НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

В.П. Щедрик

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Львів
2017

ББК В152.2я44+В152.5я44
Щ 367
УДК 512.64+512.55

В.П. Щедрик. Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників. -Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2017. -304 с.

Монографія присвячена дослідженню арифметики кілець матриць над певними класами комутативних областей скінченно породжених головних ідеалів. Головна увага зосереджена на побудові теорії розкладності матриць на множники. Висвітлюється тісний зв'язок факторизовності матриць із певними властивостями підгруп повної лінійної групи та спеціальною нормальною формою матриць стосовно односторонньої еквівалентності. Ґрунтовно вивчаються властивості матриць над кільцями стабільного рангу 1,5.

Для спеціалістів з теорії кілець, лінійної алгебри та студентів і аспірантів.

Бібліогр. 114 назв.

V.P. Shchedryk. Factorization of matrices over elementary divisor rings. -Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, 2017. -304 p.

The book is devoted to investigation of arithmetic of the matrix rings over certain classes of commutative finitely generated principal ideals domains. We mainly concentrate on constructing of the matrix factorization theory. We reveal a close relationship between the matrix factorization and specific properties of subgroups of the complete linear group and the special normal form of matrices with respect to unilateral equivalence. The properties of matrices over rings of stable range 1.5 are thoroughly studied.

The book is intended for experts in the ring theory and linear algebra, senior and postgraduate students.

Ref. 114.

Рецензенти:

Ю.А. Дрозд, член-кореспондент НАН України, професор, завідувач відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України;

Б.В. Забавський, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри алгебри і логіки Львівського національного університету ім. І. Франка.

ISBN 978-966-02-8035-9

Зміст

Передмова

Об'єктом дослідження монографії є матриці над комутативними областями елементарних дільників з точки зору їх розкладності на множники та супутніми задачами – встановлення взаємозв'язків між певними підгрупами та підмножинами повної лінійної групи та зведення матриць односторонніми перетвореннями до канонічного вигляду.

І. Капланський [1] ввів поняття кільця *елементарних дільників*, як такого кільця R, над яким кожна матриця має властивість канонічної діагональної редукції. Тобто для кожної матриці A над таким кільцем існують оборотні матриці P, Q відповідних розмірів (надалі називатимемо їх перетворювальними матрицями), що

$$PAQ = \mathrm{diag}\,(d_1,\ \ldots, d_r, 0, \ldots, 0),$$

де

$$Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \bigcap Rd_i,\ i = 1,\ \ \ldots\ ,\ r-1. \tag{1}$$

Якщо R – комутативне кільце, то умова (1) рівносильна тому, що $d_i | d_{i+1}$, $i = 1,\ \ \ldots\ ,\ r-1$. Дослідження таких кілець започаткував Г. Сміт [2], який встановив, що кожна цілочислова матриця елементарними перетвореннями над рядками та стовпцями зводиться до діагональної матриці, в якій кожний наступний діагональний елемент ділиться на попередній. Л. Діксон [3], Д. Веддербарн [4, 5], Б. Ван дер Варден [6], Н. Джекобсон [7] узагальнили результат Г. Сміта на різні класи як комутативних, так і некомутативних кілець без дільників нуля. До класу кілець елементарних дільників входять евклідові кільця, кільця головних ідеалів, адекватні кільця [8], кільця цілих аналітичних функцій [4], кільце неперервних дійсних функцій над цілком регулярним Гаусдорфовим простором [10], кільце формальних степеневих рядів над полем раціональних чисел з вільним цілим членом [11], кільце цілих алгебраїчних чисел [12].

З метою дослідження кілець елементарних дільників І. Капланський ввів поняття правого кільця Ерміта як такого, над яким кожна 1×2 матриця має властивість канонічної діагональної редукції, і показав, що праве кільце Ерміта є правим кільцем Безу, тобто кільцем скінченно породжених правих головних ідеалів. У випадку комутативних областей ці кільця збігаються [13]. Л. Гіллман та М. Хенріксен [10, 11], вивчаючи комутативні кільця Ерміта та кільця елементарних дільників з дільниками нуля, навели приклад комутативного кільця Безу, яке не є кільцем Ерміта, і кільця Ерміта, яке не є кільцем елементарних дільників. Ними було поставлено питання збіжності цих кілець у випадку комутативних областей, яке тепер відоме як *проблема* *кілець елементарних дільників.* Без перебільшення можна сказати, що це одна із найбільш актуальних проблем сучасної алгебри. Серед великої кількості праць, присвячених цій тематиці, виділимо дослідження П. Кона [14], М. Ларсена, У. Левіса, Т. Шореса [15], У. Мак Говерна [16], які розв'язували її як методами класичної теорії кілець, так і методами теорії модулів. Багатообіцяльними дослідженнями цієї проблеми є ті, що ґрунтуються на понятті стабільного рангу кільця – одного із важливих інваріантів K-теорії. Це поняття у 1964 році ввів Х. Басс [9]. Так Б. Забавський отримав низку структурних теорем, які достатньо глибоко характеризують кільця Безу скінченного стабільного рангу [17, 18, 19]. Зокрема, він показав, що кільця елементарних дільників мають стабільний ранг не більше 2 [17]. Окрім цього, через поняття стабільного рангу елегантно вводяться тепер широко досліджувані комутативні чисті кільця (clean rings) [20], кільця з властивістю заміни (exchange rings) [21], акуратні кільця (neat rings) [22]. Більш глибокі дослідження цього поняття спонукали до введення ідемпотентного стабільного рангу [22, 20] та одиничного стабільного рангу [23].

Увага до кілець елементарних дільників, без сумніву, обумовлена не лише тим, що переважна більшість класичних кілець має властивість канонічної діагональної редукції. Їх досконала внутрішня структура дає можливість отримувати глибокі результати і в суміжних областях, зокрема в теорії модулів та в алгебраїчній K-теорії. Так І. Капланський [1] показав, що над кільцем елементарних дільників довільний скінченно зображуваний модуль розкладається в пряму суму циклічних модулів. Для комутативних кілець доведено і обернене твердження: якщо скінченно зображуваний модуль над кільцем розкладається в пряму суму циклічних модулів, то це кільце є кільцем елементарних дільників [15].

Великий потенціал цих кілець проявився і у можливості побудови єдиної теорії факторизації матриць над такими кільцями. Зауважимо, що задачами розкладу матриць на множники почали цікавитись ще в другій половині XIX століття. Зокрема, А. Келі [24], М. Сильвестр [25, 26], Ф. Фробеніус [27] розглядали задачу зображення числових матриць у вигляді добутку однакових матриць.

Найбільш глибоко факторизаційні задачі досліджувались у кільцях поліноміальних матриць. Це стимулювалося тим фактом, що згідно з узагальненою теоремою Безу [28], виділення лінійного унітального множника, тобто множника вигляду $Ix - B$, де I – одинична матриця, із поліноміальної матриці рівносильне знаходженню кореня B відповідного одностороннього матричного рівняння. Такими задачами займались М. Інграгам [28, 29], У. Рот [30, 31, 32], П. Ланкастер [33, 34, 35], Г. Лангер [51], Г. Віммер [37], Д. Денніс, Д. Трауб, Р. Вебер [38], І. Гохберг, Л. Родман [39], А. Маркус, І. Мереуца [40], О. Малишев [41] та ін. (див. праці зі списку літератури). Такі дослідження були популярними в другій половині XX століття, коли цілі наукові колективи виборювали першість у розв'язанні проблеми виділення унітального множника з поліноміальної матриці. Першим конструктивний метод її розв'язання запропонував П. Казімірський [55, 56, 57]. Потрібно зазначити, що поштовхом до таких досліджень стала стаття академіка Я. Лопатинського – учителя П. Казімірського, в якій розглядались системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. В цій праці Я. Лопатинський отримав суто алгебраїчний результат [58], який стосувався виділення регулярного множника з поліноміальної матриці.

Вагомі результати, що стосуються факторизації матриць, отримали учні П. Казімірського – В. Зеліско [63, 64] та В. Петричкович [65]-[71]. Зокрема, розглянута В. Зеліском група оборотних матриць, що квазікомутують з діагональною матрицею є наріжним каменем побудованої в цій монографії теорії факторизації матриць. В. Петричкович, грунтуючись на введених ним спільно з П. Казімірським поняттях напівскалярної і узагальненої еквівалентності та певної трикутної форми матриць з інваріантними множниками на головній діагоналі, суттєво розширив клас абсолютно розкладних матричних многочленів, тобто тих многочленів, які розкладаються в добуток лінійних множників (такі многочлени ще називають Веддербарнівськими). Він вказав необхідні та достатні умови єдиності, з точністю до асоційовності, дільників із заданою формою Сміта для матриць над адекватними областями. Ввів поняття факторизації матриці, паралельної до факторизації її форми Сміта, та описав класи матриць, що мають таку властивість.

Дослідження факторизації матриць не обмежувались лише розглядом поліноміальних матриць. Так вивчались розклади матриць над тілами і універсальними алгебрами [59, 60], над дедекіндовими областями [61]. Тут потрібно особливо виділити працю З. Боревича [62], в якій ці дослідження були виведені на новий рівень. У ній було запропоновано класифікувати дільники матриць над комутативними областями головних ідеалів їхніми формами Сміта та описувати з точністю до асоційовності. Природний на сучасний погляд підхід був на той час революційним. На жаль, факторизаційні задачі стояли дещо осторонь наукових уподобань З. Боревича. Тому отримані ним результати (стосувались єдиності дільників), викладені лише у вигляді тези його доповіді на III Всесоюзному симпозіумі з теорії кілець, алгебр і модулів.

У монографії, запропонований З. Боревичем підхід реалізується для матриць над областями елементарних дільників, над якими така задача ще не розглядалась. Такі дослідження стали можливими завдяки використанню принципово нового підходу, який базується на вивченні множини оборотних матриць $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, яка породжує всі ліві дільники із заданою формою Сміта Φ та на дослідженні групи Зеліска $\mathbf{G}_{\Phi}$, яка відповідає за асоційовність матриць.

Подамо коротко зміст книги оглядом її розділів. Книга написана так, щоб читач, який ознайомлений з університетським курсом лінійної алгебри, мав можливість, не звертаючись до інших джерел, зрозуміти викладений матеріал. З цією метою в перших двох розділах, окрім оригінальних результатів, наведено вже й відомі. Вони стосуються властивостей елементів кілець Безу, доповнення примітивних рядків до оборотних матриць, нормальних форм стосовно одно- та двосторонньої еквівалентностей матриць. Особливу увагу в першому розділі приділено загальним властивостям найбільних спільних дільників та найменших спільних кратних матриць.

У другому розділі вивчаються властивості перетворювальних матриць та групи Зеліска, яка є їх генератором. Вводиться поняття кільця стабільного рангу 1,5 та доводиться, що повна лінійна група цього кільця зображається у вигляді добутку групи Зеліска, груп нижніх і верхніх унітрикутних матриць. Також показано, що над комутативною областю Безу R кільце матриць другого порядку має стабільний ранг 1,5 тоді і тільки тоді, коли R має аналогічний стабільний ранг. Встановлено умови, за яких форма Сміта добутку матриць збігається з добутком їхніх форм Сміта.

Третій розділ має технічний характер. У ньому досліджуються властивості мінорів та інваріантних множників блочно-трикутних матриць та їх діагональних блоків. Ці результати використано під час викладу подальших розділів.

У четвертому розділі вводиться поняття породжуючої множини і на її основі формулюються критерії подільності та асоційовності матриць. Досліджується структура її елементів та встановлюється взаємозв'язок цієї множини з групою Зеліска.

П'ятий розділ присвячений дослідженню факторизації матриць. Зокрема, вказано умови єдиності (з точнісю до асоційовності) дільників із заданою формою Сміта. Введено поняття множини Казімірського та вказано умови, за яких ця множина породжує всі неасоційовні дільники із заданою формою Сміта. Особливу увагу приділено факторизації поліноміальних матриць. Наслідком цього стала побудова ефективних методів пошуку коренів односторонніх матричних рівнянь та знаходження форми Жордана. Два завершальні підрозділи цього розділу присвячені знаходженню форм Сміта та перетворювальних матриць найбільних спільних дільників і найменших спільних кратних матриць.

У шостому розділі досліджується дія групи Зеліска на примітивні матриці. При цьому вказуються інваріанти стосовно такої дії.

Заключний сьомий розділ присвячений дослідженню односторонньої еквівалентності матриць з фіксованою формою Сміта. Показано, що пошук дільників, які мають задану форму Сміта розпаралелюється і зводиться до опису певних матриць із заданими Ф-скелетами. Наслідком цих результатів став опис всіх неасоційовних матриць зі стандартним Ф-скелетом, а також всіх нерозкладних дільників матриць.

Розділ 1.
Кільця Безу та матриці над ними

У розділі наводяться основні властивості елементів комутативних областей Безу, вказується нормальна форма матриць стосовно односторонніх перетворень з повної лінійної групи (форма Ерміта). Особлива увага приділена рівності Безу.

1.1. Властивості елементів кілець Безу

Поняття найбільшого спільного дільника (н.с.д.) – одне з основоположних у математиці. Під н.с.д. елементів $a,\ b$ комутативного кільця R розуміють спільний дільник цих елементів, який ділиться на всі інші їхні спільні дільники. Для некомутативних кілець розглядають (якщо вони існують) як праві, так і ліві найбільші спільні дільники. Потрібно зауважити, що є кільця, в яких поняття найбільшого спільного дільника некоректне. Прикладами таких кілець є кільця многочленів над полями від нескінченної кількості змінних. У цих кільцях у множині спільних дільників, взагалі кажучи, не існує такого многочлена, що ділиться на решту. Окрім того, з означення найбільшого спільного дільника не випливає, що найбільший спільний дільник визначений однозначно з точністю до дільників одиниці. Таке твердження правильне лише у тих кільцях, у яких з умови взаємної подільності елементів випливає їх асоційовність – відмінність на оборотний елемент. Особливо "цінується"якщо $(a,\ b)$ – н.с.д. елементів $a,\ b$ лінійно виражається через них. Тобто

$$(a,\ b) = au + bv, \tag{1.1}$$

де $u, v \in R$. Ця рівність має назву **рівності** або **тотожності Безу.**

Зауважимо, що існування н.с.д. не гарантує його зображення у вигляді (1.1). Зокрема, в кільці $F[x, y]$ – многочленів від двох змінних над полем F елементи $x,\ y$ взаємно прості, тобто $(x,\ y) = 1$, проте в $F[x, y]$ не існує таких $u,\ v$, що $xu + yv = 1$.

Виконання умови (1.1) для всіх елементів кільця R означає, що кожний ідеал, породжений двома елементами цього кільця, є головним. Очевидно, що тоді й кожний скінченно породжений ідеал R також є головним.

Означення 1.1. Кільцем Безу називається кільце, у якому кожний скінченно породжений ідеал є головним.

Зауважимо, що некомутативне кільце називається кільцем Безу, якщо кожний лівий та правий скінченно породжений ідеал є головним.

Прикладами комутативних кілець Безу є кільце цілих чисел, кільця многочленів від однієї змінної над полями, кільце цілих аналітичних чисел. Очевидним чином, комутативні кільця головних ідеалів є кільцями Безу. Обернене твердження неправильне. Наприклад, адекватні кільця, мова про які йтиметься нижче, є кільцями Безу, однак, не є кільцями головних ідеалів. З цього випливає, що елементи кілець Безу не можна зображати у вигляді добутку нерозкладних елементів цих кілець. Тобто кільця Безу, взагалі кажучи, нефакторіальні. Некомутативними кільцями Безу є кільця матриць над комутативними кільцями Безу.

Надалі всюди, якщо це спеціально не обумовлено, R – комутативна область Безу, тобто комутативне кільце Безу без дільників нуля з $1 \neq 0$.

Властивість 1.1. *Якщо* $(a, b) = 1$ *і* $a|bc$, *то* $a|c$.

Доведення. Існують такі u, v, що

$$au + bv = 1 \Rightarrow acu + bcv = c.$$

Оскільки $a|bc$, то $bc = am$. Отже,

$$acu + amv = c \Rightarrow c = a(cu + mv).$$

Тобто $a|c$. □

Властивість 1.2. *Якщо* $(a, b) = 1$ *і* $(a, c) = 1$, *то* $(a, bc) = 1$.

Доведення. Існують такі u, v, m, n, що

$$au + bv = 1,$$
$$am + cn = 1.$$

Перемноживши праві та ліві частини цих рівностей, отримаємо

$$au + bvam + bcvn = 1 \Rightarrow a(u + bvm) + bc(vn) = 1.$$

Звідси випливає, що $(a, bc) = 1$. □

Властивість 1.3. *Якщо* $(a, b) = 1$, *то* $(a, bc) = (a, c)$.

Доведення. Нехай $(a,\ bc) = \alpha$. Оскільки $\alpha | bc$, то $(\alpha,\ bc) = \alpha$. Зваживши на те, що $a = \alpha a_1$ і

$$1 = (a, b) = (\alpha a_1, b)$$

отримуємо, що $(\alpha,\ b) = 1$. Згідно з властивість 1.1 це означає, що $\alpha | c$. Тобто

$$\alpha = (a,\ bc) | (a,\ c).$$

Взявши до уваги, що $(a,\ c) | (a,\ bc)$, отримуємо $(a,\ bc) = (a,\ c)$. □

Властивість 1.4. *Виконується рівність*

$$\left(\frac{a}{(a, c)}, \frac{b}{(b, c)} \right) = \frac{(a, b)}{(a, b, c)},$$

де ab і c одночасно не дорівнюють нулю.

