \dots & l_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{p1} & \dots & l_{pt} \end{matrix} \right\| = g'_iL, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда вытекает, что

$$(g_i(x)L)^{(j)} = g_i^{(j)}L.$$

Следовательно,

$$M_{g_i(x)L}(\varphi_i(x)) = M_{g_i(x)}(\varphi_i(x))L.$$

Поэтому

$$M_{G(x)L}(\Phi) = \left\| \begin{matrix} M_{g_1(x)L}(\varphi_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)L}(\varphi_n) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1)L \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n)L \end{matrix} \right\| = M_{G(x)}(\Phi)L.$$

Доказательство завершено. □

Свойство 5.2. *Выполняется равенство*

$$M_{G_1(x)+G_2(x)}(\Phi) = M_{G_1(x)}(\Phi) + M_{G_1(x)}(\Phi).$$

Доказательство не вызывает никаких затруднений. □

Свойство 5.3. *Для того чтобы*

$$M_{G(x)}(\Phi) = \mathbf{0}, \tag{5.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы $G(x) = \Phi(x)Q(x)$.

Доказательство. Условие (5.2) означает, что когда $\deg \varphi_i(x) \geqslant 1$, то

$$M_{g_i(x)}(\varphi_i(x)) = \mathbf{0}.$$

Это равносильно тому, что каждый элемент строки $g_i(x)$ кратный $\varphi_i(x)$, т.е. матрица $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x)q_{11}(x) & \dots & \varphi_1(x)q_{1p}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n(x)q_{n1}(x) & \dots & \varphi_n(x)q_{np}(x) \end{array} \right\| =$$

$$= \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ \dots \ , \quad \varphi_n(x)) \left\| \begin{array}{ccc} q_{11}(x) & \dots & q_{1p}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1}(x) & \dots & q_{np}(x) \end{array} \right\| = \Phi(x)Q(x).$$

Что и требовалось доказать. □

Пусть $A(x)$ – неособенная матрица над $F[x]$. Для нее существуют такие обратимые матрицы $P(x)$ и $Q(x)$, что

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) = \Phi(x), \tag{5.3}$$

где $\Phi(x)$ – форма Смита матрицы $A(x)$. Исследуем свойства группы $\mathbf{G}_\Phi$ и значение матрицы $G(x)$ на системе корней диагональных элементов матрицы $\Phi(x)$.

Пусть

$$\Phi_\alpha = \operatorname{diag}((x-\alpha)^{s_1}, \ (x-\alpha)^{s_2}, \ \dots \ , \ (x-\alpha)^{s_n}) \tag{5.4}$$

— матрица над $F[x]$, причем $s_i \geqslant 0, \ s_i \leqslant s_{i+1}, \ i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ n-1$. Пусть

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{\nu_1}, \ \ s_{\nu_1+1} = s_{\nu_1+2} = \dots = s_{\nu_2}, \ \dots$$

$$\dots \ , s_{\nu_{p-1}+1} = s_{\nu_{p-1}+2} = \dots = s_{\nu_p} = s_n,$$

где $s_{\nu_1} < s_{\nu_2} < \dots < s_{\nu_p}$. Выберем в группе $\mathbf{G}_{\Phi_\alpha}$ произвольную матрицу $H(x) = \|h_{ij}\|_1^n$. Разобьем ее на блоки таким образом, чтобы диагональными блоками были матрицы

$$H_{11} = \left\| \begin{array}{ccc} h_{11} & \dots & h_{1.\nu_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{\nu_1.1} & \dots & h_{\nu_1.\nu_1} \end{array} \right\|, \ H_{22} = \left\| \begin{array}{ccc} h_{\nu_1+1.\nu_1+1} & \dots & h_{\nu_1+1.\nu_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{\nu_2.\nu_1+1} & \dots & h_{\nu_2\nu_2} \end{array} \right\|, \ \cdots$$

$$\cdots \ , \ H_{pp} = \left\| \begin{array}{ccc} h_{\nu_{p-1}+1.\nu_{p-1}+1} & \dots & h_{\nu_{p-1}+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n.\nu_{p-1}+1} & \dots & h_{nn} \end{array} \right\|.$$

Лемма 5.5. $\det H_{ii}(\alpha) \neq 0, \;\; i = 1, \, 2, \, \dots \, , \, p.$

Доказательство. В силу теоремы 2.6 элементы матрицы $H(x)$ имеют вид $h_{ij} = (x-\alpha)^{s_i - s_j} q_{ij}$ для всех $i > j$. Поэтому матрица $H(\alpha)$ имеет вид

$$H(\alpha) = \left\| \begin{array}{cccc} H_{11}(\alpha) & * & & * \\ \mathbf{0} & H_{22}(\alpha) & & * \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & H_{pp}(\alpha) \end{array} \right\| .$$

Следовательно,

$$\det H(\alpha) = H_{11}(\alpha) H_{22}(\alpha) \cdots H_{pp}(\alpha).$$

Поскольку матрица $H(x)$ обратима, то $\det H(\alpha) \neq 0$. Таким образом,

$$H_{11}(\alpha) H_{22}(\alpha) \cdots H_{pp}(\alpha) \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что $\det H_{ii}(\alpha) \neq 0, \;\; i = 1, \, 2, \, \dots \, , \, p.$ □

Лемма 5.6. *Пусть $D(x)$ – $n \times m$ матрица над $F[x]$ и $H(x) \in \mathbf{G}_{\Phi_\alpha}$. Тогда*

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha) = F M_{D(x)}(\Phi_\alpha),$$

где F – обратимая матрица, причем

$$\det F = \pm \left| H_{11}(\alpha) \right|^{s_{\nu_1}} \; \left| H_{22}(\alpha) \right|^{s_{\nu_2}} \cdots \left| H_{pp}(\alpha) \right|^{s_{\nu_p}} .$$

Доказательство. Имеем

$$M_{H(x)D(x)}(\, \Phi_\alpha) = \left\| \begin{array}{c} M_{h_1(x)D(x)}[\, \alpha^{(s_1)}] \\ M_{h_2(x)D(x)}[\, \alpha^{(s_2)}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{h_n(x)D(x)}[\, \alpha^{(s_n)}] \end{array} \right\| ,$$

где $h_i(x)$ – i-ая строка матрицы $H(x)$. Применив к производной произведения двух полиномиальных матриц формулу Лейбница, получим

$$(h_i(x)D(x))^{(q)} = h_i^{(q)}(x) D(x) + \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} h_i^{(q-1)}(x) D'(x) + \; \cdots \; +$$

$$+ \begin{pmatrix} q \\ q-2 \end{pmatrix} h_i^{''}(x) D^{(q-2)}(x) + \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} h_i^{'}(x) D^{(q-1)}(x) + h_i(x) D^{(q)}(x).$$

Таким образом, $M_{h_i(x)D(x)}[\,\alpha^{(s_i)}] =$

$$= \left\| \begin{array}{c} h_i(\alpha)D(\alpha) \\ h_i'(\alpha)D(\alpha) + h_i(\alpha)D'(\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_i^{(s_i-1)}(\alpha)D(\alpha) + \begin{pmatrix} s_i - 1 \\ 1 \end{pmatrix} h_i^{(s_i-2)}(\alpha)D'(\alpha) + \cdots + h_i(\alpha)D^{(s_i-1)}(\alpha) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} h_i(\alpha) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ h_i'(\alpha) & h_i(\alpha) & & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & & \\ h_i^{(s_i-1)}(\alpha) & \begin{pmatrix} s_i - 1 \\ 1 \end{pmatrix} h^{(s_i-2)} & \ldots & h_i(\alpha) \end{array} \right\| M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_i)}] =$$

$$= R_{s_i} M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_i)}], \;\; i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Следовательно,

$$M_{H(x)D(x)}(\,\Phi_\alpha) = \left\| \begin{array}{cc} R_{s_k} & \mathbf{0} \\ R_{s_{k+1}} & \mathbf{0} \\ \cdots & \\ R_{s_n} & \end{array} \right\| M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}] = RM_{D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}]. \qquad (5.5)$$

Приняв во внимание структуру элементов блоков матрицы $H(x)$, стоящих под ее главной диагональю, видим, что матрица R содержит нулевые столбцы. Вычеркнув их, получим некоторую матрицу L. Вычеркнем в матрице $M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}]$ те строки, которые соответствуют вычеркнутым столбцам матрицы R. Полученную матрицу путем перестановки строк приведем к матрице $M_{D(x)}(\Phi_\alpha)$. Таким образом, равенство (5.5) равносильно равенству

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha) = LTM_{D(x)}(\,\Phi_\alpha),$$

где T – матрица перестановок. В свою очередь, для матрицы L существуют такие матрицы перестановок M, N, что в матрице $L_1 = MLN$ первыми s_{ν_1} диагональными блоками будет матрица $H_{11}(\alpha)$, следующими s_{ν_2} – матрица $H_{22}(\alpha)$, и т.д. последними s_{ν_p} – матрица $H_{pp}(\alpha)$. При этом структура матрицы $L_1 = MLN$ такова, что

$$\det L_1 = \pm\,|H_{11}(\alpha)|^{s_{\nu_1}}\ |H_{22}(\alpha)|^{s_{\nu_2}} \cdots |H_{pp}(\alpha)|^{s_{\nu_p}}\,.$$

Поскольку $L_1 = MLN = M(LT)T^{-1}N$, то $LT = M^{-1}L_1N^{-1}T = F$. Заметив, что матрицы перестановок M, N, T имеют определители ± 1, получаем, что и

$$\det F = \pm\,|H_{11}(\alpha)|^{s_{\nu_1}}\ |H_{22}(\alpha)|^{s_{\nu_2}} \cdots |H_{pp}(\alpha)|^{s_{\nu_p}}\,.$$

На основании леммы 5.5 $\det F \neq 0$. Лемму доказано. $\square$

Пример 5.4. Пусть $\Phi_0(x) = \mathrm{diag}(x,\ x,\ x,\ x^2,\ x^2,\ x^3)$. Матрицы из группы $\mathbf{G}_\Phi$ имеют вид

$$H(x) = \left\| \begin{array}{ccc|cc|c} h_{11}(x) & h_{12}(x) & h_{13}(x) & h_{14}(x) & h_{15}(x) & h_{16}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & h_{23}(x) & h_{24}(x) & h_{25}(x) & h_{26}(x) \\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & h_{33}(x) & h_{34}(x) & h_{35}(x) & h_{36}(x) \\ \hline xh_{41}(x) & xh_{42}(x) & xh_{43}(x) & h_{44}(x) & h_{45}(x) & h_{46}(x) \\ xh_{51}(x) & xh_{52}(x) & xh_{53}(x) & h_{54}(x) & h_{55}(x) & h_{56}(x) \\ \hline x^2h_{61}(x) & x^2h_{62}(x) & x^2h_{63}(x) & xh_{64}(x) & xh_{65}(x) & h_{66}(x) \end{array} \right\|.$$

Нулевыми столбцами матрицы R будут $7, 8, 9, 13 - 17$ столбцы. После их вычеркивания и соответствующей перестановки строк и столбцов получим

$$L_1 = \left\| \begin{array}{ccc|cc|cc|ccc} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & h_{44} & h_{45} & 0 & 0 & h_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{54} & h_{55} & 0 & 0 & h_{56} & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & * & h_{44} & h_{45} & * & h_{46} & 0 \\ * & * & * & * & * & h_{54} & h_{55} & * & h_{56} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & h_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & h_{66} \end{array} \right\|,$$

где $h_{ij} = h_{ij}(0)$. Нетрудно убедиться, что

$$\det L_1 = \pm \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{44} & h_{45} \\ h_{54} & h_{55} \end{vmatrix}^2 h_{66}^3.$$

$\diamondsuit$

Рассмотрим общий случай. Пусть

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

– неособенная d-матрица с унитальными полиномами на главной диагонали и

$$\det \Phi(x) = (x - \alpha_1)^{t_1} (x - \alpha_2)^{t_2} \cdots (x - \alpha_q)^{t_q}.$$

Тогда матрицу $\Phi(x)$ можно записать в виде

$$\Phi(x) = \Phi_{\alpha_1}(x)\Phi_{\alpha_2}(x) \cdots \Phi_{\alpha_q}(x),$$

где матрицы $\Phi_{\alpha_i}(x)$ имеют вид (5.4).

Свойство 5.4. *Существует такая обратимая матрица* K, *что*

$$KM_{G(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Легко убедиться, что перестановкой строк матрицу $M_{G(x)}(\Phi)$ можно привести к виду (5.6), т.е. K является матрицей перестановок а следовательно, обратима. $\square$

Теорема 5.10. *Пусть* $D(x)$ *–* $n \times m$ *матрица над* $F[x]$ *и* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$. *Тогда существует такая обратимая матрица* N, *что*

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = NM_{D(x)}(\Phi).$$

Доказательство. Из свойства 5.4 вытекает, что существует такая обратимая матрица T, что

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = T \begin{Vmatrix} M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix}.$$

На основании леммы 5.6 существуют такие обратимые матрицы L_{α_i}, что

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_i}) = L_{\alpha_i} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_i}),$$

$i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ q$. Таким образом,

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ L_{\alpha_2} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{\alpha_q} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} =$$

$$= T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} T^{-1} \right) \left(T \begin{Vmatrix} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} T^{-1} \right)}_{N} M_{D(x)}(\Phi).$$

Заметив, что матрица N обратима, заканчиваем доказательство теоремы. □

Следствие 5.2. *Если* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, *то*

$$\mathrm{rang} M_{H(x)D(x)}(\ \Phi) = \mathrm{rang} M_{D(x)}(\ \Phi). \qquad \square$$

Следствие 5.3. *Если* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$ *и* $\det M_{D(x)}(\ \Phi) \neq 0$, *то и* $\det M_{H(x)D(x)}(\ \Phi) \neq 0$. □

Поставим в соответствие полиному $(x-\alpha)^k$ матрицу

$$J_{\alpha^{(k)}} = \begin{Vmatrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 2 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k-1 & \alpha \end{Vmatrix},$$

а полиному $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_l)^{k_l}$ – матрицу

$$J(\varphi) = J_{\alpha_1^{(k_1)}} \oplus \cdots \oplus J_{\alpha_l^{(k_l)}}.$$

Если $\deg \varphi_i(x) = 0$, то матрица $J(\varphi_i)$ пуста. Матрице

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x),\ \ldots\ ,\ \varphi_n(x))$$

поставим в соответствие блочно-диагональную матрицу

$$J(\Phi) = J(\varphi_1) \oplus \cdots \oplus J(\varphi_n).$$

Свойство 5.5. *Выполняется равенство*

$$M_{xG(x)}(\Phi) = J(\Phi) M_{G(x)}(\Phi).$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi_i(x) = (x-\alpha_1)^{k_{i1}} \cdots (x-\alpha_t)^{k_{it}},$$

и $g_i(x)$ – i-ая строка матрицы $G(x)$, $i = 1, \ \dots \ , n$. Тогда

$$M_{xg_i(x)}(\, x-\alpha_j)^{k_{ij}} = M_{xg_i(x)}[\, \alpha_j^{(k_{ij})}] =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \alpha_j g_i(\alpha_j) \\ g_i(\alpha_j) + \alpha_j g_i'(\alpha_j) \\ 2g_i'(\alpha_j) + \alpha_j g_i''(\alpha_j) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (k_{ij}-1) g_i^{(k_{ij}-2)}(\alpha_j) + \alpha_j g_i^{(k_{ij}-1)}(\alpha_j) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} \alpha_j & & & & 0 \\ 1 & \alpha_j & & & \\ & 2 & \alpha_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k_{ij}-1 & \alpha_j \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} g_i(\alpha_j) \\ g_i'(\alpha_j) \\ g_i''(\alpha_j) \\ \cdots \\ g_i^{(k_{ij}-1)}(\alpha_j) \end{array} \right\| =$$

$$= J_{\alpha_j^{(k_{ij})}} M_{g_i(x)}[\, \alpha_j^{(k_{ij})}].$$

Следовательно,

$$M_{xg_i(x)}(\, \varphi_i) = \left\| \begin{array}{c} M_{xg_i(x)}[\, \alpha_1^{(k_{i1})}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{xg_i(x)}[\, \alpha_t^{(k_{it})}] \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} J_{\alpha_1^{(k_{i1})}} M_{g_i(x)}[\, \alpha_1^{(k_{i1})}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_{\alpha_t^{(k_{it})}} M_{g_i(x)}[\, \alpha_t^{(k_{it})}] \end{array} \right\| =$$

$$= J(\varphi_i) M_{g_i(x)}(\, \varphi_i).$$

Таким образом,

$$M_{xG(x)}(\Phi) = \left\| \begin{array}{c} M_{xg_1(x)}(\, \varphi_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{xg_n(x)}(\, \varphi_n) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} J(\, \varphi_1) M_{g_1(x)}(\, \varphi_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J(\, \varphi_n) M_{g_n(x)}(\, \varphi_n) \end{array} \right\| = J(\Phi) M_{G(x)}(\Phi).$$

Доказательство завершено. □

5.4. Регуляризация полиномиальных матриц

Пусть $A(x)$ – неособенная $n \times n$ матрица над $F[x]$, которая записана в виде матричного полинома над F:

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \ \cdots \ + A_0.$$

Матрицу $A(x)$ называют унитальной, если $A_k = I$ – единичная матрица. Будем говорить, что $A(x)$ регуляризируется справа, если существует такая обратимая матрица $U(x)$, что

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0.$$

Лемма 5.7. *Если полиномиальная матрица $A(x)$ регуляризируется справа, то только единственным способом.*

Доказательство. Пусть существуют такие обратимые матрицы $U(x)$, $V(x)$, что

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0 = A_1(x),$$

$$A(x)V(x) = Ix^k - M_{k-1}x^{k-1} - \cdots - M_0 = A_2(x).$$

Тогда $A_2(x) = A_1(x)L(x)$, где $L(x) = U^{-1}(x)V(x)$. Поскольку $L(x)$ обратимая матрица, то $\det L(x)$ – ненулевой элемент поля F. Следовательно, $\deg\det L(x) = 0$. Поэтому

$$\deg\det A_2(x) = \deg\det(A_1(x)L(x)) =$$

$$= \deg\det A_1(x) + \deg\det L(x) = \deg\det A_1(x).$$

Заметив, что $\deg\det A_1(x) = ns$, а $\deg\det A_2(x) = nk$, приходим к выводу, что $k = s$. Таким образом,

$$Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \cdots - M_0 = (Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0)L(x). \tag{5.7}$$

Записав матрицу $L(x)$ в виде матричного полинома, умножив и приравняв матричные коэффициенты в равенстве (5.7), убеждаемся, что $L(x) = I$, т.е. $A_2(x) = A_1(x)$. Лемму доказано. □

Как было уже отмечено, для матрицы $A(x)$ существуют такие обратимые матрицы $P(x)$ и $Q(x)$, которые удовлетворяют равенство (5.3).

Теорема 5.11. *Для того, чтобы матричный полином $A(x)$ регуляризировался справа, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\det A(x) = ns$,

2) *равенство*

$$M_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \ldots\ Ix\ \ I\|}(\Phi)\ X = M_{P(x)x^s}(\Phi) \tag{5.8}$$

имело решение

Доказательство. Необходимость. Пусть существует такая обратимая матрица $U(x)$, что

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0 = K(x). \tag{5.9}$$

Поскольку

$$\deg\ \det(A(x)U(x)) = \deg\ \det(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0) = ns$$

и

$$\deg\ \det(A(x)U(x)) = \deg\ \det A(x) + \deg\ \det U(x),$$

где $\deg\ \det U(x) = 0$, то $\deg\ \det A(x) = ns$.

Из равенств (5.9) и (5.3) следует, что

$$P(x)A(x)U(x) = P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0) = \Phi(x)Q^{-1}(x)U(x).$$

На основании свойства 5.3

$$M_{\Phi(x)Q^{-1}(x)U(x)}(\Phi) = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$M_{P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0)}(\Phi) = \mathbf{0}. \tag{5.10}$$

Используя свойства 5.2, 5.1, получим

$$M_{P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0)}(\Phi) =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)x^{s-1}D_{s-1}}(\Phi) - \cdots - M_{P(x)D_0}(\Phi) =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)x^{s-1}}(\Phi)D_{s-1} - \cdots - M_{P(x)}(\Phi)D_0 =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - \left\| \begin{matrix} M_{P(x)x^{s-1}}(\Phi) & \ldots & M_{P(x)x}(\Phi) & M_{P(x)}(\Phi) \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{matrix} \right\| = M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \ldots\ Ix\ \ I\|}(\Phi) \left\| \begin{matrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{matrix} \right\|.$$

Учитывая равенство (5.10), получим

$$M_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \ldots\ Ix\ \ I\|}(\Phi) \left\| \begin{matrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{matrix} \right\| = M_{P(x)x^s}(\Phi). \tag{5.11}$$

Это означает, что уравнение (5.8) имеет решение.

Для завершения доказательства необходимости остается показать, что условие 2) не зависит от выбора преобразующей матрицы $P(x)$. Пусть $P_1(x)$ – другая левая преобразующая матрица матрицы $A(x)$. Это означает, что в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица $H(x)$, что $P_1(x)= H(x)P(x)$. Согласно теореме 5.10 существует такая обратимая матрица N, что

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = NM_{D(x)}(\Phi),$$

где $D(x)$ – произвольная $n \times m$ матрица, т.е. уравнение

$$M_{P_1(x)\|\ Ix^{s-1}\ \dots\ Ix\ \ I\|}(\Phi)\ X = M_{P_1(x)x^s}(\Phi)$$

равносильно уравнению

$$NM_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \dots\ Ix\ \ I\|}(\Phi)\ X = NM_{P(x)x^s}(\Phi)$$

которое, в свою очередь, равносильно разрешимому уравнению (5.8).

Достаточность. Пусть уравнение (5.8) разрешимо и $\left\| \begin{matrix} M_{s-1} \\ \cdots \\ M_1 \\ M_0 \end{matrix} \right\|$ – его решение. Проведя рассуждения обратные к только что сделанных, получим

$$M_{P(x)(Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots\ - M_0)}(\Phi) = \mathbf{0}.$$

Согласно свойству 5.2

$$P(x)(Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} -\ \cdots\ - M_0) = P(x)K(x) = \Phi(x)T(x). \tag{5.12}$$

Поскольку

$$ns = \deg\ \det\Phi(x) = \deg\ \det(P(x)K(x)) =$$
$$= \deg\ \det(\Phi(x)T(x)) = \deg\ \det\Phi(x) + \deg\ \det T(x),$$

то $\deg\det T(x) = 0$. Учитывая то, что матрица $P(x)K(x)$ – неособенная, получаем, что $T(x)$ является обратимой матрицей.

Умножив равенство (5.12) справа на обратимую матрицу $L(x) = T^{-1}(x)Q^{-1}(x)$, получим

$$P(x)K(x)T^{-1}(x)Q^{-1}(x) = \Phi(x)Q^{-1}(x).$$

То есть

$$K(x)L(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)Q^{-1}(x) = A(x).$$

Поскольку $A(x)L^{-1}(x) = K(x)$ унитальная матрица, то $A(x)$ регуляризируется справа. Теорема доказана. □

Эту теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 5.12. *Для того, чтобы матричный полином $A(x)$ регуляризировался справа, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\deg\ \det A(x) = ns$,

2) $\det M_{P(x)\|\ I\ \ Ix\ \ \ldots\ \ Ix^{s-1}\|}(\Phi) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость условия 1) доказана в теореме 5.11.

На основании леммы 5.7 матричный полином $A(x)$ регуляризируется справа единственным образом. Это означает, что уравнение (5.8) имеет единственное решение. А это равносильно выполнению условия 2). □

Теорема 5.13. *Пусть для полиномиальной матрицы $A(x)$ существует такая обратимая матрица $U(x)$, что*

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots\ - D_0.$$

Тогда матрицы-коэффициенты D_i находятся из равенства

$$\left\| \begin{matrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{matrix} \right\| = M^{-1}_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \ \ldots\ \ Ix\ \ I\|}(\Phi) M_{P(x)x^s}(\Phi). \tag{5.13}$$

Доказательство. Матрицы-коэффициенты D_i унитального полинома $A(x)U(x)$, как это показано во время доказательства необходимости теоремы 5.11 удовлетворяют равенство (5.11). В силу теоремы 5.12 матрица $M_{P(x)\|\ I\ \ Ix\ \ \ldots\ \ Ix^{s-1}\|}(\Phi)$ является обратимой. Следовательно, выполняется равенство (5.13). □

Следствие 5.4. *Пусть матрица $A(x)$ регуляризируется справа следующим образом:*

$$A(x)U(x) = Ix - D.$$

Тогда матрица D находится из равенства

$$D = T^{-1}J(\Phi)T,$$

где $T = M_{P(x)}(\Phi)$.

Доказательство. На основании теоремы 5.13 и свойства 5.5 получаем следующие равенства

$$D = M^{-1}_{P(x)}(\Phi)M_{P(x)x}(\Phi) = M^{-1}_{P(x)}(\Phi)J(\Phi)M_{P(x)}(\Phi),$$

что и требовалось доказать. □

5.5. Один метод построения формы Жордана

Используем полученные результаты для поиска формы Жордана матриц над F. Для этого несколько модифицируем понятие значения строки $g(x)$ на системе корней полинома

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}.$$

Обозначим

$$\tilde{M}_{g(x)}(f(x)) = \left\| \begin{array}{c} \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_1^{(k_1)}] \\ \cdots \\ \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_m^{(k_m)}] \end{array} \right\|,$$

где

$$\tilde{M}_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}] = \left\| \begin{array}{c} 1g(\alpha_i) \\ \frac{1}{1!}g'(\alpha_i) \\ \frac{1}{2!}g''(\alpha_i) \\ \cdots \\ \frac{1}{(k_i-1)!}g^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{array} \right\|.$$

Легко заметить, что

$$\tilde{M}_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}] = T_{\alpha_i^{(k_i)}} M_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}],$$

где

$$T_{\alpha_i^{(k_i)}} = \operatorname{diag}\left(1,\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \ldots\ ,\ \frac{1}{(k_i-1)!}\right).$$

Пусть $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$. Обозначим

$$\tilde{M}_{G(x)}(\Phi) = \left\| \begin{array}{c} \tilde{M}_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{M}_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{array} \right\|.$$

Очевидно, что

$$\tilde{M}_{G(x)}(\Phi) = T_\Phi M_{G(x)}(\Phi),$$

где T_Φ – диагональная матрица, которая является прямой суммой всех матриц $T_{\alpha_{ij}}^{(k_{ij})}$.

Теорема 5.14. *Пусть $A \in M_n(F)$ и $A(x) = Ix - A$ – ее характеристическая матрица с формой Смита $\Phi(x)$ и $P(x) \in \mathbf{P}_{A(x)}$. Тогда матрица*

$$J_*(\Phi) = \tilde{M}_{P(x)}(\Phi)\, A \tilde{M}_{P(x)}^{-1}(\Phi)$$

является формой Жордана матрицы A.

Доказательство. Очевидно, что матрица $A(x) = Ex - A$ регуляризируется справа единичной матрицей. Согласно теореме 5.12 это означает, что

$$\det M_{P(x)}(\Phi) \neq 0 \ \Rightarrow \ \det \tilde{M}_{P(x)}(\Phi) \neq 0.$$

Поскольку матрица $A(x)$ регуляризируется справа единственным образом, то на основании следствия 5.4

$$A = M^{-1}_{P(x)}(\Phi) J(\Phi) M_{P(x)}(\Phi). \tag{5.14}$$

Прямыми расчетами проверяем, что

$$T_{\alpha^{(k)}} J_{\alpha^{(k)}} T^{-1}_{\alpha^{(k)}} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \frac{1}{1!} & & & \\ & & \frac{1}{2!} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{1}{(k_i-1)!} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 2 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k-1 & \alpha \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1! & & & \\ & & 2! & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & (k_i-1)! \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 1 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \alpha \end{Vmatrix}$$

является клеткой Жордана, которая соответствует элементарному делителю $(x-\alpha)^k$. Поэтому матрица $T_\Phi J(\Phi) T^{-1}_\Phi$ является жордановой матрицей.

Запишем равенство (5.14) в виде

$$A = M^{-1}_{P(x)}(\Phi) J(\Phi) M_{P(x)}(\Phi) =$$

$$= \left(M^{-1}_{P(x)}(\Phi) T^{-1}_\Phi\right) \left(T_\Phi J(\Phi) T^{-1}_\Phi\right) \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Phi)\right) =$$

$$= \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Phi)\right)^{-1} J_*(\Phi) \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Phi)\right) = \tilde{M}^{-1}_{P(x)}(\Phi) J_*(\Phi) \tilde{M}_{P(x)}(\Phi),$$

что и требовалось доказать. □

Пример 5.5. Приведем матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{Vmatrix}$$

к ее форме Жордана.

Сначала найдем форму Смита ее характеристической матрицы $A(x) = Ex - A$:

$$P(x)\ (Ex - A)\ Q(x) = \operatorname{diag}(1,\ 1,\ (x-1)^3) = \Phi(x),$$

где

$$P(x) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & x+7 \\ x-2 & 4x-7 & -x^2-5x+12 \end{array} \right\|,$$

$$Q(x) = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -4 & -4x^2+5x-4 \\ 0 & 1 & x^2-x-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|.$$

Потом строим ее преобразующую матрицу:

$$\tilde{M}_{P(x)}\,(\Phi) = \tilde{M}_{\|\,x-2 \quad 4x-7 \quad -x^2-5x+12\,\|}\,(x-1)^3 = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| = T.$$

Заметив,что

$$T^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|,$$

получаем

$$TAT^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

– форма Жордана матрицы A. ♢

5.6. Определяющая матрица и ее свойства

Для описания неассоциированных делителей матриц над кольцами элементарных делителей мы использовали множество Казимирского $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$. Сходную роль в нахождении унитальних делителей полиномиальных матриц играет определяющая матрица [57]. Этот подраздел посвящен изучению ее свойств.

Пусть

$$\mathrm{E}(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \ldots,\ \varepsilon_n(x)),\ \ \Phi(x) = \operatorname{diag}\,(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$$

– неособенные d-матрицы над $F[x]$, причем $\Phi(x)|\mathrm{E}(x)$, $\deg\det\Phi(x) = nr$.

Определяющей матрицей называется матрица

$$V(\mathrm{E},\Phi)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}k_{21} & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}k_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}k_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}k_{n,n-1} & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (5.15)$$

где

$$k_{ij}=\begin{cases} 0, & (\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j,\\ k_{ij0}+k_{ij1}x+\ldots+k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}, & (\varphi_i,\varepsilon_j)\neq\varphi_j, \end{cases}$$

$$h_{ij}=\deg\frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varphi_j}-1,\ i=2,3,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n-1,\ i>j,$$

где k_{ijl} – параметры, $i=2,3,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n-1$.