Доведення. Маємо

$$\left(\frac{a}{(a, c)}, \frac{b}{(b, c)} \right) = \frac{(a, b)}{(a, b, c)} \left(\frac{(a^2, ab, ac)}{(a^2, ab, c(a, b))}, \frac{(b^2, ab, bc)}{(a^2, ab, c(a, b))} \right).$$

Оскільки

$$\frac{a}{(a, b)} \frac{\big(a^2, ab, c(a, b)\big)}{(a^2, ab, ac)} = \frac{\big(a^3, a^2 b, ac(a, b)\big)}{(a^2(a, b), ab(a, b), (a, b)ac)} \in R,$$

то

$$\frac{(a^2, ab, ac)}{(a^2, ab, c(a, b))} \,\Bigg|\, \frac{a}{(a, b)}\ .$$

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{(b^2, ab, bc)}{(b^2, ab, c(a, b))} \,\Bigg|\, \frac{b}{(a, b)}\ .$$

Із того, що

$$\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)} \right) = 1,$$

випливає, що

$$\left(\frac{(a^2, ab, ac)}{(a^2, ab, c(a, b))}, \frac{(b^2, ab, bc)}{(b^2, ab, c(a, b))} \right) = 1.$$

А це означає, що

$$\left(\frac{a}{(a, c)}, \frac{b}{(b, c)} \right) = \frac{(a, b)}{(a, b, c)}.$$

□

Властивість 1.5. *Виконується рівність*

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right) = \frac{a}{(a,[b,c])},$$

де a *і* bc *одночасно не дорівнюють нулю.*

Доведення. Виконується рівність

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right) = \left(\frac{ac}{(ac,bc)}, \frac{ab}{(ab,bc)}\right).$$

Скориставшись властивістю 1.4, отримуємо

$$\left(\frac{ac}{(ac,bc)}, \frac{ab}{(ab,bc)}\right) = \frac{(ab,ac)}{(ab,ac,bc)} = \frac{a(b,c)}{(a(b,c),bc)} =$$

$$= \frac{a(b,c)}{(b,c)\,(a,[b,c])} = \frac{a}{(a,[b,c])}.$$

□

Властивість 1.6. *Виконується рівність*

$$\left[\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right] = \frac{a}{(a,(b,c))},$$

де a *і* bc *одночасно не дорівнюють нулю.*

Доведення. Розглянемо добуток

$$\frac{a}{(a,[b,c])}\frac{a}{(a,(b,c))} = \frac{a^2}{(a^2, a\left([b,c],(b,c)\right), bc)} =$$

$$= \frac{a^2}{(a^2, a(b,c), bc)} = \frac{a^2}{(a,b)(a,c)}.$$

Тоді

$$\left[\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right] = \frac{\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}}{\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right)}.$$

З властивості 1.5 отримуємо:

$$\frac{\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}}{\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right)} = \frac{\frac{a}{(a,[b,c])}\ \frac{a}{(a,(b,c))}}{\frac{a}{(a,[b,c])}} = \frac{a}{(a,(b,c))}.$$

□

Властивість 1.7. *Виконується рівність*

$$\left[\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right] = \frac{[a,b]}{([a,b],c)},$$

де ab *і* c *одночасно не дорівнюють нулю.*

Доведення. Виконується рівність

$$\left[\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right] = \left[\frac{ab}{(ab,cb)}, \frac{ab}{(ab,ac)}\right].$$

Згідно з властивістю 1.6 отримуємо

$$\left[\frac{ab}{(ab,cb)}, \frac{ab}{(ab,ac)}\right] = \frac{ab}{(ab,(cb,ac))} =$$

$$= \frac{ab}{(ab,c(b,a))} = \frac{ab}{(a,b)\,([a,b],c)} = \frac{[a,b]}{([a,b],c)},$$

що й потрібно було довести. □

Властивість 1.8. *Якщо* $(a,b) = 1$, $a|c$ *і* $b|c$ *то* $ab|c$.

Доведення. Оскільки $c = a\mu$ і $c = b\nu$, то існують такі u, v , що

$$au + bv = 1 \Rightarrow (a\mu)u + b\mu v = \mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cu + b\mu v = \mu \Rightarrow b\nu u + b\mu v = \mu.$$

Тоді $b(\nu u + \mu v) = \mu$. Отже,

$$c = a\mu = ab(\nu u + \mu v).$$

□

Властивість 1.9. *Якщо* $(a, mn) = (b, mn)$, *то* $(a, m) = (b, m)$.

Доведення. Оскільки

$$(a, m)|(a, mn) = (b, mn),$$

то $(a, m)|b$, *і* $(a, m)|m$. Тому $(a, m)|(b, m)$. За аналогічною схемою показуємо, що $(b, m)|(a, m)$. Отже, $(a, m) = (b, m)$. □

Властивість 1.10. *Якщо* $(a_1, \ldots, a_n) = 1$, $n \geq 2$, *і* $\varepsilon_1|\varepsilon_2|\ldots|\varepsilon_k$, $\varepsilon_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k, 1 \leq k < n$, *то*

$$(a_1\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n) = (\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Доведення. Позначимо

$$(a_1\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n) = \delta_k.$$

Оскільки

$$(\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n)|\delta_k,$$

то для доведення нашого твердження достатньо показати, що $\delta_k|\varepsilon_k$.

Якщо $k = 1$, маємо

$$\delta_1 = (a_1\varepsilon_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1\varepsilon_1, (a_2, \ldots, a_n)) = (\varepsilon_1, (a_2, \ldots, a_n)).$$

Тобто $\delta_1|\varepsilon_1$. Отже, при $k = 1$ наше твердження правильне.

Нехай $k \geq 2$ і припустимо правильність цього твердження для всіх $m < k$. Тоді

$$\delta_k = (a_1\varepsilon_k, a_2\varepsilon_{k-1}, \ldots, a_k\varepsilon_1, a_{k+1}, \ldots, a_n) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\left(a_1\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}, \ldots, a_{k-1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_k\right), a_{k+1}, \ldots, a_n\right).$$

Оскільки

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}|\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}|\ldots|\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1},$$

то за припущенням індукції

$$\left(a_1\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}, \ldots, a_{k-1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\right) = d_1|\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}.$$

Таким чином,

$$\delta_k = d_1\left(\varepsilon_1\frac{\left(a_1\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}, \ldots, a_{k-1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_k\right)}{d_1}, \left(\frac{a_{k+1}}{d_1}, \ldots, \frac{a_n}{d_1}\right)\right) =$$

$$= d_1\left(\varepsilon_1, \left(\frac{a_{k+1}}{d_1}, \ldots, \frac{a_n}{d_1}\right)\right) = d_1d_2,$$

де $d_2|\varepsilon_1$. Отже,

$$\delta_k = d_1d_2|\tfrac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}\varepsilon_1 = \varepsilon_k. \qquad \square$$

Властивість 1.11. *Нехай a, b, a_1, b_1, φ – ненульові елементи кільця R, причому*

$$(a,\ b,\ \varphi) = (a_1,\ b_1,\ \varphi) = 1,\quad \varphi| \det \begin{Vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді для всіх r із R виконується умова

$$(ar + b,\ \varphi\ ) = (\ a_1 r + b_1,\ \varphi).$$

Доведення. Нехай $(\ a,\ \varphi\ ) = \alpha$. Оскільки $ab_1 - a_1 b = \varphi\, t$, то $\alpha | a_1 b$. Зауваживши, що $(\alpha, b) = 1$, отримаємо $\alpha | a_1$. Отже, $\alpha | (a_1,\ \varphi) = \alpha_1$. Аналогічно показуємо, що $\alpha_1 | \alpha$. Це означає, що

$$(a,\ \varphi\ ) = (\ a_1,\ \varphi) = \alpha. \tag{1.2}$$

Нехай $r \in R$. Розглянемо

$$d = (\ a_1(ar + b),\ \varphi\ ) = (\ a_1 ar + a_1 b,\ \varphi\ ) = (\ a_1 ar + a_1 b + \varphi\, t,\ \varphi).$$

Оскільки $ab_1 = a_1 b + \varphi t$, то

$$d = (a_1 ar + ab_1,\ \varphi) = (a(a_1 r + b_1),\ \varphi).$$

Тобто

$$(a_1(ar + b),\ \varphi\ ) = (\ a(a_1 r + b_1),\ \varphi).$$

Розділивши обидві частини цієї рівності на α, отримаємо

$$\left(\frac{a_1}{\alpha}(ar + b),\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(\frac{a}{\alpha}(a_1 r + b_1),\ \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

З рівності (1.2) випливає, що

$$\left(\frac{a}{\alpha},\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(\frac{a_1}{\alpha},\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = 1.$$

Отже,

$$\left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(a_1 r + b_1,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \delta.$$

Оскільки $\alpha\ | a$ і $\alpha\ | a_1$, причому

$$(\alpha,\ b) = (\alpha,\ b_1) = 1,$$

то за всіх значень r із R

$$(ar + b,\ \alpha) = (a_1 r + b_1,\ \alpha) = 1.$$

Таким чином,

$$\delta = \left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \left(ar + b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\alpha\right) = (ar + b,\ \varphi).$$

Аналогічно показуємо, що $\delta = (a_1 r + b_1,\ \varphi)$. □

Властивість 1.12. *Нехай*

$$(a_1,\ b_1,\ \varphi\ ) = 1, \tag{1.3}$$

$$\varphi|\det\left\|\begin{array}{cc} a & a_1 \\ b & b_1 \end{array}\right\|,$$

де $aba_1b_1 \neq 0$. *Тоді, якщо*

$$(a_1r + b_1,\ \varphi) = \alpha,$$

то

$$(ar + b,\ \varphi) = \alpha\left(a,\ b,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Доведення. Нехай $(a,\ b,\ \varphi) = \delta$, тоді

$$\left(\frac{a}{\delta},\ \frac{b}{\delta},\ \frac{\varphi}{\delta}\right) = 1.$$

Оскільки

$$\varphi|\left|\begin{array}{cc} a & a_1 \\ b & b_1 \end{array}\right| = \delta\left|\begin{array}{cc} \frac{a}{\delta} & a_1 \\ \frac{b}{\delta} & b_1 \end{array}\right|,$$

то

$$\frac{\varphi}{\delta}|\left|\begin{array}{cc} \frac{a}{\delta} & a_1 \\ \frac{b}{\delta} & b_1 \end{array}\right|.$$

З умови (1.3) випливає, що

$$\left(a_1,\ b_1,\ \frac{\varphi}{\delta}\right) = 1.$$

Тоді згідно з властивістю 1.11 для всіх r із R виконується умова

$$\left(a_1r + b_1,\ \frac{\varphi}{\delta}\right) = \left(\frac{a}{\delta}r + \frac{b}{\delta},\ \frac{\varphi}{\delta}\right).$$

Домноживши цю рівність на δ, отримаємо

$$(ar + b,\ \varphi) = (\delta(a_1r + b_1),\ \varphi\ ) = \alpha\left(\delta\frac{a_1r + b_1}{\alpha},\ \ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \alpha\left(\delta,\ \ \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Тобто

$$(ar + b,\ \varphi) = \alpha\left(a,\ b,\ \varphi,\ \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \alpha\left(a,\ b,\ \ \frac{\varphi}{\alpha}\right),$$

що і потрібно було довести. □

Властивість 1.13. *Нехай*

$$(a_1 r + b_1,\ \varphi) = 1, \quad \varphi | \det \left\| \begin{matrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{matrix} \right\|,$$

де $ba_1b_1 \neq 0$. *Тоді*

$$(ar + b,\ \varphi\ ) = (\ a,\ b,\ \varphi).$$

Доведення. Якщо $a = 0$, то доводити нічого. Тому нехай $a \neq 0$. З умови $(a_1 r + b_1,\ \varphi) = 1$ випливає, що $(a_1, b_1,\ \varphi) = 1$. Тоді на підставі властивості 1.12

$$(ar + b,\ \varphi) = (a,\ b,\ \varphi).$$

Що і потрібно довести. □

Властивість 1.14. *Нехай* $(m,\ \ a_i) = (n,\ \ a_i)$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ k$. *Тоді*

$$(m,\ \ [a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k]\ ) = (n,\ \ [a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k]\ ).$$

Тобто

$$\left(m,\ \ \frac{a_1\, a_2\ \ldots\ a_k}{(a_2\ \ldots\ a_k,\ a_1 a_3\ \ldots\ a_k,\ \ldots\ ,\ a_1 a_2\ \ldots\ a_{k-1})}\right) =$$

$$= \left(n,\ \ \frac{a_1\, a_2\ \ldots\ a_k}{(a_2\ \ldots\ a_k,\ a_1 a_3\ \ldots\ a_k,\ \ldots\ ,\ a_1 a_2\ \ldots\ a_{k-1})}\right).$$

Доведення. Спершу нехай $i = 2$. Оскільки

$$(m,\ \ a_i) = (n,\ \ a_i) \quad \Rightarrow \quad (m,\ \ a_i) |\ n.$$

Тому $[(m,\ \ a_1),\ (m,\ \ a_2)\ ]\ |\ n$. Тобто

$$[(m,\ \ a_1),\ (m,\ \ a_2)\ ] = \frac{(m,\ \ a_1)(m,\ \ a_2)}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)} = \frac{(m^2,\ \ m(a_1,\ a_2),\ a_1 a_2)}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)} =$$

$$= \left(m\left(\frac{m}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)},\ \frac{(a_1,\ \ a_2)}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)}\right)\ ,\ \ \frac{a_1 a_2}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)}\right) |\ n. \tag{1.4}$$

Зваживши на те, що

$$\left(m,\ \ \frac{a_1 a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) |\ m$$

та

$$\left(m,\ \ \frac{a_1 a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) |\ \ \frac{a_1 a_2}{(a_1,\ a_2)}\ |\ \ \frac{a_1 a_2}{(m,\ \ a_1,\ \ a_2)},$$

із (1.4) отримуємо

$$\left(m,\ \ \frac{a_1 a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) |\ n.$$

Тому

$$\left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right)\ \Big|\ \left(n,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right).$$

Оскільки ситуація є цілком симетричною, то

$$\left(n,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right)\ \Big|\ \left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right).$$

Таким чином,

$$\left(m,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) = \left(n,\ \frac{a_1a_2}{(a_1,\ a_2)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m,\ [a_1,\ a_2]) = (n,\ [a_1,\ a_2]).$$

Повернемось до загального випадку. Нехай

$$(m,\ a_1) = (n,\ a_1), (m,\ a_2) = (n,\ a_2),\ \ldots\ , (m,\ a_k) = (n,\ a_k).$$

Тоді

$$\begin{cases} (m,\ a_1) = (n,\ a_1), \\ (m,\ a_2) = (n,\ a_2) \end{cases} \Rightarrow (m,\ [a_1,\ a_2]) = (n,\ [a_1,\ a_2]).$$

Також

$$\begin{cases} (m,\ [a_1,\ a_2]) = (n,\ [a_1,\ a_2]), \\ (m,\ a_3) = (n,\ a_3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(m,\ [\,[a_1,\ a_2],\ a_3]) = (n,\ [\,[a_1,\ a_2],\ a_3]) \Rightarrow$$

$$(m,\ [\,a_1,\ a_2,\ a_3]) = (n,\ [\,a_1,\ a_2,\ a_3]).$$

Продовжуючи за аналогією, отримаємо

$$(m,\ [a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k]\,) = (n,\ [a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k]).$$ □

Властивість 1.15. *Нехай* $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ ,\ \alpha_k) = 1$, *причому* $\alpha_i | a, \quad \alpha_i, a \neq 0$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ k$. *Тоді*

$$\left[\frac{a}{\alpha_1},\ \frac{a}{\alpha_2},\ \ldots\ ,\ \frac{a}{\alpha_k}\right] = a.$$

Доведення. Маємо

$$\left[\frac{a}{\alpha_1},\ \frac{a}{\alpha_2},\ \ldots\ ,\ \frac{a}{\alpha_k}\right] =$$

$$= \frac{\frac{a}{\alpha_1}\frac{a}{\alpha_2}\ \cdots\ \frac{a}{\alpha_k}}{\left(\frac{a}{\alpha_2}\ \cdots\ \frac{a}{\alpha_k},\ \frac{a}{\alpha_1}\frac{a}{\alpha_3}\ \cdots\ \frac{a}{\alpha_k},\ \cdots\ ,\ \frac{a}{\alpha_1}\frac{a}{\alpha_2}\ \cdots\ \frac{a}{\alpha_{k-1}}\right)} =$$

$$= \frac{a^k}{(a^{k-1}\alpha_1,\ a^{k-1}\alpha_2,\ \ldots\ ,\ a^{k-1}\alpha_k)} = \frac{a^k}{a^{k-1}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ ,\ \alpha_k)} = a.$$

□

Властивість 1.16. *Нехай*

$$\left(m,\ \frac{a}{\alpha_i}\right) = \left(n,\ \frac{a}{\alpha_i}\right),$$

причому $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ ,\ \alpha_k) = 1$, $\alpha_i, a \neq 0$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ k$. *Тоді*

$$(m,\ \ a) = (n,\ \ a).$$

Доведення. Згідно з властивістю 1.14 з того, що

$$\left(m,\ \frac{a}{\alpha_i}\right) = \left(n,\ \frac{a}{\alpha_i}\right),$$

$i = 1,\ \ldots\ ,\ k$, випливає

$$\left(m,\ \left[\frac{a}{\alpha_1},\ \frac{a}{\alpha_2},\ \ldots\ ,\ \frac{a}{\alpha_k}\right]\right) = \left(n,\ \left[\frac{a}{\alpha_1},\ \frac{a}{\alpha_2},\ \ldots\ ,\ \frac{a}{\alpha_k}\right]\right).$$

На підставі властивості 1.15

$$\left[\frac{a}{\alpha_1},\ \frac{a}{\alpha_2},\ \ldots\ ,\ \frac{a}{\alpha_k}\right] = a.$$

Отже, $(m,\ \ a) = (n,\ \ a)$. □

Властивість 1.17. *Нехай*

$$\varphi|\det\left\|\begin{array}{cc} a & a_i \\ b & b_i \end{array}\right\|, \ \ (a_ir+b_i,\ \varphi)=(a_i,b_i,\varphi),$$

де $b, a_i, b_i \neq 0, \ \ i=1,\ldots,k,$ *причому*

$$((a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_1,b_1),\varphi)=1.$$

Тоді

$$(ar+b,\ \varphi)=(a,\ b,\ \varphi).$$

Доведення. При $a=0$ доводити нічого. Тому нехай $a\neq 0$. Позначимо $(a_i,b_i,\varphi)=\delta_i, \ \ i=1,\ldots,k$. Тоді

$$\left(\frac{a_i}{\delta_i}r+\frac{b_i}{\delta_i},\frac{\varphi}{\delta_i}\right)=1,$$

причому

$$\frac{\varphi}{\delta_i}|\left|\begin{array}{cc} a & \frac{a_i}{\delta_i} \\ b & \frac{b_i}{\delta_i} \end{array}\right|.$$

На підставі властивості 1.13 отримуємо

$$\left(ar+b,\ \frac{\varphi}{\delta_i}\right)=\left(a,\ b,\ \frac{\varphi}{\delta_i}\right),$$

$i=1,\ldots,k$. Згідно з умовою теореми $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k)=1$. Тоді, зваживши на властивість 1.16, отримуємо $(ar+b,\ \varphi)=(a,\ b,\ \varphi)$. □

Переважна кількість класичних кілець Безу є адекватними кільцями, введеними О. Хелмером [8].

Означення 1.2. Кільце R називається адекватним, якщо R – комутативне кільце Безу без дільників нуля, в якому для всіх елементів $a\neq 0,\ b$ існують такі елементи $c,\ d$, що $a=cd$, причому $(c,\ b)=1$ і кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із b.

Комутативні області головних ідеалів є адекватними кільцями. З іншого боку, кільце цілих аналітичних функцій є адекватним кільцем проте не є кільцем головних ідеалів.

Адекватні кільця мають властивість, яка вирізняє їх серед решти кілець Безу.

Властивість 1.18. *Нехай* $a_1,\ a_2,\ a_3$ *– взаємно прості елементи адекватного кільця, де* $a_3\neq 0$. *Тоді існує таке* r, *що*

$$(a_1+a_2r,\ a_3)=1.$$

Доведення. Розкладемо елемент a_3 у добуток $a_3 = st$, де

$$(s,\ a_1) = 1,$$

а кожний дільник δ елемента t задовольняє умову

$$(\delta,\ a_1) \neq 1. \tag{1.5}$$

Нехай

$$(a_1 + sa_2,\ a_3) = \tau.$$

Позначимо $(s,\ \tau) = \tau_1$. Оскільки $\tau_1|\ (a_1 + sa_2)$ і $\tau_1|\ s$, то $\tau_1|\ a_1$. Тому $\tau_1|\ (a_1,\ s)$. Тобто $\tau_1 = 1$. Отже,

$$(s,\ \tau) = 1.$$

Оскільки $\tau_1|\ a_3 = st$, то $\tau|\ t$. Припустимо, що $\tau \notin U(R)$. Згідно з умовою (1.5) $(\tau,\ a_2) = \tau_2 \neq 1$. Окрім того, $\tau_2|\ (a_1 + sa_2)$. Звідси випливає, що $\tau_2|a_2$. Таким чином, $\tau_2|\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = 1$, що протирічить нашому припущенню. Отже, $\tau = 1$. Тобто $s = r$ і є шуканим елементом. □

Властивість 1.18 дає можливість оцінити стабільний ранг адекватних кілець – однієї з важливих кільцевих характеристик.

Означення 1.3. [9] Стабільним рангом кільця R називається таке найменше натуральне число n, що з умови

$$a_1R + \cdots + a_{n+1}R = R, \tag{1.6}$$

де $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$, випливає існування таких $b_1, \ldots, b_n \in R$, що

$$(a_1 + a_{n+1}b_1)R + \cdots + (a_n + a_{n+1}b_n)R = R.$$

Зокрема, кільце R має стабільний ранг 2, якщо з умови

$$a_1R + a_2R + a_3R = 1$$

випливає існування таких $r_1,\ r_2$, що

$$(a_1 + a_3r_1)R + (a_2 + a_3r_2)R = 1.$$

Кільце R має стабільний ранг 1, якщо $aR + bR = 1$, то існує таке r, що $a + br$ є оборотним елементом кільця R.

Прикладом кільця стабільного рангу 1 є $F[[x]]$ – кільце формальних степеневих рядів над полем F. Кільце цілих чисел, кільця головних ідеалів, області Безу мають стабільний ранг 2.

Властивість 1.18 показує, що між кільцями стабільного рангу 1 та 2 знаходиться ще один клас кілець, який назвемо кільцями стабільного рангу 1,5.

Означення 1.4. Кільце R має стабільний ранг 1,5, якщо з умови

$$aR + bR + cR = R,$$

$a, b, c \in R$, $c \neq 0$, випливає існування такого $r \in R$, що

$$(a + br)R + cR = R.$$

Властивість 1.19. *Нехай* $a_1, \ \dots \ , a_n$ *– взаємно прості елементи комутативного кільця Безу стабільного рангу* 1,5, *причому* $a_n \neq 0$. *Тоді існують такі* $r_2, \ \dots \ , r_{n-1}$, *що*

$$(a_1 + a_2 r_2 + \ \dots \ + a_{n-1} r_{n-1}, \ a_n) = 1.$$

Доведення. Позначимо $\delta = (a_2, \ \dots \ , a_{n-1})$. Тоді існують такі $v_2, \ \dots \ , v_{n-1}$, що

$$\delta = v_2 a_2 + \ \dots \ + v_{n-1} a_{n-1}.$$

Оскільки $(a_1, \ \delta, \ a_n) = 1$, то на підставі щойно доведеного існує таке r, що

$$(a_1 + r\delta, \ a_n) = 1.$$

Тобто

$$(a_1 + a_2 r u_2 + \ \dots \ + a_{n-1} r u_{n-1}, \ a_n) = 1.$$

Що і потрібно було довести. □

Зауважимо, що не всі комутативні кільця Безу мають стабільний ранг 1,5. Прикладом є кільце, яке ввів М. Хенріксен.

Приклад 1.1. [11] Розглянемо Q – кільце формальних степеневих рядів, вільний член яких є цілим числом, а коефіцієнти біля змінної x – елементи з поля раціональних чисел:

$$Q = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_0 \in \mathbb{Z}, \ a_i \in \mathbb{Q}, \ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Покажемо, що Q є кільцем Безу, стабільний ранг якого не дорівнює 1,5. Група $U(Q)$ одиниць цього кільця складається з усіх елементів вигляду

$$\pm 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i. \tag{1.7}$$

Звідси випливає, що елементи кільця Q зображаються так:

якщо $a_0 \neq 0$, то
$$\alpha = a_0 e_\alpha,$$
де
$$a_0 \in \mathbb{Z}^*, \;\; e_\alpha = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{a_0} x^i\right) \in U(Q);$$
якщо $a_0 = 0$, то
$$\beta = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{p_i}{q_i} x^i = \frac{p_k}{q_k} x^k \left(1 + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{p_i q_k}{q_i p_k} x^i\right) = \frac{p_k}{q_k} x^k e_\beta,$$
де $p_k, q_k \in \mathbb{Z}^*$, $e_\beta \in U(R)$.

Переконаємося, що Q є кільцем Безу.

Нехай $\mu = m e_\mu$, $\nu = n e_\nu$, де $m, n \in \mathbb{Z}$ і $e_\mu, e_\nu \in U(Q)$. Існують такі $u, v \in \mathbb{Z}$, що
$$mu + nv = (m,\; n).$$
Тоді
$$m e_\mu (e_\mu^{-1} u) + n e_\nu (e_\nu^{-1} v) = (m,\; n) = (\mu, \nu).$$
Нехай
$$\alpha = \frac{s_l}{t_l} x^l e_\alpha, \; \beta = \frac{p_k}{q_k} x^k e_\beta, \;\; e_\alpha, e_\beta \in U(Q),$$
причому $0 \leqslant l < k$. Тоді
$$\beta = \alpha \frac{p_k t_l}{q_k s_l} x^{k-l} e_\beta e_\alpha^{-1}.$$
Отже,
$$(\alpha, \beta) = \alpha \Rightarrow \alpha 1 + \beta 0 = \alpha.$$

Залишається розглянути випадок, коли
$$\alpha = \frac{s_k}{t_k} x^k e_\alpha, \; \beta = \frac{p_k}{q_k} x^k e_\beta,$$
де $e_\alpha, e_\beta \in U(Q)$, причому $k \geqslant 1$. Нехай
$$(s_k q_k,\; t_k p_k) = d$$
і
$$(s_k q_k) u + (\, t_k p_k) v = d.$$
Тоді
$$(\alpha, \beta) = \frac{d}{t_k q_k} x^k \left(\frac{s_k q_k}{d} e_\alpha, \; \frac{p_k t_k}{d} e_\beta\right) = \frac{d}{t_k q_k} x^k.$$

При цьому
$$\alpha u e_\alpha^{-1} + \beta v e_\beta^{-1} = (\alpha, \beta).$$
Отже, Q є кільцем Безу.

Виберемо трійку взаємно простих елементів $3,\ 7,\ x$. Зауважимо, що елемент x взаємно простий лише з одиницями кільця R, які мають вигляд (1.7). Розглянемо рівняння відносно невідомого r
$$3 + 7r = \pm 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \cdots .$$
Його розв'язок має вигляд
$$r_1 = -\frac{4}{7} + c_1 x + c_2 x^2 + \ \cdots$$
або ж
$$r_2 = -\frac{2}{7} + d_1 x + d_2 x^2 + \ \cdots .$$
Проте $r_1,\ r_2$ не є елементами кільця Q. Це означає, що $(7 + 5k,\ x) \neq 1$ за довільного k із $\mathbb{Z}$. Тому Q не є кільцем стабільного рангу 1,5. $\diamondsuit$

1.2. Доповнення примітивного рядка до оборотної матриці

Однією з важливих проблем, яка виникає при розв'язанні багатьох матричних задач, є задача доповнення рядка (стовпця), складеного зі взаємно простих елементів, до оборотної матриці. Виявляється, що вже сам вибір кільця, над яким розв'язують цю задачу, суттєво впливає на вигляд шуканої оборотної матриці.

Теорема 1.1. *Нехай* $\|\, a_1\ \ldots\ a_n \|$ *рядок над кільцем Безу* R. *Існує така матриця*
$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1.n-2} & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & u_{n-2.n-2} & u_{n-2.n-1} & u_{n-2.n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array} \right\|, \qquad (1.8)$$
що $\det A = (a_1,\ \ldots\ ,\ a_n) = \alpha$.

Доведення. Нехай $n = 2$ і

$$a_2 u_{11} - a_1 u_{12} = (a_1,\ a_2).$$

Тоді шуканою буде матриця

$$\left\| \begin{array}{cc} u_{11} & u_{12} \\ a_1 & a_2 \end{array} \right\|.$$

Припустимо правильність нашого твердження для всіх матриць порядку, меншого за n. Тоді існує матриця

$$\left\| \begin{array}{ccc} & B & \\ \hline a_2 & \ldots & a_n \end{array} \right\| = D$$

з визначником $(a_2, \ldots, a_n)$. Оскільки

$$\det D = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+n-1} a_i d_i,$$

де d_i – відповідний мінор $n-2$-го порядку матриці B, то

$$(a_2, \ldots, a_n)(d_2, \ldots, d_n) | (a_2, \ldots, a_n).$$

Отже, $(d_2, \ldots, d_n) = 1$. Це означає, що існує оборотна матриця вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccc} c_2 & \ldots & c_n \\ \hline & & \\ & B & \end{array} \right\|.$$

Існують такі p, q, що

$$a_1 q + (a_2, \ldots, a_{n-1}) p = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n).$$

Тоді шуканою матрицею буде

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} p & (-1)^{n-1} q c_2 & \ldots & (-1)^{n-1} q c_n \\ \hline \mathbf{0} & & B & \\ \hline a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{array} \right\|.$$

□

Вперше цей результат отримав Ш. Ерміт [72] для цілочислових матриць третього порядку.

Означення 1.5. Рядок, складений зі взаємно простих елементів кільця Безу називається примітивним.

Наслідок 1.1. *Нехай* $\| a_1 \ \ldots \ a_n \|$ *– примітивний рядок. Тоді існує оборотна матриця вигляду* (1.8). $\square$

Зауваження. Переставляючи рядки або транспонуючи і переставляючи стовпці матриці (1.8), можна побудувати оборотну матрицю, в якій заданий примітивний рядок знаходиметься на довільній позиції.

Над кільцями Безу стабільного рангу 1,5 доповнення примітивного рядка до оборотної матриці суттєво спрощується.

Теорема 1.2. *Якщо* $\| a_1 \ \ldots \ a_n \|$ *примітивний рядок над кільцем Безу стабільного рангу* 1,5, *причому* $a_1 \neq 0$, *то існує оборотна матриця вигляду*

$$\left\| \begin{matrix} u_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{matrix} \right\| = U.$$

Доведення. На підставі властивості 1.19 існують такі елементи $u_1, \ \ldots \ , u_{n-1}$, що

$$(a_n - u_{n-1}a_{n-1} - \ \ldots \ - \ u_2a_2, \ \ a_1) = 1.$$

Отже, знайдуться такі $u_1, \ u_n$, що

$$u_n(a_n - u_{n-1}a_{n-1} - \ \ldots \ - \ u_2a_2) - u_1 \, a_1 = 1.$$

Тоді $\det U =$

$$= u_n \left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & 0 & u_2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \\ a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{matrix} \right\| + (-1)^{n+1} a_1 \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & u_1 \\ 1 & & & & u_2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= u_n \left((-1)^n a_2 \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & u_2 \\ 1 & & 0 & 0 & u_3 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & u_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \end{matrix} \right\| + (-1)^{n+1} a_3 \left\| \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & u_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & u_4 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1} \end{matrix} \right\| \right) +$$

$$+\ldots+u_n\left((-1)^{2(n-1)-1}a_{n-1}\begin{Vmatrix}1 & & 0 & u_2\\ & \ddots & & \vdots\\ 0 & & 1 & u_{n-2}\\ 0 & \ldots & 0 & u_{n-1}\end{Vmatrix}+a_n\right)+(-1)^{2n+1}a_1u_1=$$

$$=u_n(a_n-u_{n-1}a_{n-1}-\ \ldots\ -\ u_2a_2)-u_1\,a_1=1.$$

□

Тепер ми взмозі встановити одну із важливих властивостей матриць над кільцями Безу.

Теорема 1.3. *Нехай* $(a_1,\ \ldots\ ,\ a_n)=\alpha$. *Тоді існує така оборотна матриця* U, *що*

$$U\,\|\,a_1\ \ldots\ a_n\|^T=\|\ \alpha\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \|^T.$$

Доведення. Оскільки $(a_1,\ \ldots\ ,\ a_n)=\alpha$, то існують такі елементи $u_1,\ \ldots\ ,\ u_n$, що

$$u_1\,a_1+\ \ldots\ +u_na_n=\alpha.$$

Звідси випливає, що

$$(u_1,\ \ldots\ ,\ u_n)=1.$$

Тобто рядок $\|\,u_1\ \ldots\ u_n\|$ є примітивним. На підставі теореми 1.1 його можна доповнити до оборотної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix}v_{11} & \ldots & v_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathbf{0} & \ldots & v_{n-1.n}\\ u_1 & \ldots & u_n\end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix}v_{11} & \ldots & v_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathbf{0} & \ldots & v_{n-1.n}\\ u_1 & \ldots & u_n\end{Vmatrix}\|\,a_1\ \ldots\ a_n\|^T=\|\ b_1\ \ \ldots\ \ b_{n-1}\ \ \alpha\ \|^T,$$

де

$$b_i=v_{i1}\,a_1+\ \ldots\ +v_{in}a_n,\ i=1,\ \ldots\ ,\ n-1.$$

Зауваживши, що α є дільником всіх елементів стовпця $\|\,a_1\ \ldots\ a_n\|^T$, приходимо до висновку, що $\alpha|b_i,\ i=1,\ \ldots\ ,\ n-1$. Тоді

$$\begin{Vmatrix}0 & 0 & & 0 & 1\\ 1 & 0 & & 0 & -\frac{b_1}{\alpha}\\ & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 1 & -\frac{b_{n-1}}{\alpha}\end{Vmatrix}\|\ b_1\ \ \ldots\ \ b_{n-1}\ \ \alpha\ \|^T=\|\ \alpha\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \|^T.$$

Отже, шуканою буде матриця

$$U = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & -\frac{b_1}{\alpha} \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\frac{b_{n-1}}{\alpha} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & v_{n-1.n} \\ u_1 & \dots & u_n \end{matrix} \right\|.$$

Теорему доведено. □

Перейшовши в цій теоремі до транспонованих матриць, отримаємо такий результат.

Наслідок 1.2. *Нехай* $(a_1, \ \dots \ , \ a_n) = \alpha$. *Тоді існує така оборотна матриця* V, *що*

$$\| \, a_1 \ \dots \ a_n \| \, V = \| \quad \alpha \quad 0 \quad \dots \quad 0 \, \| \, . \qquad \square$$

1.3. Форма Ерміта

Здійснюючи ті чи інші перетворення матриць, ми змінюємо їх вигляд. Але є величини, які при цьому не змінюються. Тобто вони є інваріантами до таких перетворень. Одним із важливих інваріантів матриць стосовно перетворень із групи $\mathrm{GL}_n(R)$ є н.с.д. мінорів фіксованого порядку.

Теорема 1.4. *Нехай* A *–* $m \times n$ *матриця,* $V \in \mathrm{GL}_m$, $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. *Тоді н.с.д. мінорів порядку* k *матриці* A *збігаєтьcя з н.с.д. мінорів відповідного порядку матриці* VAU, $k = 1, 2, \dots, \min(m, n)$.

Доведення. Для визначеності покладемо $m \leqslant n$. Позначимо через δ_k н.с.д. мінорів порядку k матриці A, а Δ_k – матриці AU.