В дальнейшем под выражением $\frac{f}{g}(\alpha)=0$ будем понимать значение частного полиномов $f(x)$, $g(x)$ на элементе $\alpha\in F$.

Свойство 5.6. *Если*

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}(\alpha)=0,\ \ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}(\alpha)\neq 0,\ \ i>j,$$

то

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\alpha)k_{ij}(\alpha)\neq 0.$$

Доказательство. Предположим, что $k_{ij}(x)=0$. Следовательно, $(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j$. Тогда выполняется равенство

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}=\frac{\varepsilon_i\varphi_i(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varepsilon_j\varphi_i\varphi_j}=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{(\varepsilon_i\varphi_i,\varepsilon_i\varepsilon_j)}{\varphi_i\varepsilon_j}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}(\alpha)=0$, а это противоречит условию утверждения.

Заметив, что $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}|\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$ и приняв во внимание, что $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}(\alpha)\neq 0$, получаем $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\alpha)\neq 0$, т.е.

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\alpha)k_{ij}(\alpha)\neq 0.$$

□

Свойство 5.7. *Если* $k_{ij}(x)=0, i>j$, *то*

$$k_{ij}(x)=k_{i-1.j}(x)=\ldots=k_{j+1.j}(x)=0. \qquad (5.16)$$

Доказательство. Согласно условию утверждения $(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j$. Поскольку $\varphi_t | \varphi_i$, $t = i-1, i-2, \ldots, j+1$, то $(\varphi_t, \varepsilon_j) | (\varphi_i, \varepsilon_j)$. С другой стороны, $\varphi_j | \varepsilon_j$ и $\varphi_i | \varphi_t$, т.е. $\varphi_j | (\varphi_t, \varepsilon_q)$. Таким образом, $(\varphi_i, \varepsilon_j) | (\varphi_t, \varepsilon_q)$. Следовательно, $(\varphi_t, \varepsilon_q) = \varphi_q$, $t = i-1$, $i-2, \ldots, j+1$. А это и означает выполнение равенств (5.16). □

Рассмотрим произведение матриц

$$V(\mathrm{E}, \Phi) T(x) = U(x),$$

где $T(x) \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Обозначим через $U_i(x)$ подматрицу матрицы $U(x)$, полученную вычеркиванием первых i строк и первых i столбцов матрицы $U(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Согласно формуле Бине-Коши

$$\det U_i(x) = \sum_j |V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)|\, |T_{ji}(x)| + \det T_i(x),$$

где $\sum\limits_j |V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)|\, |T_{ji}(x)|$ – сумма произведений всех возможных миноров максимального $(n-i)$-го порядка матрицы $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)$, построенных на последних строках матрицы $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)$, за исключением минора унитреугольной матрицы, равной единице, на соответствующие миноры того же порядка матрицы $T(x)$, $T_i(x)$ – подматрицы матрицы $T(x)$, полученные вычеркиванием первых i строк и первых i столбцов матрицы $T(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Через $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ будем обозначать матрицу $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)$, в которой переменная x заменена на $\alpha \in F$.

Лемма 5.8. *Для того, чтобы*

$$\det U_i(\alpha) = \sum_j |V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)|\, |T_{ji}(\alpha)| + \det T_i(\alpha) = 0, \tag{5.17}$$

необходимо и достаточно, чтобы все слагаемые этой суммы равнялись нулю.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Для доказательства необходимости достаточно заметить, что миноры $|V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)|$ является суммой произведений элементов поля F и параметров k_{ijl}, $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$. При этом набор параметров, которые встречаются в каждом таком миноре, не повторяется ни в одном другом. □

Теорема 5.15. *Выполняется равенство*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}(x), \det U_i(x) \right) = 1, \;\; i = 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого $i = r$

$$\left(\frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r}(x), \det U_r(x)\right) = \delta(x).$$

Пусть α – корень полинома $\delta(x)$, т.е. $\delta(\alpha) = 0$. Обозначим

$$E_r(x) = \left\| \begin{matrix} \frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_1}(x) & \dots & \frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(x) \\ \frac{\varepsilon_{r+2}}{\varepsilon_1}(x) & \dots & \frac{\varepsilon_{r+2}}{\varepsilon_r}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}(x) & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_r}(x) \end{matrix} \right\|, \quad F_r(x) = \left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_1}(x) & \dots & \frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r}(x) \\ \frac{\varphi_{r+2}}{\varphi_1}(x) & \dots & \frac{\varphi_{r+2}}{\varepsilon_r}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}(x) & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_r}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Припустим, что $\frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(\alpha) = 0$. Тогда, согласно свойству 2.4, $E_r(\alpha) = \mathbf{0}$, т.е. матрица $T(\alpha)$ имеет вид

$$T(\alpha) = \left\| \begin{matrix} * & * \\ \mathbf{0} & T_r(\alpha) \end{matrix} \right\|.$$

На основании леммы 5.8 равенство (5.17) выполняется только когда $|T_r(\alpha)| = 0$. Следовательно, $|T(\alpha)| = 0$, а это противоречит обратимости матрицы $T(x)$.

Предположим, что в матрице $E_r(\alpha)$ нет ни одного нуля. Согласно предположению $\frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r}(\alpha) = 0$. Приняв во внимание свойство 2.4 получаем $F_r(\alpha) = \mathbf{0}$. На основании свойства 5.6 в матрице

$$\left\| \begin{matrix} \mu_{r+1.1}(\alpha) & \dots & \mu_{r+1.r}(\alpha) \\ \mu_{r+2.1}(\alpha) & \dots & \mu_{r+2.r}(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1}(\alpha) & \dots & \mu_{nr}(\alpha) \end{matrix} \right\|, \quad \mu_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)}(\alpha) k_{ij}(\alpha),$$

нет ни одного нулевого элемента. Согласно лемме 5.8 равенство (5.17) выполняется, когда все миноры $T_{jr}(\alpha)$ и $T_r(\alpha)$ равны нулю. Отсюда следует, что $|T(\alpha)| = 0$ – противоречие.

Предположим, что в матрице $E_r(\alpha)$ есть нули. Пусть

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}(\alpha) = 0, \quad \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{q+1}}(\alpha) \neq 0, \quad \frac{\varepsilon_{p-1}}{\varepsilon_q}(\alpha) \neq 0.$$

Согласно следствию 2.4 частное $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}$ находится на первой поддиагонали матрицы $T(x)$. В матрице $E_r(\alpha)$ есть только один такой элемент, а именно $\frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(\alpha)$, т.е. $(p, q) = (r+1, r)$. Следовательно, $\frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(\alpha) = 0$, а этот случай мы уже рассмотрели. Это означает, что нули в матрице $E_r(\alpha)$ могут располагаться только так

$$a)\ E_r(\alpha) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \divideontimes \end{matrix} \right\|, \quad b)\ E_r(\alpha) = \left\| \begin{matrix} \divideontimes \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \quad c)\ E_r(\alpha) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \divideontimes \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим случай a). Для упрощения изложения доказательства реализуем его на примере матрицы седьмого порядка. Общность доказательства от этого не пострадает. Итак, пусть $n = 7, r = 3$ и матрица $E_3(\alpha)$ имеет вид

$$E_3(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right\|,$$

где все $*$ – не нули. На основании свойства 2.5 матрица $T(\alpha)$ имеет вид

$$T(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & t_{42} & t_{43} & & W & & \\ 0 & t_{52} & t_{53} & & & & \\ 0 & t_{62} & t_{63} & & & & \\ 0 & t_{72} & t_{73} & & & & \end{array} \right\|, \quad t_{ij} \neq 0.$$

Поскольку $F_3(\alpha) = \mathbf{0}$, то в силу свойства 5.6 матрица $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ имеет вид

$$V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & \mathbf{0} & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & & & \\ \hline \cdot & \mu_{42} & \mu_{43} & 1 & & & \\ \cdot & \mu_{52} & \mu_{53} & \cdot & 1 & & \\ \cdot & \mu_{62} & \mu_{63} & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & \mu_{72} & \mu_{73} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|, \quad \mu_{\mathrm{ij}} \neq 0.$$

Все миноры максимального порядка, которые построены на последних четырех строках и последних шести столбцах матрицы $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$, не нули и содержат переменные, отсутствующие во всех других. Поэтому равенство (5.17) выполняется только тогда, когда все миноры максимального порядка матрицы W равны нулю. Тогда, согласно следствию 3.2 $|T(\alpha)| = 0$ – противоречие.

Случай b). Пусть

$$E_3(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

На основании свойства 2.5 матрица $T(\alpha)$ имеет вид

$$T(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{array} \right\| = \| \; t_{ij} \; \|_1^7.$$

Матрица $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ имеет вид

$$V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & \mathbf{0} & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & & & \\ \hline \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & 1 & & & \\ \mu_{51} & \mu_{52} & \mu_{53} & \cdot & 1 & & \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|, \quad \mu_{\mathrm{ij}} \neq 0.$$

Все миноры максимального порядка матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccccc|cc} \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{51} & \mu_{52} & \mu_{53} & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|,$$

содержащие ее последние два столбца, ненулевые. Поэтому равенство (5.17) выполняется только когда все соответствующие миноры максимального порядка матрицы $T(\alpha)$ равны нулю. Все такие миноры имеют вид

$$\det \left\| \begin{array}{cc|cc} t_{i4} & t_{i5} & t_{i6} & t_{i7} \\ t_{j4} & t_{j5} & t_{j6} & t_{j7} \\ \hline 0 & 0 & t_{66} & t_{67} \\ 0 & 0 & t_{76} & t_{77} \end{array} \right\|, \quad 1 \leq i < j \leq 5.$$

Если

$$\det \left\| \begin{array}{cc} t_{66} & t_{67} \\ t_{76} & t_{77} \end{array} \right\| = 0,$$

то $|T(\alpha)| = 0$ – противоречие. Пусть

$$\det \left\| \begin{array}{cc} t_{66} & t_{67} \\ t_{76} & t_{77} \end{array} \right\| \neq 0.$$

Тогда все миноры второго порядка матрицы $T(\alpha)$, которые построены на ее 4 и 5 столбцах, равны нулю. То есть и в этом случае $|T(\alpha)| = 0$.

Случай c). Пусть

$$E_3(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

На основании свойства 2.5 матрица $T(\alpha)$ имеет вид

$$T(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{array} \right\| = \|\ t_{ij}\ \|_1^7.$$

Матрица $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ имеет вид

$$V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & & & & & 0 & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & & & \\ \hline \cdot & \cdot & \mu_{43} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \mu_{53} & \cdot & 1 & & \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|, \quad \mu_{\mathrm{ij}} \neq 0.$$

Рассмотрим матрицу

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc} \mu_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{53} & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|,$$

которая является подматрицей матрицы $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$. Все миноры максимального порядка, содержащие ее два последних столбца являются ненулевыми. Следовательно, соответствующие миноры матрицы $T(\alpha)$ – нули. Они имеют вид

$$\det \left\| \begin{array}{cc|cc} t_{i4} & t_{i5} & t_{i6} & t_{i7} \\ t_{j4} & t_{j5} & t_{j6} & t_{j7} \\ \hline 0 & 0 & t_{66} & t_{67} \\ 0 & 0 & t_{76} & t_{77} \end{array} \right\|, \quad 3 \leq i < j \leq 5.$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как и в случае b). Теорема доказана. □

5.7. Унитальные делители полиномиальных матриц

В 1978 году в "Докладах АН УССР"[55] была анонсирована, а в 1980 году в "Украинском математическом журнале"опубликована статья П. Казимирского [56], в которой давался исчерпывающий ответ на вопрос , который на протяжении многих лет интересовал алгебраистов, а именно, в ней указывались необходимые и достаточные условия того, что матричный полином над полем комплексных чисел имеет унитальный делитель. Через год выходит из печати его монография [57], где уже не ограниченный узкими рамками журнальной статьи, ученый изложил основные принципы его теории разложения матричных полиномов на множители. Можно с уверенностью сказать, что это были годы расцвета теории факторизации полиномиальных матриц – в течение достаточно короткого промежутка времени, кроме уже упомянутых работ, опубликованы десятки статей, в которых при тех или иных ограничениях решалась упомянутая задача. В этом разделе освещен современный подход к ее решению.

Пусть F – алгебраически замкнутое поле характеристики ноль, $A(x)$ – неособенная $n \times n$ матрица над $F[x]$. Для нее существуют такие обратимые матрицы $P(x)$ и $Q(x)$, что

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)) = \mathrm{E}(x)$$

– форма Смита матрицы $A(x)$. Пусть$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ – d-матрица, причем $\Phi(x)|\mathrm{E}(x)$, $\deg\det\Phi(x) = nr$. Рассмотрим определяющую матрицу $V(\mathrm{E}, \Phi)$. Обозначим через $F(k)$ трансцедентне расширение поля F, полученное в результате присоединения всех параметров k_{ijl}, которые фигурируют в матрице $V(\mathrm{E}, \Phi)$.

Теорема 5.16. *Для того, чтобы с неособенной полиномиальной матрицы $A(x)$ можно было выделить левый унитальный множитель с формой Смита $\Phi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$\left(V(\mathrm{E}, \Phi)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)$$

регуляризировалась справа над $F(k)[x]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A(x) = B(x)C(x)$, где $B(x)$ – унитальный матричный полином с формой Смита $\Phi(x)$. На основании следствия 4.1 все делители матрицы $A(x)$ образуют множество

$$\left(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)\mathrm{GL}_n(F[x]).$$

Следовательно, матрицу $B(x)$ можно записать в виде

$$B(x) = \left(L(x)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)K(x),$$

где $L(x) \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $K(x) \in \mathrm{GL}_n(F[x])$. На основании теоремы 5.5

$$L(x) = H(x)V_0(x)S(x),$$

где $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, $V_0(x) \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$, $S(x) \in U_n^{up}(F[x]) \subset \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Тогда

$$B(x) = (L(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x) = (H(x)V_0(x)S(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x).$$

Согласно свойству 2.2 множество всех левых преобразующих матриц матрицы $A(x)$ имеет вид $\mathbf{P}_{A(x)} = \mathbf{G}_\mathrm{E}P$. Следовательно, $S(x)P(x) = P_0(x)$ – левая преобразующая матрица матрицы $A(x)$. Тогда

$$B(x) = (H(x)V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x) = P_0^{-1}(x)V_0^{-1}(x)H^{-1}(x)\Phi(x)K(x).$$

Поскольку

$$H^{-1}(x)\Phi(x) = \Phi(x)H_1(x),$$

где $H_1(x) \in \mathrm{GL}_n(F[x])$, то

$$B(x) = P_0^{-1}(x)V_0^{-1}(x)\Phi(x)H_1(x)K(x) = (V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)K_1(x).$$

Матрица $B(x)$ унитальная, поэтому матрица $(V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)$ также регуляризируется справа. Заменив в матрице $V_0(x)$ коэффициенты полиномов на соответствующие параметры k_{ijl}, получаем,что матрица $(V(\mathrm{E}, \Phi)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)$ регуляризуеться справа над $F(k)[x]$.

Пусть $P_1(x) \in \mathbf{P}_{A(x)}$. Покажем, что матрица

$$D(x) = (V(\mathrm{E}, \Phi)P_1(x))^{-1}\Phi(x)$$

также регуляризируется справа. Поскольку $P_1(x) = N(x)P_0(x)$, где $N(x) \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$, то

$$D(x) = (V(\mathrm{E}, \Phi)P_1(x))^{-1}\,\Phi(x) = (V(\mathrm{E}, \Phi)N(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x) =$$
$$= ((V(\mathrm{E}, \Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,\Phi(x).$$

Приняв во внимание теорему 5.15, на основании теоремы 2.7 получаем, что существует такая матрица $T(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, что $T(x)V(\mathrm{E}, \Phi)N(x)$ является нижней унитреугольной матрицей над $F(k)[x]$. В силу леммы 5.3 существует такая матрица $T_1(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, что

$$T_1(x)T(x)V(\mathrm{E}, \Phi)N(x) = V_1(\mathrm{E}, \Phi) \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Тогда

$$D(x) = \ (T_1(x)T(x)\,(V(\mathrm{E}, \Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,T_1(x)T(x)\Phi(x) =$$
$$= ((T_1(x)T(x)V(\mathrm{E}, \Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)\left(\tilde{T}(x)\tilde{T}_1(x)\right) =$$

$$= (V_1(\mathrm{E}, \Phi) P_0(x))^{-1}\, \Phi(x) T_2(x).$$

Перепозначив в матрице $V_1(\mathrm{E}, \Phi)$ параметры k_{ijl} на k'_{ijl}, получаем,что матрица $(V(\mathrm{E}, \Phi) P_1(x))^{-1}\, \Phi(x) T_2(x)$, а следовательно, и $(V(\mathrm{E}, \Phi) P_1(x))^{-1}\, \Phi(x)$ регуляризируется справа над $F(k)[x]$.

Достаточность. Рассмотрим матрицу

$$(V(\mathrm{E}, \Phi) P(x))^{-1}\, \Phi(x) = B(x).$$

Согласно условию теоремы она регуляризируется справа над $F(k)[x]$, т.е. существует такая матрица $U(x) \in \mathrm{GL}_n(F(k)[x])$, что

$$B(x) U(x) = I x^r + B_{r-1} x^{r-1} + \ldots + B_1 x + B_0 = D(x).$$

Очевидно, что матрицу $A(x)$ можно считать матрицей над $F(k)[x]$. Согласно следствию 4.1 все левые делители матрицы $A(x)$ с формой Смита $\Phi(x)$ образуют множество

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) P(x))^{-1}\, \Phi(x) \mathrm{GL}_n(F(k)[x]).$$

Поскольку $V(\mathrm{E}, \Phi) \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, то $D(x)$ является левым делителем матрицы $A(x)$:

$$A(x) = D(x) C(x).$$

На основании теоремы 5.12 матрица $B(x)$ регуляризируется справа тогда и только тогда, когда

$$\det M_{P(x) \| \, I \;\; Ix \;\; \ldots \;\; Ix^{r-1} \|}(\Phi) = f(k_{210}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}, x) \neq 0.$$

Поскольку поле F имеет характеристику нуль, то оно содержит бесконечное количество элементов. Следовательно, найдутся такие элементы $p_{210}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}$, что

$$f(p_{210}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}) \neq 0.$$

Тогда матрица $\overline{D}(x)$, которую получают из матрицы $D(x)$ заменой переменных $k_{210}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}, x$ на соответствующие элементы $p_{210}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}$ с поля F,и будет искомым унитальним делителем матрицы $A(x)$. $\square$

Применим полученные результаты к поиску решений односторонних матричных уравнений.

Пример 5.6. Решим уравнение

$$X^2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{5.18}$$

Этому уравнению соответствует полиномиальная матрица

$$A(x) = Ix^2 - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix}.$$

На основании обобщенной теоремы Безу матрица B является корнем уравнения (5.18) тогда и только тогда, когда

$$A(x) = (Ix - B)C(x).$$

То есть задача поиска корней уравнения (5.18) сводится к поиску левых унитальных делителей матрицы $A(x)$. Для этого приведем эту матрицу к ее форме Смита:

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}}_{P(x)} A(x) \underbrace{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}}_{Q(x)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 \end{Vmatrix} = \mathrm{E}(x).$$

Поскольку $\deg\ \det(Ix - B) = 3$ и поскольку форма Смита матрицы $Ix - B$ является делителем матрицы $\mathrm{E}(x)$, то потенциальными формами Смита искомых делителей будут матрицы

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ x^3),\ \ \Phi_1(x) = \mathrm{diag}(1,\ x,\ x^2).$$

Сначала опишем делители с формой Смита $\Phi(x)$.

Матрицам $\Phi(x)$, $\mathrm{E}(x)$ соответствует определяющая матрица

$$V(\mathrm{E},\ \Phi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & ax^2 + bx & 1 \end{Vmatrix},$$

где a, b – параметры. Тогда матрица $A(x)$ имеет искомый делитель тогда и только тогда, когда матрица $(V(\mathrm{E},\ \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ регуляризируется справа. Поскольку

$$\det M_{V(\mathrm{E},\ \Phi)P(x)}(\Phi) = \det M_{\|\ x^2\ \ 1\ \ ax^2+bx\ \|}(x^3) = \det \underbrace{\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 2 & 0 & 2a \end{Vmatrix}}_{T} = 2b \neq 0,$$

то на основании теорем 5.16, 5.12, 5.13 матрица $A(x)$ имеет левый унитальний делитель вида

$$B = T^{-1} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix} T = \begin{Vmatrix} 0 & ab^{-1} & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

где $b \neq 0$. Заменив ab^{-1} на параметр c, получим, что все матрицы из множества

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \end{matrix} \right\| \mid c \in F, \;\; b \in F \backslash \{0\} \right\} \qquad (5.19)$$

являются решениями уравнения (5.18). Более того, согласно теореме 5.9 это множество является множеством всех корней уравнения (5.18) с формой Смита $\Phi(x)$.

Заметив, что матрица$(V(\mathrm{E},\ \Phi_1)P(x))^{-1}\Phi_1(x)$ не регуляризируется справа, получаем, что множество (5.19) состоит из всех корней уравнения (5.18). $\diamondsuit$

5.8. Структура наибольших общих делителей матриц[1]

В этом подразделе продолжим исследования наибольшего общего делителя матриц, начатые в подразделе 1.5. Главное внимание будет сосредоточено на изучении его структуры, т.е. на его форме Смита и преобразующих матрицах. Начнем этот анализ с матриц второго порядка над кольцами Безу стабильного ранга 1,5.

Пусть A – 2×2 матрица. Для нее существуют такие обратимые матрицы P_A, Q_A, что $P_A A Q_A = \mathrm{E}$, где $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$. Рассмотрим группу $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ обратимых матриц вида

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Для удобства иногда эту группу также будем обозначать через $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Рассмотрим также матрицу $B = P_B^{-1} \Delta Q_B^{-1}$, где $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \mid \delta_2$. На основании свойства 2.2 множества левых преобразующих матриц $\mathbf{P}_B, \mathbf{P}_A$ образуют смежные классы $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B, \mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\mathrm{E} P_A$. Исследуем множество $\mathbf{P}_B \mathbf{P}_A^{-1}$.

Лемма 5.9. *Пусть $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 = S$. Тогда элемент*

$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$$

является инвариантом относительно выбора преобразующих матриц P_B и P_A.

---

[1]Результаты этого подраздела получены совместно с А. Романивым.

Доказательство. Пусть, по крайней мере, одна из матриц A, B неособенная и пусть F_A и F_B – их левые преобразующие матрицы. Тогда существуют такие $H_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ и $H_B \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{\delta_1}}$, что

$$F_A = H_A P_A,\ F_B = H_B P_B.$$

Обозначим $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Рассмотрим произведение матриц

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

где $S = P_B P_A^{-1}$. Обозначим $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Поскольку

$$H_B = \left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ s_{21} \end{array} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}.$$

Рассмотрим

$$\mu = ((\varepsilon_2, \delta_2),\ k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = \left((\varepsilon_2, \delta_2),\ \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21} \right) [\varepsilon_1, \delta_1] \right) =$$

$$= \left((\varepsilon_2, \delta_2),\ \frac{\delta_2}{\delta_1} [\varepsilon_1, \delta_1] h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21} [\varepsilon_1, \delta_1] \right).$$

Поскольку

$$\frac{\delta_2 [\varepsilon_1, \delta_1]}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то

$$(\varepsilon_2, \delta_2) \mid \frac{\delta_2}{\delta_1} [\varepsilon_1, \delta_1].$$

Следовательно,

$$\mu = ((\varepsilon_2, \delta_2),\ h_{22} s_{21} [\varepsilon_1, \delta_1]) = \tau \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau},\ \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{\tau} h_{22} s_{21} \right) =$$

$$= \tau \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau},\ h_{22} s_{21} \right),$$

где $\tau = ((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1])$. Поскольку

$$\frac{\delta_2 \left((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1] \right)}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} = \frac{(\delta_2 (\varepsilon_2, \delta_2), \delta_2 [\varepsilon_1, \delta_1])}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то
$$\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau} \,\Big|\, \frac{\delta_2}{\delta_1}\,.$$
С обратимости матрицы H_B вытекает, что
$$\left(h_{22},\ \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) = 1.$$
Поэтому и
$$\left(h_{22},\ \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau}\right) = 1.$$
Следовательно,
$$\mu = \tau\left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau},\ s_{21}\right) = \big((\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}(\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]\big) = \big((\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]\big)\,.$$
Таким образом,
$$\big((\varepsilon_2, \delta_2),\ k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]\big) = \big((\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]\big)\,.$$

Рассмотрим $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Поскольку
$$H_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{array} \right\|,$$
то
$$t_{21} = \left\| \begin{array}{cc} s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21} \end{array} \right\| = s_{21}\nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21} s_{22}.$$
Заметив, что
$$\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\big((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1]\big)} \,\Big|\, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$
и рассуждая так же, как и выше, получаем
$$\big((\varepsilon_2, \delta_2),\ t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]\big) = \big((\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]\big)\,.$$
Приняв во внимание ассоциативность кольца $M_2(R)$, завершаем рассмотрение этого случая.

Пусть
$$A \sim \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|,\quad B \sim \left\| \begin{array}{cc} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$
и $F_A \in \mathbf{P}_A$, $F_B \in \mathbf{P}_B$. Тогда существуют такие
$$H_A = \left\| \begin{array}{cc} e_1' & v_{12} \\ 0 & e_2' \end{array} \right\|,\quad H_B = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$

что $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Обозначим $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2 = S'$. Для доказательства леммы нужно показать, что s_{21} и s'_{21} отличаются на обратимый элемент кольца. Рассмотрим произведение матриц

$$S' = F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

где $S = P_B P_A^{-1}$. Запишем эти матрицы в явном виде, т.е.

$$\left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} e_1'^{-1} & * \\ 0 & e_2'^{-1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} s''_{11} & s''_{12} \\ s_{21}u & s''_{22} \end{matrix} \right\|,$$

где $u = e_2 e_2'^{-1}$ – обратимый элемент кольца R. Следовательно, $s'_{21} = s_{21}u$, что и требовалось доказать. □

Лемма 5.10. *Пусть a, $b \in R$. Для того, чтобы обратимую матрицу $S = \|s_{ij}\|_1^2$ можно было записать в виде $S = L_a L_b$, где $L_a \in \mathbf{G}_a$, $L_b \in \mathbf{G}_b$, необходимо и достаточно, чтобы $s_{21} = (a, b)t$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $S = L_a L_b$, где $L_a \in \mathbf{G}_a$, $L_b \in \mathbf{G}_b$. Запишем эти матрицы в развернутом виде

$$S = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ al_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ bh_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| = L_a L_b.$$

Отсюда получаем, что

$$\left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} l'_{11} & l'_{12} \\ al_{21}h_{11} + bl_{22}h_{22} & l'_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то есть

$$s_{21} = al_{21}h_{11} + bl_{22}h_{22}.$$

А это означает, что $s_{21} = (a, b)t$.

Достаточность. Если $a = b = 0$, то $s_{21} = 0$. Тогда $S \in \mathbf{G}_a = \mathbf{G}_b$ и доказательство очевидно.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то $s_{21} = bt$, т.е. $S \in \mathbf{G}_b$.

Рассмотрим случай, когда $a, b \neq 0$. С обратимости матрицы S вытекает, что

$$(s_{21}, s_{22}) = 1.$$

На основании теоремы 1.9 существуют такие k_{12}, k_{22}, что

$$s_{21}k_{12} + s_{22}k_{22} = 1,$$

где $(k_{22}, b) = 1$. Следовательно, $(k_{12}b, k_{22}) = 1$. Отсюда вытекает, что существуют такие k_{11}, k_{21}, что

$$k_{11}k_{22} - bk_{21}k_{12} = 1.$$

Это означает, что матрица $K_1 = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ bk_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}$ принадлежит группе $\mathbf{G}_b$. Тогда

$$SK_1 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ (a,b)t & s_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ bk_{21} & k_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix} = S_1.$$

Поэтому

$$\begin{Vmatrix} 1 & -g_{12} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} S_1 = H_1 S_1 = \begin{Vmatrix} q_{11} & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix} = S_2,$$

где $H_1 \in \mathbf{G}_a$. Поскольку матрица S_2 обратима, то q_{11} является обратимым элементом кольца R. Тогда

$$\begin{Vmatrix} q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} S_2 = H_2 S_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix},$$

где $H_2 \in \mathbf{G}_a$. Поскольку $H_1, H_2 \in \mathbf{G}_a$, то $H_3 = H_2 H_1 \in \mathbf{G}_a$ и

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix} = H_3 S K_1.$$

В кольце R существуют такие u и v, что

$$(a,b)g_{21} = (au + bv)g_{21} = aug_{21} + bvg_{21}.$$

Рассмотрим матрицы

$$H_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ aug_{21} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_a, \quad K_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ bvg_{21} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_b.$$

Тогда $H_3 S K_1 = H_4 K_2$, т.е.

$$S = (H_3^{-1} H_4)(K_2 K_1^{-1}).$$

Заметив, что $H_3^{-1} H_4 \in \mathbf{G}_a$, $K_2 K_1^{-1} \in \mathbf{G}_b$, убеждаемся в правильности нашего утверждения. □

Лемма 5.11. *Пусть*

$$A = P_A^{-1} \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{Vmatrix} Q_A^{-1}, \; B = P_B^{-1} \begin{Vmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{Vmatrix} Q_B^{-1}$$

– *матрицы над* R *и*

$$D = P_D^{-1} \left\| \begin{array}{cc} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{array} \right\| Q_D^{-1}, \; T = P_T^{-1} \left\| \begin{array}{cc} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{array} \right\| Q_T^{-1},$$

причем

$$A = DA_1, \;\; B = DB_1, \;\; A = TA_2, \;\; B = TB_2.$$

Тогда если $\gamma_1 | \varphi_1 = (\varepsilon_1, \; \delta_1)$ *и* $\gamma_2 | \varphi_2$, *то* $D = TN$.