Розглянемо $AU =$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{matrix} \right\| = B.$$

Згідно з формулою Біне-Коші кожний мінор k-го порядку цієї матриці має вигляд

$$\left| \begin{matrix} b_{i_1 j_1} & \dots & b_{i_1 j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i_k j_1} & \dots & b_{i_k j_k} \end{matrix} \right| = \sum_{1 \leqslant l_1 < \dots < l_k \leqslant m} \left| \begin{matrix} a_{i_1 l_1} & \dots & a_{i_1 l_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k l_1} & \dots & a_{i_k l_k} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} u_{l_1 j_1} & \dots & u_{l_1 j_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{l_k j_1} & \dots & u_{l_k j_n} \end{matrix} \right|,$$

$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \ \ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$. Оскiльки δ_k дiлить всi мiнори k порядку матрицi A, то з цiєї рiвностi випливає, що δ_k також буде дiльником всiх мiнорiв k порядку матрицiAU. Це означає, що $\delta_k|\Delta_k$, $k = 1, \ \ldots \ , m$.

З iншого боку, $A = BV$, де $V = U^{-1}$. Повторивши щойно наведенi мiркування, показуємо, що $\Delta_k|\delta_k$, $k = 1, \ \ldots \ , m$. Отже, $\delta_k = \Delta_k$, $k = 1, \ \ldots \ , m$.

Аналогiчно доводиться, що δ_k збiгається з н.с.д. мiнорiв k-го порядку матрицi VA. I, нарештi, зваживши на асоцiативнiсть операцiї множення матриць, завершуємо доведення. □

Нагадаємо, що пiд **рангом матрицi** розумiється порядок найбiльшого вiдмiнного вiд нуля мiнора цiєї матрицi. Говоритимемо, що $m \times n$ матриця A має максимальний ранг, якщо $\operatorname{rang} A = \min(m, n)$, тобто дорiвнює меншому з $m, \ n$.

Наслiдок 1.3. *Нехай A – $m \times n$ матриця, $V \in \mathrm{GL}_m$, $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тодi*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} VAU. \qquad \square$$

Матрицi $A, \ B$ називатимемо **асоцiйовними справа**, якщо iснує така оборотна матриця V, що $A = BV$. Вiдношення бути асоцiйовним справа є вiдношенням еквiвалентностi. Клас, що мiстить матрицю A, має вигляд $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ i називається класом сумiжностi з представником A. Природно, постає питання вибору в цьому класi матрицi найпростiшої структури. Для реалiзацiї цiєї задумки, знадобляться деякi допомiжнi твердження. В цьому пiдроздiлi R – кiльце Безу.

Лема 1.1. *Нехай $A, \ B$ – $n \times n$ нижнi трикутнi матрицi над R, причому матриця A неособлива. Якщо*

$$AC = B, \tag{1.9}$$

то C також є нижньою трикутною матрицею.

Доведення. Якщо $n = 2$, рiвнiсть (1.9) має вигляд

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Отже, $a_{11}c_{12} = 0$. Оскiльки $a_{11} \neq 0$ i кiльце R не має дiльникiв нуля, то $c_{12} = 0$.

Припустимо правильнiсть нашого твердження для матриць порядку $n - 1$. Запишемо рiвнiсть (1.9) у блочному виглядi:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} & A_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \hline a_{n1} & \ldots & a_{n.n-1} & a_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc|c} & & & c_{1n} \\ & C_{n-1} & & \ldots \\ & & & c_{n-1.n} \\ \hline c_{n1} & \ldots & c_{n.n-1} & c_{nn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|c} & B_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \hline c_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & b_{nn} \end{array} \right\|, \tag{1.10}$$

де A_{n-1} та B_{n-1} – нижні трикутні матриці. З цієї рівності випливає, що

$$A_{n-1}C_{n-1} = B_{n-1}.$$

Матриця A є неособливою. Тому неособливою також є матриця A_{n-1}. На підставі нашого припущення C_{n-1} є нижньою трикутною матрицею. Із (1.10) також отримуємо, що

$$A_{n-1} \left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = \mathbf{0}.$$

Згідно з теоремою 1.3 існує така оборотна матриця U, що

$$U \left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|^T.$$

Отже, виконується рівність

$$(A_{n-1}U^{-1})U \left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = (A_{n-1}U^{-1}) \left\| \begin{array}{cccc} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|^T,$$

де $\alpha = (c_{1n}, \dots, c_{n-1.n})$. З цієї рівності випливає, що

$$\alpha \left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & \dots & d_{n-1.1} \end{array} \right\| = \mathbf{0},$$

де $\left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & \dots & d_{n-1.1} \end{array} \right\|$ – перший стовпець матриці $A_{n-1}U^{-1}$. Оскільки матриця $A_{n-1}U^{-1}$ неособлива, то

$$\left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & \dots & d_{n-1.1} \end{array} \right\| \neq \mathbf{0}.$$

Це означає, що $\alpha = 0$. Тому

$$\left\| \begin{array}{ccc} c_{1n} & \dots & c_{n-1.n} \end{array} \right\|^T = \mathbf{0}.$$

Таким чином, C також є нижньою трикутною матрицею. □

Нехай $a \in R$. Позначимо через $K(a)$ повну систему лишків за модулем a, тобто множину представників суміжних класів фактор-кільця R/Ra. Також позначимо через $Z(R)$ множину неасоційовних елементів кільця R, тобто множину представників суміжних класів фактор-кільця $R/U(R)$.

Теорема 1.5. *Нехай $A = \|a_{ij}\|$ – $n \times m$ матриця ($n \leqslant m$) і* $\mathrm{rang} A = n$. *Тоді існує така оборотна матриця U, що*

$$AU = \left\| \begin{array}{cc} H & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \ H = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{array} \right\|, \tag{1.11}$$

де $\alpha_i \in Z(R)$, $i = 1, \dots, n$, $b_{ij} \in K(\alpha_i)$ для всіх $i > j$. Причому в класі $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ матриця вигляду (1.11) *єдина.*

Доведення. Нехай
$$(a_{11},\ \dots\ ,\ a_{1m}) = \alpha_1,$$
де $\alpha_1 \in Z(R)$. Згiдно з наслiдком 1.2 iснує така оборотна матриця U_1, що
$$\left\| \, a_{11} \ \dots \ a_{1m} \right\| U_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|.$$
Отже,
$$AU_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{matrix} \right\|.$$
Нехай
$$(c_{22},\ \dots\ ,\ c_{2m}) = \alpha_2,$$
де $\alpha_2 \in Z(R)$. Тодi iснує така оборотна матриця U_2', що
$$\left\| \, c_{22} \ \dots \ c_{2m} \right\| U_2' = \left\| \begin{matrix} \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|.$$
Тобто
$$AU_1U_2' = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nm} \end{matrix} \right\|,$$
де $U = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2' \end{matrix} \right\|$. Продовживши нашi мiркування, отримаємо таку оборотну матрицю V, яка є добутком оборотних матриць U_1, U_2, $\dots$, U_{n-1}, що
$$AV = \left\| \begin{matrix} H_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = A_1, \ \ H_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ f_{n1} & \dots & f_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\|,$$
де $\alpha_i \in Z(R)$, $i = 1,\ \dots\ ,\ n$. Оскiльки $\mathrm{rang} A = n$, то на пiдставi наслiдку 1.3 всi $\alpha_i \neq 0$.

У множинi $K(\alpha_2)$ iснує такий елемент b_{21}, що
$$f_{21} \equiv b_{21} (\mathrm{mod} \alpha_2).$$

Тобто $f_{21} = b_{21} + \alpha_2 r_{21}$, де $r_{21} \in R$. Тоді

$$A_1 \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -r_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\|}_{V_2} = \left\| \begin{array}{cc} H_2 & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \ H_2 = \left\| \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & 0 & 0 & & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & 0 & & 0 \\ f'_{31} & f_{32} & \alpha_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ f'_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{n.n-1} & \alpha_n \end{array} \right\|.$$

Для елементів $f'_{31},\ f_{32}$ у множині $K(\alpha_3)$ існують такі елементи $b_{31},\ b_{32}$, що

$$f'_{31} = b_{31} + \alpha_3 r_{31}, \quad f_{32} = b_{32} + \alpha_3 r_{32},$$

де $r_{31},\ r_{32} \in R$. Тоді

$$A_1 V_2 \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -r_{31} & -r_{32} & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_3 & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

$$H_3 = \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & 0 & 0 & & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \alpha_3 & 0 & & 0 \\ f''_{41} & f'_{42} & f_{43} & \alpha_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ f''_{n1} & f'_{n2} & f_{n3} & & & \alpha_n \end{array} \right\|.$$

Продовжуючи описаний процес, врешті-решт отримаємо шукану оборотну матрицю U, яка є добутком всіх тих оборотних матриць, на які домножували матрицю A справа. Таким чином, ми довели, що в класі $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ є матриця вигляду (1.11). Покажемо, що така матриця єдина.

Припустимо, що в класі $A\,\mathrm{GL}_n(R)$ є матриця вигляду $\left\| \begin{array}{cc} B & \mathbf{0} \end{array} \right\|$, де

$$B = \left\| \begin{array}{cccc} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & \beta_n \end{array} \right\|,$$

причому $\beta_i \in Z(R)$, $i = 1,\ \dots\ ,\ n$, $c_{ij} \in K(\beta_i),\ i > j$. Тоді існує така оборотна матриця L, що $B = AL$. На підставі леми 1.1 L є нижньою трикутною матрицею. Тобто

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & e_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{n.n-1} & e_n \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & \beta_n \end{Vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Оскільки матриця L є оборотною, то $e_i \in U(R)$, $i = 1, \dots, n$. Тоді $\beta_i = \alpha_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Це означає, що β_i, α_i є представниками одного і того ж класу асоційовних між собою елементів кільця R. Отже, $\beta_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Тому $e_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Із рівності (1.12) отримуємо

$$c_{i.i-1} = b_{i.i-1} + \alpha_i l_{i.i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Тобто

$$c_{i.i-1} \equiv b_{i.i-1} (\operatorname{mod} \alpha_i).$$

Отже, $c_{i.i-1}$, $b_{i.i-1} \in K(\alpha_i)$. Тому $c_{i.i-1} = b_{i.i-1}$, $l_{i.i-1} = 0$, $i = 2, \dots, n$. Продовживши аналогічні міркування, отримаємо, що $A = B$. $\square$

Матрицю (1.11) називають **формою Ерміта** матриці A. Таку назву вона отримала на честь видатного французького математика Ш. Ерміта, який показав [72], що кожна цілочислова матриця односторонніми перетвореннями з повної лінійної групи зводиться власне до такого вигляду.

Теорема 1.6. *Нехай* $A = \|a_{ij}\|$ *–* $m \times n$ *матриця і* $\operatorname{rang} A = r < \min(m, n)$. *Тоді існують такі оборотні матриці* U, V, *що*

$$UAV = \begin{Vmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де M *– неособлива матриця порядку* r.

Доведення. Для визначеності покладемо $m \leqslant n$. Якщо матриця A має максимальний ранг, то $U = I$, а матриця V на підставі теореми 1.5 є матрицею, що зводить матрицю A до її форми Ерміта.

Нехай $\operatorname{rang} A = r < m$. Тоді в матриці A існує неособлива підматриця A_{11}, яка має порядок r. Перестановкою стовпців та рядків, що рівносильно домноженню на неособливі матриці U_1, V_1, доб'ємося того, щоб матриця $U_1 A V_1$ набула вигляду

$$U_1 A V_1 = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки матриця $\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \end{matrix} \right\|$ має максимальний ранг, то згідно з теоремою 1.5 існує така оборотна матриця V_2, що

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \end{matrix} \right\| V_2 = \left\| \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & 0 & \mathbf{0} \\ * & * & \alpha_r & \mathbf{0} \end{array} \right\|$$

– форма Ерміта матриці $\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \end{matrix} \right\|$, де $\alpha_1 \ldots \alpha_r \neq 0$.

Розглянемо матрицю

$$U_1 A(V_1 V_2) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \alpha_r & 0 & \ldots & 0 \\ \hline b_{r+1.1} & \ldots & b_{r+1.r} & b_{r+1.r+1} & \ldots & b_{r+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mr} & b_{m.r+1} & \ldots & b_{mn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки всі мінори порядку $r+1$ цієї матриці дорівнюють нулю, то, зокрема, і

$$\alpha_1 \ldots \alpha_r b_{ij} = 0, \quad i = r+1, r+2, \ldots, m, \quad j = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Звідси випливає, що $b_{ij} = 0$, де $i = r+1, r+2, \ldots, m$, $j = r+1, r+2, \ldots, n$. Тобто $B_{22} = \mathbf{0}$. Матриця $\left\| \begin{matrix} B_{11} \\ B_{21} \end{matrix} \right\|$ має максимальний ранг. Знову ж таки існує така оборотна матриця U_2, що

$$U_2 \left\| \begin{matrix} B_{11} \\ B_{21} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \beta_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ * & * & \beta_r \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} C \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де $\det C = \beta_1 \ldots \beta_r \neq 0$. Таким чином,

$$(U_2 U_1) A (V_1 V_2) = \left\| \begin{matrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

що і потрібно довести. □

Зі способу зведення матриці до її форми Ерміта випливає, що α_1 – н.с.д. елементів першого рядка матриці A. Скориставшись теоремою 1.5, можемо знайти також і інші діагональні елементи неособливої матриці A. Дійсно, з елементів перших двох рядків матриці AU можна побудувати лише один відмінний від нуля мінор – $\alpha_1\alpha_2$. Тобто $\alpha_1\alpha_2$ є н.с.д. всіх мінорів другого порядку, побудованих з елементів перших двох рядків матриці AU. На підставі теореми 1.5, елементи перших двох рядків матриці A мають таку саму властивість. Таким чином, добуток перших двох діагональних елементів матриці AU дорівнює н.с.д. мінорів другого порядку, побудованих з елементів перших двох рядків матриці A. Всі інші добутки $\alpha_1 \dots \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, знаходять за аналогічною схемою.

Теорема 1.7. *Нехай AU – форма Ерміта неособливої $n \times n$ матриці A і α_i – її діагональні елементи, $i = 1, \dots, n$. Тоді $\alpha_1 \dots \alpha_i$ є н.с.д. мінорів максимального порядку матриці A, побудованих на її перших i рядках.* □

1.4. Рівність Безу та її властивості

Якщо a_1, a_2 взаємно прості елементи кільця Безу R, то існують такі $u_1, u_2 \in R$, що

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 1.$$

З цієї рівності випливає, що і для довільної n-ки взаємно простих елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$ знайдуться такі $v_1, v_2, \dots, v_n$ що

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 1. \tag{1.13}$$

У матричному записі ця рівність матиме вигляд

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\|^T = 1.$$

Говоритимемо, що елементи рядка $\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\|$ задовольняють рівність (1.13). Множину всіх рядків, елементи яких задовольняють рівність (1.13), позначимо через $\mathbf{U}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

Оскільки рядок $\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|$ примітивний, то на підставі теореми 1.1 існує оборотна матриця вигляду

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & \\ a_2 & \\ \vdots & * \\ a_n & \end{matrix} \right\|. \tag{1.14}$$

Вкажемо метод знаходження всіх рядків, які задовольняють рівність (1.13).

Теорема 1.8. *Нехай $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, $n \geq 2$, і A – оборотна матриця вигляду* (1.14)*. Тоді*

$$\mathbf{U}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| A^{-1} \right\},$$

де x_i незалежно один від одного пробігають значення з R, $i = 2, 3, \dots, n$.

Доведення. Розглянемо множину

$$\mathbf{V} = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| A^{-1} \mid x_i \in R,\ i = 2, 3, \dots, n \right\}.$$

Нехай $\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\| \in \mathbf{V}$. Тобто

$$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\| A^{-1},$$

де $b_i \in R, i = 2, \dots, n$. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|^T =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\| A^{-1} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|^T =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|^T = 1.$$

Отже, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

Навпаки, нехай $\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{matrix} \right\| \in \mathbf{U}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ і $A^{-1} = \|b_{ij}\|_1^n$. Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{matrix} \right\| = U.$$

Тоді

$$UA = \left\| \begin{matrix} 1 & c_2 & \dots & c_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Звідси випливає, що

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & \dots & u_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & c_2 & \dots & c_n \end{matrix} \right\| A^{-1}.$$

Тобто $\mathbf{U}_{a_1, a_2, \dots, a_n} \subseteq \mathbf{V}$. Отже, $\mathbf{U}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \mathbf{V}$. □

Наслідок 1.4. *Якщо* $a,\ b \in R$ *і*

$$au + bv = (a,\ b),$$

то $\mathbf{U}_{a,b} = \{(u + br,\ \ v - ar)\}$, *де* $r \in R$. □

Рівність Безу в кільцях стабільного рангу 1,5 має додаткові властивості, які не виконуються в усіх кільцях Безу стабільного рангу 2.

Теорема 1.9. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$ і*

$$(a_1, \dots, a_n) = 1,$$

$n \geq 2$ і ψ – довільний фіксований відмінний від нуля елемент кільця R. Тоді існують елементи $u_1, \dots, u_n$, які одночасно задовольняють такі рівності:

1) $u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n = 1$;

2) $(u_1, \dots, u_i) = 1$, *для довільного фіксованого i, $2 \leq i \leq n$;*

3) $(u_i, \psi) = 1$, *для довільного фіксованого i, $2 \leq i \leq n$.*

Доведення. Спершу покажемо, що стовпець $\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix} \right\|^T$ можна доповнити до оборотної матриці A таким чином, що елементи її оберненої матриці $A^{-1} = \|b_{ij}\|_1^n$ задовольнятимуть умову

$$b_{3i} = \cdots = b_{ni} = 0.$$

Для цього розглянемо довільну оборотну матрицю вигляду

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & \\ a_2 & \\ \cdots & * \\ a_n & \end{matrix} \right\|.$$

Припустимо, що серед елементів $\bar{b}_{2i}, \dots, \bar{b}_{ni}$ матриці $A_1^{-1} = \left\|\bar{b}_{ij}\right\|_1^n$ є принаймні один ненульовий. Тоді існує така матриця $D \in \mathrm{GL}_{n-1}(R)$, що

$$D \left\| \begin{matrix} \bar{b}_{2i} & \dots & \bar{b}_{ni} \end{matrix} \right\|^T = \left\| \begin{matrix} \gamma & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|^T.$$

Тоді матриця

$$((1 \oplus D) A_1^{-1})^{-1} = A_1 (1 \oplus D^{-1}) = A$$

і буде шуканою.

Розглянемо матрицю, яка складається з перших i стовпців матриці A^{-1}, яку запишемо у блочному вигляді

$$\left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & \dots & b_{1,i-1} & b_{1i} \\ b_{21} & \dots & b_{2,i-1} & \gamma \\ b_{31} & \dots & b_{3,i-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{i,i-1} & 0 \\ \hline b_{i+1,1} & \dots & b_{i+1,i-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{n,i-1} & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|.$$

Згідно з теоремою 1.8 елементи $u_1, \ldots, u_n$, які задовольняють умову 1) можна записати так:

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & \ldots & u_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & x_2 & \ldots & x_n \end{matrix} \right\| A^{-1},$$

де $x_i \in R, i = 2, \ldots, n$. Отже, для доведення нашого твердження достатньо показати, що існують такі елементи $x_2, \ldots, x_n$, що

$$\left\| \begin{matrix} 1 & x_2 & \ldots & x_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} q_1 & \ldots & q_i \end{matrix} \right\|,$$

де

$$(q_1, \ldots, q_i) = (q_i, \psi) = 1.$$

Нехай $\gamma = 0$. З примітивності матриці $\left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|$ випливає, що $b_{1i} \in U(R)$. Тобто $u_1 = b_{11}, \ldots, u_n = b_{1n}$.

Нехай $\gamma \neq 0$, $N \neq \mathbf{0}$ і b_{tj} – відмінний від нуля елемент цієї матриці, $i + 1 \leq t \leq n, 1 \leq j \leq i - 1$. Оскільки $(b_{1i}, \gamma) = 1$, то $(b_{1i}, \gamma, \psi b_{tj}) = 1$. Тоді на підставі властивості 1.19 існує такий елемент l, що

$$(b_{1i} + \gamma l, \psi b_{tj}) = 1. \tag{1.15}$$

Позначимо $d_{1i} = b_{1i} + \gamma l$. Оскільки $\psi \neq 0$, то $d_{1i} \neq 0$. Із (1.15) випливають такі рівності:

$$i)\ (d_{1i}, \psi) = 1, \tag{1.16}$$

$$ii)\ (d_{1i}, b_{tj}) = 1.$$

З останньої отримуємо

$$(d_{1j}, b_{tj}, d_{1i}) = 1,$$

де $d_{1j} = b_{1j} + b_{2j} l$. Отже, згідно з властивістю 1.19 існує таке m, що

$$(d_{1j} + b_{tj} m, d_{1i}) = 1.$$

Взявши до уваги рівність (1.16), приходимо до висновку, що елементи першого рядка матриці

$$\left(\left\| \begin{matrix} 1 & l & 0 & \ldots & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-t} \right) A^{-1}$$

задовольняють всі вимоги нашого твердження.

Якщо $N = \mathbf{0}$ або ж $i = n$ (у цьому випадку матриця N пуста) з оборотності матриці A випливає, що $M \in \mathrm{GL}_i(R)$. Тому $(b_{1i}, \gamma) = 1$. Тоді тим більше

$(b_{1i}, \gamma, \psi) = 1$. Як і у попередньому випадку, існує таке r, що $(b_{1i}+\gamma r, \psi) = 1$. Отже, елементи першого рядка матриці

$$\left(\left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-2}\right) A^{-1}$$

і будуть шуканими. Теорема доведена. □

1.5. Найбільший спільний дільник матриць

Якщо $A = BC$, то говоритимемо, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A – правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називатимемо лівим спільним дільником матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця D є правим кратним кожного спільного лівого дільника матриць A та B, то її називатимемо **лівим н.с.д**. матриць A та B (у позначеннях $(A, B)_l$). Доведемо коректність цього поняття в кільцях матриць над кільцем Безу.

Нехай $A, B \in M_n(R)$. Розглянемо $n \times 2n$ матрицю $\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\|$. Згідно з теоремою 1.5 існує така оборотна $2n \times 2n$ матриця U, що

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де D – $n \times n$ матриця. Опираючись на цей результат, запропонуємо спосіб знаходження лівого н.с.д. матриць A, B.

Теорема 1.10. [52] *Нехай $A, B \in M_n(R)$ і U така оборотна матриця, що*

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Тоді $D = (A, B)_l$, причому існують такі матриці P, Q, що

$$(A, B)_l = AP + BQ.$$

Доведення. Запишемо матрицю U у блочному вигляді

$$U = \left\| \begin{matrix} P & S \\ Q & T \end{matrix} \right\|,$$

де кожний блок має порядок n. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P & S \\ Q & T \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Звідси випливає, що

$$D = AP + BQ. \tag{1.17}$$

Позначимо

$$U^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} P_1 & S_1 \\ Q_1 & T_1 \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$\| \, A \quad B \, \| = \| \, D \quad \mathbf{0} \, \| U^{-1} = \| \, D \quad \mathbf{0} \, \| \left\| \begin{array}{cc} P_1 & S_1 \\ Q_1 & T_1 \end{array} \right\|.$$

Це означає, що $A = DP_1,\ B = DQ_1$. Тобто матриця D є лівим спільним дільником матриць A, B. Нехай D_1 є іншим лівим спільним дільником матриць A, B. Тобто $A = D_1M,\ B = D_1N$. Зваживши на рівність (1.17), отримуємо

$$D = D_1MP + D_1NQ = D_1(MP + NQ).$$

Тобто D_1 є лівим дільником матриці D. Отже, D є лівим н.с.д. матриць A, B. $\square$

Для того, щоб довести, що лівий н.с.д. матриць визначений однозначно з точністю до правої асоційовності потрібний наступний результат.

Теорема 1.11. *Нехай матриці A, B є лівими дільниками одна одної. Тоді вони асоційовні справа.*

Доведення. Нехай $\det A \neq 0$. Зауваживши, що $A = BC$, робимо висновок, що і $\det B \neq 0$. Оскільки також $B = AD$, то

$$A = BC = A(DC) \quad \Rightarrow \quad \det A = \det A \det(DC).$$

Отже, $\det(DC) = 1$. Тобто матриці DC, D, C – оборотні. Таким чином, матриці A, B асоційовані справа.

Нехай $\det A = 0$. Оскільки $B = AD$, то матриця B також є особливою. Розглянемо матриці другого порядку. На підставі теореми 1.5 для матриць A, B існують такі оборотні матриці U, V, що

$$AU = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{array} \right\|, \quad BV = \left\| \begin{array}{cc} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{array} \right\|.$$

Оскільки $A = BC$, то

$$AU = (BV)(V^{-1}CU).$$

Тобто

$$\left\| \begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{array} \right\|, \tag{1.18}$$

де $\| \, t_{ij} \, \|_1^2 = V^{-1}CU$. Звідси випливає, що $a_i = b_i t_{11}$, $i = 1, 2$. З іншого боку, з рівності $A = BC$ отримуємо, що $b_i = a_i k_{11}$, $i = 1, 2$. Це означає, що існує таке $e \in U(R)$, що $a_i = b_i e$. З рівності (1.18) також отримуємо, що $b_i t_{12} = 0$,

$i = 1, 2$. Матриця BV ненульова, а тому серед елементів b_1, b_2 є принаймні один ненульовий. Тому $t_{12} = 0$. Таким чином, рівність (1.18) має вигляд

$$\left\| \begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} e & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{array} \right\|.$$

Зокрема, виконуватиметься рівність

$$\left\| \begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} e & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Домноживши її справа на матрицю U^{-1}, отримаємо

$$A = B\left(V \left\| \begin{array}{cc} e & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| U^{-1}\right).$$

Отже, матриці A та B асоційовані справа.

Припустимо правильність нашого твердження для всіх матриць порядку, меншого за n. І нехай A, B – матриці порядку n. Перестановкою рядків, що рівносильно домноженню зліва на деяку оборотну матрицю T, зробимо так, що перший рядок матриці TA буде ненульовим. Нехай $TA = \| \ a_{ij} \ \|_1^n$, $TB = \| \ b_{ij} \ \|_1^n$. З теореми 1.5 випливає, що існують такі оборотні матриці P, Q що

$$\| \ a_{11} \ \ \ldots \ \ a_{1n} \ \| P = \| \ a \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \|,$$
$$\| \ b_{11} \ \ \ldots \ \ b_{1n} \ \| Q = \| \ b \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \|,$$

де $a \neq 0$, $b \neq 0$. Міркуючи аналогічно, як і вище, показуємо, що

$$T(AP) = \left\| \begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} b & \mathbf{0} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} f & \mathbf{0} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right\|,$$

$$T(BQ) = \left\| \begin{array}{c|c} b & \mathbf{0} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} f & \mathbf{0} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right\|,$$

де $f \in U(R)$. З цих рівностей випливає, що матриці $(n-1)$-го порядку A_{22} і B_{22} є лівими дільниками одна одної. Тоді згідно з припущенням індукції $A_{22} = B_{22}K$, де $K \in \mathrm{GL}_{n-1}(R)$. Отже,

$$TAP = \left\| \begin{array}{cc} a & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} e & \mathbf{0} \\ F_{21} & K \end{array} \right\|.$$

Домноживши цю рівність зліва на T^{-1}, а справа – на P^{-1}, отримаємо

$$A = B\left(Q \left\| \begin{array}{cc} e & \mathbf{0} \\ F_{21} & K \end{array} \right\| P^{-1}\right).$$

Зауваживши, що

$$Q\left\| \begin{matrix} e & \mathbf{0} \\ F_{21} & K \end{matrix} \right\| P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R),$$

завершуємо доведення. □

Аналогічно показуємо, що коли матриці A, B є правими дільниками одна одної, то вони асоційовні зліва.

Теорема 1.12. *Лівий н.с.д. матриць над кільцем Безу визначений однозначно з точністю до правої асоційовності.*

Доведення. Нехай D_1, D_2 – ліві н.с.д. матриць A, B. Тоді вони є лівими дільниками одна одної. На підставі теореми 1.11 матриці D_1 і D_2 асоційовні справа. □

Доведена теорема свідчить, що $M_n(R)$ є лівим кільцем Безу. Розглянувши матрицю $\left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\|$, подібно показуємо, що $M_n(R)$ є правим кільцем Безу. В цьому випадку знаходиться така оборотна матриця V, що

$$V\left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} C \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

При цьому матриця C є правим н.с.д. матриць A, B. Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 1.13. *Якщо R є кільцем Безу, то і $M_n(R)$ є кільцем Безу.* □

Відразу ж зауважимо, що лівий та правий н.с.д. матриць, взагалі кажучи, між собою не пов'язані. Причина цього ховається в структурі лівих та правих дільників матриць, яку висвітлимо в 5 розділі. А тепер просто продемонструємо це на прикладі.

Приклад 1.2. Розглянемо матриці

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} I & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$U = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -6 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

– оборотна матриця. Тобто матриці A, B – взаємно прості зліва. Проте вони мають правий н.с.д. $\mathrm{diag}(1,\ 2)$. ♢

1.6. Дільники нуля в кільцях матриць

Особливу роль у кільці $M_n(R)$ – $n \times n$ матриць над R відіграють дільники нуля.

Означення 1.6. Ненульову матрицю A назавають дільником нуля, якщо існує така матриця $M \neq \mathbf{0}$, що $AM = \mathbf{0}$.

Теорема 1.14. *Для того щоб матриця A була дільником нуля, необхідно та достатньо, щоб* $\det A = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\det A \neq 0$ і $AM = \mathbf{0}$. Для матриці A існує така оборона матриця U, що

$$AU = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\|$$

– форма Ерміта матриці A. Оскільки матриця A неособлива, то $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Тоді

$$\mathbf{0} = AM = (AU)(U^{-1}M) = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.n-1} & \alpha_n \end{matrix} \right\| \left\| \; v_{ij} \; \right\|_1^n, \tag{1.19}$$

де $U^{-1}M = \left\| \; v_{ij} \; \right\|_1^n$. З рівності (1.19) випливає, що

$$\alpha_1 \left\| \; v_{11} \quad \dots \quad v_{1n} \; \right\| = \mathbf{0}.$$

Тому

$$\left\| \; v_{11} \quad \dots \quad v_{1n} \; \right\| = \mathbf{0}.$$

Розглядаючи послідовно 2-ий, і т.д. n-ий рядок добутку (1.19), переконуємося, що $U^{-1}M = \mathbf{0}$. Тобто $M = \mathbf{0}$. Отже, матриця A не дільник нуля.

Достатність. Нехай $\det A = 0$. Отже, $\operatorname{rang} A = r < n$. На підставі теореми 1.6 існують такі оборотні матриці P, Q, що

$$PAQ = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де D – неособлива матриця порядку r. Тоді для довільної матриці S вигляду

$$S = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ S_1 & S_2 \end{matrix} \right\|,$$

де S_1 – $(n-r)\times r$ матриця, виконуватиметься рівність

$$PAQS = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ A(QS) = \mathbf{0}.$$

Тобто матриця A – дільник нуля. □

Аналогічно показуємо, що умова $NA = \mathbf{0}$, де $N \neq \mathbf{0}$ рівносильна умові $\det A = 0$. Тобто матриця є одночасно лівим і правим дільником нуля або ж неособливою матрицею.

Позначимо через $Ann^r(D)$ множину правих ануляторів матриці D:

$$Ann^r(D) = \{Q \in M_n(R) \mid DQ = \mathbf{0}\}.$$

Очевидно, що $Ann^r(D)$ є правим ідеалом кільця $M_n(R)$. Якщо матриця D неособлива, то з теореми 1.14 випливає, що рівність $DQ = \mathbf{0}$ виконується лише коли $Q = \mathbf{0}$. Тобто $Ann^r(D) = \{\mathbf{0}\}$. Вкажемо вигляд матриць, з яких складається множина $Ann^r(D)$, якщо матриця D особлива.

Теорема 1.15. *Нехай D – $n \times n$ матриця рангу $r < n$. Тоді $Ann^r(D)$ складається з усіх матриць вигляду*

$$U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\|, \text{ де } DU = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

D_1 – $n \times r$ матриця рангу r, B – довільна $(n-r)\times n$ матриця.

Доведення. Оскільки

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1},$$

то

$$DU \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1}U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

Отже, всі матриці вигляду $U \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ B \end{matrix} \right\|$ належать $Ann^r(D)$.

Нехай $DQ = \mathbf{0}$. Тобто

$$\left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| U^{-1}Q = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| V,$$

де $V = U^{-1}Q$. Запишемо матрицю V у блочному вигляді $V = \left\| \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\|$, де V_1 – $r \times n$ матриця. Оскільки D_1 має максимальний ранг, то вона містить неособливу підматрицю порядку r. Без обмеження загальності можна вважати, що ця матриця складається з перших r її рядків. Позначимо її через B_1. Тоді

$$DQ = \left\| \begin{matrix} B_1 & \mathbf{0} \\ B_2 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

Отже, $B_1V_1 = \mathbf{0}$. Матриця B_1 є неособливо, тому $V_1 = \mathbf{0}$. Очевидно, що рівність

$$\left\| \begin{array}{cc} B_1 & \mathbf{0} \\ B_2 & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ V_2 \end{array} \right\| = \mathbf{0}$$

виконується без жодних обмежень на матрицю V_2. Тобто V_2 є довільною $(n-r)\times n$ матрицею. Зауваживши, що

$$Q = UV = U \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ V_2 \end{array} \right\|,$$

завершуємо доведення. □

1.7. Матрична рівність Безу

Говоритимемо, що пара $(U,\ V)$ зводить матриці $A,\ B$ до $(A,\ B)_l$, якщо

$$AU + BV = (A,\ B)_l = D.$$

Множину всіх таких пар позначимо через $\mathbf{U}^r_{A,B}$.

Теорема 1.16. *Нехай*

$$\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} D & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $\left\| \begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right\|$ *– оборотна матриця. Множина* $\mathbf{U}^r_{A,B}$ *складається з усіх пар вигляду*

$$(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ \ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P),$$

де Q пробігає множину $Ann^r(D)$, а матриця P – кільце $M_n(R)$.

Доведення. Позначимо через $\mathbf{V}^r_{A,B}$ множину

$$\{(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P)\},$$

де Q пробігає множину $Ann^r(D)$, а матриця P – кільце $M_n(R)$. Тоді

$$A(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P) + B(K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P) =$$

$$= (AK_{11} + BK_{21}) + (AK_{11} + BK_{21})Q + (AK_{12} + BK_{22})P =$$
$$= D + DQ + \mathbf{0}P = D.$$

Отже, $\mathbf{V}^r_{A,B} \subseteq \mathbf{U}^r_{A,B}$.

Нехай $(U,\ V) \in \mathbf{U}^r_{A,B}$ і

$$\left\| \begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} D & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right\|.$$

Таким чином,

$$A = DL_{11},\ B = DL_{12}.$$

Розглянемо добуток

$$\left\| \begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} U & K_{12} \\ V & K_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} T & \mathbf{0} \\ P & I \end{array} \right\|, \tag{1.20}$$

де I – одинична матриця і

$$T = L_{11}U + L_{12}V,\ P = L_{21}U + L_{22}V.$$

Тоді

$$DT = (DL_{11})U + (DL_{12})V = AU + BV = D.$$

Тобто

$$DT = D \Rightarrow D(T - I) = \mathbf{0} \Rightarrow T - I = Q \in Ann^r(D).$$

Отже, $T = I + Q$. З рівності (1.20) випливає, що

$$\left\| \begin{array}{cc} U & K_{12} \\ V & K_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} I+Q & \mathbf{0} \\ P & I \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P & K_{12} \\ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P & K_{22} \end{array} \right\|.$$

Отже,

$$U = K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ V = K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P.$$

Таким чином, $\mathbf{U}^r_{A,B} \subseteq \mathbf{V}^r_{A,B}$. Тому $\mathbf{U}^r_{A,B} = \mathbf{V}^r_{A,B}$. □

Теорема 1.17. *Нехай $A,\ B \in M_n(R)$. Тоді існує така оборотна матриця $\left\| \begin{array}{cc} U & M \\ V & N \end{array} \right\|$, що*

$$\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} U & M \\ V & N \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} D & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

причому

$$Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V). \tag{1.21}$$

Доведення. Якщо матриця $D = (A,\ B)_l$ є неособливою, то $Ann^r(D) = \mathbf{0}$ і, очевидно, що включення (1.21) є правильним.