Доказательство. Согласно теореме 4.1 имеем:

$$A = DA_1 \Rightarrow P_D = L_A P_A, \text{ где } L_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}},$$
$$B = DB_1 \Rightarrow P_D = L_B P_B, \text{ где } L_B \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}.$$

По аналогичным соображениям получаем:

$$A = TA_2 \Rightarrow P_T = K_A P_A, \text{ где } K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}},$$
$$B = TB_2 \Rightarrow P_T = K_B P_B, \text{ где } K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \delta_1)}}.$$

Рассмотрим произведение

$$P_T P_D^{-1} = K_A P_A P_A^{-1} L_A^{-1} = K_A L_A^{-1} =$$

$$= \underbrace{\left\| \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)} k_{21} & k_{22} \end{array} \right\|}_{K_A} \underbrace{\left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|}_{L_A^{-1}}.$$

То есть

$$P_T P_D^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} \right) l_{21} & l_{22} \end{array} \right\|.$$

На основании свойства 1.4

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} \right) = \frac{(\gamma_2, \varphi_2)}{(\gamma_2, \varphi_2, \varepsilon_1)}.$$

Поскольку $\gamma_2 \, | \varphi_2$, то

$$\frac{(\gamma_2, \varphi_2)}{(\gamma_2, \varphi_2, \varepsilon_1)} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}.$$

Следовательно,

$$P_T P_D^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right\| = M. \qquad (5.20)$$

С другой стороны,

$$P_T P_D^{-1} = K_B P_B P_B^{-1} L_B^{-1} = K_B L_B^{-1}.$$

Аналогично показываем, что

$$P_T P_D^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & \nu_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}\nu_{21} & \nu_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} \right\| = M. \tag{5.21}$$

Из равенств (5.20) и (5.21) вытекает, что $\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}\,|m_{21}$ и $\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}\,|m_{21}$, т.е.

$$\left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}\right] |m_{21}\,.$$

Согласно свойству 1.6,

$$\left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}\right] = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,(\varepsilon_1,\delta_1))}.$$

Поскольку $(\varepsilon_1,\delta_1) = \varphi_1$, то

$$\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,(\varepsilon_1,\delta_1))} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varphi_1)}.$$

Следовательно, $M \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varphi_1)}}$. Согласно условию утверждения матрица $\operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$ является делителем матрицы $\operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2)$. Поэтому на основании теоремы 4.1 $D = TN$. Лемму доказано. □

Лемма 5.12. *Пусть A и B – особенные матрицы и* $P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & s \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|$. *Тогда*

1) *для произвольных матриц $P'_A \in \mathbf{P}_A$ и $P'_B \in \mathbf{P}_B$ имеем*

$$P'_A P'^{-1}_B = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ 0 & s'_{22} \end{matrix} \right\|,$$

2) $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$.

Доказательство. 1). Поскольку A и B особенные матрицы, то группы $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, $\mathbf{G}_\Delta$ совпадают с группой обратимых верхних треугольных матриц.

Пусть P'_A и P'_B – другие левые преобразующие матрицы матриц A и B. Тогда существуют такие $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ и $H_B \in \mathbf{G}_\Delta$, что

$$P'_A = H_A P_A,\ \ P'_B = H_B P_B.$$

Рассмотрим произведение матриц

$$P'_A P'^{-1}_B = H_A P_A (H_B P_B)^{-1} = H_A P_A P_B^{-1} H_B^{-1} = H_A S H_B^{-1}.$$

Поскольку H_A и H_B^{-1} являются верхними треугольными матрицами, то и $H_A S H_B^{-1}$ также будет верхней треугольной матрицей.

2). Заметив, что

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & 1 \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| = H \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \mathbf{G}_{\Delta}$$

получаем $P_B = HP_A$, где $H \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Приняв во внимание, что $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, получаем $P_B \in \mathbf{P}_A$, т.е. $P_B \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B$. $\square$

Теорема 5.17. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга $1,5$. И пусть*

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2),\;\; B \sim \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\, \delta_2),$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тогда*

$$(A, B)_l = (L_A P_A)^{-1}\Phi = (L_B P_B)^{-1}\Phi,$$

где

$$\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\, \varphi_2) = \mathrm{diag}((\varepsilon_1, \delta_1),\;((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])),$$

а матрицы L_A и L_B удовлетворяют равенство $L_B^{-1} L_A = P_B P_A^{-1}$ и принадлежат, соответственно , группам $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$ и $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$.

Доказательство. Сразу заметим, что согласно лемме 5.9 элемент $((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$, а следовательно, и матрица Φ не зависят от выбора преобразующих матриц P_A и P_B. При этом согласно следствию 2.14 формой Смита матрицы $(A,\, B)_l$ является матрица Φ.

Сначала рассмотрим случай когда, по крайней мере, одна из матриц A, B является неособенной или когда $s_{21} \neq 0$ и они особенные.

Покажем, что матрицу $P_B P_A^{-1}$ можно записать в виде

$$P_B P_A^{-1} = MN, \tag{5.22}$$

где

$$M \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\, \delta_1)}},\;\; N \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}},\;\; \varphi_2 = ((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Используя свойство 1.5 получаем

$$\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}\right) = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, [\varepsilon_1, \delta_1])} = \frac{((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} =$$

$$= \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},\; \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} s_{21}\right) = \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},\; s_{21}\right) = \mu.$$

Поскольку $\mu | s_{21}$ то на основании леммы 5.10 матрицу $P_B P_A^{-1}$ можно представить в виде (5.22). Из этого равенства вытекает, что

$$M^{-1} P_B = N P_A.$$

Перепозначив $M^{-1} = L_B$, $N = L_A$, получаем

$$(L_A P_A)^{-1}\Phi = (L_B P_B)^{-1}\Phi = D.$$

Поскольку $\Phi\,|\mathrm{E}$ и $\Phi\,|\Delta$, а также учитывая то, что

$$L_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}} = \mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) \neq \varnothing,\;\; L_B \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\delta_1)}} = \mathbf{L}(\Delta,\Phi) \neq \varnothing,$$

на основании теоремы 4.1 матрица D является левым общим делителем матриц A и B.

Пусть $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$, где $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$, $\gamma_1\,|\gamma_2$ – другой левый общий делитель матриц A и B. Форма Смита матрицы T делит форму Смита матрицы $(A,B)_l$, которая согласно следствию 2.14 является матрицей $\Gamma|\Phi$. Поэтому $\gamma_1|\varphi_1 = (\varepsilon_1,\ \delta_1)$ и $\gamma_2|\varphi_2$. Тогда на основании леммы 5.11 матрица T является левым делителем матрицы D. Следовательно, D – левый н.о.д. матриц A, B.

В завершение рассмотрим случай, когда $s_{21} = 0$ и

$$A \sim \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ 0),\;\; B \sim \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\ 0).$$

На основании леммы 5.12 $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$. Пусть $U \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B$. Это означает, что матрицыA и B можно записать в виде

$$A = U^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1},\;\; B = U^{-1}\Delta Q_B^{-1}.$$

Рассмотрим матрицу

$$D = U^{-1}\operatorname{diag}((\varepsilon_1,\delta_1),\ 0) = U^{-1}\Phi.$$

Поскольку

$$A = \left(U^{-1}\left\|\begin{matrix}(\varepsilon_1,\delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\right)\left(\left\|\begin{matrix}\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| Q_A^{-1}\right) = DA_1,$$

$$B = \left(U^{-1}\left\|\begin{matrix}(\varepsilon_1,\delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\right)\left(\left\|\begin{matrix}\frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| Q_B^{-1}\right) = DB_1,$$

то D является общим левым делителем матриц A и B.

Пусть $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$, где $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$, $\gamma_1\,|\gamma_2$ – другой общий левый делитель матриц A и B. Следовательно, $\Gamma\,|\mathrm{E}$ и $\Gamma\,|\Delta$. Отсюда вытекает, что $\gamma_1\,|\varepsilon_1$ и $\gamma_1\,|\delta_1$, т.е. $\gamma_1\,|(\varepsilon_1,\delta_1)$. Следовательно, $\Gamma\,|\Phi$. Тогда на основании леммы 5.11 матрица T является левым делителем матрицы D. Поэтому D является левым н.о.д. матриц A и B. Теорема доказана. □

Следующий результат касается левых н.о.д. матриц более высоких порядков но при некоторых ограничениях на их формы Смита.

Лемма 5.13. *Пусть R – кольцо элементарных делителей. И пусть*

$$A \sim \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \quad B \sim \Delta = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta)$$

– неособенные матрицы над R, причем $P_B P_A^{-1} = S = \|s_{ij}\|_1^n$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. Тогда элемент

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})$$

является инвариантом относительно выбора преобразующих матриц P_B и P_A.

Доказательство. Пусть F_A и F_B – другие левые преобразующие матрицы матриц A и B. Тогда существуют такие $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ и $H_B \in \mathbf{G}_\Delta$, что

$$F_A = H_A P_A, \quad F_B = H_B P_B.$$

Рассмотрим произведение матриц

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

где $S = P_B P_A^{-1}$. Обозначим $H_B S = \|k_{ij}\|_1^n$. На основании теоремы 2.6 матрица H_B имеет вид

$$H_B = \left\| \begin{array}{cccc} h_{11} & \ldots & h_{1.n-1} & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1.1} & \ldots & h_{n-1.n-1} & h_{n-1.n} \\ \delta h_{n1} & \ldots & \delta h_{n.n-1} & h_{nn} \end{array} \right\|.$$

Следовательно,

$$k_{ni} = \left\| \begin{array}{cccc} \delta h_{n1} & \ldots & \delta h_{n.n-1} & h_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{n-1.i} \\ s_{ni} \end{array} \right\| =$$

$$= \delta(h_{n1}s_{1i} + \cdots + h_{n.n-1}s_{n-1.i}) + h_{nn}s_{ni} = \delta l_i + h_{nn}s_{ni}, i = 1, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим

$$((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 k_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}k_{n.n-1}) =$$

$$= ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \delta\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_1 h_{nn}s_{n1},\ \ldots\ ,\ \delta\varepsilon_{n-1}l_{n-1} + \varepsilon_{n-1}h_{nn}s_{n.n-1}) = d.$$

Поскольку $(\varepsilon_n, \delta)\,|\,\delta$, то

$$d = ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 h_{nn}s_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}h_{nn}s_{n.n-1}) =$$

$$= ((\varepsilon_n,\ \delta),\ h_{nn}(\varepsilon_1 s_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}s_{n.n-1}))\,.$$

С обратимости матрицы H_B вытекает, что $(h_{nn}\delta) = 1$. Следовательно, и

$$(h_{nn}, (\varepsilon_n, \delta)) = 1.$$

Таким образом,

$$((\varepsilon_n, \delta), k_{n1}\varepsilon_1, \ldots, k_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\,.$$

Обозначим $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^n$. Поскольку $H_A^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то на основании теоремы 2.6 матрица H_A^{-1} имеет вид

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccc} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1.n-1} & v_{1n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2.n-1} & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}v_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}v_{n2} & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}v_{n.n-1} & v_{nn} \end{array} \right\|.$$

Следовательно,

$$t_{ni} = \left\| \begin{array}{cccc} s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}v_{i+1.i} \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_i}v_{ni} \end{array} \right\| = s_{n1}v_{1i} + \ \ldots\ +$$

$$+s_{ni}v_{ii} + s_{n.i+1}\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}v_{i+1.i} + \ldots + s_{nn}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_i}v_{ni},\ i = 1,\quad \ldots, n-1.$$

Рассмотрим

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) =$$

$$= \ ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1 v_{11} + s_{n2}\varepsilon_2 v_{21} + \ \ldots\ + s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}v_{n-1.1} + s_{nn}\varepsilon_n v_{n1}, \ldots$$

$$\ldots, s_{n1}\varepsilon_{n-1}v_{1.n-1} + s_{n2}\varepsilon_{n-1}v_{2.n-1} + \ldots + s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}v_{n-1.n-1} + s_{nn}\varepsilon_n v_{n.n-1}).$$

Поскольку $((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})$ является делителем всех выписанных слагаемых, то

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) \mid ((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\,.$$

С другой стороны, $S = \|t_{ij}\|_1^n\, H_A$. Рассуждая аналогично, получаем

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) \mid ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\,.$$

А это значит, что

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) .$$

Приняв во внимание ассоциативность кольца $M_n(R)$, завершаем доказательство. □

Лемма 5.14. *Пусть*

$$\frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_i)} = \mu_i,$$

где $\varphi = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})$ *. Тогда* $\mu_i \,|s_{ni}$ *,* $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Поскольку

$$\mu_i = \frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, s_{ni}\varepsilon_{ni}, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_i)} =$$

$$= \frac{\left(((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}) \,, \varepsilon_i \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} s_{n.i+1}, \ldots, s_{n.n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i}\right)\right)}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)} =$$

$$= \left(\frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)}, \frac{\varepsilon_i}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} s_{n.i+1}, \ldots, s_{n.n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)}, \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} s_{n.i+1}, \ldots, s_{n.n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i}\right)\right),$$

то $\mu_i \,|s_{ni}$, $i = 1, \ldots, n-1$. □

Теорема 5.18. *Пусть R – кольцо элементарных делителей. И пусть*

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \;\; B \sim \Delta = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \delta)$$

– неособенные матрицы, причем $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тогда*

$$(A, B)_l = P_B^{-1}\Phi,$$

где $\Phi = \mathrm{diag}\,(1, \;\ldots\;, 1, \;\varphi)$, $\varphi = ((\varepsilon_n, \delta), \;\varepsilon_1 s_{n1}, \;\ldots\;, \;\varepsilon_{n-1}s_{n.n-1})$.

Доказательство. Сразу же заметим, что согласно лемме 5.13 элемент

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}),$$

а следовательно, и матрица Φ не зависят от выбора преобразующих матриц P_A и P_B.

Поскольку $\varphi \mid \delta$, то

$$B = (P_B^{-1}\Phi)\left(\operatorname{diag}\left(1, \ \ldots\ , \ 1, \ \frac{\delta}{\varphi}\right) Q_B^{-1}\right).$$

То есть матрица $D = P_B^{-1}\Phi$ является левым делителем матрицы B.

С другой стороны $\varphi|\varepsilon_n$, т.е. $\Phi|\mathrm{E}$. На основании леммы 5.14 элемент $\frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_i)}$ является делителем s_{ni}, $i = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $P_B P_A^{-1} = S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Согласно теореме 4.1 это означает, что $D = P_B^{-1}\Phi$ является левым делителем матрицы A. Таким образом, матрица $D = P_B^{-1}\Phi$ является левым общим делителем матриц A, B.

Пусть $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$ – другой левый общий делитель матриц A, B. Поскольку форма Смита матрицы T является делителем форм Смита матриц A, B, то матрица Γ имеет вид

$$\Gamma = \operatorname{diag}(1, \ \ldots\ , \ 1, \ \gamma),$$

где $\gamma\,|\varepsilon_n$ и $\gamma\,|\delta$, т.е.

$$\gamma\,|(\varepsilon_n, \delta)\ . \tag{5.23}$$

В силу теоремы 4.1

$$P_T = K_A P_A, \text{ где } K_A \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Gamma),$$
$$P_T = K_B P_B, \text{ где } K_B \in \mathbf{L}(\Delta, \Gamma).$$

Следовательно,

$$K_A P_A = K_B P_B \Rightarrow P_B P_A^{-1} = K_B^{-1} K_A.$$

Матрица $K_B^{-1}K_A$ имеет вид

$$K_B^{-1}K_A = \left\| \begin{matrix} v_{11} & \ldots & v_{1.n-1} & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1.1} & \ldots & v_{n-1.n-1} & v_{n-1.n} \\ \gamma v_{n1} & \ldots & \gamma v_{n.n-1} & v_{nn} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_1)} u_{n1} & \ldots & \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_{n-1})} u_{n.n-1} & u_{nn} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} l_{11} & \dots & l_{1.n-1} & l_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1.1} & \dots & l_{n-1.n-1} & l_{n-1.n} \\ \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_1)} l_{n1} & \dots & \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{matrix} \right\| = P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n .$$

Таким образом,

$$\frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_i)} \mid s_{ni}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

То есть

$$\gamma \mid s_{ni}(\gamma, \varepsilon_i) = (\gamma s_{ni}, \varepsilon_i s_{ni}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Отсюда вытекает, что $\gamma \mid \varepsilon_i s_{ni}$, $i = 1, \dots, n-1$. Учитывая делимость (5.23), получаем

$$\gamma \mid \ ((\varepsilon_n, \delta),\ \varepsilon_1 s_{n1},\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1} s_{n.n-1}) = \varphi.$$

Поэтому $\Gamma \,|\, \Phi$.

Поскольку $P_T = K_B P_B$ и $P_D = P_B$, то

$$P_T P_D^{-1} = K_B P_B P_B^{-1} = K_B \in \mathbf{L}(\Delta, \Gamma).$$

Учитывая то, что $\mathbf{L}(\Delta, \Gamma) = \mathbf{L}(\Phi, \Gamma)$, на основании теоремы 4.1 приходим к выводу, что матрица T является левым делителем матрицы $D = P_B^{-1}\Phi$. Следовательно, матрица $P_B^{-1}\Phi$ является наибольшим общим левым делителем матриц A и B. Теорема доказана. □

Следствие 5.5. *Матрицы A и B взаимно просты слева тогда и только тогда, когда*

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \dots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = 1. \qquad \square$$

Следствие 5.6. *Множества левых преобразующих матриц $(A, B)_l$ и B связаны между собой следующими соотношениями:*

1) $\mathbf{P}_{(A,B)_l} = \mathbf{G}_\Phi P_B$.
2) $\mathbf{P}_B \subseteq \mathbf{P}_{(A,B)_l}$.

Доведення. Равенство 1) следует из свойства 2.2.

Поскольку

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B, \ \ \mathbf{P}_{(A,B)_l} = \mathbf{G}_\Phi P_B$$

и $\mathbf{G}_\Delta \subseteq \mathbf{G}_\Phi$, то $\mathbf{P}_B \subseteq \mathbf{P}_{(A,B)_l}$. □

5.9. Структура наименьших общих кратных матриц[2]

В этом разделе установим взаимосвязи между формами Смита матриц A и B и формами Смита их наименьшего общего правого кратного а также соответствующие взаимосвязи между преобразующими матрицами этих матриц.

Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга 1,5.

Лемма 5.15. *Пусть*

$$M = P_M^{-1} \operatorname{diag}(\omega_1,\ \omega_2) Q_M^{-1},\ F = P_F^{-1} \operatorname{diag}(\tau_1,\ \tau_2) Q_F^{-1}$$

– правые общие кратные матриц

$$A = P_A^{-1} \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) Q_A^{-1},\ B = P_B^{-1} \operatorname{diag}(\delta_1,\ \delta_2) Q_B^{-1}.$$

Тогда если $\omega_1 | \tau_1$ *и* $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2 | \tau_2$, *то* $F = MN$.

Доказательство. Согласно теореме 4.1 имеем

$$P_A = L_M P_M, \text{ где } L_M \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)}},$$
$$P_B = L_{M_1} P_M, \text{ где } L_{M_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2, \omega_1)}}.$$

Отсюда вытекает, что $P_M = L_M^{-1} P_A$ и $P_M = L_{M_1}^{-1} P_B$.

По аналогичным соображениям

$$P_A = L_F P_F, \text{ где } L_F \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}},$$
$$P_B = L_{F_1} P_F, \text{ где } L_{F_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}}.$$

Следовательно, $P_F = L_F^{-1} P_A$ и $P_F = L_{F_1}^{-1} P_B$. Тогда

$$P_F P_M^{-1} = L_F^{-1} P_A P_A^{-1} L_M = L_F^{-1} L_M =$$

$$= \underbrace{\begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)} k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}}_{L_F^{-1}} \underbrace{\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)} h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix}}_{L_M}.$$

Таким образом,

$$P_F P_M^{-1} = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}, \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)} \right) l_{21} & l_{22} \end{Vmatrix}.$$

[2]Результаты этого подраздела получены совместно с А. Романивым.

На основании свойства 1.5

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}, \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)}\right) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, [\tau_1, \omega_1])}.$$

Поскольку $\omega_1|\tau_1$, то

$$\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, [\tau_1, \omega_1])} = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}.$$

А это значит, что

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\| = G. \tag{5.24}$$

С другой стороны,

$$P_F P_M^{-1} = L_{F_1}^{-1} P_B P_B^{-1} L_{M_1}^{-1} = L_{F_1}^{-1} L_{M_1}^{-1}.$$

Аналогично показываем, что

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\| = G. \tag{5.25}$$

Из равенств (5.24) и (5.25) вытекает, що $\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)} | g_{21}$ и $\frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)} | g_{21}$, т.е.

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}\right] | g_{21} \ .$$

Согласно свойству 1.7

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}\right] = \frac{[\varepsilon_2, \delta_2]}{([\varepsilon_2, \delta_2], \tau_1)}.$$

Поскольку $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2$, то

$$\frac{[\varepsilon_2, \delta_2]}{([\varepsilon_2, \delta_2], \tau_1)} = \frac{\omega_2}{(\omega_2, \tau_1)}.$$

Поэтому $G \in \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2, \tau_1)}}$. Учитывая то, что матрица $\mathrm{diag}(\omega_1, \ \omega_2)$ является делителем матрицы $\mathrm{diag}(\tau_1, \ \tau_2)$, а также приняв во внимание теорему 4.1 получим, что $F = MN$. $\square$

Теорема 5.19. *Пусть*

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ \varepsilon_2), \ B \sim \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ \delta_2),$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тогда*

1) *если, по крайней мере, одна из матриц* A, B *неособенная или* A *и* B *особенные, причем* $s_{21} \neq 0$, *то*

$$[A, B]_r = (L_M P_A)^{-1}\Omega = (L_{M_1} P_B)^{-1}\Omega,$$

где

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1](\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),\, s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1])} & 0 \\ 0 & [\varepsilon_2, \delta_2] \end{matrix} \right\|,$$

а матрицы L_M *и* L_{M_1} *удовлетворяют равенство* $L_{M_1}^{-1} L_M = P_B P_A^{-1}$ *и принадлежат, соответственно, к группам* $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$ *и* $\mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$,

2) *если матрицы* A, B *особенные, причем* $s_{21} = 0$, *то* $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$ *и*

$$[A, B]_r = P^{-1}\Omega,$$

где

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \ P \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B.$$

Доказательство. 1). Сразу заметим, что согласно лемме 5.9 элемент $((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$, а следовательно, и матрица Ω не зависят от выбора преобразующих матриц P_A и P_B.

Покажем, что матрицу $P_B P_A^{-1}$ можно записать в виде

$$P_B P_A^{-1} = KT, \tag{5.26}$$

где

$$K \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}, \ \ T \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}, \ \ \omega_1 = \frac{[\varepsilon_1, \delta_1] \cdot (\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])}.$$

Используя свойство 1.4, получаем

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, \omega_1)} \right) = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{(\varepsilon_2, \delta_2, \omega_1)} = \frac{((\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])}{((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1])} =$$

$$= \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])}, \ \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} s_{21} \right) = \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])}, \ s_{21} \right) = \mu.$$

Поэтому $\mu | s_{21}$. В силу леммы 5.10 матрицу $P_B P_A^{-1}$ можно представить в виде (5.26). Следовательно,

$$K^{-1} P_B = T P_A.$$

Перепозначив $K^{-1} = L_{M_1}$, $T = L_M$, имеем

$$(L_M P_A)^{-1}\Omega = (L_{M_1} P_B)^{-1}\Omega = M.$$

Поскольку $\mathrm{E}|\Omega$ и $\Delta|\Omega$, а также учитывая то, что $L_M^{-1} \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$ и $L_{M_1}^{-1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$ на основании теоремы 4.1 приходим к выводу, что матрица M является общим правым кратным матриц A и B.

Пусть $F = P_F^{-1}\Upsilon Q_F^{-1}$, где $\Upsilon = \mathrm{diag}(\tau_1,\ \tau_2)$, $\tau_1|\tau_2$ – другое общее правое кратное матриц A и B, т.е. $F = AA_2$, $F = BB_2$. Поэтому $\mathrm{E}|\Upsilon$ и $\Delta|\Upsilon$. Поскольку $\varepsilon_2|\tau_2$ и $\delta_2|\tau_2$, то $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2|\tau_2$. Из того, что $\varepsilon_1|\tau_1$ и $\delta_1|\tau_1$, получаем, что $[\varepsilon_1, \delta_1]|\tau_1$, т.е. $\tau_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]x$. Кромо того, $P_A = K_A P_F$, где $K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\ \tau_1)}}$ и $P_B = K_B P_F$, где $K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\ \tau_1)}}$, т.е. $P_F = K_A^{-1}P_A$ и $P_F = K_B^{-1}P_B$. Следовательно,

$$K_B K_A^{-1} = P_B P_A^{-1}.$$

Матрица $K_B K_A^{-1}$ имеет вид

$$K_B K_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} u_{11} & u_{12} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2,\ \tau_1)} u_{21} & u_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\ \tau_1)} v_{21} & v_{22} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),\ \tau_1)} l_{21} & l_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ \frac{z}{(z,\ tx)} l_{21} & l_{22} \end{array} \right\| = P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2,$$

где $z = (\varepsilon_2, \delta_2)$, $t = [\varepsilon_1,\ \delta_1]$. Таким образом, $s_{21} = \frac{z}{(z,\ tx)} l_{21}$. Рассуждая аналогично, как при доказательства теоремы 5.17, показываем, что $\omega_1|\tau_1$. Поэтому $\Omega|\Upsilon$. Тогда на основании леммы 5.15 матрица M является левым делителем матрицы F. Таким образом, M является наименьшим общим правым кратным матриц A и B.

2). Согласно лемме 5.12 независимо от выбора матриц P_A и P_B элемент s_{21} равен нулю. На основании леммы 5.12 $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$. Пусть $U \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B$. Это означает, что матрицы A и B можно записать в виде

$$A = U^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}, \quad B = U^{-1}\Delta Q_B^{-1}.$$

Рассмотрим матрицу

$$M = U^{-1} \left\| \begin{array}{cc} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| = U^{-1}\Omega.$$

Поскольку

$$M = \left(U^{-1} \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| Q_A^{-1} \right) \cdot \left((Q_A \left\| \begin{array}{cc} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\varepsilon 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \right) =$$

$$= \left(U^{-1} \left\| \begin{array}{cc} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| Q_B^{-1} \right) \cdot \left(Q_B \left\| \begin{array}{cc} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \right),$$

то M является общим правым кратным матриц A и B.

Пусть $F = P_F^{-1}\Gamma Q_F^{-1}$ – другое общее правое кратное матриц A и B. Это означает, что соответствующие инвариантные множители матрицы F являются кратными инвариантным множителям матриц A и B. Поскольку другие инвариантные множители этих матриц – нули, то матрица Γ имеет вид $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1,\ 0)$. Кроме того, $\varepsilon_1|\gamma_1$ и $\delta_1|\gamma_1$. Поэтому $[\varepsilon_1, \delta_1]|\gamma_1$, т.е. $\gamma_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]\alpha$. Следовательно, $\Omega \mid \Gamma$. Поскольку $F = AF_1$, то $P_A = U = LP_F$, где $L \in \mathbf{L}(\Gamma, \mathrm{E})$ – группа обратимых верхних треугольных матриц. Заметив, что $\mathbf{L}(\Gamma, \mathrm{E}) = \mathbf{L}(\Gamma, \Omega)$, получаем, что $U = LP_F$, где $L \in \mathbf{L}(\Gamma, \Omega)$, а это, на основании леммы 5.15, означает, что матрица M является левым делителем матрицы F. Значит M является наименьшим общим правым кратным матриц A и B. Теорема доказана. $\square$

Следствие 5.7. *Если матрицы A и B особенные, причем и $s_{21} \neq 0$, то*

$$M = [A, B]_r = \mathbf{0}. \qquad \square$$

Дальнейшие исследования направим на изучение наименьшего общего правого кратного неособенных матриц с формами Смита

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ \varepsilon),\ \Delta = \mathrm{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ \delta)$$

над кольцами Безу стабильного ранга 1,5.

Лемма 5.16. *Пусть $A \sim \mathrm{E}$, $B \sim \Delta$. Тогда элемент*

$$((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$$

является инвариантом относительно выбора преобразующих матриц P_A и P_B.

Доказательство. Пусть F_A и F_B – другие левые преобразующие матрицы матриц A и B. Тогда существуют такие $H_A \in G_{\mathrm{E}}$ и $H_B \in G_\Delta$, что $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Рассмотрим произведение матриц

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

где $S = P_B P_A^{-1}$. Учтя структуру матриц H_B, H_A^{-1} (теорема 2.6) и ассоциативность кольца $M_n(R)$, доказательство этого утверждения не вызывает никаких затруднений. $\square$

Лемма 5.17. *Пусть*

$$\mu = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})},\ \ \omega_{n-1} = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}.$$

Тогда $\mu \ \mid\ (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$.

Доказательство. Поскольку

$$\mu = \frac{(\varepsilon,\delta)}{\left((\varepsilon,\delta), \frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\dots,s_{n.n-1})}\right)} = \frac{(\varepsilon,\delta)((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\dots,s_{n.n-1})}{((\varepsilon,\delta)((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\dots,s_{n.n-1}),(\varepsilon,\delta))} =$$
$$= \left((\varepsilon,\delta),(s_{n1},s_{n2},\dots,s_{n.n-1})\right),$$

то $\mu\,|(s_{n1},s_{n2},\dots,s_{n.n-1})$. □

Лемма 5.18. *Пусть* $S = \|s_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$ *и*

$$\Omega = \mathrm{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \omega_{n-1},\ \omega_n),$$

где $\omega_{n-1}|\,\omega_n$. *Для того, чтобы существовали такие обратимые матрицы*

$$L_A = \left\| \begin{matrix} & & * & * & \\ \varepsilon l_{n1} & \dots & \varepsilon l_{n.n-2} & \frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{5.27}$$

$$L_B = \left\| \begin{matrix} & & * & * & \\ \delta p_{n1} & \dots & \delta p_{n.n-2} & \frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})} p_{n.n-1} & p_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{5.28}$$

что $SL_A = L_B$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})}\ \mid\ (s_{n1},\ \dots\ ,\ s_{n.n-1})\,.$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})} = a, \quad \frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})} = b.$$

Очевидно, что

$$L_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ a)} = \mathbf{G}_a \ \text{ і } \ L_B \in \mathbf{G}_{diag(1,\ \dots\ ,\ 1,\ b)} = \mathbf{G}_b.$$

Следовательно,

$$S = L_B L_A^{-1} \in \mathbf{G}_b \mathbf{G}_a.$$

Отсюда следует, что $(a,b)|\,s_{ni},\ i = 1,\ \dots\ ,\ n-1$. На основании свойства 1.4

$$(a,b) = \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})}, \frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})}\right) = \frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})}.$$

Таким образом,

$$\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})}\ |\ (s_{n1},\ \dots\ ,\ s_{n.n-1}).$$

Достаточность. Сначала рассмотрим случай, когда матрица S имеет вид

$$S = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|.$$

Пусть $(a, b) = \alpha$. Тогда существуют такие $t_1,\ t_2$, что

$$at_1 + bt_2 = \alpha.$$

Согласно условию леммы $\alpha \mid (s_{n1},\ \dots\ ,\ s_{n.n-1})$. Поэтому,

$$(s_{n1},\ \dots\ ,\ s_{n.n-1}) = \alpha\beta.$$

Следовательно, существует такая обратимая матрица U, что

$$\left\| \begin{array}{ccc} s_{n1} & \dots & s_{n.n-1} \end{array} \right\| U = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & \alpha\beta \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$S \left\| \begin{array}{cccc|c} & & U & & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & -a\beta t_1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} & & U & & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & b\beta t_2 & 1 \end{array} \right\|.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть теперь $S = \|s_{ij}\|_1^n$ – произвольная матрица с $\mathrm{GL}_n(R)$. Из теоремы 2.13 вытекает, что существуют такие матрицы $H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$ и $T \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$, что

$$H_1ST = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ c_{n-1.1} & \dots & c_{n-1.n-2} & 1 & 0 \\ \hline c_{n1} & c_{n1} & & c_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} C_{11} & \mathbf{0} \\ \hline C_{21} & 1 \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим матрицу

$$H_2 = \left\| \begin{array}{c|c} C_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$H_2H_1ST = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 1 & 0 \\ c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = C.$$

Заметим, что $H_2 \in \mathbf{G}_\Delta$, а следовательно, и $H_2H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$. Очевидно, что $\alpha \mid (c_{n1},\ \dots\ ,\ c_{n.n-1})$. Согласно только что доказанному существуют такая матрица L'_A вида (5.27) и L'_B вида (5.28), что $CL'_A = L'_B$, т.е.

$$HSTL'_A = L'_B.$$

Поэтому
$$S(TL'_A) = H^{-1}L'_B.$$

На основании свойства 4.1 матрицы $TL'_A = L_A$, $H^{-1}L'_B = L_B$ снова имеют вид (5.27) и (5.28), соответственно. $\square$

Лемма 5.19. *Пусть*

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \varepsilon), \quad \Delta = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \delta),$$

$U = \|u_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$. *Тогда*

$$\mathrm{E}U\Delta \sim \mathrm{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \gamma_{n-1},\ \gamma_n). \tag{5.29}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$\mathrm{E}U\Delta = \left\| \begin{array}{cccc|c} u_{11} & \dots & u_{1.n-1} & & \delta u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ u_{n-1.1} & \dots & u_{n-1.n-1} & & \delta u_{n-1.n} \\ \hline \varepsilon u_{n1} & \dots & \varepsilon u_{n.n-1} & & \varepsilon\delta u_{nn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array} \right\|.$$

Поскольку матрица U_{11} имеет порядок $n-1$ и является подматрицей обратимой матрицы порядка n, то согласно утверждению 3.7

$$U_{11} \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{n-2},\ u).$$

Отсюда и вытекает эквивалентность (5.29). $\square$

Теорема 5.20. *Пусть A, B – неособенные $n \times n$ матрицы над кольцом Безу стабильного ранга* $1{,}5$, *причем*

$$A \sim \mathrm{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \varepsilon) = \mathrm{E}, \ \ B \sim \mathrm{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \delta) = \Delta,$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n, P_B \in \mathbf{P}_B,\ P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тогда*

$$[A, B]_r = (L_A P_A)^{-1}\Omega = (L_B P_B)^{-1}\Omega,$$

где
$$\Omega = \mathrm{diag}\left(1, \dots 1, \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{n.n-1})}, [\varepsilon, \delta]\right),$$

а матрицы L_A и L_B принадлежат, соответственно, множествам $\mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $\mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ и удовлетворяют равенство $(P_B P_A^{-1})L_A = L_B$.

Доказательство. Сразу же отметим, что согласно лемме 5.16 элемент

$$((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}),$$

а следовательно, и матрица Ω не зависят от выбора преобразующих матриц P_A и P_B.

Рассмотрим матрицу

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$P_B \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (P_B P_A^{-1})\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\|.$$

Из теоремы 2.13 вытекает, что матрицы P_B P_A можно выбрать таким образом, что $P_B P_A^{-1}$ будет нижней унитреугольной матрицей. Поэтому

$$\left\| \begin{matrix} (P_B P_A^{-1})\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ * & & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_{n1} & \ldots & s_{n.n-1} & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & \delta \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \mathrm{diag}(1, \ \ldots \ , \ 1, \ ((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})).$$

Приняв во внимание теорему 1.10 получим

$$(A, B)_l \sim \mathrm{diag}(1, \ \ldots \ , \ 1, \ ((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})).$$

На основании теоремы 1.20 матрицу $[A, B]_r$ можно записать в виде

$$[A, B]_r = BUA_1, \quad \text{где} \quad A = (A, B)_l A_1, \quad U \in \mathrm{GL}_n(R).$$

Поскольку матрица A имеет один отличный от единицы инвариантный множитель, то ее правый делитель A_1 также имеет аналогичное количество отличных от единицы инвариантных множителей. Тогда в силу леммы 5.19 $[A, B]_r$ имеет не более двух отличных от единицы инвариантных множителей:

$$[A, B]_r \sim \mathrm{diag}(1, \ \ldots \ , \ 1, \ \omega_{n-1}, \ \omega_n).$$

Из теоремы 1.18 вытекает, что

$$\det A \det B = \det(A, B)_l \det[A, B]_r.$$

То есть

$$\det[A, B]_r = \frac{\det A \det B}{\det(A, B)_l} = \frac{\varepsilon\delta}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})} = \omega_{n-1}\omega_n.$$

Поскольку матрицы A, B являются левыми делителями матрицы $[A, B]_r$, то их формы Смита делят матрицу $\mathrm{diag}(1, \ \ldots \ , \ 1, \ \omega_{n-1}, \ \omega_n)$. Поэтому $[\varepsilon, \delta] | \, \omega_n$. С другой стороны, из структуры матриц множеств $\mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $\mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ вытекает, что никакие другие ограничения на инвариантный множитель ω_n не налагаются. Поэтому $\omega_n = [\varepsilon, \delta]$. Следовательно,

$$\omega_{n-1} = \frac{\varepsilon\delta(\varepsilon, \delta)}{\varepsilon\delta \left((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}\right)} = \frac{(\varepsilon, \delta)}{\left((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}\right)}.$$

Таким образом,

$$[A, B]_r \sim \mathrm{diag}\left(1, \ldots 1, \frac{(\varepsilon, \delta)}{\left((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}\right)}, [\varepsilon, \delta]\right) = \Omega.$$

На основании свойства 1.4

$$\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_{n-1})}, \frac{\delta}{(\delta, \omega_{n-1})}\right) = \left(\frac{(\varepsilon, \delta)}{\left((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1}\right)}\right) = \mu.$$

Используя лемму 5.17, получаем, что

$$\mu \, |(s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}) \ .$$

Тогда согласно лемме 5.18 существуют такие матрицы $L_A \in L(\Omega, \mathrm{E})$, $L_B \in L(\Omega, \Delta)$, что

$$P_B P_A^{-1} L_A = L_B.$$

Отсюда вытекает, что

$$L_A^{-1} P_A \Omega = L_B^{-1} P_B \Omega = M.$$

Поскольку $\mathrm{E}|\Omega$ и $\Delta|\Omega$, то на основании теоремы 4.1 матрица M является общим правым кратным матриц A и B.

Пусть N – наименьшее общее правое кратное матриц A и B. Из только что доказанного вытекает, что $N \sim \Omega$. Следовательно, $N = P_N^{-1} \Omega Q_N^{-1}$. Тогда матрица

$$M = L_A^{-1} P_A \Omega = P_M^{-1} \Omega$$

является правым кратным матрицы N: $M = NN_1$. Согласно теореме 4.1 это равносильно тому, что $P_N = LP_M$, где $L \in \mathbf{L}(\Omega, \Omega)$. Приняв во внимание свойство 4.6, получаем

$$\mathbf{L}(\Omega, \Omega) = \mathbf{G}_\Omega.$$

На основании теоремы 4.3 матрицы M и N ассоциированны справа. Таким образом, матрица M является наименьшим общим правым кратным матриц A и B. Теорема доказана. □

Раздел 6.
Инварианты примитивных матриц относительно действия группы Зелиска

При решении некоторых факторизационных задач возникает необходимость описывать все неассоциированные (справа или слева) матрицы с фиксированной формой Смита. Примером этого является описание всех левых неассоциированных справа делителей матрицы

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} x^3 & 0 \\ 0 & x^3 \end{matrix} \right\|,$$

которые имеют форму Смита

$$\Phi(x) = \left\| \begin{matrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{matrix} \right\|.$$

Такими будут все матрицы с формой Смита $\Phi(x)$, т.е. все матрицы вида $P^{-1}(x)\Phi(x)Q^{-1}(x)$, где $P(x), Q(x)$ – обратимые матрицы. Действительно:

$$A(x) = \left(P^{-1}(x)\mathrm{diag}(x,\ x^2)Q^{-1}(x)\right)\left(Q(x)\mathrm{diag}(x^2,\ x)P(x)\right).$$

Для установления того факта, что матрицы ассоциированны справа, т.е. отличаются правым обратимым множителем, используют форму Эрмита. Однако, если использовать эту форму как генератор неассоциированных матриц, то сможем описать лишь неассоциированные матрицы с заданным определителем. Так

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ ax^2+bx+c & x^3 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x & 0 \\ ax+b & x^2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x^2 & 0 \\ a & x \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \right\},$$

где a, b, c независимо друг от друга пробегают все элементы с поля F, является множеством всех неассоциированных справа полиномиальных матриц второго порядка над кольцом $F[x]$ с определителем $\det\Phi(x) = x^3$. При этом матрицы с формой Смита $\Phi(x)$ попадут в множество

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} x & 0 \\ ax+b & x^2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x^2 & 0 \\ a & x \end{matrix} \right\| \right\},$$

где $a, b, c \in F$. Однако, это множество также содержит матрицы, которые не имеют формы Смита $\Phi(x)$. В частности, таковыми являются матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x & 0 \\ 1 & x^2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x^2 & 0 \\ 1 & x \end{matrix} \right\|.$$

Уже этот простой пример показывает, что форма Эрмита является "грубым инструментом"для решения этой "деликатной"задачи. Поэтому возникает потребность в построении такой канонической формы матриц относительно односторонних преобразований, уже сам вид которой говорил бы о форме Смита матрицы.

Над кольцом элементарных делителей R каждая матрица с формой Смита Φ имеет вид $P^{-1}\Phi Q^{-1}$, где $P, Q \in \mathrm{GL}_n(R)$. Следовательно, правыми преобразованиями из группы $\mathrm{GL}_n(R)$ эта матрица приводится к виду $P^{-1}\Phi$. Поскольку матрица Φ является инвариантом относительно таких преобразований, то естественно, строить необходимую нам форму в виде $P^{-1}\Phi$. На основании свойства 2.2 в качестве матрицы P может быть выбрана любая матрица из смежного класса $\mathbf{G}_\Phi P$, т.е. запись матрицы в виде $P^{-1}\Phi$ не является канонической. Поэтому поставленная задача равносильна поиску "канонических"матриц в классе $\mathbf{G}_\Phi P$. Последние два раздела монографии посвящены собственно этой задаче.

6.1. Ф-стержень столбца и его свойства

Пусть $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – обратимая матрица и $\Phi = \mathrm{diag}\,(\varphi_1, \ \ldots, \varphi_n)$ – неособенная d-матрица. Введем следующие обозначения:

P^m – матрица, составленная из последних m строк матрицыP, $1 \le m < n$,

$P^m_{i_1,\ldots,i_k}$ – матрица, составленная из $i_1, \ldots, i_k$ столбцов матрицы P^m, $1 \le k \le n$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$,

$$\delta^m_{i_1,\ldots,i_k} = \left\langle P^m_{i_1,\ldots,i_k} \right\rangle, \ \ \Delta^m_{i_1,\ldots,i_k} = \left\langle V^m_{i_1,\ldots,i_k} \right\rangle,$$

где $V = HP$.

Теорема 6.1. *Если* $H \in \mathbf{G}_\Phi$, *то*

$$\left(\delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}} \right) = \left(\Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}} \right),$$

$m = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть $m < k \le n$ и μ – произвольный минор порядка m матрицы $P^m_{i_1,\ldots,i_k}$. Аналогично построенный минор матрицы $V^m_{i_1,\ldots,i_k}$ обозначим через ν. Правильность нашего утверждения, когда $k = m$ доказано в лемме 2.1. Следовательно,

$$\left(\mu, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\nu, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(\delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

В завершение рассмотрим случай $1 \le k < m$. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_t$ – все миноры m -го порядка матрицы P^m, содержащие подматрицу $P^m_{i_1,\ldots,i_k}$. Через $\nu_1, \ldots, \nu_t$ обозначим соответствующие миноры матрицы V^m. Тогда, согласно доказанному

$$\left(\mu_i, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\nu_i, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

$i = 1, \ldots, t$. На основании утверждения 3.4

$$(\mu_1, \ldots, \mu_t) = \delta^m_{i_1,\ldots,i_k},\ (\nu_1, \ldots, \nu_t) = \Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Таким образом,

$$\left(\delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\mu_1, \ldots, \mu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) =$$
$$= \left(\left(\mu_1, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right), \ldots, \left(\mu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right)\right) =$$
$$= \left(\left(\nu_1, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right), \ldots, \left(\nu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right)\right) =$$
$$= \left(\nu_1, \ldots, \nu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

Теорема доказана. □

Пусть R – кольцо элементарных делителей и $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособенная d-матрица над R. Каждая обратимая матрица состоит из примитивных столбцов. Поэтому изучение действия группы $\mathbf{G}_\Phi$ на обратимые матрицы естественно начать с изучения ее действия на примитивные столбцы.

Обозначим $\Phi_1 = I_n$,

$$\Phi_i = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big),\quad i = 2, \ldots, n.$$

Пусть $\mathbf{a} = \|a_1\ \ldots\ a_n\|^T$ – примитивный столбец.

Определение 6.1. **Ф-стержнем** столбца $\mathbf{a}$ (в обозначениях $R_\Phi(\mathbf{a})$) называется столбец $\| \delta_1 \ \ldots \ \delta_n \|^T$, где δ_i-ые получаются с эквивалентности

$$\Phi_i\mathbf{a} = \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_1 \ \cdots \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1} \ \ a_i \ \ldots \ \ a_n \right\|^T \sim \|\delta_i \ 0 \ \ldots \ 0\|^T ,$$

$i = 1, \ \ldots, \ n$.

Теорема 6.2. *Если $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то $R_\Phi(\mathbf{a}) = R_\Phi(H\mathbf{a})$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.5

$$\Phi_i H\mathbf{a} \overset{l}{\sim} \Phi_i\mathbf{a} \overset{l}{\sim} \|\delta_i \ 0 \ \ldots \ 0\|^T ,$$

$i = 2, \ \ldots, \ n$. Очевидно также, что

$$I_n H\mathbf{a} \overset{l}{\sim} I_n\mathbf{a} \overset{l}{\sim} \|1 \ 0 \ \ldots \ 0\|^T .$$

Следовательно, $R_\Phi(\mathbf{a}) = R_\Phi(H\mathbf{a})$. □

Из этой теоремы вытекает, что Ф-стержень столбца $\mathbf{a}$ является инвариантом относительно действия группы $\mathbf{G}_\Phi$ на столбец $\mathbf{a}$.

Заметив, что $\delta_i | a_i$, $i = 1, \ \ldots, n$, из теоремы 6.2 получаем.

Следствие 6.1. *Если $R_\Phi(\mathbf{a}) = \| \delta_1 \ \ldots \ \delta_n \|^T$, то столбец $\mathbf{a}$ можно записать так:* $\mathbf{a} = \| \delta_1 b_1 \ \ \delta_2 b_2 \ \ldots \ \ \delta_n b_n \|^T$. □

Поскольку $I_n\mathbf{a} \sim \| 1 \ \ldots \ 0 \|^T$, то $\delta_1 = 1$. Укажем взаимосвязь между элементами Ф-стержня столбца $\mathbf{a}$.

Свойство 6.1. *Выполняются равенства*

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ \frac{a_i}{\delta_{i-1}}, \ \frac{a_{i+1}}{\delta_{i-1}}, \ \cdots \ , \ \frac{a_n}{\delta_{i-1}} \right) \delta_{i-1}, \ \ i = 2, \ \ldots, n.$$

Доказательство. Выполняются равенства

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_1, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1}, \ a_i, \ \ldots \ , \ a_n \right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_1}a_1, \cdots, \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}}a_{i-2} \right), \ a_{i-1}, \ a_i, \ \ldots, \ a_n \right) =$$

$$= \delta_{i-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\frac{\left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_1}a_1,\ \cdots,\ \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}}a_{i-2}\right)}{\delta_{i-1}},\frac{a_{i-1}}{\delta_{i-1}},\ \ldots,\ \frac{a_n}{\delta_{i-1}}\right) =$$

$$= \delta_{i-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \frac{a_i}{\delta_{i-1}},\ \ldots,\ \frac{a_n}{\delta_{i-1}}\right),$$

$i = 2, \ldots, n$. □

Следствие 6.2. *Элементы* δ_i, $i = 2, \ldots, n$, Ф*-стержня столбца* **a** *удовлетворяют условия*

1) $\delta_1 \mid \delta_2 \mid \ \ldots \ \mid \delta_n$,
2) $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $i = 2, \ldots, n$. □

Поскольку $\delta_1 = 1$, то каждый Ф-стержень является примитивным столбцом. Однако, не каждый примитивный столбец будет Ф-стержнем некоторого примитивного столбца. Это будет лишь при сформулированных ниже условиях.

Свойство 6.2. *Столбец* $\| \, 1 \ \tau_2 \ \ldots \ \tau_n \, \|^T$ *является* Ф*-стержнем некоторого примитивного столбца* $\| \, a_1 \ \ldots \ a_n \, \|^T$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) $\tau_i \mid \frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \quad i = 2, \ldots, n;$
2) $\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}} \mid \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n.$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$R_\Phi\left(\|a_1 \ldots a_n\|^T\right) = \|1\tau_2 \ldots \tau_n\|^T.$$

Тогда

$$\tau_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_1, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n\right),$$

$i = 2, \ldots, n$. Согласно свойству 1.10

$$\tau_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_2, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n\right).$$

Поэтому $\tau_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_1}$, $i = 2, \ldots, n$.

Условие 2) получено в следствии 6.2.

Достаточность. Рассмотрим примитивный столбец

$$\tau = \| \, 1 \ \ \tau_2 \ \ldots \ \tau_n \, \|^T ,$$

элементы которого удовлетворяют равенству 1) и 2). Покажем, что Ф-стержень этого столбца совпадает с самим столбцом. Пусть

$$R_\Phi(\tau) = \| \, \delta_1 \ \ldots \ \delta_n \, \|^T .$$

Тогда

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\tau_1, \ \frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2, \ \cdots , \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}, \ \tau_i, \ \ldots, \ \tau_n \right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \ \frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2, \ \cdots , \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}, \ \tau_i, \ \ldots, \ \tau_n \right).$$

Из условия 2) следует, что $\tau_i \mid \tau_{i+1} \mid \ldots \mid \tau_n$. Также согласно условию 1) $\tau_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_1}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \ \tau_i, \ \tau_{i+1}, \ \ldots, \ \tau_n \right) = \tau_i.$$

То есть

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2, \cdots , \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}, \tau_i \right).$$

Поскольку $\tau_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}$, причем

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}}\tau_{j-1} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\tau_j \right) \left(\frac{\varphi_j \tau_{j-1}}{\varphi_{j-1}\tau_j} \right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\tau_j \right) \left(\frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} \Big/ \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right),$$

$2 \leqslant j-1 \leqslant i-1$, то в последовательности

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2, \ \cdots , \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}, \ \tau_i$$

каждый предыдущий элемент делится на следующий. Следовательно, $\delta_i = \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $R_\Phi(\tau) = \tau$. $\square$

Согласно следствию 6.1 каждый примитивный столбец $\mathbf{a}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \| \, \delta_1 b_1 \ \ \delta_2 b_2 \ \ \ldots \ \delta_n b_n \, \|^T ,$$

где

$$\|\delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \delta_n\|^T = R_\Phi(\mathbf{a}).$$

Поскольку δ_i, $i = 1, \ldots, n$ являются инвариантами относительно действия группы $\mathbf{G}_\Phi$, то преобразованиями из этой группы элементы столбца $\mathbf{a}$ максимум можно заменить на δ_i или на ноль. Приведем примитивный столбец $\mathbf{a}$ преобразованиями с $\mathbf{G}_\Phi$ к более простому виду.

Теорема 6.3. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга $1,5$. Если*

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \| \; \delta_1 \;\; \delta_2 \;\; \ldots \;\; \delta_n \; \|^T$$

– Ф-стержень простого столбца $\mathbf{a} = \| \; a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n \; \|^T$, то в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что

$$H\mathbf{a} = \| \; b \;\; \delta_2 \;\; \ldots \;\; \delta_n \; \|^T, \;\; (b, \; \delta_n) = 1.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.9 существуют такие элементы $u_1, \; \ldots, \; u_n$, что

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}a_1u_1 + \cdots + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}a_{n-1}u_{n-1} + a_nu_n = \delta_n,$$

где

$$\left(u_n, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Поскольку

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \mid \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} \mid \ldots \mid \frac{\varphi_n}{\varphi_1},$$

то на основании свойства 1.10

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1}, u_n\right) = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1}, u_n\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1}, \left(u_n, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)\right) = 1.$$

Тогда согласно теореме 1.1 строку

$$\left\| \; \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 \;\; \cdots \;\; \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} \;\; u_n \; \right\|$$

можно дополнить до обратимой матрицы H_n вида

$$H_n = \left\| \begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2 & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} & u_n \end{array} \right\|,$$

которая будет принадлежать группе $\mathbf{G}_\Phi$. Тогда

$$H_n \| \, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n \, \|^T = \|b_1 \; \dots \; b_{n-1} \; \delta_n \, \|^T .$$

На основании теоремы 6.2 этот столбец опять же будет иметь Ф-стержень $\| \, \delta_1 \;\; \delta_2 \;\; \dots \; \delta_n \, \|^T$. Это означает, что

$$\Phi_{n-1} H_n \| \, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \; a_n \, \|^T \sim \| \, \delta_{n-1} \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \, \|^T .$$

Следовательно, существуют такие элементы $v_1, \; \dots \;, \; v_n$, что

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} b_1 v_1 + \dots + \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} b_{n-2} v_{n-2} + b_{n-1} v_{n-1} + \delta_n v_n = \delta_{n-1}.$$

Согласно теореме 1.9 эти элементы выберем так, что

$$(v_1, \dots, v_{n-1}) = 1,$$

причем

$$\left(v_{n-1}, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} \right) = 1.$$

Как и в предыдущем случае

$$\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} v_1, \cdots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} v_{n-2}, v_{n-1} \right) = 1.$$

Из теоремы 1.1 вытекает, что в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует матрица H_{n-1} с такими двумя последними строками:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} v_1 & \cdots & \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} v_{n-2} & v_{n-1} & v_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Тогда

$$H_{n-1} H_n \| \, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n \;\; \|^T = \| \, c_1 \; \dots \; c_{n-2} \;\; \delta_{n-1} \;\; \delta_n \, \|^T .$$

Продолжая описанный процесс, на $(n-1)$-ом шаге получим такую матрицу $H_2 \cdots H_n \in \mathbf{G}_\Phi$, что

$$H_2 \cdots H_n a = \| \, d \;\; \delta_2 \;\; \dots \;\; \delta_n \, \|^T .$$

Если $(d, \; \delta_n) = 1$, то теорема доказана. Если же это условие не выполняется, то с примитивности столбца $\mathbf{a}$, а также из того, что $\delta_2 \mid \delta_3 \mid \; \dots \; \mid \delta_n$, получаем $(d, \;\; \delta_2) = 1$. Поэтому и $(d, \;\; \delta_2, \;\; \delta_n) = 1$. Поскольку $\delta_n \neq 0$ и кольцо R имеет стабильный ранг 1,5, то существует такой элемент r, что $(d + r\delta_2, \;\; \delta_n) = 1$. Тогда в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует матрица

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-2},$$

для которой

$$H_1 \cdots H_n \mathbf{a} = H\mathbf{a} = \| \; b \;\; \delta_2 \;\; \ldots \;\; \delta_n \; \|^T,$$

где $b = d + r\delta_2$. Теорема доказана. □

Заметим, что в кольцах элементарных делителей, которые не являются кольцами стабильного ранга 1,5 теорема 6.3, вообще говоря, не выполняется.

Пример 6.1. Пусть

$$R = \left\{ a + b_1 x + b_2 x^2 + \;\; \cdots \;\; \mid \; a \in \mathbb{Z}, \; b_i \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{N} \right\}$$

и

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 7x \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 5x \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \left\| \begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix} \right\|.$$

Однако в группе $\mathbf{G}_\Phi$ не существует такой матрицы H, что

$$H\mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} * \\ x \end{matrix} \right\|.$$

Действительно, если предположить, что в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица

$$H = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ 7xh_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|,$$

что

$$H\mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} * \\ x \end{matrix} \right\|,$$

то

$$7xh_{21} + 5xh_{22} = x.$$

То есть

$$7h_{21} + 5h_{22} = 1.$$

Тогда согласно лемме 1.8

$$\| \; h_{21} \quad h_{22} \; \| = \| \; -2 - 5r \quad 3 + 7r \; \|,$$

где $r \in R$. При этом элемент r должен удовлетворять условию

$$\| \; 7x(-2 - 5r) \quad 3 + 7r \; \| \sim \| \; 1 \quad 0 \; \|.$$

Элемент x взаимно простый только с единицами кольца R, которые имеют вид

$$\pm 1 + b_1x + b_2x^2 + \ \cdots \ .$$

Поэтому

$$3 + 7r = \pm 1 + b_1x + b_2x^2 + \ \cdots \ .$$

Следовательно,

$$r_1 = -\frac{4}{7} + c_1x + c_2x^2 + \ \cdots$$

или же

$$r_2 = -\frac{2}{7} + d_1x + d_2x^2 + \ \cdots \ ,$$

которые не являются элементами кольца R. $\diamondsuit$

Поскольку ни один из элементов δ_i Φ-стержня столбца $\mathbf{a}$ не равен нулю, то не равны ему и элементы столбца

$$H \| \ a_1 \ \ldots \ a_n \ \|^T = \| \ b \ \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_n \ \|^T .$$

Однако, если, например,

$$\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \ \mathbf{a} = \left\| \ 1 \ \ \tfrac{\varphi_2}{\varphi_1} \ \ \tfrac{\varphi_3}{\varphi_1} \ \right\|^T ,$$

то $R_\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. При этом в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица

$$H = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\varphi_3}{\varphi_2} & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

что

$$H\mathbf{a} = \| \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \|^T .$$

Поэтому возникает вопрос поиска условий, при которых элементы столбца $\mathbf{a}$ преобразованиями из группы $\mathbf{G}_\Phi$ можно заменить на ноль.

Теорема 6.4. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга $1,5$ и*

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \| \ \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_n \ \|^T .$$

Для того, чтобы в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существовала такая матрица K, что

$$K\mathbf{a} = \| \ b \ \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_k \ \ 0 \ \ldots \ 0 \ \|^T , 1 \le k < n,$$

(если $k = 1$, то $b = 1$), необходимо и достаточно, чтобы

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \left\| \ \delta_1 \ \ldots \ \delta_{k-1} \ \ \delta_k \ \ \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k \ \ \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_k}\delta_k \ \ \ldots \ \ \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k \ \right\|^T .$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку преобразования из группы $\mathbf{G}_\Phi$ не меняют Ф-стержня столбца, то

$$R_\Phi\left(\| \ b \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_k \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \|^T\right) = \| \ \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_n \ \|^T .$$

Из свойства 6.1 вытекает, что

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ 0, \ \ldots, \ 0\right) = \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},$$

$i = k+1, k+2, \ldots, n$. Следовательно,

$$\delta_{k+1} = \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k,$$

$$\delta_{k+2} = \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_{k+1}}\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k = \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_k}\delta_k,$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$\delta_n = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}}\cdots\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k = \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k.$$

Достаточность. Пусть $k > 1$ на основании теоремы 6.3 без ограничения общности, можем считать, что

$$\mathbf{a} = \left\| \ b \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_k \ \ \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k \ \ \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_k}\delta_k \ \ \ldots \ \ \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k \ \right\|^T,$$

где

$$\left(b, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k\right) = 1.$$

Тогда

$$\underbrace{\left(I_{k-1} \oplus \left\| \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ -\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & 1 \end{matrix} \right\|\right)}_{K} \mathbf{a} =$$

$$= \| \ b \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_k \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \|^T ,$$

где $K \in \mathbf{G}_\Phi$.

Пусть $k = 1$. Тогда

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \left\| \ 1 \ \ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \ \ \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \ \ \ldots \ \ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \ \right\|^T .$$

В силу теоремы 6.3 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица K_1, что

$$K_1\mathbf{a} = \left\| \, b \;\; \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \;\; \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \;\; \dots \;\; \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \, \right\|^T.$$

где

$$\left(b, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\left(b, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

В кольце R существуют такие u и v, что

$$bu + \frac{\varphi_2}{\varphi_1}v = 1.$$

Тогда

$$\left\| \begin{array}{ccccc} u & v & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\varphi_3}{\varphi_1} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & 1 \end{array} \right\| K_1\mathbf{a} = \| \, 1 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \, \|^T.$$

Теорема доказана. □

Пусть теперь δ_k – первый снизу элемент матрицы $K\mathbf{a}$ из теоремы 6.4, для которого не выполняется условие

$$\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} = \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}}.$$

Это означает, что элемент δ_k нельзя заменить на ноль преобразованиями из группы $\mathbf{G}_\Phi$. Однако, при определенных условиях, другие элементы этого столбца можно. Пусть $\delta_t, \quad 2 \leqslant t < k$ – первый снизу элемент матрицы $K\mathbf{a}$, который удовлетворяет условие

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \Big/ \frac{\delta_t}{\delta_{t-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t}\right) = 1.$$

Теорема 6.5. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга $1,5$ и*

$$K\mathbf{a} = \| \; b \;\; \delta_2 \;\; \dots \;\; \delta_k \;\; 0 \;\; \dots 0 \; \|^T$$

– примитивный столбец, причем

$$R_\Phi(K\mathbf{a}) = \| \ \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_n \ \ \|^T .$$

Для того, чтобы в группе $\mathbf{G}_\Phi$ *существовала такая матрица* L, *что*

$$LK\mathbf{a} = \| \ b \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_{s-1} \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \ \delta_{t+1} \ \ \delta_{t+2} \ \ \ldots \ \ \delta_k \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \|^T , \qquad (6.1)$$

$2 \leqslant t < k$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \Big/ \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_i} \right) = 1, \qquad (6.2)$$

$i = t, t-1, \ldots, s$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку

$$R_\Phi(K\mathbf{a}) = R_\Phi(LK\mathbf{a}),$$

то

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_i}, \ \frac{\delta_{t+1}}{\delta_{i-1}}, \ \frac{\delta_{t+2}}{\delta_{i-1}}, \ \ldots, \ \frac{\delta_k}{\delta_{i-1}} \right) = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ \frac{\delta_{t+1}}{\delta_{i-1}} \right),$$

$i = t, t-1, \ldots, s$, т.е.