Нехай $(A,\ B)_l$ є особливою матрицею. Це означає, що і матриці $A,\ B$ також особливі. Нехай $\operatorname{rang} B = k < n$. Тоді існують такі оборотні матриці $P_B,\ Q_B$, що

$$P_B B Q_B = \begin{Vmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де B_{11} – $k \times k$ неособлива матриця.

Нехай $\operatorname{rang} A = r < n$. Отже, і $\operatorname{rang} P_B A = r$. Тоді існує така оборотна матриця Q_A, що

$$(P_B A) Q_A = \begin{Vmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{Vmatrix} = r$$

і A_{11} – $k \times r$ матриця.

Нехай $\operatorname{rang} A_{21} = t \leqslant r$. Тоді існує така оборотна матриця P_{21}, що

$$P_{21} A_{21} = \begin{Vmatrix} A'_{21} \\ \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де A'_{21} – $t \times r$ матриця і $\operatorname{rang} A'_{21} = t$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix} = P_B^{-1} \begin{Vmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{21}^{-1} \end{Vmatrix} \underbrace{\left\Vert \begin{array}{cc|cc} A_{11} & \mathbf{0} & B_{11} & \mathbf{0} \\ A'_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\Vert}_{F} \begin{Vmatrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки матриця B_{11} неособлива і н.с.д. мінорів максимального t-го порядку матриці A'_{21} відмінний від нуля, то

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} B_{11} + \operatorname{rang} A'_{21}.$$

Тобто

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix} = k + t.$$

Доповнимо матриці $\begin{Vmatrix} A_{11} \\ A'_{21} \end{Vmatrix}$, B_{11} нульовими блоками до матриць порядку $k + t$ вигляду

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A'_{21} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} = A', \quad \begin{Vmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} = B'.$$

Нехай $(A',\ B')_l = D'$. Оскільки

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A' & B' \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix} = k + t,$$

то матриця D' неособлива. Тоді існує така оборотна матриця $\left\| \begin{array}{cc} U' & M' \\ V' & N' \end{array} \right\|$, що

$$\left\| \begin{array}{cc} A' & B' \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} U' & M' \\ V' & N' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} D' & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Запишемо матрицю F у вигляді

$$F = \left\| \begin{array}{cc|cc} A' & \mathbf{0} & B' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$F \underbrace{\left\| \begin{array}{cc|cc} U' & \mathbf{0} & M' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline V' & \mathbf{0} & N' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\|}_{G} = \left\| \begin{array}{cc|cc} D' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де I_{n-k-t} – одинична матриця порядку $n-k-t$. Очевидно, що матриця G є оборотною. Позначимо

$$P = P_B^{-1} \left\| \begin{array}{cc} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{21}^{-1} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| \left(\left\| \begin{array}{cc} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} U' & \mathbf{0} & M' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline V' & \mathbf{0} & N' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\| \right) =$$

$$= P \left\| \begin{array}{cc|cc} D' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|. \tag{1.22}$$

Отже,

$$(A,\ B)_l = P \left\| \begin{array}{cc} D' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = D.$$

Оскільки матриця D' неособлива, то $Ann^r(D)$ складається з усіх матриць вигляду $\left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ T \end{array} \right\|$, де T – $(n-k-t) \times n$ матриця. З рівності (1.22) випливає, що

$$A \underbrace{\left(Q_A \left\| \begin{array}{cc} U' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\| \right)}_{U} + B \underbrace{\left(Q_B \left\| \begin{array}{cc} V' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \right)}_{V} = D.$$

Якщо матриця V' є неособливою, то з вигляду матриці V отримуємо $Ann^r(D) = Ann^r(V)$. Якщо ж вона особлива, то $Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V)$. Теорему доведено. □

Якщо $M = AP = BQ$, то матрицю M називатимемо спільним правим кратним матриць A та B. Якщо ж матриця M є лівим дільником кожного спільного правого кратного матриць A та B, то називатимемо її **правим н.с.к.** матриць A та B (у позначеннях $[A, B]_r$). За аналогією з твердженням теореми 1.12 праве н.с.к. матриць над кільцем Безу визначене однозначно з точністю до лівої асоційовності.

Теорема 1.18. *Нехай $A,\ B \in M_n(R)$. Тоді існує така оборотна матриця F, що*

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{matrix} \right\| F = \left\| \begin{matrix} (A,\ B)_l & \mathbf{0} \\ * & [A,\ B]_r \end{matrix} \right\|.$$

Доведення. Нехай $(A,\ B)_l = D$. На підставі теореми 1.17 існує така оборотна матриця $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$, що

$$\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \|, \tag{1.23}$$

причому $Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V)$. З рівності (1.23) випливає, що $AM + BN = \mathbf{0}$. Отже, матриця $S = BN = -AM$ є правим спільним кратним матриць $A,\ B$. Нехай $S_1 = AA_1 = BB_1$ – будь-яке інше праве спільне кратне матриць $A,\ B$. Покажемо, що S є лівим дільником матриці S_1.

Розглянемо пару матриць $(U - A_1,\ V + B_1)$. Тоді

$$A(U - A_1) + B(\ V + B_1) = (AU + BV) + (BB_1 - AA_1) = D.$$

Це означає, що $(U - A_1,\ V + B_1) \in \mathbf{U}^r_{A,B}$. Згідно з теоремою 1.16 існують такі $Q \in Ann^r(D)$ і $P \in M_n(R)$, що

$$\begin{aligned} U - A_1 &= U + UQ + MP, \\ V + B_1 &= V + VQ + NP. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Оскільки $VQ = \mathbf{0}$, то з рівності (1.24) отримуємо, що $B_1 = NP$. Тоді

$$S_1 = BB_1 = B(NP) = (BN)P = SP.$$

Таким чином, $S = BN = [A,\ B]_r$. Із рівності (1.23) отримуємо

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \\ BV & BN \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (A,\ B)_l & \mathbf{0} \\ BV & [A,\ B]_r \end{matrix} \right\|.$$

Що і потрібно довести. □

Наслідок 1.5. *Виконується рівність*

$$\det(AB) = \det(A,\ B)_l \det[A,\ B]_r. \qquad \square$$

Існування в кільці $M_n(R)$ дільників нуля призводить до того, що деякі властивості рівності Безу, н.с.к. та н.с.д., які виконуються в кільці R не успадковуються кільцем матриць. Зокрема, з рівності

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де матриця $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$ оборотна, не випливає, що матриця $S = BN$ (див. теорему 1.18) є правим н.с.к. $A,\ B$.

З рівності $AU + BV = (A,\ B)_l$ не випливає існування оборотної матриці вигляду $\left\| \begin{matrix} U & M \\ V & N \end{matrix} \right\|$.

Також з рівностей $A = (A,\ B)_l A_1,\ B = (A,\ B)_l B_1$ не випливає, що $(A_1,\ B_1)_l = I$.

Продемонструємо ці специфічні властивості на конкретному прикладі.

Приклад 1.3. Розглянемо матриці

$$A = \left\| \begin{matrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,\ B = \left\| \begin{matrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

де $\alpha u + \beta v = 1$. Тоді

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} u & -\beta & -\beta r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline v & \alpha & \alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Отже, $(A,\ B)_l = \operatorname{diag}(1,\ 0)$. Проте матриця

$$S = BN = \left\| \begin{matrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \alpha r & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha\beta r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

буде правим н.с.к. $A,\ B$ тоді і тільки тоді, коли r є оборотним елементом кільця R.

Очевидно, що рівність Безу для матриць $A,\ B$ може мати вигляд:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

проте матриця

$$\left\| \begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline v & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

не доповнюється до оборотної матриці четвертого порядку.

Зваживши на вигляд матриці $(A,B)_l$, отримуємо $A = (A,B)_l A$, $B = (A,B)_l B$. Тобто $A_1 = A$, $B_1 = B$. Отже, $(A_1, B_1)_l \neq I$. $\diamondsuit$

Покажемо, що частки від ділення зліва матриць A, B на $(A,B)_l$ все ж таки можна вибрати так, що вони будуть взаємно простими зліва.

Лема 1.2. *Нехай A, B – $m \times n$ взаємно прості зліва матриці, $m < n$. Тоді їх можна доповнити до кадратних взаємно простих зліва матриць вигляду*

$$\left\| \begin{array}{c} A \\ M \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} B \\ N \end{array} \right\|.$$

Доведення. Для матриць A, B існують такі оборотні матриці U, V, що

$$AU = \left\| \begin{array}{cc} A_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \quad BV = \left\| \begin{array}{cc} B_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де A_1, B_1 – $m \times m$ матриці. Оскільки $(A,B)_l = I_m$, то знайдеться оборотна матриця T, що

$$\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| T = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тоді також

$$\left(\left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{array} \right\| \right) \left(\left\| \begin{array}{cc} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{array} \right\| T \right) = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тобто

$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\| T_1 = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $T_1 = \left\| \begin{array}{cc} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{array} \right\| T$. Отже, $(A_1, B_1)_l = I_m$. Це означає, що існує така оборотна матриця $P = \|P_{ij}\|_1^2$, що

$$\left\| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \end{array} \right\| P = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\| \underbrace{\left\| \begin{array}{cccc} P_{11} & \mathbf{0} & P_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_{21} & \mathbf{0} & P_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-m} \end{array} \right\|}_{Q} = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Розглянемо матрицю
$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$
Тоді
$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| Q = \left\| \begin{array}{cccc} I_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$
Звідси отримуємо
$$\left(\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{array} \right\| \right) \left(\left\| \begin{array}{cc} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{array} \right\| Q \right) = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$
Тобто
$$\left\| \begin{array}{c|c} A & B \\ * & * \end{array} \right\| \left(\left\| \begin{array}{cc} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{array} \right\| Q \right) = \left\| \begin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$
□

Теорема 1.19. *Нехай $D = (A, B)_l$. Тоді існують такі M, N, що $A = DM$, $B = DN$, де $(M, N)_l = I$.*

Доведення. Нехай $A = DM$, $B = DN$, причому $\det D \neq 0$ і $(M, N)_l = D_1$. Тоді $M = D_1 M_1$, $\quad N = D_1 N_1$. Отже, $A = DD_1 M_1$, $\quad B = DD_1 N_1$. Оскільки D – лівий н.с.д. матриць A, B, то DD_1 є його лівим дільником:
$$D = DD_1 L \quad \Rightarrow \quad D(I - D_1 L) = \mathbf{0}.$$
Матриця D не дільник нуля, тому $D_1 L = I$. Тобто $D_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$. Отже, $(M, N)_l = I$.

Нехай $\det D = 0$ і $\operatorname{rang} D = r < n$. Тоді існують такі оборотні матриці U, V, що
$$UDV = \left\| \begin{array}{cc} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$
де K – неособлива матриця порядку r. Тоді з рівностей $A = DA_1$, $B = DB_1$ випливає
$$UA = UDV(V^{-1}A_1) = \left\| \begin{array}{cc} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|, \tag{1.25}$$
$$UB = UDV(V^{-1}B_1) = \left\| \begin{array}{cc} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\|. \tag{1.26}$$
Припустимо, що матриці $\left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \right\|$, $\left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \end{array} \right\|$ мають лівий спільний дільник T : $\left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \right\| = TL_1$, $\quad \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \end{array} \right\| = TL_2$. Звідси випливає, що матриця $\left\| \begin{array}{cc} KT & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|$ є лівим спільним дільником матриць UA і UB, які

мають лівий н.с.д. $\begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$. Отже, $K = KTS$. Оскільки матиця K неособлива, то $TS = I$. Тобто T є оборотною матрицею. Таким чином, матриці $\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \end{Vmatrix}$ взаємно прості зліва. На підставі леми 1.2 існують взаємно прості зліва квадратні матриці

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ S_1 & S_2 \end{Vmatrix} = A_1', \quad \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ L_1 & L_2 \end{Vmatrix} = B_1'.$$

З рівностей (1.25,) і (1.26) випливає, що наступні рівності правильні

$$UA = UDV(V^{-1}A_1) = \begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ S_1 & S_2 \end{Vmatrix}}_{A_1'} = (UDV)A_1',$$

$$UB = UDV(V^{-1}B_1) = \begin{Vmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix}}_{B_1'} = (UDV)B_1'.$$

Домноживши ці рівності зліва на U^{-1}, отримаємо $A = D(VA_1'),\ B = D(VB_1')$. Оскільки $(A_1', B_1')_l = I$, то і $(VA_1', VB_1')_l = I$, що і потрібно довести. □

Теорема 1.20. *Матрицю $(A, B)_l$ можна вибрати так, що*

$$[A, B]_r = BA_1, \quad \text{де } A = (A, B)_l A_1.$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.18 існує така оборотна матриця $U = \begin{Vmatrix} U_{ij} \end{Vmatrix}_1^2$, що

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (A,\ B)_l & \mathbf{0} \\ * & [A,\ B]_r \end{Vmatrix}.$$

Отже, $BU_{22} = [A, B]_r = M$. Нехай $U^{-1} = V = \begin{Vmatrix} V_{ij} \end{Vmatrix}_1^2$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ 0 & B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & \mathbf{0} \\ * & M \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{Vmatrix},$$

де $D = (A, B)_l$. Звідси випливає, що $A = DV_{11}$. Оскільки $U^{-1} = V$, то на підставі наслідку 3.4* (с. 115) матриці U_{22} та V_{11} еквівалентні. Тобто $U_{22} = KV_{11}S$, де $K, S \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тоді

$$M = BU_{22} = BKV_{11}S \;\Rightarrow\; MS^{-1} = M_1 = B(KV_{11}) = BA_1,$$

де $A_1 = KV_{11}$. Також виконуються рівності

$$A = DV_{11} = D(K^{-1}K)V_{11} = (DK^{-1})(KV_{11}) = D_1A_1.$$

І для завершення доведення достатньо зауважити, що матриці M, M_1 та D, D_1 асоційовані справа. Тобто M_1 є правим н.с.к., а D_1 – лівим н.с.д. матриць A, B. □

Розділ 2.
Кільця елементарних дільників

2.1. Форма Сміта

У попередньому розділі вивчалися односторонні перетворення матриць над кільцями Безу. При цьому була встановлена канонічна форма стосовно таких перетворень. Подальші дослідження будуть спрямовані на пошук такої ж форми відносно двосторонніх перетворень матриць.

Означення 2.1. Матриці A та B називають еквівалентними (в позначеннях $A \sim B$), якщо існують такі оборотні матриці $P,\ Q$, що $A = PBQ$.

Під **діагональною матрицею** розумітимемо матрицю, в якій всі елементи поза головною діагоналлю є нулями. Ця матриця може бути і прямокутною. Якщо у діагональній матриці кожний попередній діагональний елемент ділить наступний, то її називатимемо **d-матрицею**.

Теорема 2.1. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу* 1,5. *Тоді кожна $m \times n$ матриця A над R еквівалентна до d-матриці* $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\ \dots\ ,\ \varphi_k)$, $k = \min(m, n)$, *причому* $\varphi_i \in Z(R)$, $i = 1,\ \dots\ ,\ k$. *При цьому матриця* Φ *єдина в класі еквівалентних до A матриць.*

Доведення. Нехай спершу A – неособлива $n \times n$ матриця. Позначимо через B_1 підматрицю матриці A, складену з перших двох її рядків. На підставі теореми 1.5 існує така оборотна матриця V_1, що

$$B_1V_1 = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

де $b_{11},\ b_{22} \neq 0$. Існує таке r, що

$$(b_{21} + b_{11}r,\ b_{22}) = (b_{21},\ b_{11},\ b_{22}) = \beta.$$

Тоді

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{Vmatrix}}_{U_1} B_1V_1 = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b'_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

де $b'_{21} = b_{21} + b_{11}r$. Оскільки $(b'_{21},\ b_{22}) = \beta$, то знайдуться такі u, v, що

$$ub'_{21} + vb_{22} = \beta.$$

Тоді

$$U_1B_1V_1\left(\begin{Vmatrix} u & -\frac{b_{22}}{\beta} \\ v & \frac{b'_{21}}{\beta}\end{Vmatrix}\oplus I_{n-2}\right)=\begin{Vmatrix} b_{11}u & -b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0\end{Vmatrix}=B_2,$$

де I_{n-2} – одинична матриця порядку $n-2$. Отже,

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{b_{11}}{\beta}u\end{Vmatrix}B_2=\begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & 0 & \dots & 0\end{Vmatrix}=B_3.$$

Оскільки $\beta|b_{11}$, то B_3 є d-матрицею. За теоремою 1.4 домноження матриці на оборотні матриці не змінює н.с.д. її елементів. Тому β є н.с.д. всіх елементів перших двох рядків матриці A. Очевидно, що

$$A\sim\begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn}\end{Vmatrix}=A_1.$$

Тоді

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}\oplus I_{n-3}\right)A_1\sim\begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ 0 & 0 & b_{11}\frac{b_{22}}{\beta} & & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & \dots & c_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn}\end{Vmatrix}=A_2.$$

Позначимо через C_1 перші два рядки цієї матриці. За аналогією
$C_1\sim\operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$, де $\gamma_1=(\beta,\ c_{31},\ \dots\ ,\ c_{3n})$ і $\gamma_1|\gamma_2$. Це означає, що

$$A\sim\begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn}\end{Vmatrix}=A_3.$$

Зауважимо, що третій рядок матриці A_3 отримується з третього рядка матриці A_2 домноженням на деяку оборотну матрицю. Тому

$$(d_{31},\ \dots\ ,\ d_{3n})=b_{11}\frac{b_{22}}{\beta}.$$

Оскільки $\gamma_1|\beta$, а $\beta|b_{11}$, то $\gamma_1|b_{11}\frac{b_{22}}{\beta}$. Це означає, що γ_1 є н.с.д. перших трьох рядків матриці A_3. Продовжуючи описаний процес, врешті-решт отримаємо, що

$$A \sim \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{array} \right\| = A',$$

де $\varphi_1 \in Z(R)$ і є н.с.д. всіх елементів матриці A'. Тоді

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{f_{21}}{\varphi_1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{f_{n1}}{\varphi_1} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\| A' = \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{array} \right\|.$$

Міркуючи так і з матрицею

$$F = \left\| \begin{array}{ccc} f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{array} \right\|,$$

показуємо, що

$$F \sim \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{array} \right\|,$$

де $\varphi_2 \in Z(R)$ і є н.с.д. елементів матриці F. Отже,

$$A \sim \left\| \begin{array}{ccccc} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{array} \right\|.$$

Оскільки φ_1 – дільник усіх елементів матриці F, то $\varphi_1|\varphi_2$. Продовжуючи описаний процес, показуємо, що $A \sim \operatorname{diag}(\varphi_1, \ \dots \ , \ \varphi_n)$, $\varphi_i|\varphi_{i+1}$, $i = 1, \ \dots \ , n-1$.