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \Big/ \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_i} \right) = 1, \ i = t, t-1, \ldots, s.$$

Достаточность. В кольце R существуют такие элементы u_t , v_t, что

$$u_t \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \Big/ \frac{\delta_t}{\delta_{t-1}} + v_t \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = 1.$$

Рассмотрим матрицу

$$L_t = I_{t-2} \oplus \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} u_t & -1 & v_t \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-t-1} \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Тогда на позиции t в столбце $L_t K\mathbf{a}$ будет стоять элемент

$$u_t \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \delta_{t-1} - \delta_t + v_t \delta_{t+1} = \delta_t \left(u_t \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \Big/ \frac{\delta_t}{\delta_{t-1}} + v_t \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} - 1 \right) = 0.$$

Следовательно,

$$L_t K a = \| b \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_{t-1} \ \ 0 \ \ \delta_{t+1} \ \ \delta_{t+2} \ \ \ldots \ \ \delta_k \ \ \ldots \ \ 0 \|^T .$$

Опять же, в кольце R существуют такие элементы u_{t-1}, v_{t-1}, что

$$u_{t-1}\frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_{t-2}}\Big/\frac{\delta_{t-1}}{\delta_{t-2}}+v_{t-1}\frac{\delta_{t+1}}{\delta_{t-1}}=1.$$

Рассмотрим матрицу

$$L_{t-1}=I_{t-3}\oplus\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_{t-2}}u_{t-1} & -1 & 0 & v_{t-1}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\oplus I_{n-t-1}\in\mathbf{G}_\Phi.$$

Тогда

$$L_{t-1}L_tK\mathbf{a}=\|b\ \ \delta_2\ \ \ldots\delta_{t-2}\ \ 0\ \ 0\ \ \delta_{t+1}\ \ \delta_{t+2}\ \ \ldots\ \ \delta_k\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\|^T.$$

Продолжая процесс, преобразованиями из группы $\mathbf{G}_\Phi$ приведем столбец $\mathbf{a}$ к виду (6.1).

Отдельно, в силу его специфики, следует рассмотреть случай, когда $s=2$. На основании вышеизложенных соображений в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица $\overline{L}$, что

$$\overline{L}K\mathbf{a}=\|b\ \ \delta_2\ \ 0\ \ 0\ \ \delta_{t+1}\ \ \delta_{t+2}\ \ \ldots\ \ \delta_k\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\|^T,$$

причем выполняется условие

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big/\frac{\delta_2}{\delta_1},\frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}\right)=1.$$

Поскольку $(b,\delta_n)=1$, то и

$$\left(b,\frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}\right)=1.$$

Следовательно,

$$\left(b\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big/\frac{\delta_2}{\delta_1},\frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}\right)=1.$$

Это означает, чтов кольце R существуют такие элементы u_2, v_2, что

$$u_2b\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big/\frac{\delta_2}{\delta_1}+v_2\frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}=1.$$

Тогда матрица

$$L_2=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_2b & -1 & 0 & \cdots & 0 & v_2\\ 0 & 0 & 1 & & & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{Vmatrix}\oplus I_{n-t-1}\in\mathbf{G}_\Phi$$

будет довлетворять равенство

$$L_2\overline{L}K\mathbf{a} = LK\mathbf{a} = \|b \ \ 0 \ \ 0 \ \ \delta_{t+1} \ \ \delta_{t+2} \ \ \dots \ \ \delta_k \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0\|^T,$$

что и требовалось доказать. □

Если элемент δ_{s-1} матрицы $LK\mathbf{a}$ из теоремы 6.5 не удовлетворяет условие (6.2), то, рассматривая элементы, которые стоят выше δ_{s-1}, снова ищем такой элемент δ_l, для которого

$$\left(\frac{\varphi_l}{\varphi_{l-1}} \Big/ \frac{\delta_l}{\delta_{l-1}}, \frac{\delta_{l+1}}{\delta_l}\right) = 1,$$

и повторяем рассуждения теоремы 6.5. Рассмотрев так все элементы матрицы $\mathbf{a}$ в конце концов оставим их без изменений, или же заменим на ноль.

Подытожим полученные результаты, предварительно введя ряд обозначений.

Пусть $k, k-1, \dots, l$ – убывающая последовательность натуральных чисел, которую обозначим через $(k, \dots, l)$. При этом $(k, \dots, k)$ обозначает одноэлементную, а $(, \dots,)$ пустую последовательность.

Поставим в соответствие каждому Ф-стержню $\|\delta_1\delta_2 \dots \delta_n\|^T$ ряд последовательностей

$$(i_1, \dots, j_1), (i_2, \dots, j_2), \cdots, (i_p, \dots, j_p),$$

$$n \geqslant i_1 \geqslant j_1 > i_2 \geqslant j_2 > \cdots > i_p \geqslant j_p \geqslant 2,$$

за таким правилом.

1а) Если

$$\frac{\delta_s}{\delta_{s-1}} = \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, \tag{6.3}$$

$s = n, n-1, \dots, q$, а при $s = q-1$ условие (6.3) не выполняется, то $(i_1, \dots, j_1) = (n, \dots, q)$.

1в) Если условие (6.3) не выполняется уже при $s = n$, то $(i_1, \dots, j_1) = (, \dots,)$.

2) В убывающей последовательности $j_1-2, j_1-3, \dots, 2$ (если $(i_1, \dots, j_1) = (, \dots,)$, полагаем $j_1 = n+1$) находим первый элемент t, для которого

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \Big/ \frac{\delta_t}{\delta_{t-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t}\right) = 1,$$

и полагаем $i_2 = t$. Пусть

$$\left(\frac{\varphi_r}{\varphi_{r-1}} \Big/ \frac{\delta_r}{\delta_{r-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_r}\right) = 1, \tag{6.4}$$

$r = t, t-1, \ldots, l$, причем при $r = l-1$ условие (6.4) не выполняется. Тогда $j_2 = l$.

3) Все остальные пары $(i_\mu, \ldots, j_\mu)$ задают по аналогии с парой $(i_2, \ldots, j_2)$, и лишь тогда рассматривают числовые последовательности $j_{\mu-1} - 2, j_{\mu-1} - 3, \ldots, 2$.

Теорема 6.6. *Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга $1,5$ и $\mathbf{a}$ - примитивный столбец с Φ-стержнем $\| \ \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_n \ \|^T$. Пусть*

$$(i_1, \ldots, j_1), (i_2, \ldots, j_2), \cdots, (i_p, \ldots, j_p)$$

– набор числовых последовательностей, соответствующих Φ-стержню $\| \ \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \ldots \ \ \delta_n \ \|^T$. Тогда в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что

$$H \| \ a_1 \ \ \ldots a_n \ \|^T = \| \ b \ \ \lambda_2 \ \ \ldots \ \ \lambda_n \ \|^T,$$

где $(b, \delta_n) = 1$, а

$\lambda_i = 0$, если i принадлежит какой-то из числовых последовательностей,

$\lambda_i = \delta_i$ во всех других случаях. □

6.2. Ф-скелет матриц и его свойства

Пусть R – кольцо элементарных делителей и $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособенная d-матрица над R. Напомним, что через Φ_i обозначается матрица

$$\operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big) = \Phi_i, \ \ i = 2, \ldots, n,$$

причем $\Phi_1 = I_n$. Пусть $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ и

$$\Phi_i P \overset{l}{\sim} \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ d_{21}^i & \sigma_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1}^i & \ldots & d_{n,n-1}^i & \sigma_{in} \end{array} \right\| = \operatorname{triang}\,(\sigma_{i1}, \ \ldots, \ \sigma_{in})$$

– левые формы Эрмита матриц $\Phi_i P$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 6.2. **Ф-скелетом** матрицы P называется матрица $S_\Phi(P) = \| \, \sigma_{ij} \, \|_1^n$.

Теорема 6.7. *Если $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то* $S_\Phi(P) = S_\Phi(HP)$.

Доказательство. Согласно лемме 3.5 $\Phi_i P \overset{l}{\sim} \Phi_i HP$, $i = 2, \ldots, n$. То есть левые формы Эрмита матриц $\Phi_i P$ и $\Phi_i HP$ совпадают, $i = 2, \ldots, n$. Заметив, что формой Эрмита матриц $\Phi_1 P = I_n P$ и $\Phi_1 HP = I_n HP$ является единичная матрица, убеждаемся в правильности нашей теоремы. $\square$

Следствие 6.3. *Если матрицы $A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1} \Phi Q_B^{-1}$ ассоциированны справа, то* $S_\Phi(P_A) = S_\Phi(P_B)$.

Доказательство. В силу теоремы 4.3 матрицы A и B ассоциированны справа тогда и только тогда, когда $P_B = HP_A$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Тогда на основании теоремы 6.7 $S_\Phi(P_A) = S_\Phi(P_B)$. $\square$

Исследуем свойства Ф-скелета матрицы. Обозначим

$$\Phi^k = \mathrm{diag}\Big(\underbrace{\varphi, \ \ldots, \ \varphi}_{k}, \ \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{n-k}\Big), \quad \varphi \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Лемма 6.1. *Если $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ и*

$$\Phi^k P \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}\ (\alpha_{k1}, \ \ldots, \ \alpha_{kn}), \tag{6.5}$$

то выполняются следующие условия:

1) $\varphi^{k-1} | \alpha_{k\,i_1} \ldots \alpha_{k\,i_{n-1}}$ *для всех* $1 \leqslant i_1 < \ \ldots \ < i_{n-1} \leqslant n$, $k = 1, \ldots, n-1$;
2) $\alpha_{k1} \ldots \alpha_{kn} = \varphi^k e_k$, *где* $e_k \in U(R)$, $k = 1, \ldots, n-1$;
3) $\alpha_{ki} | \varphi$, $k = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Формой Смита матрицы $\Phi^k P$ является матрица

$$\mathrm{diag}\Big(1, \ \ldots, \ 1, \ \underbrace{\varphi, \ \ldots, \ \varphi}_{k}\Big).$$

Поэтому $\left\langle \Phi^k P \right\rangle_{n-1} = \varphi^{k-1}$. Поскольку матрицы $\Phi^k P$, $\mathrm{triang}\ (\alpha_{k1}, \ \ldots, \ \alpha_{kn})$ имеют одинаковые формы Смита, то каждый минор $(n-1)$-го порядка матрицы $\mathrm{triang}\ (\alpha_{k1}, \ \ldots, \ \alpha_{kn})$ также делится на φ^{k-1}. В частности,

$$\varphi^{k-1} | \begin{vmatrix} \alpha_{k\,i_1} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & \alpha_{k\,i_{n-1}} \end{vmatrix} = \alpha_{k\,i_1} \ldots \alpha_{k\,i_{n-1}},$$

$1 \leqslant i_1 < \ \ldots \ < i_{n-1} \leqslant n$.

С эквивалентности (6.5) следует, что

$$\det \Phi^k P = \alpha_{k1} \dots \alpha_{kn} \varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k \in U(R)$. С другой стороны,

$$\det \Phi^k P = \varphi^k \det P = \varphi^k e,$$

где $e = \det V \in U(R)$. Следовательно,

$$\alpha_{k1} \dots \alpha_{kn} = \varphi^k e\, \varepsilon_k^{-1} = \varphi^k e_k,$$

где $e_k = e\varepsilon_k^{-1} \in U(R)$. Из этого равенства получаем

$$\alpha_{ki} = \frac{\varphi^k}{\alpha_{k1} \dots \alpha_{k,i-1} \alpha_{k,i+1} \dots \alpha_{kn} e_k^{-1}}.$$

Поскольку

$$\varphi^{k-1} \mid \alpha_{k1} \dots \alpha_{k,i-1} \alpha_{k,i+1} \dots \alpha_{kn},$$

то

$$\alpha_{k1} \dots \alpha_{k,i-1} \alpha_{k,i+1} \dots \alpha_{kn} = \varphi^{k-1} s_i.$$

Таким образом,

$$\alpha_{ki} = \frac{\varphi^k}{\varphi^{k-1} s_i e_k^{-1}} = \frac{\varphi}{s_i e_k^{-1}}.$$

То есть $\alpha_{ki} | \varphi,\ k = 1, \dots, n-1,\ i = 1, \dots, n.$ □

Теорема 6.8. *Если* $\| \sigma_{ij} \|_1^n$ *– Φ-скелет матрицы* P *и*

$$\Delta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{i-1,j}},$$

то выполняются следующие условия:

1) $\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)^{i-2} \mid \Delta_{ij_1} \cdots \Delta_{ij_{n-1}},$
для всех $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{n-1} \leqslant n,\ i = 2, \dots, n,$

2) $\Delta_{i1} \dots \Delta_{in} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)^{i-1} e_i,\ e_i \in U(R),\ i = 2, \dots, n,$

3) $\Delta_{ij} \ \Big|\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ i = 2, \dots, n,\ j = 1, \dots, n,$

4) $\left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}}, \frac{\sigma_{i.i-1} \cdots \sigma_{in}}{\left(\sigma_{i.i-1} \dots \sigma_{in}, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)}\right) | \sigma_{i-1.i-1} \dots \sigma_{i-1.n},\ i = 3, \dots, n,$

5) $\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}=\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\ \cdots\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}e_i,\ e_i\in U(R),\ i=2,\ldots,n,$

6) $\sigma_{11}=\cdots=\sigma_{1n}=1.$

Доказательство. Запишем матрицу $\Phi_i,\ 1<i\leqslant n$ в виде

$$\Phi_i=\mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \cdots,\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n-i+1}\Big)\times$$

$$\times\mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_1},\ \cdots,\ \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ 1,\ \ldots,\ 1\Big)=\Phi^i\Phi_{i-1}.$$

Согласно определению Ф-скелета существует такая обратимая матрица U_{i-1}, что

$$U_{i-1}\Phi_{i-1}P=\mathrm{triang}\,(\sigma_{i-1,1},\ \ldots,\sigma_{i-1,n})=D_{i-1}.$$

Следовательно,

$$\Phi_iP=\Phi^i\,\Phi_{i-1}P=(\Phi^iU_{i-1}^{-1})(U_{i-1}\Phi_{i-1}P)=\Phi^i\,U_{i-1}^{-1}D_{i-1}.$$

Пусть $\mathrm{triang}\,(\alpha_{i1},\ \ldots,\alpha_{in})$ – левая форма Ермита матрицы $\Phi^i\,U_{i-1}^{-1}$. Тогда в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ найдется матрица S, для которой

$$S\Phi^iU_{i-1}^{-1}=\mathrm{triang}\,(\alpha_{i1},\ \ldots,\alpha_{in}).$$

Таким образом,

$$S\Phi_iP=\mathrm{triang}\,(\alpha_{i1},\ \ldots,\alpha_{in})D_{i-1}=\mathrm{triang}\,(\alpha_{i1}\sigma_{i-1.1},\ \ldots,\alpha_{in}\sigma_{i-1.n}).$$

С другой стороны, $\Phi_iP\overset{l}{\sim}\mathrm{triang}\ (\sigma_{i1},\ \ldots,\ \sigma_{in})$. Поэтому

$$\mathrm{triang}\ (\sigma_{i1},\ \ldots,\ \sigma_{in})\overset{l}{\sim}\mathrm{triang}\,(\alpha_{i1}\sigma_{i-1.1},\ \ldots,\alpha_{in}\sigma_{i-1.n}).$$

Отсюда вытекает, что σ_{ij} и $\alpha_{ij}\sigma_{i-1,j}$ являются ассоциированными элементами кольца R. Тогда

$$\alpha_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{i-1,j}}e_{ij}=\Delta_{ij}e_{ij},\ e_{ij}\in U(R),$$

и первые три условия теоремы вытекают из леммы 6.1.

Обозначим через U_{i-1} матрицу, составленную с последних $n-i+2$ столбцов матрицы P, а через P_{i-1} – подматрицу порядка $n-i+2$, которая содержится в правом нижнем углу матрицы P, $3\leqslant i\leqslant n$. Из определения Ф-скелета матрицы P следует, что $\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in}=\langle\Phi_iU_{i-1}\rangle_{n-1}$. Поскольку $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\det V_{i-1}$ является одним из таких миноров, то

$$\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in}|\,\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\det P_{i-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in}}{\left(\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in},\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)}|\mathrm{det}P_{i-1}. \tag{6.6}$$

Поскольку

$$\Phi_{i-1}=\mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ \ldots,\ \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n-i+2}\Big)\,\Phi_{i-2},$$

то все миноры максимального порядка матрицы $\Phi_{i-1}U_{i-1}$, за исключением $\det P_{i-1}$, кратны $\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}}$. Воспользовавшись условием (6.6), получим, что

$$\delta_{i-1}=\left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ \frac{\sigma_{i,i-1}\ldots\sigma_{in}}{\left(\quad\sigma_{i,i-1}\ldots\sigma_{in},\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\quad\right)}\right)$$

делит $\det P_{i-1}$. Поэтому δ_{i-1} является делителем $\sigma_{i-1,i-1}\ldots\sigma_{i-1,n}$ – н.о.д. миноров максимального порядка матрицы $\Phi_{i-1}U_{i-1}$.

Равенство 5) непосредственно следует из определения Ф-скелета матрицы A.

Матрица $\Phi_1 V = I\,V = V$ обратима, а значит, имеет своей формой Эрмита единичную матрицу I. Поэтому $\sigma_{11}=\ldots=\sigma_{1n}=1$. Теорема доказана. □

Раздел 7. Односторонняя эквивалентность матриц

В этом разделе для некоторых классов матриц построена каноническая форма вида $P^{-1}\Phi$ относительно односторонних преобразований из $\mathrm{GL}_n(R)$.

7.1. Неассоциированные матрицы со стандартными Ф-скелетами

Пусть R – кольцо элементарных делителей. Следующая теорема показывает, как изменяются элементы обратимой матрицы при преобразованиях из группы $\mathbf{G}_\Phi$.

Пусть $P = \|p_{ij}\|_1^n$. Обозначим

$$P_j = \left\| \begin{matrix} p_{1j} & p_{1.j+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \dots & p_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$j = 2, \dots, n$. Напомним, что через Φ_i обозначается матрица

$$\Phi_i = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+1}\Big), \quad i = 2, \dots, n.$$

Теорема 7.1. *Пусть P – обратимая матрица и $\| \sigma_{ij} \|_1^n$ – ее Ф-скелет. Для того, чтобы уравнение*

$$x\Phi_i P_j = \| \; a_{ij} \quad p_{i.j+1} \quad \dots \quad p_{in} \; \| \tag{7.1}$$

имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_{ij} \equiv a_{ij} (\mathrm{mod}\, \sigma_{ij}), \quad i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Gamma_j^i = \mathrm{diag}(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{n-j+1}^i)$ – форма Смита матрицы $\Phi_i P_j$. Из определения Ф-скелета вытекает, что

$$\Phi_i P_j \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}(\sigma_{ij}, \sigma_{i.j+1}, \dots, \sigma_{in}).$$

То есть $\sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in} = \langle \Phi_i P_j \rangle$. С другой стороны, также $\gamma_1^i\gamma_2^i\cdots\gamma_{n-j+1}^i = \langle \Phi_i P_j \rangle$. Следовательно,

$$\gamma_1^i\gamma_2^i\cdots\gamma_{n-j+1}^i = \sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}. \tag{7.2}$$

Расширенной матрицей уравнения (7.1) является матрица

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\varphi_i}{\varphi_1}p_{1j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_1}p_{1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_1}p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}p_{i-1.j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}p_{i-1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}p_{i-1.n} \\ p_{ij} & p_{i.j+1} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \dots & p_{nn} \\ a_{ij} & p_{i.j+1} & \dots & p_{in} \end{array} \right\|.$$

Вычтем из последней строки этой матрицы ее i-ую строку:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} \frac{\varphi_i}{\varphi_1}p_{1j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_1}p_{1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_1}p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}p_{i-1.j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}p_{i-1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}p_{i-1.n} \\ p_{ij} & p_{i.j+1} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \dots & p_{nn} \\ \hline a_{ij}-p_{ij} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} * & \Phi_i P_{j+1} \\ a_{ij}-p_{ij} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Из определения Ф-скелета следует, что для матрицы $\Phi_i P_{j+1}$ найдется такая обратимая матрица $V_{i.j+1}$, что

$$V_{i.j+1}\Phi_i P_{j+1} = \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \sigma_{i.j+1} & 0 & & 0 \\ * & \sigma_{i.j+1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \sigma_{in} \end{array} \right\|.$$

Тогда

$$(V_{i.j+1}\oplus 1)\left\| \begin{array}{cc} * & \Phi_i P_{j+1} \\ a_{ij}-p_{ij} & \mathbf{0} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & \sigma_{i.j+1} & 0 & & 0 \\ * & * & \sigma_{i.j+1} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & * & * & & \sigma_{in} \\ \hline a_{ij}-p_{ij} & & \mathbf{0} & & \end{array} \right\| = L_{ij}.$$

Очевидно, что расширенная матрица и матрица L_{ij} являются ассоциированными слева. Согласно теореме 2 из работы [57] стр. 218, которая остается правильной и в кольце R, уравнение (7.1) имеет решение тогда и только тогда, когда инвариантные множители расширенной матрицы ассоциированны соответствующим инвариантным множителям матрицы Γ_j^i. Отсюда следует, что

$$\langle L_{ij}\rangle = \gamma_1^i\gamma_2^i\cdots\gamma_{n-j+1}^i.$$

Воспользовавшись равенством (7.2), получаем

$$\langle L_{ij}\rangle = \sigma_{ij}\sigma_{i,j+1}\cdots\sigma_{in}.$$

Значит $\sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}$ является делителем всех миноров максимального порядка матрицы L_{ij}. В частности,

$$\sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}|(a_{ij}-p_{ij})\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}.$$

То есть $\sigma_{ij}|(a_{ij}-p_{ij})$.

Достаточность. Пусть $a_{ij}=p_{ij}+r\sigma_{ij}$. Согласно определению Ф-скелета

$$V_i\operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1},\ \ldots,\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ 1,\ \ldots,\ 1\Big)\,P = \operatorname{triang}(\sigma_{i1},\sigma_{i2},\ldots,\sigma_{in}),$$

где $V_i\in \mathrm{GL}_n(R)$. Пусть $\left\|\begin{matrix} v_{j1}^i & v_{j2}^i & \ldots & v_{jn}^i\end{matrix}\right\|$ – j-ая строка матрицы V_i. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\left\|\begin{matrix} r & 1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} v_{j1}^i & \ldots & v_{j.i-1}^i & v_{ji}^i & v_{j.i+1}^i & \ldots & v_{jn}^i\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{matrix}\right\|\Phi_iP_j =$$

$$=\left\|\begin{matrix} r & 1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} \sigma_{ij} & 0 & \ldots & 0\\ p_{ij} & p_{i.j+1} & \ldots & p_{in}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} p_{ij}+r\sigma_{ij} & p_{i.j+1} & \ldots & p_{in}\end{matrix}\right\|.$$

Это означает, что строка

$$\left\|\begin{matrix} r & 1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} v_{j1}^i & \ldots & v_{j.i-1}^i & v_{ji}^i & v_{j.i+1}^i & \ldots & v_{jn}^i\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{matrix}\right\| =$$

$$=\left\|\begin{matrix} rv_{j1}^i & \ldots & rv_{j.i-1}^i & rv_{ji}^i+1 & rv_{j.i+1}^i & \ldots & rv_{jn}^i\end{matrix}\right\|$$

является искомым решением нашего уравнения. Теорема доказана. □

Пусть B – неособенная матрица с формой Смита $\Phi=\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, которую запишем в виде $B=P^{-1}\Phi Q^{-1}$. И пусть в множестве $\mathbf{P}_B$ ее левых преобразующих матриц существует нижняя унитреугольная матрица P_0. Тогда легко убедиться, что

$$S_\Phi(P_0) = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & 1 & \ldots & 1 & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & 1\end{matrix}\right\| = F(\Phi).$$

Согласно теореме 6.7 все преобразующие матрицы с $\mathbf{P}_B$ имеют Ф-скелет $F(\Phi)$. Поэтому не возникнет никакой путаницы, если мы отождествим Ф-скелет матрицы P с Ф-скелетом матрицы B. То есть $S_\Phi(B) = S_\Phi(P)$, где $P \in \mathbf{P}_B$.

Обозначим через $\mathbf{T}(\Phi)$ множество нижних унитреугольных матриц вида

$$\left\| \begin{array}{lllll} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{n,n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

где $t_{ij} \in K\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\right),\ i > j$. Рассмотрим S_n – симметричную группу степени n, а также группу матриц перестановок. Сопоставим перестановке

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

матрицу $E(\tau) = \|\,\delta_{kj}\,\|_1^n$, где

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & j = i_k, \\ 0, & j \neq i_k, \end{cases}$$

$k = 1, \dots, n$. Как известно, такое отображение является изоморфизмом групп, при котором

$$E(\sigma)E(\tau) = E(\tau\sigma).$$

Будем говорить, что матрица B имеет **стандартный** Ф-скелет, если

$$S_\Phi(B) = F(\Phi)E(\tau),\ \ \tau \in S_n.$$

Теорема 7.2. *Множество* $\mathbf{T}(\Phi)$ *состоит из представителей различных левых классов смежности группы* $\mathrm{GL}_n(R)$ *по подгруппе* $\mathbf{G}_\Phi$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\Psi = \varphi_n I_n$. Тогда $\mathbf{V}(\Psi, \Phi) = \mathbf{T}(\Phi)$. Согласно теореме 5.6 это множество состоит из представителей различных левых классов смежности группы $\mathrm{GL}_n(R)$ по подгруппе $\mathbf{G}_\Phi$. □

Из теорем 7.2 и 5.6 следует, что множество $\mathbf{T}^{-1}(\Phi)\Phi$ состоит из неассоциированных справа матриц, которые имеют Ф-скелет $F(\Phi)$. Чтобы показать, что верно и обратное утверждение, установим ряд вспомогательных фактов.

Лемма 7.1. *Если* $S_\Phi(P) = \|\,\sigma_{ij}\,\|_1^n$, *причем* $\sigma_{nk} = 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, *то в группе* $\mathbf{G}_\Phi$ *существует такая матрица* H, *что матрица* HP *имеет своим* k*-ым столбцом столбец* $\|0\ \dots\ 0\ \ 1\|^T$.

Доказательство. Пусть $P = \| p_{ij} \|_1^n$ и

$$\Phi_n \| p_{1k} \ \dots \ p_{nk} \|^T =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ \dots, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \ 1\right) \| p_{1k} \ \dots \ p_{nk} \|^T \overset{l}{\sim} \| \alpha \ 0 \ \dots \ 0 \|^T .$$

Из определения Ф-скелета следует, что

$$\Phi_n \begin{Vmatrix} p_{1.k+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n.k+1} & \dots & p_{nn} \end{Vmatrix} = \Phi_n P_{k+1} \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{n.k+1}, \dots, \sigma_{nn}).$$

Это означает, что $\sigma_{n.k+1} \dots \sigma_{nn} | \langle \Phi_n P_{k+1} \rangle$. Поскольку $\alpha | \left\langle \Phi_n \| p_{1k} \ \dots \ p_{nk} \|^T \right\rangle$, то

$$\alpha\sigma_{n.k+1} \dots \sigma_{nn} | \left\langle \Phi_n \begin{Vmatrix} p_{1k} & p_{1,k+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{nk} & p_{n,k+1} & \dots & p_{nn} \end{Vmatrix} \right\rangle = \Phi_n P_k \ .$$

Заметив, что

$$\langle \Phi_n P_k \rangle = \sigma_{nk}\sigma_{n.k+1} \dots \sigma_{nn} = \sigma_{n.k+1} \dots \sigma_{nn},$$

получаем

$$\alpha\sigma_{n.k+1} \dots \sigma_{nn} | \sigma_{n.k+1} \dots \sigma_{nn}.$$

То есть $\alpha \in U(R)$. Поскольку α является н.о.д. элементов столбца $\Phi_n \| p_{1k} \ \dots \ p_{nk} \|^T$ и выбирается с точностью до ассоциированности, то $\alpha = 1$. Тогда на основании леммы 5.4 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что

$$H \| p_{1k} \ \dots \ p_{nk} \|^T = \| \ 0 \ \dots \ 0 \, 1 \|^T . \qquad \square$$

Лемма 7.2. *Пусть* C – $((n-1) \times k)$ *матрица,* $(n-1) \geqslant k$, *причем*

$$C \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k),$$

где $\gamma_1\gamma_2, \dots \gamma_k \neq 0$. *Тогда если*

$$\left\langle \begin{matrix} & C & \\ a_1 \ a_2 & \dots & a_k \end{matrix} \right\rangle = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k,$$

$a_i \in R$, $i = 1, \dots, k$, *то*

$$\begin{Vmatrix} & C & \\ a_1 \ a_2 & \dots & a_k \end{Vmatrix} \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k).$$

Доказательство. В группе $\mathrm{GL}_{n-1}(R)$ найдется такая матрицаV, что

$$VC = \operatorname{triang}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$(V \oplus I_1) \left\| \begin{matrix} & C & & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\|.$$

В этой матрице есть минор максимального порядка $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{k-1}a_k$. Согласно условию $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k | \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{k-1}a_k$. Отсюда получаем, что $a_k = \gamma_k a'_k$. Следовательно, выполняется равенство

$$\left\| \begin{matrix} & I_{n-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -a'_k & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ * & & \gamma_{k-1} & 0 \\ * & & * & \gamma_k \\ b_1 & \ldots & b_{k-1} & 0 \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k).$$

В этой матрице есть минор $\gamma_1 \ldots \gamma_{k-2}\, b_{k-1}\gamma_k$, который делится на $\gamma_1 \ldots \gamma_k$. Поэтому

$$b_{k-1} = \gamma_{k-1} b'_{k-1}$$

и

$$\left\| \begin{matrix} & I_{n-1} & & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -b'_{k-1} & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ * & & \gamma_{k-1} & 0 \\ * & & * & \gamma_k \\ b_1 & \ldots & b_{k-1} & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$
= \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ * & & \gamma_{k-2} & 0 & 0 \\ * & & * & \gamma_{k-1} & 0 \\ * & & * & * & \gamma_k \\ c_1 & \ldots & c_{k-2} & 0 & 0 \end{matrix} \right\| .
$$

Продолжая описанный процесс, на k-ом шаге найдем такую обратимую матрицу L, что

$$
L \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| .
$$

И для завершения доказательства остается только заметить, что эта матрица эквивалентна слева к матрице

$$
\left\| \begin{matrix} & C & & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\| .
$$

Лемму доказано. □

Обозначим через $\bar{b}_s$ столбец высоты $n-1$ вида

$$
\bar{b}_s = \left\| \underbrace{0 \ \ldots \ 0 \ 1}_{s} \ \ * \ \ \ldots \ * \right\|^T ,
$$

$1 \leqslant s \leqslant n-1$. Рассмотрим матрицу

$$
B = \| \ \bar{b}_{j_1} \ \ldots \ \bar{b}_{j_k} \ \| ,
$$

$1 \leqslant j_1, \ldots , j_k \leqslant n-1$, где $j_l \neq j_t$ при $l \neq t$.

Лемма 7.3. *Если*

$$
\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ldots , \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) B \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}}, \ldots , \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_k}}\right),
$$

причем

$$
\Phi_n \left\| \begin{matrix} & B & \\ a_1 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}}, \ldots , \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_k}}\right),
$$

$a_i \in R,\ i = 1, \ldots, k$, *то в группе* $\mathbf{G}_\Phi$ *существует такая матрица* H, *что*

$$H \left\| \begin{array}{ccc} & B & \\ a_1 & \ldots & a_k \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} B \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|. \tag{7.3}$$

Доказательство. Пусть j_s – наименьший среди индексов $j_1, \ \ldots \ , j_k$. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве леммы 7.2, получаем, что

$$a_s = \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_s}} a'_s.$$

Тогда матрица

$$H_s = \left\| \begin{array}{cccccccc} & & & I_{n-1} & & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_s}} a'_s & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

в которой элемент $-\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_s}} a'_s$ находится на позиции $(n,\ j_s)$, будет принадлежать группе $\mathbf{G}_\Phi$ и удовлетворять условие

$$H_s \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_s} \\ a_s \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_s} \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Из множества индексов, которые остались, снова выбираем наименьший, а именно j_t. Тогда, если

$$H_s \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ a_t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ b_t \end{array} \right\|,$$

то показываем, что

$$b_t = \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_t}} b'_t$$

и строим матрицу

$$H_t = \left\| \begin{array}{ccccccc} & & & I_{n-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_t}} b'_t & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|,$$

в которой элемент $-\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_t}} b'_t$ находится на позиции (n, j_t). Тогда

$$H_t \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ b_t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Поскольку $j_t < j_s$, то j_t-ая строка матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ b_t & 0 \end{array} \right\|$$

имеет вид $\| 1 \ 0 \|$. Следовательно,

$$H_t H_s \left\| \begin{matrix} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ a_t & a_s \end{matrix} \right\| = H_t \left\| \begin{matrix} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ b_t & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

причем $H_t H_s \in \mathbf{G}_\Phi$. Продолжив дальше такие преобразования над матрицей

$$\left\| \begin{matrix} & B & \\ a_1 & \ldots & a_k \end{matrix} \right\|,$$

на k-ом шаге получим матрицу H с $\mathbf{G}_\Phi$, которая будет удовлетворять равенство (7.3). Лемму доказано. □

Пусть $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – обратимая матрица и $S_\Phi(P) = \|\sigma_{ij}\|_1^n$ – ее Ф-скелет. Вычеркнем в матрицах P и $S_\Phi(P)$ n-ую строку и r-ый столбец. Полученные матрицы обозначим, соответственно, через P_{nr} и $S_\Phi(P)_{nr}$.

Лемма 7.4. *Если*

$$\| \, p_{1r} \ \ldots \ p_{nr} \, \|^T = \| \, 0 \ \ldots \ 0 \ \ 1 \, \|^T,$$

$1 \leqslant r \leqslant n$, *и* $\sigma_{1r} = \ldots = \sigma_{nr} = 1$, *то*

$$S_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}(P_{nr}) = S_\Phi(P)_{nr}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Пусть $r = n$. Согласно определению Ф-скелета

$$\Phi_i P = \Phi_i \left\| \begin{matrix} P_{nn} & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}\,(\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{i.n-1}, 1),$$

$i = 1, \ldots, n$. Заметим, что для любой $n \times k$ матрицы вида

$$\left\| \begin{matrix} U & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$n \geqslant k$, выполняется равенство

$$\left\langle \begin{matrix} U & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Отсюда следует, что утверждение верно при $r = n$.

Рассмотрим случай, когда $1 \leqslant r < n$. Поскольку $\sigma_{ir} = 1$, то н.о.д. миноров максимального порядка матриц

$$\Phi_i \left\| \begin{matrix} 0 & p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \\ 1 & p_{n.r+1} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\|, \ \Phi_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1,n} \\ p_{n.r+1} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$i = 1, \dots, n-1$, одинаков и равен $\sigma_{i.r+1} \dots \sigma_{in}$. В силу сделанных выше замечаний, н.о.д. миноров максимального порядка первой из этих матриц равен

$$\left\langle \bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.r+1} & \dots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \right\rangle,$$

где

$$\bar{\Phi}_i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{n-i}\Big).$$

То есть

$$\left\langle \bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.r+1} & \dots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \right\rangle = \sigma_{i.r+1} \dots \sigma_{in}.$$

Тогда на основании леммы 7.2

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.r+1} & \dots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i.r+1}, \dots, \sigma_{in}). \tag{7.5}$$

Очевидно, что н.о.д. миноров максимального порядка матриц

$$\Phi_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r-1} & 0 & p_{1,r+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.r-1} & 0 & p_{n-1.r+1} & \dots & p_{n-1.n} \\ p_{n.r-1} & 1 & p_{n.r+1} & \dots & p_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r-1} & p_{1.r+1} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-2.r-1} & p_{n-2.r+1} & \cdots & p_{n-2,n} \\ p_{n-1.r-1} & p_{n-1.r+1} & \cdots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\|$$

одинаков и равен $\sigma_{i.r-1}\sigma_{i,r+1} \dots \sigma_{in}$. Учтя теперь эквивалентность (7.5), получим

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r-1} & p_{1.r+1} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-2.r-1} & p_{n-2.r+1} & \cdots & p_{n-2,n} \\ p_{n-1.r-1} & p_{n-1.r+1} & \cdots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i.r-1}, \sigma_{i.r+1}, \dots, \sigma_{in}).$$

Рассуждая дальше так же, убеждаемся в том, что

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{11} & \dots & p_{1.r-1} & p_{1.r+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.1} & \dots & p_{n-1.r-1} & p_{n-1.r+1} & \dots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim}$$

$$\overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i.r-1}, \sigma_{i.r+1}, \dots, \sigma_{in}),$$

$i = 1, \dots, n-1$. А это и означает, что выполняется равенство (7.4). □

Следующая теорема подытоживает полученные результаты.

Теорема 7.3. *Множество* $\mathbf{T}^{-1}(\Phi)\Phi$ *состоит из всех неассоциированных справа матриц, которые имеют* Φ*-скелет* $F(\Phi)$.

Доказательство. Согласно теореме 7.2 множество $\mathbf{T}(\Phi)$ состоит из представителей различных левых классов смежности группы $\mathrm{GL}_n(R)$ по подгруппе $\mathbf{G}_\Phi$. Тогда на основании теоремы 4.3 матрицы из множества $\mathbf{T}^{-1}(\Phi)\Phi$ неассоциированны справа и имеют Φ-скелет $F(\Phi)$.

Пусть теперь матрица $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$ имеет Φ-скелет $F(\Phi) = \|\sigma_{ij}\|_1^n$. Покажем, что $B \overset{r}{\sim} T^{-1}\Phi$, где $T \in \mathbf{T}(\Phi)$.

Пусть $n = 2$. Поскольку $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}(\Phi)P$ и $\sigma_{22} = 1$, то на основании леммы 7.1 среди преобразующих матриц матрицы B существует матрица вида

$$P' = \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ a & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где $e \in U(R)$. Запишем элемент a в виде

$$a = \alpha + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} t,$$

где $\alpha \in K\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)$. Тогда

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} e^{-1} & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} e^{-1} t & 1 \end{matrix} \right\|}_{H} \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ a & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{matrix} \right\| = T \in \mathbf{T}(\Phi).$$

Таким образом, $HP' = T$, где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. В силу теоремы 4.3 это означает, что $B \overset{r}{\sim} T^{-1}\Phi$.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех $k < n$. Как и в предыдущем случае, во множестве $\mathbf{P}_B$ выберем преобразующую матрицу вида

$$P = \left\| \begin{matrix} U_{n-1} & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\|.$$

На основании леммы 7.4

$$S_{\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}(U_{n-1}) = F(\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})).$$

Согласно предположению индукции в группе $\mathbf{G}_{\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}$ существует такая матрица G_{n-1}, что

$$G_{n-1}U_{n-1} = T_{n-1} \in \mathbf{T}(\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})).$$

Следовательно,

$$(G_{n-1} \oplus I_1\,)P = \left\| \begin{array}{cccc} & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & 1 \end{array} \right\| = P_n,$$

где

$$a_{n-1} \;=\; \alpha_{n.n-1} + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} t_{n.n-1}, \;\; \alpha_{n.n-1} \in K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right).$$

Очевидно, что $G_{n-1} \oplus I_1 \in \mathbf{G}_\Phi$. Тогда

$$\left\| \begin{array}{ccccc} & & I_{n-1} & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} t_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| P_n =$$

$$= H_{n-1}P_n = \left\| \begin{array}{ccccc} & & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ b_1 & \ldots & b_{n-2} & \alpha_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = P_{n-1},$$

где

$$b_{n-2} = \alpha_{n.n-2} + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} t_{n.n-2}, \;\; \alpha_{n.n-2} \in K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}}\right).$$

Опять же получим, что

$$\left\| \begin{array}{cccccc} & & I_{n-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} t_{n.n-2} & 0 & 1 \end{array} \right\| P_{n-1} =$$

$$= H_{n-2}P_{n-1} = \left\| \begin{array}{cccc} & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ c_1 & \ldots & \alpha_{n.n-2} & \alpha_{n.n-1} \end{array} \right\|.$$

Продолжив описанный процесс, получим матрицу

$$H = H_1 \ldots H_{n-1}(G_{n-1} \oplus I_1\,) \in \mathbf{G}_\Phi,$$

для которой

$$HP = \left\| \begin{array}{cccc} & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{n.n-2} & \alpha_{n.n-1} \end{array} \right\| \in \mathbf{T}(\Phi),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 7.1. *Для того, чтобы в классе* $\mathbf{P}_B$ *существовала нижняя унитреугольная матрица необходимо и достаточно, чтобы* $S_\Phi(B) = F(\Phi)$. □

Теперь перейдем к описанию неассоциированных матриц со стандартными Ф-скелетами.

Лемма 7.5. *Пусть* $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ *и* $\tau \in S_n$. *Если* $S_\Phi(P) = F(\Phi)E(\tau)$, *то*

$$S_\Phi(PE^{-1}(\tau)) = F(\Phi).$$

Доказательство. Пусть

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Тогда i_n-ый столбец матрицы $F(\Phi)E(\tau)$ состоит только из единиц. Через $\bar{p}_{i_n}$ обозначим I_n-ый столбец матрицы P. Согласно лемме 7.1 можно полагать, что

$$\bar{p}_{i_n} = \|\, 0 \ \dots \ 0 \ 1 \,\|^T.$$

Вычеркнем в матрице P последнюю строку и i_n-ый столбец. Полученную матрицу обозначим через P_{ni_n}. На основании леммы 7.4

$$S_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}(P_{ni_n}) = S_\Phi(P)_{ni_n}.$$

Оставим нумерацию столбцов матриц P_{ni_n} и $S_\Phi(P)_{ni_n}$ такой, какой она была у них в матрицах P и $S_\Phi(B)$, соответственно. Поскольку i_{n-1} - первый столбец матрицы $S_\Phi(P)_{ni_n}$ состоит из единиц, то для i_{n-1}-го столбца матрицы P_{ni_n}, который обозначим через $\bar{u}_{i_{n-1}}$, в группе $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ найдется такая матрица H_{n-1}, что

$$H_{n-1}\bar{u}_{i_{n-1}} = \|\, 0 \ \dots \ 0 \ 1 \,\|^T.$$

Следовательно, матрица, составленная из i_{n-1}-го и i_n-го столбцов матрицы $(H_{n-1} \oplus I_1\ )P$, имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} & \mathbf{0} & \\ 1 & & 0 \\ * & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку $H_{n-1} \oplus I_1\ \in \mathbf{G}_\Phi$, то

$$S_\Phi((H_{n-1} \oplus I_1\ )P) = S_\Phi(P) = F(\Phi)E(\tau).$$

Аналогично в группе $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2})}$ находим матрицу H_{n-2}, для которой

$$(H_{n-2} \oplus I_2)\bar{w}_{i_{n-2}} = \|\, 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ * \ * \,\|^T,$$

где $\bar{w}_{i_{n-2}}$ – i_{n-2}-ый столбец матрицы $(H_{n-1} \oplus I_1\ )P$. Продолжив описанный процесс, найдем в группе $\mathbf{G}_\Phi$ матрицы вида $H_{n-i} \oplus I_i$, $\ H_{n-i} \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-i})}$, $i = 1, \dots, n-2$, для которых i_s-ые столбцы матрицы

$$(H_2 \oplus I_{n-2}\ ) \dots (H_{n-1} \oplus I_1\ )P$$

будут иметь вид

$$\left\| \underbrace{0\ \ldots\ 0\ 1}_{i_s} * * \right\|^T = \bar{t}_{i_s},$$

$s = 1, \ldots, n$. Таким образом, матрица $T = \left\| \begin{matrix} \bar{t}_{i_1} & \ldots & \bar{t}_{i_n} \end{matrix} \right\|$ является нижней унитреугольной матрицей и поэтому $S_\Phi(T) = F(\Phi)$. Заметив, что

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

а $E(\tau^{-1}) = E^{-1}(\tau)$, получаем

$$T = \underbrace{(H_2 \oplus I_{n-2}\ ) \ldots (H_{n-1} \oplus I_1\ )}_{H} PE^{-1}(\tau),$$

где $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Следовательно,

$$F(\Phi) = S_\Phi(T) = S_\Phi(HPE^{-1}(\tau)) = S_\Phi(PE^{-1}(\tau)).$$

Лемму доказано. $\square$

Заметим, что перестановка столбцов обратимой матрицы не всегда приводит к аналогичной перестановке столбцов Ф-скелета этой матрицы.

Пример 7.1. Пусть $R = \mathbb{Z}$,

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{matrix} \right\|, \quad P = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|^{-1},$$

где $\varphi \notin \{0, \ \pm 1\}$, и

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

– перестановка, которой соответствует матрица

$$E(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда Ф-скелеты матриц P и $PE(\tau)$ совпадают:

$$S_\Phi(P) = S_\Phi(PE(\tau)) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ \varphi & 1 \end{matrix} \right\|. \qquad \diamondsuit$$

Единицы, которые стоят на главных диагоналях матриц из $\mathbf{T}(\Phi)$, назовем диагональными. Рассмотрим множество $\mathbf{T}(\Phi)E(\tau)$, где $\tau \in S_n$. В каждой матрице этого множества заменим все элементы, стоящие справа от диагональных единиц, на нули. Полученное множество матриц обозначим через $\mathbf{T}_\tau(\Phi)$.

Теорема 7.4. *Множество* $\mathbf{T}_\tau^{-1}(\Phi)\Phi$ *состоит из всех неассоциированных справа матриц, которые имеют* Φ*-скелет* $F(\Phi)E(\tau)$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathbf{T}_\tau(\Phi)$, где

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

И пусть

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \dots & n \end{matrix} \right\| E(\tau) = \left\| \begin{matrix} j_1 & \dots & j_n \end{matrix} \right\|.$$

Это означает, что s-ым столбцом матрицы $\operatorname{triang}(\,1,\dots\,,1\,)E(\tau)$ будет j_s-ый столбец матрицы $\operatorname{triang}(\,1,\dots\,,1\,)$, $s = 1,\dots,n$. Следовательно, если $\bar t_s$ – s-ый столбец матрицы T, то он имеет вид

$$\bar t_s = \left\| \underbrace{0\ \dots\ 0\ 1}_{j_s} * \dots * \right\|^T.$$

Из способа построения множества $\mathbf{T}_\tau(\Phi)$ вытекает, что

$$\bar t_n = \left\| \underbrace{0\ \dots\ 0\ 1}_{j_n} 0 \dots 0 \right\|^T.$$

Поэтому

$$\Phi_n \bar t_n \overset{l}{\sim} \left\| \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \end{matrix} \right\|^T,$$

где матрица

$$\Phi_n = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}},\ 1 \right)$$

записана в виде

$$\Phi_n = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_n} \right).$$

Заметив, что в матрице $\Phi_n \left\| \begin{matrix} \bar t_{n-1} & \bar t_n \end{matrix} \right\|$ есть только один отличный от нуля минор $\pm \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{n-1}}} \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}$, получаем

$$\Phi_n \left\| \begin{matrix} \bar t_{n-1} & \bar t_n \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{n-1}}}, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \right).$$

Продолжив аналогичные рассуждения, получим, что

$$\Phi_n T \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}},\ \ldots,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}\right).$$

То есть последние строки матриц $S_\Phi(T)$ и $F(\Phi)E(\tau)$ совпадают и равны

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}} \ \ \ldots \ \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \right\|.$$

Очевидно, что и остальные строки матриц $F(\Phi)E(\tau)$ и $S_\Phi(T)$ однаковы. Поэтому $S_\Phi(T) = F(\Phi)E(\tau)$.

Наоборот, пусть матрица $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$ имеет Φ-скелет $F(\Phi)E(\tau)$, т.е.

$$S_\Phi(B) = S_\Phi(P) = F(\Phi)E(\tau).$$

Тогда на основании леммы 7.5 имеем

$$S_\Phi(PE^{-1}(\tau)) = F(\Phi).$$

З теоремы 7.3 вытекает, что в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует матрица H_n, для которой

$$H_n P E^{-1}(\tau) = \operatorname{triang}(1, \ldots, 1).$$

Следовательно,

$$H_n P = \operatorname{triang}(1, \ldots, 1) E(\tau).$$

Тогда согласно теореме 6.7

$$F(\Phi)E(\tau) = S_\Phi(P) = S_\Phi(H_n P) = S_\Phi(\operatorname{triang}(1, \ldots, 1)E(\tau)). \tag{7.6}$$

Занумеруем столбцы матрицы $H_n P$ так: s-ым столбцом будем считать столбец вида

$$\bar{a}_s = \left\| \underbrace{0\ \ldots\ 0\ 1}_{s} * \ldots * a_s \right\|^T, \ s = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$H_n P = \left\| \ \bar{a}_{j_1} \quad \ldots \quad \bar{a}_{j_n} \ \right\|.$$

Из равенства (7.6) следует, что последней строкой матрицы $S_\Phi(H_n P)$ будет

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}} \ \ldots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \right\|.$$

Пусть$j_l = n$. Тогда матрица $H_n P$ имеет вид

$$H_n P = \left\| \begin{matrix} & C & & \mathbf{0} & & B & \\ a_1 & \ldots & a_{l-1} & 1 & a_{l+1} & \ldots & a_n \end{matrix} \right\|.$$

Согласно определению Ф-скелета

$$\Phi_n \left\| \begin{matrix} \bar a_{j_l} & \bar a_{j_{l+1}} & \dots & \bar a_{j_n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(1, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{l+1}}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}\right).$$

Приняв во внимание структуру матрицы H_nP, получим

$$\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) B \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{l+1}}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}\right).$$

Пусть $j_k = n-1$. Если элемент a_k стоит справа от диагональной единицы, то, как следует из леммы 7.3 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H_{n-1}, что в матрице $H_{n-1}H_nP$ на месте элемента a_k будет стоять ноль. Если же элемент a_k стоит слева, то, воспользовавшись методами, которые использовались при доказательстве теоремы 7.3 построим такую матрицу H_{n-1}, что в матрице $H_{n-1}H_nP$ на месте элемента a_k будет стоять элемент α из множества $K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right)$. Продолжая рассуждать аналогично, найдем в группе $\mathbf{G}_\Phi$ такую матрицу L_n, что в матрице L_nP справа от диагональной единицы будут стоят нули, а слева – элементы с $K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Вычеркнем в матрице L_nP последнюю строку и первый столбец. Полученную матрицу обозначим через $(L_nP)_{nl}$. Воспользовавшись леммой 7.4 и рассуждая так же как и выше, найдем в группе $\mathbf{G}_{diag\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ такую матрицу L_{n-1}, что в последней строке матрицы $L_{n-1}(L_nP)_{nl}$ справа от диагональной единицы будут стоять нули, а слева – элементы с $K\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Тогда в матрице $(L_{n-1} \oplus I_1\ )L_nP$, где $(L_{n-1} \oplus I_1\ )L_n \in \mathbf{G}_\Phi$, элементы двух последних строк будут удовлетворять требования теоремы. Продолжая описанный процесс, построим такую матрицу $H \in \mathbf{G}_\Phi$, що $HP = T \in \mathbf{T}_\tau(\Phi)$, т.е. $B \overset{r}{\sim} T^{-1}\Phi$. Теорема доказана. □

Обозначим через S_n^Φ перестановки порядка n, с помощью которых получаются различные матрицы $F(\Phi)E(\tau)$, и обозначим

$$\operatorname{Stand}(\Phi) = \bigcup_{\tau \in S_n^\Phi} T_\tau(\Phi).$$

Теорема 7.5. *Множество* $\operatorname{Stand}(\Phi)^{-1}\Phi$ *состоит из всех неассоциированных справа матриц, которые имеют стандартные* Ф*-скелеты.* □

Пример 7.2. Пусть $R = \mathbb{Z}$, $\Phi = \operatorname{diag}(1{,}3{,}6\ )$. Поскольку $S_n^\Phi = S_n$, то

$$\operatorname{Stand}(\Phi) = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & b & 1 \end{matrix} \right\|, \right\} \bigcup$$

$$\bigcup\left\{\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|,\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array}\right\|,\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|\right\},$$

где $a \in \{0,1,2\}$, $b \in \{0,1,\ldots,5\}$, $c \in \{0,1\}$, и $\mathrm{Stand}\,(\Phi)^{-1}\Phi$ является множеством всех неассоциированных справа матриц со стандартными Ф-скелетами.

Заметим, что множество $\mathrm{Stand}\,(\Phi)$ не исчерпывает всех представителей левых классов смежности группы $\mathrm{GL}_n(R)$ по подгруппе $\mathbf{G}_\Phi$. Действительно, остались неохваченными матрицы с Ф-скелетами

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right\|,\quad \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right\|,\quad \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right\|.$$

Примерами матриц с такими Ф-скелетами являются

$$\left\{\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right\|,\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right\|,\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right\|\right\}^{-1}\Phi. \qquad \diamondsuit$$

Обозначим через $W(\Phi)$ множество всех представителей левых классов смежности группы $\mathrm{GL}_n(R)$ по подгруппе $\mathbf{G}_\Phi$.

Пример 7.3. Пусть $R = \mathbb{Q}[x]$, $\Phi = \mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ x^2+1\ )$. Тогда

$$F(\Phi) = \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2+1 & x^2+1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Следовательно,

$$S_n^\Phi = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

То есть, кроме $F(\Phi)$, есть еще два стандартных Ф-скелета:

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2+1 & 1 & x^2+1 \end{array}\right\|,\quad \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & x^2+1 \end{array}\right\|.$$

Поскольку полином x^2+1 неразложим в кольце $\mathbb{Q}[x]$, то всевозможные Ф-скелеты матриц с формой Смита Ф исчерпываются выписанными Ф-скелетами. Это означает, что

$$W(\Phi) = \mathrm{Stand}\,(\Phi) =$$

$$= \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b(x) & c(x) & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(x) & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right\},$$

где $b(x),\ c(x) \in \{\, mx+n | m, n \in \ \mathbb{Q}\,\}$. Таким образом, $\mathrm{Stand}\,(\Phi)^{-1}\Phi$ является множеством всех неассоциированных справа матриц с формой Смита Φ. $\diamondsuit$

Установленную в этом примере закономерность можно без оговорок перенести и на более широкий класс матриц.

Следствие 7.2. *Множество Stand*$(\Phi)^{-1}\Phi$, *где*

$$\Phi = \mathrm{diag}\Big(1, \ldots, 1, \underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{i}\Big),$$

φ *– неразложимый элемент кольца* R, $1 \leqslant i < n$, *является множеством всех неассоциированных справа матриц с формой Смита* Φ. $\square$

7.2. Нормальная форма матриц с одним инвариантным множителем относительно односторонних преобразований

Пусть R – кольцо Безу стабильного ранга 1,5 и $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – обратимая матрица над R. Рассмотрим диагональную матрицу с одним отличным от единицы инвариантным множителем:

$$\Phi = \mathrm{diag}\ (1, \ldots,\ 1, \varphi), \quad \varphi \neq 0, \quad \varphi \notin U(R).$$

В этом случае группа $\mathbf{G}_\Phi$ состоит из обратимых матриц вида

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1.n-1} & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1.1} & \ldots & h_{n-1.n-1} & h_{n-1.n} \\ \varphi h_{n1} & \ldots & \varphi h_{n.n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Это означает, что

$$\Phi_1 = \cdots = \Phi_{n-1} = I, \quad \Phi_n = \mathrm{diag}\ (\varphi,\ \ldots,\ \varphi,\ 1).$$

Для матрицы $\Phi_n P$ существует такая обратимая матрица V, что

$$V\Phi_n P = \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & \gamma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_{n-1.1} & c_{n-1.2} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n.n-1} & \gamma_n \end{Vmatrix} \tag{7.7}$$

– форма Эрмита матрицы $\Phi_n P$. Таким образом, Φ-скелетом матрицы P является матрица

$$V\Phi_n P = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{array} \right\| = S_\Phi(P).$$

Лемма 7.6. *Выполняются условия*

$$\gamma_i = \frac{\varphi \nu_i}{\nu_{i+1}},$$

где

$$\nu_i = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, p_{nn}, \varphi),\ i = 1, \dots, n,\ \nu_{n+1} = \varphi.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$P_i = \left\| \begin{array}{ccccc} p_{1i} & p_{1.i+1} & \dots & p_{1.n-1} & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.i} & p_{n-1.i+1} & \dots & p_{n-1.n-1} & p_{n-1.n} \\ p_{ni} & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

На основании утверждения 3.8 матрица $\Phi_n P_i$, $i = 1, \dots, n-1$, имеет форму Смита

$$\Phi_n P_i \sim \left\| \begin{array}{cccc} \nu_i & 0 & & 0 \\ 0 & \varphi & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \varphi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \nu_i \oplus \varphi I_{n-i} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где $\nu_i = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{nn}, \varphi)$. Следовательно,

$$\langle \Phi_n P_i \rangle = \det(\nu_i \oplus \varphi I_{n-i}) = \nu_i \varphi^{n-i}.$$

С другой стороны, из равенства (7.7) следует, что

$$\Phi_n P_i \overset{l}{\sim} \left\| \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{i+1.i-1} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ c_{ni} & c_{n.i+1} & \dots & c_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

То есть

$$\langle \Phi_n P_i \rangle = \det \left\| \begin{matrix} \gamma_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ c_{ni} & c_{n.i+1} & \dots & c_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| = \gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n.$$

Таким образом, $\gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n = \nu_i \varphi^{n-i}$. Аналогично показываем, что

$$\gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots \gamma_n = \nu_{i+1} \varphi^{n-i-1}.$$

Тогда

$$\frac{\gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n}{\gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots \gamma_n} = \gamma_i = \frac{\nu_i \varphi^{n-i}}{\nu_{i+1} \varphi^{n-i-1}} = \frac{\varphi \nu_i}{\nu_{i+1}}.$$

Лемму доказано. □

Из равенства (7.7) вытекает, что

$$\gamma_n = (\varphi p_{1n}, \dots, \varphi p_{n-1.n}, p_{nn}) = (\varphi(p_{1n}, \dots, p_{n-1.n}), p_{nn}).$$

Поскольку $(p_{1n}, \dots, p_{n-1.n}, p_{nn}) = 1$, то $\gamma_n = (\varphi, p_{nn})$. Это означает, что Ф-стержнем столбца $\| p_{1n} \quad p_{2n} \quad \dots \quad p_{nn} \|^T$ будет $\| 1 \quad \dots \quad 1 \quad \gamma_n \|^T$. Согласно теореме 6.3 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что

$$H \| p_{1n} \ \ p_{2n} \ \ \dots \ \ p_{nn} \|^T) = \| p'_{1n} \ \ \dots \ \ p'_{n-1.n} \ \ \gamma_n \|^T.$$

Рассмотрим матрицу HP. На основании теоремы 6.7 $S_\Phi(P) = S_\Phi(HP)$. А значит, в дальнейшем можно считать, что элемент p_{nn} матрицы P равен γ_n.

Следующее утверждение показывает, как меняются элементы матрицы P под действием матриц из группы $\mathbf{G}_\Phi$.

Теорема 7.6. *Пусть $P = \| p_{ij} \|_1^n$ – обратимая матрица над R, причем $p_{nn} = \gamma_n | \varphi$, i*

$$S_\Phi(P) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

Если $p_{ni} \neq 0$, то матричное уравнение

$$x \Phi_n P_i = \left\| \ a_i \quad p_{n.i+1} \quad \dots \quad p_{n.n-1} \quad \gamma_n \ \right\|, \tag{7.8}$$

где

$$P_i = \left\| \begin{array}{ccccc} p_{1i} & p_{1.i+1} & \dots & p_{1.n-1} & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.i} & p_{n-1.i+1} & \dots & p_{n-1.n-1} & p_{n-1.n} \\ p_{ni} & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|,$$

$1 \leqslant i \leqslant n-1$ *, разрешимо, причем в группе* $\mathbf{G}_\Phi$ *существует матрица вида*

$$\left\| \begin{array}{cccc} & & * & \\ \varphi\overline{x}_1 & \dots & \varphi\overline{x}_{n-1} & \overline{x}_n \end{array} \right\|, \tag{7.9}$$

где $\left\| \begin{array}{cccc} \overline{x}_1 & \dots & \overline{x}_{n-1} & \overline{x}_n \end{array} \right\|$ *– решение уравнения* (7.8)*, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

1) $a_i \equiv p_{ni} (\mod \gamma_i)$,

2) $(a_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n)$.

Или же условия, равносильные им:

3) $(a_i,\ \varphi) = (p_{ni},\ \varphi)$,

4) $a'_i \equiv p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi}{[(p_{ni},\ \varphi),\ (p_{n.i+1},\ \dots,\ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})]} \right)$,

где a'_i *и* p'_{ni} *– частные от деления* $a_i,\ p_{ni}$ *на* $(p_{ni},\ \varphi)$,

$$[(p_{ni},\ \varphi),\ (p_{n.i+1},\ \dots,\ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})] = \frac{(p_{ni},\ \varphi)(p_{n.i+1},\ \dots,\ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})}{((p_{ni},\ \varphi),\ (p_{n.i+1},\ \dots,\ p_{n.n-1}, \gamma_{nn}))}.$$

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 7.1 условие 1) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (7.8).