Нехай $\operatorname{rang} A = k \leq \min(m, n)$. На підставі теореми 1.6 існують такі оборотні матриці U, V, що

$$UAV = \left\| \begin{array}{cc} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де M – неособлива $k \times k$ матриця. Згідно з щойно доведеним, матриця M еквівалентна до d-матриці $\mathrm{diag}(\mu_1, \ \ldots \ , \ \mu_k)$, де $\mu_i \in Z(R)$, $i = 1, \ \ldots \ , \ k$. Отже,

$$A \sim \mathrm{diag}(\mu_1, \ \ldots \ , \ \mu_k, \ 0, \ \ldots \ , \ 0) = \mathrm{M}_1.$$

Таким чином, в класі матриць, еквівалентних до A є d-матриця, діагональні елементи якої вибрані з $Z(R)$.

Припустимо, що

$$A \sim \mathrm{diag}(\nu_1, \ \ldots \ , \ \nu_p, \ 0, \ \ldots \ , \ 0) = \mathrm{N}, \ \ \nu_i|\nu_{i+1}, \ \ \nu_j \in Z(R).$$

Оскільки N є d-матрицею, то $\nu_1\nu_2\ldots\nu_i$ ділить всі мінори i-го порядку матриці N. Отже, $\nu_1\nu_2\ldots\nu_i$ є н.с.д. i-го порядку цієї матриці. Оскільки $A \sim \mathrm{N}$ і $A \sim \mathrm{M}_1$, то $\mathrm{N} \sim \mathrm{M}_1$. Це означає, що н.с.д. відповідних мінорів цих матриць збігаються. Звідси випливає, що

$$\mathrm{rang}\,\mathrm{M}_1 = \mathrm{rang}\,\mathrm{N}.$$

Тому $k = p$. Зваживши на те, що $\mu_1, \ \nu_1 \in Z(R)$ приходимо до висновку, що $\mu_1 = \nu_1$. З рівності $\mu_1\mu_2 = \nu_1\nu_2$ випливає, що $\mu_2 = \nu_2$. Продовжуючи описаний процес, переконаємося, що в класі матриць, еквівалентних до матриці A, є лише одна d-матриця з умовою подільності діагональних елементів, які вибирають із множини $Z(R)$. $\square$

Зауваження. Якщо елементи множини $Z(R)$ не узгоджені, то інваріантні множники визначені з точністю до дільників одиниці.

Отриману в цій теоремі d-матрицю називають формою Сміта матриці. Свою назву вона отримала на честь англійського математика Г. Сміта (H.J. Smith), який у 1861 році встановив [2], що кожна цілочислова матриця еквівалентними перетвореннями зводиться до вказаного вигляду.

Під час доведення теореми 2.1 ми суттєво опирались на той факт, що кільце R має стабільний ранг 1,5. Нижче покажемо, що кожна матриця над кільцем Q – формальних степеневих рядів над полем раціональних чисел з цілим вільним членом зводиться до форми Сміта, при цьому це кільце не є кільцем стабільного рангу 1,5, а стабільного рангу 2. Тобто клас кілець, над якими матриці мають форму Сміта є ширшим за клас кілець Безу стабільного рангу 1,5.

Будемо говорити, що матриця A має властивість канонічної діагональної редукції, якщо існують такі оборотні матриці P, Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0), \tag{2.1}$$

де $\varepsilon_k \neq 0$, $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}, i = 1, \ldots, k-1$. При цьому елементи ε_i називають **інваріантними множниками,** а P, Q – **перетворювальними матрицями** матриці A. Множину матриць P, що задовольняють рівність (2.1), позначатимемо через $\mathbf{P}_A$.

Теорема 2.2. *Перший інваріантний множник ε_1 форми Сміта матриці A дорівнює н.с.д. її елементів. Решта інваріантних множників знаходять за формулою*

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}},$$

де δ_i – н.с.д. мінорів i-го порядку матриці A, $i = 2, \ldots, k$, де k – номер останнього відмінного від нуля н.с.д. мінорів відповідного порядку.

Доведення. Нехай A – $m \times n$ матриця, P, Q – її перетворювальні матриці. На підставі теореми 1.4 н.с.д. мінорів k-го порядку матриць A та PAQ збігаються, $i = 1, \ldots, m$. Оскільки ε_1 є дільником всіх елементів матриці PAQ, то він дорівнює н.с.д. елементів матриці A. Н.с.д. мінорів i-го порядку матриці PAQ є $\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_i$ і збігається з δ_i – н.с.д. мінорів відповідного порядку матриці A. Звідси випливає, що

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_i}{\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{i-1}} = \varepsilon_i,$$

де $i = 2, \ldots, k$. □

І. Капланський [1] назвав кільця, матриці над якими мають властивість канонічної діагональної редукції, **кільцями елементарних дільників**.

Виявляється, що для перевірки того факту, що R є кільцем елементарних дільників не потрібно переконуватися у тому, що всі матриці над R мають властивість канонічної діагональної редукції – достатньо розглянути лише матриці другого порядку.

Теорема 2.3. [*1*] *Для того щоб кожна матриця над R мала властивість канонічної діагональної редукції необхідно та достатньо, щоб кожна 2×2 матриця над R мала таку ж властивість.*

Доведення. Нехай A – $m \times n$ матриця. Для визначеності покладемо $m \leqslant n$. Розглянемо спочатку випадок $m = 2$. На підставі тереми 1.5 існує така оборотна матриця V_1, що

$$AV_1 = \left\| \begin{array}{cc|ccc} a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b & c & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_1 & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Матриця A_1 має властивість канонічної діагональної редукції. Тому існують такі оборотні матриці $P_1,\ Q_1$, що

$$P_1 A_1 Q_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \ \alpha_1 | \alpha_2,\ \ \alpha_1, \alpha_1 \in Z(R).$$

Тоді

$$P_1 A_1 V_1 (Q_1 \oplus I_{n-2}) = \left\| \begin{array}{cc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|.$$

Тобто наше твердження правильне для матриць, складених з двох рядків. Припустимо його правильність для всіх $k < m$ і розглянемо $m \times n$ матрицю A. Запишемо матрицю A у блочному вигляді: $A = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix} \right\|$, де B_1 – перший рядок матриці A. Оскільки B_2 – $(m-1) \times n$ матриця, то існують такі оборотні матриці $P_2,\ Q_2$, що

$$P_2 B_2 Q_2 = \operatorname{diag}(\beta_1,\ \ldots\ ,\ \beta_{m-1})$$

– форма Сміта матриці B_2 (деякі β_i можуть бути нулями). Тоді

$$(1 \oplus P_2) \left\| \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix} \right\| Q_2 = \left\| \begin{matrix} B_1 Q_2 \\ P_2 B_2 Q_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} * & * & * & \ldots & * \\ \beta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \beta_{m-1} & & 0 \end{matrix} \right\| = B.$$

Запишемо цю матрицю у блочному вигляді: $B = \left\| \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\|$, де C_1 – перші два рядки матриці B. Як уже було показано на початку доведення, знайдуться такі оборотні матриці $P_3,\ Q_3$, що

$$(P_3 \oplus I_{m-2})\, B Q_3 = \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * & \ldots & * \end{matrix} \right\| = C,$$

де $\gamma_1 | \gamma_2$, $\gamma_1 \in Z(R)$. Зауваживши, що β_1 є н.с.д. елементів матриці $P_2 B_2 Q_2$, а рядок $\left\| \begin{matrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$ – другим рядком матриці C_1, приходимо до висновку, що γ_1 є н.с.д. елементів матриці C. Елементарними перетвореннями над рядками матриці C зведемо її до вигляду

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{matrix} \right\| = F \sim C.$$

Згідно з припущенням індукції існують такі оборотні матриці $P_4,\ Q_4$, що

$$P_4 D Q_4 = \operatorname{diag}(\delta_1,\ \ldots\ ,\ \delta_{m-1})$$

є формою Сміта матриці D. Таким чином,

$$C \sim (1 \oplus P_4)\, F Q_4 = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \delta_1,\ \ldots\ ,\ \delta_{m-1}).$$

Оскільки γ_1 – н.с.д. елементів матриці C, то γ_1 є дільником всіх елементів отриманої матриці. Отже, формою Сміта матриці A є матриця $\operatorname{diag}(\gamma_1,\ \delta_1,\ \ldots\ ,\ \delta_{m-1})$. Теорему доведено. □

Використавши результати цієї теореми, можна сформулювати інші умови, які будуть стосуватись властивостей елементів кільця R, за яких це кільце буде кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.4. [*1*] *Для того щоб кожна матриця над* R *мала властивість канонічної діагональної редукції, необхідно та достатньо, щоб*

1) R *було кільцем Безу,*

2) *для кожної взаємно простої трійки елементів* $a, b, c \in R$ *існували такі* p, q, *що*

$$(pa + qb,\ qc) = 1.$$

Доведення. **Необхідність**. Для кожної матриці $\left\| \begin{matrix} a & b \end{matrix} \right\|$, $a, b \in R$, існує така оборотна матриця U, що

$$\left\| \begin{matrix} a & b \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} (a,b) & 0 \end{matrix} \right\|.$$

А це рівносильно тому, що R є кільцем Безу.

Розглянемо матрицю $A = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ b & c \end{matrix} \right\|$. Оскільки $(a, b, c) = 1$, то $A \sim \operatorname{diag}(1,\ ac)$. Отже, існують оборотні матриці $P = \|p_{ij}\|_1^2$, $Q = \|q_{ij}\|_1^2$, що

$$PAQ = \operatorname{diag}(1,\ ac).$$

Тобто

$$PAQ = \left\| \begin{matrix} p_{11}a + p_{12}b & p_{12}c \\ p_{21}a + p_{22}b & p_{22}c \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$(p_{11}a + p_{12}b)q_{11} + (p_{12}c)q_{21} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$(p_{11}a + p_{12}b,\ p_{12}c) = 1.$$

Достатність. На підставі теореми 2.3 нам достатньо показати, що кожна 2×2 матриця має властивість канонічної діагональної редукції. Нехай B – довільна 2×2 матриця над R. Згідно з теоремою 1.5 існує така оборотна матриця U, що

$$BU = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \delta \left\| \begin{matrix} \frac{b_1}{\delta} & 0 \\ \frac{b_2}{\delta} & \frac{b_3}{\delta} \end{matrix} \right\|,$$

де $\delta = (b_1,\ b_2,\ b_3)$. Тоді

$$\left(p\frac{b_1}{\delta} + q\frac{b_2}{\delta}, q\frac{b_3}{\delta} \right) = 1$$

для деяких $p,\ q$. Звідси випливає, що

$$(pb_1 + qb_2, qb_3) = \delta.$$

Оскільки $(p,\ q) = 1$, то існує оборотна матриця $\begin{Vmatrix} p & q \\ u & v \end{Vmatrix}$. Маємо

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ u & v \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} pb_1 + qb_2 & qb_3 \\ * & * \end{Vmatrix} = B_1.$$

Існують такі $m,\ n$, що

$$(pb_1 + qb_2)m + \ (qb_3)n = \delta.$$

Тоді

$$B_1 \begin{Vmatrix} m & -\frac{b_3}{\delta} \\ n & p\frac{b_1}{\delta} + q\frac{b_2}{\delta} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ * & b_1b_3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_1b_3 \end{Vmatrix}.$$

Теорему доведено. □

Наслідок 2.1. *Кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для кожної трійки взаємно простих елементів $a,\ b,\ c$ існують такі $p,\ q,\ u,\ v$, що*

$$a(pu) + b(qu) + c(qv) = 1. \qquad \square$$

Зауваження. На підставі теореми 2.1 кільце Безу стабільного рангу $1,5$ є кільцем елементарних дільників. Доведення цього факту було достатньо громіздким. З використанням теореми 2.4 цей процес суттєво спрощується. Дійсно, якщо $(b, a, c) = 1,\ c \neq 0$, то існує таке r, що $(b + ar, c) = 1$. Тобто $p = r, q = 1$ (позначення теореми 2.4). Якщо $c = 0$, то p, q вибирають з рівності $ap + bq = 1$. Отже, на підставі теореми 2.4 кільце Безу стабільного рангу $1,5$ є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.5. [*11*] *Кільце*

$$Q = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{Q},\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

є кільцем елементарних дільників.

Доведення. У прикладі 1.1 показано, що Q є кільцем Безу. Отже, виконана перша умова теореми 2.4.

Оскільки з елементом $x^k e,\ e \in U(R)$ взаємно простими є лише одиниці кільця Q, то можливі лише такі варіанти трійок взаємно простих елементів кільця Q:

1) $ae_1,\ be_2,\ ce_3$, де a, b, c – взаємно прості цілі числа, $e_1, e_2, e_3 \in U(R)$;

2) $x^k e_1,\ be_2,\ ce_3$, де b, c – взаємно прості цілі числа;

3) $x^k e_1,\ x^p e_2,\ e_3$.

Розглянемо випадок 1). Без обмеження загальності можна вважати, що $c \neq 0$. У протилежному випадку можемо зробити це, переставивши та переіменувавши елементи. Кільце цілих чисел є адекватним кільцем. Тому на підставі властивості 1.18 воно має стабільний ранг 1,5. Це означає, що існує таке r, що $(a+rb,\ c)=1$. Отже, і

$$((re_1e_2^{-1})be_2+ae_1,\ ce_3)=1.$$

Тобто шуканими p,q будуть $p=re_1e_2^{-1},\ q=1$.

2). Оскільки $(be_2,\ ce_3)=1$, то існують такі p,q, що

$$pbe_2+qce_3=1.$$

Тоді

$$(pbe_2+qce_3,\ qx^k e_1)=1.$$

У третьому випадку достатньо вибрати q із групи $U(Q)$. Таким чином, згідно з теоремою 2.4 кільце Q є кільцем елементарних дільників. □

2.2. Перетворювальні матриці та група Зеліска

Пошук інваріантних множників, а отже, і форми Сміта матриць згідно з теоремою 2.2 пов'язаний із знаходженням н.с.д. мінорів відповідних порядків. Однак у багатьох задачах, зокрема задачах факторизації матриць, потрібно знати не лише форму Сміта матриць але і перетворювальні матриці. Подальші дослідження зосереджені на дослідженні цих матриць.

Нехай Φ – d-матриця. Розглянемо множину матриць

$$\mathbf{G}_\Phi=\{H\in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists\ K\in \mathrm{GL}_n(R):\ H\Phi=\Phi K\}.$$

Властивість 2.1. *Множина $\mathbf{G}_\Phi$ є мультиплікативною групою.*

Доведення. Очевидно, що $I\in\mathbf{G}_\Phi$. Нехай $H_1,H_2\in\mathbf{G}_\Phi$. Тобто

$$H_1\Phi=\Phi K_1, H_2\Phi=\Phi K_2, K_1,K_2\in \mathrm{GL}_n(R).$$

Тоді

$$H_2H_1\Phi=H_2\Phi K_1=\Phi K_1K_2.$$

Тобто множина $\mathbf{G}_\Phi$ мультиплікативно замкнена. Окрім того, з рівності $H\Phi=\Phi K$ випливає $H^{-1}\Phi=\Phi K^{-1}$. Тобто $H^{-1}\in\mathbf{G}_\Phi$. □

Група $\mathbf{G}_\Phi$ називається **групою Зеліска**. Її вивчення розпочалось з праці В. Зеліска [63].

Властивість 2.2. *Якщо* $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$, *то* $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P$.

Доведення. Нехай $P_1 \in \mathbf{P}_B$. Тобто $B = P_1^{-1}\Phi Q_1^{-1}$. Отже,

$$P^{-1}\Phi Q^{-1} = P_1^{-1}\Phi Q_1^{-1}.$$

Звідси випливає, що

$$P_1 P^{-1}\Phi = \Phi Q_1^{-1} Q.$$

Таким чином, $P_1 P^{-1} = H \in \mathbf{G}_\Phi$. Тобто $P_1 = HP$. Тому $\mathbf{P}_B \subseteq \mathbf{G}_\Phi P$.

Навпаки, якщо $P \in \mathbf{P}_B$ і $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то

$$HPB = HPP^{-1}\Phi Q^{-1} = H\Phi Q^{-1} = \Phi K Q^{-1}.$$

Отже, $(HP)B(QK^{-1}) = \Phi$. Тобто $HP \in \mathbf{P}_B$. Тому $\mathbf{P}_B \supseteq \mathbf{G}_\Phi P$. Таким чином, $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P$. $\square$

Отже, множина $\mathbf{P}_B$ – лівих перетворювальних матриць матриці B, є не що інше як лівий клас суміжності повної лінійної групи за групою $\mathbf{G}_\Phi$.