Если в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует матрица H_i вида (7.9), то

$$H_i P = \left\| \begin{array}{cccccccc} & & & & * & & & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.i-1} & a_{ni} & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Согласно теореме 6.1 $(a_i, \varphi) = (p_{ni}, \varphi)$. Поскольку $\gamma_n | \varphi$, то

$$(a_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (a_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, (\gamma_n, \varphi)) =$$

$$= ((a_i, \varphi), p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = ((p_{ni}, \varphi), p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) =$$

$$= (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Достаточность. Рассмотрим последнюю строку матрицы P :

$$\left\| \begin{array}{ccccc} p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Обозначим

$$(p_{nj}, p_{n.j+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = \nu_j, \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $p_{n.k_1}, p_{n.k_2}, \ldots, p_{n.k_p}$ – отличные отнуля элементы последней строки матрицы P, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq n-1$. И пусть $i = k_s$, $k_1 \leq k_s \leq k_p$, $i \neq 1$. Из условий 1) и 2) следует, что $a_i = p_{ni} + \gamma_i r$ и $(a_i, \nu_{i+1}) = \nu_i$. Следовательно, $(p_{ni} + \gamma_i r, \nu_{i+1}) = \nu_i$, т.е.

$$\left(\frac{p_{ni}}{\nu_i} + \frac{\gamma_i}{\nu_i} r, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \right) = 1.$$

В силу леммы 7.6 $\gamma_i = \frac{\varphi \nu_i}{\nu_{i+1}}$. Поэтому

$$\left(\frac{p_{ni}}{\nu_i} + \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} r, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \right) = 1. \tag{7.10}$$

Из определения Φ-скелета матрицы P следует, что существует такая обратимая матрица V, что

$$V\Phi_n P = \left\| \begin{array}{ccccccccc} \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & \gamma_2 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \ldots & & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & c_{i-1.2} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i+1.1} & c_{i+1.2} & \ldots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ddots & & \\ c_{n-1.1} & c_{n-1.2} & \ldots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{n.i-1} & p_{ni} & p_{n.i+1} & \ldots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Матрица $\Phi_n P$ имеет форму Смита $\operatorname{diag}(1, \varphi, \ldots, \varphi)$. Поскольку произведение первых двух инвариантных множителей матрицы $\Phi_n P$ равно н.о.д. ее миноров второго порядка, то φ является делителем всех миноров второго порядка матрицы $\Phi_n P$. Матрица $V\Phi_n P$ эквивалентна матрице $\Phi_n P$, поэтому все миноры второго порядка матрицы $V\Phi_n P$ также делятся на φ. В частности,

$$\varphi | \begin{vmatrix} c_{ij} & \gamma_i \\ p_{nj} & p_{ni} \end{vmatrix}, \ j = k_1, \ldots, k_{s-1},$$

что равносильно

$$\frac{\varphi}{\nu_i} | \begin{vmatrix} c_{ij} & \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \\ p_{nj} & \frac{p_{ni}}{\nu_i} \end{vmatrix}.$$

Тогда тем более

$$\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} | \begin{vmatrix} c_{ij} & \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \\ p_{nj} & \frac{p_{ni}}{\nu_i} \end{vmatrix}.$$

Приняв во внимание равенство (7.10), на основании утверждения 1.9 получаем

$$\left(p_{ni}+rc_{ij},\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right)=\left(p_{ni},c_{ij},\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right),\quad j=k_1,\dots,k_{s-1}. \tag{7.11}$$

Рассмотрим матрицу

$$\left(I_{i-1}\oplus\left\|\begin{matrix}1&0&&0&0\\0&1&&0&0\\&&\ddots&&\\0&0&&1&0\\r&0&&0&1\end{matrix}\right\|\right)V\Phi_nP=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\gamma_1&&0&0&0&&0&0\\&\ddots&&&&&&\\c_{i-1.1}&&\gamma_{i-1}&0&0&&0&0\\c_{i1}&\dots&c_{i.i-1}&\gamma_i&0&&0&0\\c_{i+1.1}&\dots&c_{i+1.i-1}&c_{i+1.i}&\gamma_{i+1}&&0&0\\&&&&&\ddots&&\\c_{n-1.1}&\dots&c_{n-1.i-1}&c_{n-1.i}&c_{n-1.i+1}&&\gamma_{n-1}&0\\p_{n1}+rc_{i1}&\dots&p_{n.i-1}+rc_{i.i-1}&p_{ni}+r\gamma_i&p_{n.i+1}&\dots&p_{n.n-1}&\gamma_n\end{matrix}\right\|=$$

$$=V_{i-1}\Phi_nP.$$

Пусть

$$(p_{n.k_1}+rc_{i.k_1},\dots,p_{n.k_{s-1}}+rc_{i.k_{s-1}},p_{ni}+r\gamma_i,p_{n.i+1},\dots,p_{n.n-1},\gamma_n)=\delta_i.$$

Согласно условию 2)

$$(p_{ni}+r\gamma_i,p_{n.i+1},\dots,p_{n.n-1},\gamma_n)=(p_{ni},p_{n.i+1},\dots,p_{n.n-1},\gamma_n).$$

Кроме того, учитывая равенство (7.11), получаем

$$\left(\delta_i,\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right)=$$

$$=\Bigl(\left(p_{n.k_1}+rc_{i.k_1},\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right),\dots,\left(p_{n.k_{s-1}}+rc_{i.k_{s-1}},\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right),$$

$$(p_{ni}+r\gamma_i,p_{n.i+1},\dots,p_{n.n-1},\gamma_n)\Bigr)=$$

$$=\left(p_{n.k_1},c_{i.k_1},\dots,p_{n.k_{s-1}},c_{i.k_{s-1}},p_{ni},p_{n.i+1},\dots,p_{n.n-1},\gamma_n,\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right)=$$

$$= \left((p_{n.k_1}, \dots, p_{n.k_{s-1}}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n), (c_{i.k_1}, \dots, c_{i.k_{s-1}}), \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \right).$$

Поскольку $\left\| \begin{matrix} p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|$ – последняя строка обратимой матрицы P, то

$$1 = (p_{n1}, \dots, p_{n.i-1}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) =$$

$$= (p_{n.k_1}, \dots, p_{n.k_{s-1}}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Следовательно,

$$\left(\delta_i, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \right) = 1.$$

Из того, что

$$(p_{n.i+1}, p_{n.i+2}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = \nu_{i+1}$$

вытекает, что существует такая обратимая матрица Q, что

$$\left\| \begin{matrix} p_{n.i+1} & p_{n.i+2} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| Q = \left\| \begin{matrix} \nu_{i+1} & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$V \Phi_n P \left\| \begin{matrix} I_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & \gamma_2 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \dots & & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & c_{i-1.2} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i+1.1} & c_{i+1.2} & \dots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1.1} & c_{n-1.2} & \dots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & * & * & * & * \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{n.i-1} & p_{ni} & \nu_{i+1} & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку эта матрица имеет форму Смита $\operatorname{diag}(1, \varphi, \dots, \varphi)$ и

$$\left\| \begin{matrix} c_{ij} & 0 \\ u_{nj} & \nu_{i+1} \end{matrix} \right\|$$

– ее подматрицы второго порядка, $j = 1, \dots, i-1$, то

$$\varphi \left| \, \begin{vmatrix} c_{ij} & 0 \\ u_{nj} & \nu_{i+1} \end{vmatrix} = c_{ij} \nu_{i+1}. \right.$$

Следовательно, $\frac{\varphi}{\nu_{i+1}} | c_{ij}$, т.е. $c_{ij} = \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} c'_{ij}$, $j = 1, \dots, i-1$. Учитывая то, что $\gamma_i = \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \nu_i$, получаем

$$\left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \right) = \Big(p_{n1} + r \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} c'_{i1}, \dots, p_{n.i-1} + r \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} c'_{i.i-1},$$

$$p_{ni} + r\frac{\varphi}{\nu_{i+1}}\nu_i, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n, \frac{\varphi}{\nu_{i+1}}) =$$

$$= \left((p_{n1}, \ldots, p_{n.i-1}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n), \frac{\varphi}{\nu_{i+1}}\right) = 1.$$

Поскольку также

$$\left(\delta_i, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = 1,$$

то

$$\left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_{i+1}}\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = \left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_i}\right) = 1.$$

Запишем матрицу $V\Phi_n P$ в блочном виде:

$$V\Phi_n P = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \gamma_1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ c_{i-1.1} & \ldots & \gamma_{i-1} & 0 & & 0 \\ \hline c_{i1} & \ldots & c_{i.i-1} & \gamma_i & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ddots & \\ p_{n1} & \ldots & p_{n.i-1} & p_{ni} & \ldots & \gamma_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\|.$$

Поскольку

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ B_{22} \end{array} \right\| \overset{l}{\sim} \Phi_n P_i,$$

то формы Смита матриц

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ B_{22} \end{array} \right\|, \quad \Phi_n P_i$$

совпадают. Согласно утверждению 3.8

$$\Phi_n P_i \sim \left\| \begin{array}{c} \nu_i \oplus \varphi I_{n-i} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Следовательно,

$$B_{22} \sim \operatorname{diag}(\nu_i, \underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{n-i}).$$

Тогда на основании теоремы 3.2

$$B_{11} \sim \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\nu_i}, \varphi, \ldots, \varphi\right).$$

Это означает, что

$$\langle B_{11} \rangle_1 = \frac{\varphi}{\nu_i}.$$

Приняв во внимание то, что

$$\left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_i}\right) = \left((p_{n1} + rc_{i1}, \dots, p_{ni} + r\gamma_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n), \frac{\varphi}{\nu_i}\right) = 1,$$

приходим к заключению, что н.о.д. элементов матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{n1} + rc_{i1} & \dots & p_{n.i-1} + rc_{i.i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| = T_i$$

равен единице. Эта матрица имеет максимальный ранг, поэтому на основании теоремы 2.19 существуют такие $s_1, s_2, \dots, s_{i-1}$, что

$$\left\| \begin{matrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{i-1} & 1 \end{matrix} \right\| T_i =$$

$$= \left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

То есть строка

$$\left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|$$

является примитивной. Отсюда вытекает, что последняя строка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_1 & \dots & s_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| V_{i-1} \Phi_n P =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i+1.1} & \dots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ c_{n-1.1} & \dots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| \qquad (7.12)$$

является примитивной. Обозначим через $\left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{matrix} \right\|$ последнюю строку матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_1 & \dots & s_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| V_{i-1}.$$

Из равенства (7.12) следует, что

$$\left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{matrix} \right\| \Phi_n P_i = \left\| \begin{matrix} p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

То есть $\left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{matrix} \right\|$ является решением уравнения (7.8). Кроме того, поскольку

$$\left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{matrix} \right\| \Phi_n P =$$
$$= \left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|,$$

то

$$\left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{matrix} \right\| \Phi_n =$$
$$= \left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| P^{-1}.$$

Строка

$$\left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| P^{-1}$$

является примитивной, поэтому $\left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{matrix} \right\| \Phi_n$ также будет примитивной строкой. Тогда из теоремы 1.1 вытекает, что в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует матрица вида

$$\left\| \begin{matrix} & & * & \\ \varphi t_1 & \dots & \varphi t_{n-1} & t_n \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, при $i > 1$ теорема доказана.

Пусть $i = 1$. Покажем, что уравнение

$$x\Phi_n P = \left\| \begin{matrix} p_{n1} + r\gamma_1 & p_{n2} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|, \tag{7.13}$$

где

$$(p_{n1} + r\gamma_1, p_{n2}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = 1 \tag{7.14}$$

имеет нужное нам решение.

Условие (7.14) согласно теореме 7.1 обеспечивает нам разрешимость уравнения (7.13). То есть существует такая строка $\| \; \overline{x}_1 \;\; \ldots \;\; \overline{x}_n \; \|$, что

$$\| \; \overline{x}_1 \;\; \ldots \;\; \overline{x}_n \; \| \Phi_n P = \| \; p_{n1} + r\gamma_1 \;\; p_{n2} \;\; \ldots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \; \|.$$

Отсюда вытекает, что

$$\| \; \overline{x}_1 \;\; \ldots \;\; \overline{x}_n \; \| \Phi_n = \| \; p_{n1} + r\gamma_1 \;\; p_{n2} \;\; \ldots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \; \| P^{-1}.$$

Поскольку правая часть этого равенства – примитивная строка, то строка $\| \; \overline{x}_1 \;\; \ldots \;\; \overline{x}_n \; \| \Phi_n$ также будет примитивной. А потому, как и выше, в группе $\mathbf{G}_{\ Phi}$ существует матрица нужной нам структуры.

Покажем теперь, что условия 1), 2) равносильны условиям 3), 4). Пусть выполняются условия 1) и 2). Согласно только что доказанному, в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что

$$HP = \left\| \begin{matrix} & & & & * & & & \\ * & \ldots & * & a_i & p_{n.i+1} & \ldots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

Тогда в силу теоремы 6.1

$$(a_i,\ \varphi) = (p_{ni},\ \varphi), i = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть

$$a_i = (p_{ni},\ \varphi)a'_i, \qquad p_{ni} = (p_{ni},\ \varphi)p'_{ni}.$$

Запишем условие 1) в виде

$$(p_{ni},\ \varphi)a' \equiv (p_{ni},\ \varphi)p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi(p_{ni},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)}{(p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)} \right).$$

Следовательно,

$$a' \equiv p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi(p_{ni},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)}{(p_{ni},\ \varphi)(p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)} \right).$$

Поскольку $\gamma_n | \varphi$, то

$$\begin{aligned} &((p_{ni},\ \varphi), (p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)) = \\ &= (p_{ni}, p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, (\gamma_n, \varphi)) = \\ &\quad = (p_{ni}, p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n). \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\frac{(p_{ni},\ \varphi)(p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)}{((p_{ni}, \varphi), (p_{n.i+1}\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n))} = [(p_{ni}, \varphi), (p_{n.i+1}\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)],$$

получаем

$$a'_i \equiv p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi}{[(p_{ni},\ \varphi),\ (p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})]} \right).$$

Легко убедиться, что правильными будут и обратные рассуждения. Теорема доказана. □

Следствие 7.3. *Если* $P = \|p_{ij}\|_1^n$ *– обратимая матрица, то в группе* $\mathbf{G}_\Phi$ *существует такая матрица* H, *что*

$$HP = \left\| \begin{matrix} & & * & \\ s_{n1} & \ldots & s_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|,$$

где $\gamma_n|\varphi$ *и* $s_{ni} \in K(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Поскольку $\Phi = \text{diag}\,(1, \ldots,\ 1, \varphi)$, то

$$S_\Phi(P) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{matrix} \right\|,$$

причем

$$R_\Phi(P) = (\|p_{1n} \ldots p_{nn}\|^T) = \|1 \ldots 1\gamma_n\|^T.$$

Тогда на основании теоремы 6.3 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H_n, что

$$H_nP = \left\| \begin{matrix} & & * & \\ v_{n1} & \ldots & v_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

При этом согласно теореме 6.1 $(v_{ni}, \varphi) = (p_{ni}, \varphi)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Если $v_{n.n-1} = 0$, то переходим к елементу $v_{n.n-2}$. Пусть $v_{n.n-1} \neq 0$ и

$$s_{n.n-1} \equiv v_{n.n-1} \,(\mod \varphi)\,,$$

где $s_{n.n-1} \in K(\varphi)$. Следовательно,

$$s_{n.n-1} = v_{n.n-1} + r\varphi = v_{n.n-1} + \left(r\frac{\varphi}{\gamma_{n-1}} \right) \gamma_{n-1}.$$

То есть

$$s_{n.n-1} \equiv v_{n.n-1} \,(\mod \gamma_{n-1})\,.$$

Кроме того, поскольку $\gamma_n|\varphi$, то

$$(s_{n.n-1}, \gamma_n) = (v_{n.n-1} + r\varphi, \gamma_n) = (v_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Тогда согласно теореме 7.6 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H_{n-1}, что

$$H_n U = \left\| \begin{matrix} & & * & & \\ v'_{n1} & \dots & v'_{n.n-1} & s_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

По аналогичной схеме последовательно заменяем элементы, которые находятся на позициях $(n, n-2), (n, n-3), \dots, (n1)$ их представителями с множества $K(\varphi)$. Доказательство завершено. □

Лемма 7.7. *Если обратимые $n \times n$ матрицы U и V имеют одинаковую последнюю строку, то в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H, что $HV = U$.*

Доказательство. Поскольку

$$U = \left\| \begin{matrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1.1} & \dots & u_{n-1.n} \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\|, V = \left\| \begin{matrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1.1} & \dots & v_{n-1.n} \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$UV^{-1} = \left\| \begin{matrix} * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = H.$$

Очевидно, что $H \in \mathbf{G}_\Phi$. □

Введем следующие обозначения:

$D(\varphi)$ – множество всех неассоциированных делителей φ, за исключением самого φ;

$M_\varphi(\mu) = \{\, a \in K(\varphi) | (a,\ \varphi) = \mu \,\}$;

$M'_\varphi(\mu)$ – частное от деления $M_\varphi(\mu)$ на μ;

$M'_\varphi(\mu,\ \gamma)$ – множество представителей смежных классов $M'_\varphi(\mu)$ по модулю $\frac{\varphi}{[\mu,\ \gamma]}$, $\gamma \in D(\varphi)$. При этом если $a \in M'_\varphi(\mu)$, то представителем класса, который содержит элемент a, будет тот элемент

$$a_1 = a + r\frac{\varphi}{[\mu,\ \gamma]}$$

из $K(\varphi)$, для которого

$$\left(a_1, \frac{\varphi}{\mu}\right) = 1.$$

Пусть $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – обратимая матрица и p_{nk} – первый справа элемент ее последней строки, который не делится на φ, $2 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим

$$\mu_i = (p_{ni}, \varphi), i = 1, \ldots, n.$$

То есть последняя строка матрицы P имеет вид

$$\| \, \mu_1 v_1 \quad \ldots \quad \mu_k v_k \quad \varphi v_{k+1} \quad \ldots \quad \varphi v_n \, \| \, .$$

Теорема 7.7. *В группе* $\mathbf{G}_\Phi$ *существует такая матрица* H, *что*

$$HP = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ L_k & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где

$$L_k = \left\| \begin{array}{cccccc} f_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_k \\ f_{k-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 s_1 & \mu_2 s_2 & \mu_3 s_3 & \cdots & \mu_{k-1} s_{k-1} & \mu_k \end{array} \right\|, \qquad (7.15)$$

при этом если $\mu_i = \varphi$, *то* $s_i = 0$, *если* $\mu_i \in D(\varphi)$, *то* $s_i \in M'_\varphi(\mu_i,\ (\mu_{i+1},\ \ldots,\ \mu_k))$, $i = 1, \ldots, k-1$, $f_j \in R$, $j = 1, \ldots, k$, $\bar{I}_{n-k}$ *– матрица порядка* $n-k$ *вида*

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{array} \right\|.$$

При этом матрица HP *в классе* $\mathbf{G}_\Phi P$ *является единственной с точностью до дополнения ее последней строки до обратимой матрицы.*

Доказательство. Если $k < n$, то $\mu_n = \varphi$. Согласно теореме 6.3 в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица H_n, что

$$H_n P = \left\| \begin{array}{cccc} p'_{11} & \cdots & p'_{1.n-1} & p'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{n-1.1} & \cdots & p'_{n-1.n-1} & p'_{n-1.n} \\ p'_{n1} & \cdots & p'_{n.n-1} & \varphi_n \end{array} \right\|.$$

Пусть

$$(p'_{1n}, \ldots, p'_{n-1.n}) = \delta_n.$$

Тогда существует такая обратимая матрица S_n, что

$$S_n \begin{Vmatrix} p'_{1n} \\ p'_{2n} \\ \dots \\ p'_{n-1.n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \delta_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку

$$1 = (p'_{1n}, p'_{2n}, \ldots, p'_{n-1.n}, \varphi) = (\delta_n, \varphi),$$

то найдутся такие элементы u_n, v_n, что

$$\delta_n u_n + \varphi v_n = 1.$$

Тогда

$$\begin{Vmatrix} u_n & 0 & \dots & 0 & v_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{Vmatrix} (S_n \oplus 1) H_n P =$$

$$= \begin{Vmatrix} u_n & 0 & \dots & 0 & v_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} * & \dots & * & \delta_n \\ * & \dots & * & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & \varphi \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} * & \dots & * & v_{1.n-1} & 1 \\ * & \dots & * & v_{2.n-1} & 0 \\ * & \dots & * & v_{n-1.n-1} & 0 \\ * & \dots & * & v_{n.n-1} & 0 \end{Vmatrix} = P_n.$$

Если $n - 1 > k$, то учитывая, что матрицы

$$\begin{Vmatrix} u_n & 0 & \dots & 0 & v_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{Vmatrix}, \ (S_n \oplus 1)$$

согласно теореме 6.1 принадлежат группе $\mathbf{G}_\Phi$, получаем, что $(v_{n.n-1}, \varphi) = \varphi$, т.е. $v_{n.n-1} = \varphi t_{n-1}$. Пусть $(v_{2.n-1}, \ldots, v_{n-1.n-1}) = \delta_{n-1}$. А значит, существует такая обратимая матрица S_{n-1} что

$$S_{n-1} \begin{Vmatrix} v_{2.n-1} \\ v_{3.n-1} \\ \dots \\ v_{n-1.n-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \delta_{n-1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$(1 \oplus S_{n-1} \oplus 1)P_n = \left\| \begin{array}{ccccc} * & \dots & * & v_{1.n-1} & 1 \\ * & \dots & * & \delta_{n-1} & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ * & \dots & * & \varphi t_{n-1} & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрица, составленная из последних двух столбцов этой матрицы, является примитивной. Поэтому $(\delta_{n-1}, \varphi t_{n-1}) = 1$. Следовательно, существуют такие элементы u_{n-1}, v_{n-1}, что

$$\delta_{n-1}u_{n-1} + \varphi t_{n-1}v_{n-1} = 1.$$

Тогда

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{n-1} & 0 & \dots & 0 & v_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -\varphi t_{n-1} & 0 & \dots & 0 & \delta_{n-1} \end{array} \right\| (1 \oplus S_{n-1} \oplus 1)P_n =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} * & \dots & * & v_{1.n-1} & 1 \\ * & \dots & * & 1 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Умножив эту матрицу слева на

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & -v_{1.n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\|,$$

получаем матрицу, в которой последние два столбца имеют вид

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{I}_2 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Заметим, что все матрицы, на которые умножали матрицу P_n, выбирались из группы $\mathbf{G}_\Phi$.

Продолжая описанный процесс, найдем такую матрицу H'_k с $\mathbf{G}_\Phi$, для которой

$$H'_k P = \left\| \begin{array}{cc|c} & * & \\ & \vdots & \bar{I}_{n-k} \\ & * & \\ \cline{3-3} * & d & \\ & 0 & \\ & \vdots & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & \mu_k v'_k & \end{array} \right\| .$$

С обратимости этой матрицы вытекает, что $(\mu_k v'_k,\ d) = 1$. Поскольку $(\mu_k v'_k,\ \varphi) = \mu_k$, то

$$(\mu_k v'_k,\ \varphi d) = \mu_k.$$

Поэтому в R существуют такие элементы a, b, что $\mu_k v'_k a + \varphi d b = \mu_k$, причем на основании теоремы 1.9 элемент a можно выбрать так, что $(a,\ \varphi) = 1$. А поскольку $(a,\ b) = 1$, то и $(a,\ \varphi b) = 1$. Поэтому $af + \varphi b g = 1$ для некоторых $f,\ g \in R$. Тогда

$$\left(I_{n-k} \oplus \left\| \begin{array}{ccccc} f & 0 & \cdots & 0 & -g \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \varphi b & 0 & \cdots & 0 & a \end{array} \right\| \right) H'_k P =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} * & \ldots & * & * & \bar{I}_{n-k} \\ \hline * & \ldots & * & * & \\ c_{k1} & \ldots & c_{k.k-1} & \mu_k & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_k & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{array} \right\| = P_k.$$

Поскольку матрица P_k – обратима, то обратимой будет и матрица C_k. А значит, над матрицей P_k можно сделать такое преобразование:

$$\underbrace{\left\| \begin{array}{cc} I_{n-k} & -B_k C_k^{-1} \\ \mathbf{0} & I_k \end{array} \right\|}_{U} \left\| \begin{array}{cc} B_k & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

где $U \in \mathbf{G}_\Phi$.

Пусть $F = \operatorname{diag}(1, \ldots,\ 1, \varphi)$ – матрица порядка k. Покажем, что матрицу C_k преобразованиями из группы $\mathbf{G}_F$ можно привести к виду (7.15).

Согласно следствию 7.3 можно считать, что $c_{ki} \in K(\varphi)$, $i = 1, \ldots, k-1$. Поэтому, если $\varphi | c_{k.k-1}$, то $c_{k.k-1} = 0$. Если же $\varphi \nmid c_{k.k-1}$, то пусть

$$c_{k.k-1} = \mu_{k-1} c'_{k-1} \in K_\varphi,$$

где $\mu_{k-1} \in D(\varphi)$. Отсюда вытекает, что $c'_{k-1} \in M'_{\varphi}(\mu_{k-1})$. Выберем в множестве $M'_{\varphi}(\mu_{k-1},\ \mu_k)$ такой элемент s_{k-1}, что

$$c'_{k-1} \equiv s_{k-1} \left(\mod \frac{\varphi}{[\mu_{k-1},\ \mu_k]} \right).$$

На основании теоремы 7.6 и следствия 7.3 в группе $\mathbf{G}_F$ существует такая матрица H_{k-1} для которой

$$H_{k-1}C_k = \left\| \begin{matrix} & & & * & & \\ * & \dots & * & d_{k-2} & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k \end{matrix} \right\|,$$

где $d_{k-2} \in K(\varphi)$.

По описанной схеме, преобразованиями с $\mathbf{G}_F$, приведем матрицу C_k к виду

$$C = \left\| \begin{matrix} & & * & \\ \mu_1 s_1 & \dots & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k \end{matrix} \right\|,$$

где

$$s_i \in M'_{\varphi}(\mu_i, (\mu_{i+1}, \dots, \mu_k)), i = 1, \dots, k-1.$$

Поскольку последняя строка этой матрицы является примитивной, то как следует из теоремы 1.2, ее можно дополнить до обратимой матрицы вида

$$L_k = \left\| \begin{matrix} f_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_k \\ f_{k-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 s_1 & \mu_2 s_2 & \mu_3 s_3 & \cdots & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k \end{matrix} \right\|.$$

При этом, на основании леммы 7.7 в группе $\mathbf{G}_F$ существует такая матрица D, что $DC = L_k$. Таким образом, в группе $\mathbf{G}_F$ найдется матрица K, что $KC_k = L_k$. Тогда

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} I_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{matrix} \right\|}_{V} \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ L_k & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

где $V \in \mathbf{G}_{\Phi}$.

Пусть $U \in \mathbf{G}_{\Phi}P$ и имеет вид

$$U = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-l} \\ N_l & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$N_l = \left\| \begin{array}{cccccc} f'_{l-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f'_l \\ f'_{l-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f'_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu'_1 s'_1 & \mu'_2 s'_2 & \mu'_3 s'_3 & \cdots & \mu'_{l-1} s'_{l-1} & \mu'_l \end{array} \right\|,$$

где μ'_i и s'_i заданы по тем же правилам, что и μ_i и s_i. Поскольку матрицы HP и U является представителями смежного класса $\mathbf{G}_\Phi P$, то в группе $\mathbf{G}_\Phi$ существует такая матрица T, что $TU = HP$. Поэтому Ф-стержни соответствующих столбцов матриц U и HP совпадают. Отсюда вытекает, что

$$\mu_i = \mu'_i, \;\; i = 1, \ldots, k, \;\; \mu_{k+1} = \ldots = \mu_n = \varphi.$$

Таким образом, $l = k$. С равенства $TU = HP$ вытекает равенство

$$T \left\| \begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \mu_{k-1} s'_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \mu_{k-1} s_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|.$$

Из способа выбора элементов s'_{k-1}, s_{k-1} и из теоремы 7.6 получаем, что $s'_{k-1} = s_{k-1}$. Опять же, рассматривая равенство

$$T \left\| \begin{array}{cccccc} & & & * & & \\ \mu_{k-2} s'_{k-2} & \mu_{k-1} s_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccccc} & & * & & & \\ \mu_{k-2} s_{k-2} & \mu_{k-1} s_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|,$$

получаем, что $s'_{k-2} = s_{k-2}$. По аналогии $s'_i = s_i$, $i = 1, \ldots, k$. Используя лемму 7.7 завершаем доказательство. □

Зафиксируем элемент $\gamma \in D(\varphi)$. Введем следующие обозначения:

$K_\varphi(\gamma) = \bigcup\limits_{\mu \in D(\varphi)} \mu M'_\varphi(\mu, \, \gamma) \bigcup \{0\}$,

$\bar{K}_\varphi(\gamma) = \{\, a \in K_\varphi(\gamma) | (a, \, \gamma) = 1 \,\}$,

$N_k(\gamma)$ – множество всех строк вида

$$\|a_1 \; a_2 \; \ldots a_{n-k-1} \; \gamma \; \underbrace{0 \; \ldots 0}_{k} \|,$$

где

$$a_1 \in \bar{K}_\varphi(a_2, \; \ldots, \; a_{n-k-1}, \; \gamma),$$

$$a_i \in K_\varphi(a_{i+1},\ \dots\ ,\ a_{n-k-1},\ \gamma),\ \ i = 2,\dots,n-k-1,\ 0 \leqslant k \leqslant n-2,$$

$$N(\varphi) = \bigcup_{\gamma\in D(\varphi)} \bigcup_{k=0}^{n-2} N_k(\gamma) \bigcup \{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\| \}.$$

Дополним каждую строку с $N(\varphi)$ до обратимой матрицы, причем так, чтобы эти строки в полученных матрицах были последними. Полученное множество матриц обозначим через $N_n(\varphi)$.

Теорема 7.8. *Множество $N_n(\varphi)$ состоит из представителей всех левых смежных классов фактор-множества группы $\mathrm{GL}_n(R)$ по подгруппе $\mathbf{G}_\Phi$.*

Доказательство вытекает из теорем 7.6 и 7.7. Более жесткие ограничения, которые накладываются на выбор элемента a_1, обусловленны тем требованием, что строка

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-k-1} & \gamma & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|$$

должно быть примитивной. □

Теорема 7.9. *Множество $N_n^{-1}(\varphi)\Phi$ состоит из всех неассоциированных справа матриц с формой Смита Φ.*

Доказательство. Согласно теореме 4.3 матрицы A и B, которые имеют форму Смита $\Phi = \mathrm{diag}\,(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \varphi)$, ассоциированны справа тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Поскольку множество $\mathbf{P}_A$ является левым классом смежности группы $\mathrm{GL}_n(R)$ по подгруппе G_Φ то, учитывая теорему 7.8 убеждаемся в правильности сформулированного утверждения. □

Пример 7.4. Пусть $\varphi = 30$. Тогда

$$D(\varphi) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}, K(30) = \{0, 1, \dots, 29\}.$$

Построим множество $K_{30}(3)$. Для этого найдем все множества $M_{30}(\mu)$, $M'_{30}(\mu)$, где $\mu \in D(\varphi)$:

$M_{30}(1) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,
$M'_{30}(1) = M_{30}(1)$.

$M_{30}(2) = \{2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28\}$,
$M'_{30}(2) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$.

$M_{30}(5) = \{5, 25\}$,
$M'_{30}(5) = \{1, 5\}$.

$M_{30}(6) = \{6, 12, 18, 24\}$,
$M'_{30}(6) = \{1, 2, 3, 4\}$.

$M_{30}(10) = \{10, 20\}$,
$M_{30}(10) = \{1, 2\}$.

$M_{30}(15) = \{15\}$,
$M_{30}(15) = \{1\}$.

Теперь найдем множества $M'_{30}(\mu, 3)$, где $\mu \in D(\varphi)$. Чтобы построить множество $M'_{30}(1, 3)$, нужно множество $M'_{30}(1)$ разбить на классы по модулю

$$\frac{30}{[1,3]} = 10$$

и представителями выбрать те элементы, которые взаимно простые с

$$\frac{\varphi}{\mu} = \frac{30}{1} = 30.$$

Поскольку

$$M_{30}(1) = \{\ \{1, 11\}, \{7, 17\}, \{13, 23\}, \{19, 29\}\ \},$$

то

$$M'_{30}(1, 3) = \{1, 7, 13, 19\}.$$

Заметим, что несмотря на то, что

$$13 \equiv 3(\mathrm{mod} 10),$$

элемент 3 не может быть представиком класса $\{13, 23\}$ по модулю 10 поскольку

$$(3, 30) \neq 1.$$

Также

$$M'_{30}(2, 3) = \{1, 2, 4, 8\}, \quad M'_{30}(3, 3) = \{1, 3, 7, 9\},$$

$$M'_{30}(5, 3) = \{1\}, \quad M'_{30}(6, 3) = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$M'_{30}(10, 3) = \{1\}, \quad M'_{30}(15, 3) = \{1\}.$$

Следовательно,

$$K_{30}(3) = \{0,\ \{1, 7, 13, 19\},\ 2\{1, 2, 4, 8\},$$

$$3\{1, 3, 7, 9\}, 5, \quad 6\{1, 2, 3, 4\}, 10, 15\}. \qquad \diamondsuit$$

Применим полученные результаты для описания левых делителей матриц. Пусть A – произвольная $n \times n$ матрица с формой Смита

$$\mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \dots\ ,\varepsilon_t, 0,\ \dots\ ,\ 0),\ \varepsilon_t \neq 0,\ t \leq n.$$

И пусть $\Phi = \operatorname{diag}(1,\ \dots\ , 1, \varphi)|\mathrm{E}$. Обозначим через $W(\mathrm{E},\ \Phi)$ подмножество множества $N_{n\times n}(\varphi)$, состоящее из матриц, последняя строка которых имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \frac{\varphi}{(\varphi,\,\varepsilon_1)} l_1 & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi,\,\varepsilon_t)} l_t & l_{t+1} & \dots & l_n \end{array} \right\|.$$

Заметим, что когда матрица

$$S = \left\| \begin{array}{cccccc} & & * & & & \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\,\varepsilon_1)} l_1 & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi,\,\varepsilon_t)} l_t & l_{t+1} & \dots & l_n \end{array} \right\|$$

является представителем смежного класса $\mathbf{G}_\Phi S$, то, как следует из теоремы 6.1 все матрицы этого класса имеют вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} & & * & & & \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\,\varepsilon_1)} v_1 & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi,\,\varepsilon_t)} v_t & v_{t+1} & \dots & v_n \end{array} \right\|.$$

Теорема 7.10. *Если φ – неразложимый элемент кольца R, то множество $W(\mathrm{E},\ \Phi)$ состоит из матриц*

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 \ \dots\ 0 \ \ a_s \ \dots\ a_{n-1} & I_1 \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 \ \dots\ 0 \ \ a_s \ \dots\ a_{n-2} & I_2 \end{array} \right\|,\ \dots\ ,$$

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 \ \dots\ 0 \ \ a_s & I_{n-s} \end{array} \right\|,\quad \left\| \begin{array}{c|c} I_{s-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-s+1} \end{array} \right\|,$$

где s – номер первого инвариантного множителя матрицы A, который делится на φ, $a_i \in K(\varphi)$, $i = s, s+1, \dots, n-1$. При этом множество $(\boldsymbol{W}(\mathrm{E},\ \Phi)P)^{-1}\Phi$ является множеством всех неразложимых делителей матрицы $A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1}$ с формой Смита Φ.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\varphi}{(\varphi,\ \varepsilon_i)} = \varphi,\ i = 1, \ldots, s-1,$$

то в множество $W(\mathrm{E}, \Phi)$ попадут те матрицы из множества $N_n(\varphi)$, последняя строка которых имеет вид

$$\|\ 0 \quad \ldots \quad 0 \quad l_s \quad l_{s+1} \quad \ldots \quad l_n\ \|.$$

С неразложимости элемента φ вытекает, что $D(\varphi) = \{\,1\,\}$. Следовательно,

$$N(\varphi) = \bigcup_{k=0}^{n-1} N_k(1),$$

где $N_k(1)$ состоит из всех строк вида

$$\|a_1\ a_2 \ldots a_{n-k-1}\ 1\ \underbrace{0 \ldots 0}_{k}\|,$$

где $a_i \in K(\varphi),\ \ i = 1, \ldots n-k-1.$

Выбрав из множества $N(\varphi)$ строки с нужной структурой и дополнив их соответствующим образом до обратимых матриц, получим множество $W(\mathrm{E},\ \Phi)$.

И для завершения доказательства достаточно заметить, что все неразложимые матрицы имеют форму Смита вида diag $(1,\ \ldots,\ 1,\ \varphi)$, где φ – неразложимый элемент кольца R и использовать теорему 4.4. $\square$

7.3. Применение полученных результатов к решению матричных односторонних уравнений

На примере 5.6 (стр. 212) показано, что в некоторых случаях для поиска всех решений уравнения достаточно использовать только определяющую матрицу. Это будет тогда, когда потенциальные формы Смита унитальных делителей или удовлетворяют требования теоремы 5.9 или же делителей с такими формами не существует. Если это не так, то определяющая матрица будет генерировать только часть искомых решений. В этом случае для расширения множества решений используем понятие стандартного Ф-скелета. Продемонстрируем это на конкретных примерах, решив над F – алгебраически замкнутым полем характеристики нуль два уравнения: $X^2 = \mathbf{0}$ и $X^2 = X$, где X – матрицы третьего порядка. То есть опишем все нильпотентные и идемпотентные матрицы третьего порядка. Скептики скажут, что решения таких уравнений давно известны. И будут, конечно, правы. Действительно, нильпотентными матрицами 3-го порядка являются все матрицы вида

$$\mathbf{0},\ T^{-1}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}T,$$

а идемпотентными –

$$\mathbf{0},\ I,\ T^{-1}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}T, T^{-1}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}T,$$

где T – неособенная матрица. Однако такая запись имеет серьезные недостатки. Во-первых, среди таких решений есть повторяющиеся. Во-вторых, и это гораздо серьезнее, описание корней в таком виде сводится к описанию всех обратимых матриц третьего порядка, а это уже другая еще не решенная задача.

Пример 7.5. Найдем все решения уравнения

$$X^2 = \mathbf{0}, \tag{7.16}$$

где X – матрица третьего порядка.

Матричному уравнению (7.16) соответствует полиномиальная матрица $A(x) = Ix^2$, которая совпадает со своей формой Смита $\mathrm{E}(x) = Ix^2$. Очевидно, что $P_A = I$. Наша задача состоит в том, чтобы найти все левые неассоциированные справа делители матричного полинома Ix^2, степень определителя которых равен 3 и выбрать среди них унитальные. Потенциальными формами Смита этих делителей являются матрицы

$$\Phi_1 = Ix, \;\; \Phi_2 = \mathrm{diag}(1,\; x,\; x^2).$$

Согласно теореме 5.1 матрице Φ_1 соответствует единственный делитель $Ix - \mathbf{0}$, т.е. решением уравнения (7.16) будет матрица $X_1 = \mathbf{0}$.

На основании теоремы 5.3 все матрицы с формой Смита Φ_2 являются делителями матричного полинома $A(x)$. Поэтому нужно описать все неассоциированные справа матрицы с формой Смита Φ_2. Классифицируем их с помощью их Ф-скелетов. Стандартными Φ_2-скелетами будут:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{matrix} \right\|, \; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{matrix} \right\|, \; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x^2 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x^2 \end{matrix} \right\|, \; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x^2 & x \end{matrix} \right\|, \; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x^2 \end{matrix} \right\|.$$

Множеством обратимых матриц со стандартными Φ_2-скелетами будет:

$$Stand(\Phi_2) =$$

$$= \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx+c & d & 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ bx+c & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & bx+c & 1 \end{matrix} \right\| \right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

где $a, b, c, d \in F$. Следовательно, множеством всех матриц со стандартными Φ_2-скелетами будет $Stand^{-1}(\Phi_2)\Phi_2$. Выберем из этого множества все матрицы, которые регуляризируются справа. Матрице Φ_2 соответствует матрица

$$J(\Phi_2) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$M_{\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx+c & d & 1 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = \left\| \begin{matrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = T_2.$$

Значит

$$X = T_2^{-1} J(\Phi_2) T_2 = b^{-1} \left\| \begin{matrix} c & d & 1 \\ -ac & -ad & -a \\ (da-c)c & (da-c)d & da-c \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, множество

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} c & d & 1 \\ -ac & -ad & -a \\ (da-c)c & (da-c)d & da-c \end{matrix} \right\| \right\},$$

где $a, c, d \in F$, $b \in F \backslash \{0\}$, вляется множеством нильпотентных матриц, порожденных определяющей матрицей $V(\mathrm{E}, \Phi_2)$.

Аналогично получаем такие множества решений:

$$\mathbf{X}_2 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} -c & -1 & 0 \\ c^2 & c & 0 \\ ac & a & 0 \end{matrix} \right\| \right\}, \quad \mathbf{X}_3 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -c & -1 \\ cd & c^2 & c \end{matrix} \right\| \right\}.$$

Поскольку

$$\det M_{\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = \det M_{\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) =$$
$$= \det M_{\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = 0,$$

то матрицы из множества

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right\}^{-1} \Phi_2$$

не регуляризируются справа и решений не дают.

Матрицы с Ф-скелетами

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x & x \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & x & x \end{matrix} \right\|$$

соответственно дают такие множества решений

$$\mathbf{X}_4 = \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

$m \in F \backslash \{0\}$, $n \in F$,

$$\mathbf{X}_5 = \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

m, $n \in F$, причем m, n одновременно не равны нулю. $\diamondsuit$

Пример 7.6. Найдем все решения уравнения

$$X^2 = X, \tag{7.17}$$

где X – матрица порядка 3.

Матричному уравнению $X^2 - X = \mathbf{0}$ соответствует полиномиальная матрица $A(x) = Ix^2 - Ix$, которая совпадает со своей формой Смита $\mathrm{E}(x) = I(x^2 - x)$. Следовательно, $P_A = I$. Наша задача состоит в том, чтобы найти все делители матричного полинома $I(x^2 - x)$, степень определителя которых равен 3. Потенциальными формами Смита этих делителей являются

$$\Phi_1 = Ix, \quad \Phi_2 = I(x-1),$$

$$\Phi_3 = \mathrm{diag}(1,\ x,\ x(x-1)), \quad \Phi_4 = \mathrm{diag}(1,\ x-1,\ x(x-1)).$$

Матрицам Φ_1 и Φ_2 соответствуют единственные решения

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{X}_2 = I.$$

Решения с формами Смита Φ_3 их характеристических матриц, классифицируем их Ф-скелетами:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x(x-1) & x-1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow$$
$$\mathbf{X}_3 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} b+c & d & 1 \\ -(b+c)a & -da & -a \\ (b+c)(da-c) & d(da-c) & da-c \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x(x-1) & 1 & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_4 = \left\{ -b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} -(b+c) & -1 & 0 \\ (b+c)c & c & 0 \\ (b+c)a & a & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x-1 & x(x-1) & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_5 = \left\{ -b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -d & -b-c & -1 \\ dc & (b+c)c & c \end{array} \right\| \right\},$$

где $a, c, d \in F, \ \ b \in F \backslash \{0\}$,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_6 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x-1 & x & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_7 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ nm & n & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_8 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

где $m, \ \ n \in F$.

В завершение схематично выпишем решения уравнения (7.17), характеристические матрицы которых имеют форму Смита Φ_4:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x(x-1) & x & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_9 = \left\{ -b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} -b-c & -d & -1 \\ ac & ad-b & a \\ (c+b-da)c & (c+b-da)d & c-da \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x(x-1) & 1 & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{10} = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} b+c & 1 & 0 \\ -c(b+c) & -c & 0 \\ -ac & -a & b \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x & x(x-1) & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{11} = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ d & b+c & 1 \\ -(b+c)d & -(b+c)c & -c \end{array} \right\| \right\},$$

где $a, c, d \in F, \ \ b \in F \backslash \{0\}$,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x-1 & x & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{12} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x & x-1 & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{13} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ -nm & n & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \\ x & x & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{14} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

где $m, n \in F$. $\diamondsuit$

Перечень условных обозначений

R	— коммутативное кольцо конечно порожденных главных идеалов без делителей нуля (коммутативная область Безу);
$U(R)$	— группа единиц кольца R;
F	— поле;
$F[x]$	— кольцо многочленов с коэффициентами из поля F;
$\mathbb{C}$	— поле комплексных чисел;
$\mathbb{C}^n$	— линейное пространство столбцов высоты n над $\mathbb{C}$;
$M_n(R)$	— кольцо $n \times n$ матриц над R;
$\mathrm{GL}_n(R)$	— полная линейная группа кольца R;
$\mathrm{diag}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— диагональная матрица с элементами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ на главной диагонали (может быть прямоугольной);
d-матрица	— диагональная матрица, в которой каждый предыдущий диагональный элемент делит следующий;
$\mathbf{G}_\Phi$	— подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$ матриц H таких, что $H\Phi = \Phi F$, где $F \in \mathrm{GL}_n(R)$, Φ – d-матрица;
$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$	— множество обратимых матриц H таких, что $H\mathrm{E} = \Phi S$, где $S \in M_n(R)$ и E, Φ – d-матрицы;
$\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$	— множество представителей левых смежных классов множества $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ по группе $\mathbf{G}_\Phi$;
$a_i \mid a_j$	— элемент a_i является делителем элемента a_j (a_i делит a_j);
$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— наибольший общий делитель элементов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$;

$[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$	— наименьшее общее кратное элементов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$;
A^T	— транспонованная матрица к матрице A;
$\det A,\ \ \|A\|$	— определитель матрицы A;
$\langle A\rangle$	— наибольший общий делитель миноров максимального порядка матрицы A;
$\langle A\rangle_i$	— наибольший общий делитель миноров i-го порядка матрицы A;
I	— единичная матрица;
I_n	— единичная матрица порядка n;
$\mathbf{0}$	—нулевая матрица;
$\mathbf{0}_{m\times n}$	— нулевая матрица соответствующего порядка;
$\mathrm{triang}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— нижняя треугольная матрица с элементами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ на главной диагонали (квадратная);
$A\oplus B$	— прямая сумма матриц A и B, т.е. матрица $\left\\| \begin{smallmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{smallmatrix} \right\\|$;
A^*	— матрица, полученная заменой каждого элемента a_{ij} матрицы A н.о.д. миноров максимального порядка матрицы, полученной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца;
$\mathbf{P}_A$	— множество левых преобразующих матриц матрицы A к ее форме Смита;
$K(f)$	— полная система вычетов по модулю $f\in R$, т.е. множество представителей смежных классов фактор-кольца R/Rf.

Список литературы

[1] Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* // Trans. Amer. Maht. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.

[2] Smith H.J.S. *On systems of linear indeterminate equations and congruences* // Philos. Trans. Roy. Soc., London. – 1861. – 151, №2. – P. 293–326.

[3] Dickson L.E. *Algebras and Their Arithmetics* // University of Chicago Press, Chicago, 1923.

[4] Wedderburn J.H.M. *On matrices whose coefficients are functions of single variable* // Trans. Amer. Math. Soc., – 1915. – **16**, №2. – P. 328–332.

[5] Wedderburn J.H.M. *Non-commutative domains of integrity* // J.Reine Andrew Math., – 1932. – **167**, №1. – P. 129–141.

[6] Van der Waerden B.L. *Moderne Algebra*, – Berlin, New-York, Springer. – 1930.

[7] Jacobson N. *Pseudo-linear transformations* // Ann. of Math., – 1937. – **38**. – P. 484–507.

[8] Helmer O. *The elementary divisor for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc., – 1943. – **49**, №2. – P. 225–236.

[9] Bass H. *K-theory and stable algebra* // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5–60.

[10] Gillman L., Henriksen M. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal* // Trans. Amer. Math. Soc., – 1956. – **82**. – P. 366–394.

[11] Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings* // Michigan Math. J. – 1955/56. – **3**. – P. 159–163.

[12] Lafon J.P. *Modules de presentation finite et de type fini sur un anneau-arithmetique* // Sump. mubh. Ist. naz. alta.-mat. Conv. nov. 1971-maggio, – 1972. – **11**. – P. 121–141.

[13] Amitsur S.A. *Remarks of principal ideal rings* // Osaka Math.Journ. – 1963. – **15**. – P. 59–69.

[14] Кон П. *Свободные кольца и их связи.* - М.: Мир.– 1976.

[15] Larsen M., Lewis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.

[16] McGowern W. *Bezout rings with almost stable range 1* // J. Pure Appl. Algebra. – 2008. – **212**. – P. 340–348.

[17] Забавський Б.В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше* 2 // Укр. Мат. Журн. – 2003. – **55**, №4. – С. 550–554.

[18] Zabavsky B.V. *Diagonazibility theorem for matrices over rings with finite stable range* // Algebra Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 151–165.

[19] Zabavsky B. *Diagonal reduction of matrices over rings* // Mathematical Studies, Monograph Series, V. XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, 251 p.

[20] Chen H. *Rings with many idempotents* // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1999. – **22,** № 3, – P. 547–558.

[21] *Yu H.P. Stable range one for exchange rings* // J. Pure Appl. Algebra. – 1995. – **98**, № 1. – P. 105–109.

[22] McGovern W. *Bezout rings with almost stable range* 1 // J. Pure. Appl. Algebra. – 2008. – **212**, № 2. – P. 340–348.

[23] Goodearl K., Menal P. *Stable range one for rings with many units* // J. Pure. Appl. Algeb. – 1998. – **54.** – P. 261–287.

[24] Cayley A. *A memoire on the theory of matrices* // London Phil. Trans. – 1858. – **148**. – P. 17–37.

[25] Sylvester M. *Sur les racines des matrices unitares* // Comptes Rendus. – 1882. – **94**. – P. 396–399.

[26] Sylvester M. *Sur la solutio on explicite de eguation quadratigue de Hamilton en quaternions ou en matrizen du second ordre* // Comptes Rendus. – 1884. – **99**. – P. 621–631.

[27] Frobenius F.G.L. *Uber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* // Sitz.-Berl. Acad. Wiss. Phys.-Math. Klasse, Berlin. – 1896. – S. 7–16.

[28] Ingraham M.N. *Rational method in matrix equation* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.

[29] Ingraham M.N. *On the rational solution of the matrix equation* $P(X) = A$ // Journal of Mathematics and Physics. – 1934. – **13**. – P. 46–50.

[30] Roth W.E. *A solution of the matrix equation* $P(X) = A$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**. – P. 579–596.

[31] Roth W.E. *On the unilateral equation in matrices* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1930. – **32**. – P. 61–80.

[32] Roth W.E. *On the equation* $P(A, X) = 0$ *in matrices* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – **35**. – P. 689–708.

[33] Lancaster P. *Jordan chains for lambda-matrices, II* // Equations Math. – 1970. – **5**. – P. 290–293.

[34] Lancaster P. *A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. I. Ordinary differential equations with constant coefficients* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**. – P. 189–211.

[35] Lancaster P. *A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. II. Ordinary differential equations with constant coefficients* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**. – P. 213–222.

[36] Langer H. *Factorization of operator pencils* // Acta Sci. Math. – 1976. – **38**. – P. 83–96.

[37] Lancaster P., Wimmer H.K. *Zur Theorie der* λ*-Matrizen* // Math. Nachrichten, 1975. – **68**. – P. 325 – 330.

[38] Dennis J.S., Traub J.F., Weber R.P. *The algebraic theory of matrix polynomials* // SIAM Journ. Numer. Annal. – 1976. – **13**, No 6. – 831–845.

[39] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Matrix polynomials.* – New York: Academic Press. – 1982. – 409 p.

[40] Маркус А.С., Мереуца И.В. *О некоторых свойствах простых* λ*-матриц* // Мат. исследования. – 1975. – **10**, № 3. – С. 207–214.

[41] Малышев А.Н. *Факторизация матричных полиномов* // Сиб. мат. журн. – 1982. – **23** , № 3. – С. 136 – 146.

[42] Беллман Р. *Введение в теорию матриц:* Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

[43] Ланкастер П. *Теория матриц:* Пер. с англ.– М.: Наука, 1978. – 280 с.

[44] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*– Кишинев: Штиинца, – 1986. – 260 с.

[45] Barnett S. *Matrices in control theory with applications to linear programming.* – London: Van Nostrand Reingold Company, 1971. – 222 p.

[46] Bell J.H. *Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrices equation* // Amer. J. Math. – 1949. – **71**. – P. 249–257.

[47] Bell J.H. *Families of solutions of the unilateral matrix equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – **1**. – P. 151–159.

[48] Krupnik I. *Decomposition of a monic matrix polynomial into a product of linear factors* // Linear Algebra Appl. – 1992. – **167**. – P. 239–242.

[49] Lancaster P., Rodman L. *Algebraic Riccati Equations.* – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 492 p.

[50] Lancaster P., Tismenetsky M. *The theory of matrices with Applications.* 2d ed. – New York: Academic Press, 1985. – 570 p.

[51] Langer H. *Factorization of operator pencils* // Acta Sci. Math. – 1976. – **38**. – S. 83–96.

[52] MacDuffee C.C. *The theory of matrices.* – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1933. – 110 p.

[53] Newman M., Thompson R.S. *Matrices over rings of algebraic integers* // Linear Algebra Appl. – 1991. – **145**. – P. 1–20.

[54] Казімірський П.С. *До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники* // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 446–448.

[55] Казімірський П.С. *Розв'язання проблеми виділення регулярного множника з матричного многочлена* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1075–1078.

[56] Казимирский П.С. *Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена* // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.

[57] Казімірський П.С. *Розклад матричних многочленів на множники.* – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.

[58] Лопатинский Я.Б. *Разложение полиномиальной матрицы на множители* // Научные записки Львовского политехнического института. Серия физико-математическая. – 1957. – **38**, № 2. – С. 3–7.

[59] Бабиков Г.В. *О факторизации матриц над телами и кольцами* // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 1. – С. 31–38.

[60] Бабиков Г.В. *О разложении матриц над некоторыми универсальными алгебрами* // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 5. – С. 1033–1035.

[61] Narang Asha, Nanda V.C. *Factorization of matrices over Dedekind domains* // Journal of the Indian Math. Soc. – 1979. – **43**. – P. 31–33.

[62] Боревич З.И. *О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов* // Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума по теории колец, алгебр и модулей. – Тарту: Тартуский университет. – 1976. – С. 19.

[63] Зелиско В.Р. *О строении одного класса обратимых матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – № 12. – С. 14–21.

[64] Зеліско В.Р., Кучма М.І. *Спільні дільники та спільні факторизації матричних многочленів* // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 111–118.

[65] Петричкович В.М. *Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.

[66] Петричкович В.М. *Паралельні факторизації многочленних матриць* // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.

[67] Петричкович В. М. *Про подільність та факторизацію матриць* // Математичні студії. – 2004. – **22,** № 2. – С. 115–120.

[68] Петричкович В.М. *Про кратності характеристичних коренів, степені елементарних дільників та факторизацію многочленних матриць* // Мат. методи та фіз-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 7–17.

[69] Petrychkovych V. *Generalized eguivalence of pairs of matrices* // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, № 2. – P. 179–188.

[70] Петричкович В.М. *Про діагоналізовність наборів матриць та единість їх факторизацій* // Вісник державного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1999. – № 364. – С. 177–180.

[71] Петричкович В. *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями* -Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.

[72] Hermite C. // Journal de Mathematiques. – 1849. – **14**, № 1. – P. 21–30.

[73] Thompson R.C. *The Smith form, the inversion rule for 2×2 matrices, and the uniqueness of the invariant factors for finitely generated modules* // Linear Algebra Appl. – 1982. – **44**. – P. 197–201.

[74] Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T. *Products of three triangular matrices* // Linear Algebra Appl. – 1999. – **292**. – P. 61–71.

[75] Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T. *Products of three triangular matrices over commutative rings* // Linear Algebra Appl. – 2002. – **348**. – P. 1–6.

[76] Chen H. *Rings related to stable range conditions* Vol. 11. World scientific, 2011.

[77] Васерштейн Л.Н. *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств* // Функ. анализ и его приложения. – 1971. – **5**. – Вып. 2. – С. 17–27.

[78] Newman M. *On the Smith normal form* // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1971. – **75B**. – P. 81–84.

[79] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[80] Roth W.E. *The equations* $AX - YB = C$ *and* $AX - XB = C$ *in matrices* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – № 3. – P. 392–396.

[81] Feinberg R.B. *Equivalence of partitioned matrices* // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1976. – **B 80**, № 1. – P. 89–97.

[82] Gustafson W.H. *Roth's theorem over commutative rings* // Linear Algebra Appl. – 1979. – 23. – P. 245–251.

[83] Hartwig R., Patricio P. *On Roth's pseudo equivalence over rings // Electronic Journal of Linear Algebra* – 2007. – 16. – P. 111–124.

[84] Newman M. *Integral matrices.* – NY: Academic Press. – 1972. – 224 p.

[85] Gerstein L. *A local approach to matrix equivalence* // Linear Algebra Appl. – 1977. – 16. – P. 221–232.

[86] Щедрик В.П. *Нахождение делителей с одним инвариантным множителем для матриц над кольцом главных идеалов* // Доклады Академии Наук Украины. – 1991, №12. – С. 12–14.

[87] Щедрик В.П. *Про один клас дільників матриць* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 3. – С. 12–18.

[88] Щедрик В. П. *Про перетворюючі матриці* // Доп. НАН України. – 1997, №10. – С. 58–60.

[89] Щедрик В.П. *Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Математичні студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 115–120.

[90] Щедрик В.П. *Про зведення оборотних матриць деякими перетвореннями до простішого вигляду* // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – № 346. - С. 172–176.

[91] Щедрик В.П. *Про перетворювальні матриці та дільники матриць над деяким областями Безу* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 36–44.

[92] Щедрик В.П. *Ф-скелет матриць і його властивості* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, – 2000. – **43**, № 2. – С. 45–51.

[93] Щедрик В.П. *Про дільники матриць та інваріанти перетворювальних матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 23–32.

[94] Щедрик В.П. *Неасоційовані матриці зі стандартним Ф-скелетом* // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 32–44.

[95] Щедрик В.П. *Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 1. – С. 23–28.

[96] Щедрик В.П. *Одностороння еквівалентність та група матриць, які квазікомутують із заданою діагональною матрицею* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2003. – Вип. 1. – С. 35–45.

[97] Shchedryk V.P. *On decomposition of complete linear group into some its subgroups* // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – P. 184–190.

[98] Mel'nyk O.M., Shchedryk V.P. *Some properties of minors of invertible matrices* // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – P. 129–134.

[99] Щедрик В.П. *Асоційовані матриці та деякі їх властивості* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 103–107.

[100] Shchedryk V.P. *Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B–domain* // Algebra Discrete Math. – 2005. – №2. – P. 46–57.

[101] Зеліско В.Р., Щедрик В.П. *Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування* // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2005. – **48**, №4. – С. 20–29.

[102] Щедрик В.П. *Деякий клас дільників особливих матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 22–27.

[103] Щедрик В.П. *Про мультиплікативність канонічної діагональної форми матриць* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2007. – Вип. 5. – С. 77–85.

[104] Щедрик В.П. *Деякі інваріанти перетворювальних матриць* // Мат. студії. – 2008. – **29**. – С. 121–126.

[105] Романів А.М., Щедрик В.П. *Про неасоційовні та унітальні дільники многочленних матриць* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 72–79.

[106] Shchedryk V.P. *Factorization of matrices over elementary divisor domain* // Algebra Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79–99.

[107] Щедрик В. П. *Про інваріантні множники блочно-трикутних матриць та її діагональних блоків* // Доп. НАН України. – 2010, №6. – С. 34-36.

[108] Щедрик В.П. *Перетворювальні матриці та породжені ними дільники* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, №4. – С. 64–72.

[109] Щедрик В.П. *О взаимосвязи инвариантных множителей блочно-треугольной матрицы и ее диагональных блоков* // Мат. заметки. – 2011. – **90**, №4. – С. 599–612.

[110] Shchedryk V. *On the one-side equivalence of matrices with given canonical diagonal form* // Algebra Discrete Math. – 2011. – **12**, №2. – P. 102–111.

[111] Щедрик В.П. *Комутативні області елементарних дільників та деякі властивості їх елементів* // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, №1. – С. 126–139.

[112] Романів А.М., Щедрик В.П. *Найменше спільне праве кратне матриць з одним відмінним від одиниці інваріантним множником* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2013. – **56**, № 4. – С. 67–74.

[113] Романів А.М., Щедрик В.П. *Найбільший спільний дільник матриць, одна з яких має один відмінний від одиниці інваріантний множник* // Укр. мат. журн. - 2014. – **66**, № 3. – С. 425–430.

[114] Щедрик В.П. *Кільця Безу стабільного рангу* 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 849–860.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача

Володимир Пантелеймонович Щедрик

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Монографія

Рекомендовано до друку вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

Редактор *Д.С. Бриняк*
Комп'ютерна верстка *О.М. Романів*

Підп. до друку 10.01.2017.

Формат $70 \times 100\frac{1}{16}$
Папір офсетний. Гарнітура LaTeX
Умовн. друк. арк. 24,51. Тираж 300 прим. Зам. № 01/17

Видруковано у Дослідно-видавничому центрі
Наукового товариства ім. Шевченка

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
об'єктів видавничої справи ДК № 884 від 04.04. 2002 р.