Охарактеризуємо внутрішню структуру матриць із групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Теорема 2.6. *Група* $\mathbf{G}_\Phi$, *де* $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0)$ *складається з усіх оборотних матриць вигляду*

$$H = \begin{Vmatrix} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{Vmatrix}, \tag{2.2}$$

де

$$H_1 = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1.t-1} & h_{1t} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2.t-1} & h_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_t}{\varphi_1} h_{t1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2} h_{t2} & \ldots & \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} h_{t.t-1} & h_{tt} \end{Vmatrix}, \quad H_2 \in \mathrm{GL}_{n-t}(R).$$

Доведення. Нехай $H = \|p_{ij}\|_1^n \in \mathbf{G}_\Phi$. Це означає, що існує така оборотна матриця $K = \|k_{ij}\|_1^n$, що

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1 p_{11} & \ldots & \varphi_t p_{1t} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1 p_{t1} & \ldots & \varphi_t p_{tt} & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_1 p_{t+1.1} & \ldots & \varphi_t p_{t+1.t} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1 p_{n1} & \ldots & \varphi_t p_{nt} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi_1 k_{11} & \ldots & \varphi_1 k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_t k_{t1} & \ldots & \varphi_t k_{tn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.3}$$

Оскільки $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \neq 0$, то

$$\begin{Vmatrix} p_{t+1.1} & \ldots & p_{t+1.t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nt} \end{Vmatrix} = \mathbf{0}.$$

З рівності (2.3) також випливає, що $\varphi_i | \varphi_j p_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, t$. Оскільки при $i \leq j$ $\varphi_i | \varphi_j$, то на елементи p_{ij}, де $i \leq j$, не накладаються жодні обмеження. Якщо $i > j$, то $\varphi_j | \varphi_i$. Тому умова

$$\varphi_j p_{ij} = \varphi_i k_{ij}$$

рівносильна тому, що

$$p_{ij} = \frac{\varphi_i}{\varphi_j} k_{ij}.$$

Таким чином, матриця H має вигляд (2.3).

Нехай тепер H – оборотна матриця вигляду (2.2). Тоді виконується рівність

$$\left\| \begin{matrix} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{matrix} \right\| \Phi = \Phi \left\| \begin{matrix} K_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{matrix} \right\|,$$

де

$$K_1 = \left\| \begin{matrix} h_{11} & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{12} & \ldots & \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_1} h_{1.t-1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_1} h_{1t} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_2} h_{2.t-1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2} h_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{t1} & h_{t2} & \ldots & h_{t.t-1} & h_{tt} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки

$$\det H = \det H_1 \det H_2,$$

то матриці H_1, H_2 є оборотними. Матриці H_1, K_1 задовольняють рівність

$$H_1 \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t) = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t) K_1.$$

Зваживши на те, що матриця $\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ неособлива, приходимо до висновку, що K_1 є оборотною матрицею. Таким чином, матриця $\left\| \begin{matrix} K_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{matrix} \right\|$ оборотна, а отже, $H \in \mathbf{G}_\Phi$. □

Наслідок 2.2. *Група оборотних верхніх трикутних матриць є підгрупою будь-якої групи Зеліска.* □

Властивість 2.3. *Елемент* $\frac{\varphi_i}{\varphi_j}$ *є добутком часток першої піддіагоналі матриці* H_1*, які знаходяться вище та правіше:*

$$\begin{matrix} h_{jj} & * & * & & * \\ \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} & h_{j+1.j+1} & * & & * \\ \vdots & \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_{j+1}} & h_{j+2.j+2} & & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} & \ldots & \ldots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} & h_{ii} \end{matrix}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}\frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_{j+1}} \cdots \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}.$$

□

Наслідок 2.3. *Якщо*

$$\left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_j}\right) = 1,$$

то елемент σ взаємно простий з усіма частками $\frac{\varphi_p}{\varphi_q}$ матриці H_1, що окреслені прямокутним трикутником з вершинами $(j+1, j)$, $(i, i-1)$, (i, j). □

Властивість 2.4. *Елемент $\frac{\varphi_i}{\varphi_j}$, $i > j$, є дільником всіх елементів матриці H_1, що окреслені прямокутником з вершинами $(i, 1)$, (i, j), (t, j), $(t, 1)$:*

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\varphi_i}{\varphi_1}h_{i1} & \frac{\varphi_i}{\varphi_2}h_{i2} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_j}h_{ij} \\
\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_1}h_{i+1.1} & \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_2}h_{i+1.2} & \dots & \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j}h_{i+1.j} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\varphi_t}{\varphi_1}h_{t1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2}h_{t2} & \dots & \frac{\varphi_t}{\varphi_j}h_{tj}.
\end{array}$$

Тобто

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} | \frac{\varphi_{i+p}}{\varphi_{j-q}} h_{i+p.j-q}, \; p = 0, 1, \; \dots \; , n-i, \;\; q = 0, 1, \; \dots \; , j-1.$$

Доведення. Зваживши на властивість 2.3, доведення цього твердження не викликає жодних труднощів. □

Властивість 2.5. *Нехай*

$$\sigma | \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad \left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}}\right) = 1,$$

Тоді

1) *елемент σ ділить всі елементи матриці H_1, що окреслені прямокутником з вершинами $(j+1, 1)$, $(j+1, j)$, (n, j), $(n, 1)$. Тобто*

$$\sigma | \frac{\varphi_{j+1+p}}{\varphi_{j-q}}, \; p = 0, 1, \; \dots \; , n-j-1, \;\; q = 0, 1, \; \dots \; , j-1, \;\; j+1+p > j-q.$$

2) *елемент σ взаємно простий з усіма частками $\frac{\varphi_p}{\varphi_q}$ матриці H_1, що окреслені прямокутним трикутником з вершинами $(j+2, j+1)$, $(i, i-1)$, $(i, j+1)$. Тобто*

$$\left(\sigma, \frac{\varphi_{i-s}}{\varphi_{j+t}}\right) = 1, \; s = 0, 1, \; \dots \; , i-j-2, \;\; t = 1, 2, \; \dots \; , i-j-1, \; i-s > j+t,$$

$$\begin{matrix} \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} & * & * & \dots & * \\ \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_j} & \frac{\varphi_{j+2}}{\varphi_{j+1}} & * & \dots & * \\ \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_j} & \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_{j+1}} & \frac{\varphi_{j+3}}{\varphi_{j+2}} & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+2}} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} & * & * & \dots & * \end{matrix}.$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}} \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j},$$

то, зваживши на те, що

$$\sigma | \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad \left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}}\right) = 1,$$

отримуємо, що $\sigma | \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}$. Використавши властивість 2.4, завершуємо розгляд випадку 1). Випадок 2) одержується з наслідку 2.3. □

Об'єднуючи результати останніх двох тверджень, отримуємо.

Наслідок 2.4. *Нехай*

$$\sigma | \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad \left(\sigma, \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_j}\right) = \left(\sigma, \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}}\right) = 1.$$

Тоді $j = i - 1$. *Тобто* $\sigma | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$. □

2.3. Нижні унітрикутні перетворювальні матриці

Як було зауважено в попередньому підрозділі, множина $\mathbf{P}_B$ – лівих перетворювальних матриць матриці $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$ є класом суміжності повної лінійної групи за групою $\mathbf{G}_\Phi$. Вкажемо умови, за яких у цій множині існує нижня унітрикутна матриця.

Через $A_{(i)}$ позначатимемо підматрицю матриці $A = \|a_{ij}\|_1^n \in M_n(R)$ вигляду

$$A_{(i)} = \begin{Vmatrix} a_{ii} & a_{i.i+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1.i} & a_{i+1.i+1} & \dots & a_{i+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni} & a_{n.i+1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

$i = 1, \dots, n$.

Лема 2.1. *Нехай* $P = \|p_{ij}\|_1^n$ *– оборотна матриця і* $HP = Q = \|q_{ij}\|_1^n$, *де* $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $\det \Phi \neq 0$. *Тоді*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \left|P_{(i+1)}\right|\right) = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \left|Q_{(i+1)}\right|\right),\ \ i = 1,\ \dots\ ,\ n-1.$$

Доведення. На підставі теореми 2.6 підматриця матриці H, що складена з m її останніх рядків має вигляд

$$K_s = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \frac{\varphi_s}{\varphi_1}h_{s1} & \dots & \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}h_{s.s-1} & h_{ss} & \dots & h_{s.n-1} & h_{sn} \\ \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_1}h_{s+1.1} & \dots & \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_{s-1}}h_{s+1.s-1} & \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_s}h_{s+1.s} & \dots & h_{s+1.n-1} & h_{s+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{s-1}}h_{n.s-1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_s}h_{ns} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n.n-1} & h_{n\,n} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\|\ H_s' \quad H_s\ \right\|,$$

де $s = n - m + 1$. Зауваживши, що

$$\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}} \Big| \frac{\varphi_{s+k}}{\varphi_{s-1-l}},$$

отримуємо, що всі елементи матриці H_s' діляться на $\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$. Отже, всі мінори порядку m матриці K_s, за винятком мінора $|H_s|$, діляться на $\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$. Звідси

$$\left(|H_s|, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = 1. \tag{2.4}$$

Оскільки

$$Q_{(s)} = K_s \left\| \begin{array}{cccc} p_{1s} & p_{1.s+1} & \dots & p_{1n} \\ p_{2s} & p_{2.s+1} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{ns} & p_{n.s+1} & \dots & p_{nn} \end{array} \right\|,$$

то згідно з формулою Біне-Коші

$$|Q_{(s)}| = \sum_j |H_j||P_j| + |H_s||P_{(s)}|,$$

де $\sum_j |H_j||P_j|$ – сума добутків всеможливих мінорів m-го порядку матриці K_s, за винятком мінору $|H_s|$, на відповідні мінори матриці P. Оскільки всі мінори $|H_j|$ діляться на $\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$, то

$$|Q_{(s)}| = \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}d + |H_s||P_{(s)}|,$$

де $d \in R$. Тоді, зваживши на рівність (2.4), отримуємо

$$\left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, |Q_{(s)}|,\right) = \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, |H_s||P_{(s)}|\right) = \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, |P_{(s)}|\right).$$

□

Теорема 2.7. *Нехай* $S \in \mathrm{GL}_n(R)$ *і* Φ *– неособлива* d*-матриця. Для того, щоб у групі* $\mathbf{G}_\Phi$ *існувала така матриця* H*, що* HS *– нижня унітрикутна матриця, необхідно та достатньо, щоб*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ |S_{(i+1)}|\right) = 1,\ \ i = 1,\ \dots\ ,\ n-1. \tag{2.5}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $HS = T = \|t_{ij}\|_1^n$ – нижня унітрикутна матриця. Тоді на підставі леми 2.1

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ |S_{(i+1)}|\right) = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ t_{i+2.i+1} & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & & \\ t_{n.i+1} & t_{n.i+2} & \dots\ \ t_{n.n-1} & 1 \end{vmatrix}\right) = 1,$$

$i = 1,\ \dots\ ,\ n-1.$

Достатність. Нехай $S = \|s_{ij}\|_1^2$ – матриця над R. Оскільки $(s_{12},\ s_{22}) = 1$ і

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ s_{22}\right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}s_{12},\ s_{22}\right) = 1.$$

Тоді існують такі $u_1,\ u_2$, що

$$s_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_1 + s_{22}u_2 = 1.$$

Це означає, що матриця

$$K = \left\| \begin{matrix} s_{22} & -s_{12} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_1 & u_2 \end{matrix} \right\|$$

є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді

$$KS = \left\| \begin{matrix} d & 0 \\ c & 1 \end{matrix} \right\|.$$

З оборотності матриці KS випливає, що $d \in U(R)$. Тому матриця $H = \mathrm{diag}(d^{-1},\ 1)K$ і буде шуканою. Таким чином, твердження теореми правильне для матриць другого порядку.

Припустимо правильність цього твердження для всіх матриць порядку, меншого за n, і розглянемо оборотну матрицю $S = \|s_{ij}\|_1^n$. З рівностей (2.5) випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ (s_{n.i+1}, s_{n.i+2}, \dots, s_{nn})\right) = 1,$$

$i = 1, \ \dots \ , \ n-1$. Отже, зокрема,

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \ (s_{n2}, s_{n3}, \dots, s_{nn})\right) = 1.$$

Також

$$(s_{n1}, \ (s_{n2}, s_{n3}, \dots, s_{nn})) = 1.$$

Тому

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} s_{n1}, \ (s_{n2}, s_{n3}, \dots, s_{nn})\right) = \left(\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} s_{n1}, s_{n2}\right), \ (s_{n3}, \dots, s_{nn})\right) = 1.$$

Зваживши на те, що

$$\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \ (s_{n3}, \dots, s_{nn})\right) = 1,$$

отримуємо

$$\left(\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1} s_{n1}, \frac{\varphi_3}{\varphi_2} s_{n2}\right), \ (s_{n3}, \dots, s_{nn})\right) = 1.$$

Покроково продовжуючи описаний процес, дістанемо

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} s_{1n}, \ \dots, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} s_{n-2.n}, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} s_{n-1.n}, \ s_{nn}\right) = 1.$$

У кільці R існують такі $u_{n1}, \ u_{n2}, \ \dots, \ u_{nn}$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_{n1} s_{1n} + \ \dots \ + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n.n-1} s_{n-1.n} + u_{nn} s_{nn} = 1.$$

Це означає, що рядок

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n.n-1} & u_{nn} \end{array} \right\|$$

унімодулярний. Скориставшись теоремою 1.1, доповнимо цей рядок до оборотної матриці вигляду

$$H_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1.n-2} & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & u_{n-2.n-2} & u_{n-2.n-1} & u_{n-2.n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} u_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} u_{n.n-2} & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n.n-1} & u_{nn} \end{array} \right\|,$$

яка є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді

$$H_1 S = \left\| \begin{array}{cc} S_1 & \mathbf{q} \\ \mathbf{p} & 1 \end{array} \right\|,$$

де $\mathbf{p} = \left\| \begin{array}{cccc} s'_{n1} & s'_{n2} & \ldots & s'_{n.n-1} \end{array} \right\|$, $\mathbf{q} = \left\| \begin{array}{cccc} s'_{1n} & s'_{2n} & \ldots & s'_{n-1.n} \end{array} \right\|^T$. Звідси

$$\underbrace{\left\| \begin{array}{cc} I & -\mathbf{q} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\|}_{H_2} H_1 S = \left\| \begin{array}{cc} S_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{p} & 1 \end{array} \right\|,$$

де $S_2 = \left\| \, s''_{ij} \, \right\|_1^n$. Оскільки $H_2 H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, то згідно з лемою 2.1

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \left| \begin{array}{cccc} s''_{i+1.i+1} & \ldots & s''_{i+1.n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s''_{n-1.i+1} & \ldots & s''_{n-1.n-1} & 0 \\ s'_{n.i+1} & \ldots & s'_{n.n-1} & 1 \end{array} \right| \right) = 1,$$

$i = 1, \ldots, n-1$. Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \left| \begin{array}{ccc} s''_{i+1.i+1} & \ldots & s''_{i+1.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s''_{n-1.i+1} & \ldots & s''_{n-1.n-1} \end{array} \right| \right) = 1, \quad i = 1, \ldots, n-2.$$

Розглянемо матрицю $\Phi_{n-1} = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Згідно з припущенням індукції, в групі $\mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$ існує така матриця K, що KS_2 – нижня унітрикутна матриця. Тоді

$$\left\| \begin{array}{cc} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\| H_2 H_1 S$$

також буде нижньою унітрикутною матрицею. І для завершення доведення потрібно лише зауважити, що $\left\| \begin{array}{cc} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\|$ є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$. $\square$

Теорема 2.8. *Нехай неособлива матриця B має форму Сміта Φ і $S \in \mathbf{P}_B$. Множина $\mathbf{P}_B$ містить нижню унітрикутну матрицю тоді і тільки тоді, коли матриця S задовольняє рівність* (2.5).

Доведення випливає з властивості 2.2 та теореми 2.7. $\square$

2.4. Структура перетворювальних матриць одного класу матриць

Як випливає з доведення теореми 2.3, головну роль у встановленні факту, що R є кільцем елементарних дільників, відіграють матриці другого порядку, в яких один із елементів є нуль. Вкажемо явний вигляд перетворювальних матриць для матриць власне такого вигляду.

Теорема 2.9. *Нехай* $A = \left\| \begin{array}{cc} b & c \\ a & 0 \end{array} \right\|$ *— матриця над кільцем елементарних дільників* R, *причому* $(a, b, c) = 1$. *Тоді перетворювальними матрицями* P *та* Q *матриці* A *є матриці*

$$P = \left\| \begin{array}{cc} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{array} \right\|, \; Q = \left\| \begin{array}{cc} \alpha & c\beta \\ n & -b\beta - am \end{array} \right\|,$$

де

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1. \tag{2.6}$$

Доведення. Оскільки $(a, b, c) = 1$, то на підставі наслідку 2.1 у кільці R існують такі m, n, α, β, що виконується рівність (2.6). Тоді

$$\left\| \begin{array}{cc} b & c \\ a & 0 \end{array} \right\| = \underbrace{\left\| \begin{array}{cc} cn + \alpha b & -m \\ \alpha a & \beta \end{array} \right\|}_{M} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{array} \right\| \underbrace{\left\| \begin{array}{cc} \beta b + am & \beta c \\ n & -\alpha \end{array} \right\|}_{N}.$$

Зауваживши, що $M^{-1} = P$ та $N^{-1} = Q$, завершуємо доведення. □

Наслідок 2.5. *Якщо* $c = 0$ *і* $am + \; cn = 1$, *то перетворювальними матрицями* P *та* Q *матриці* A *будуть матриці*

$$P = \left\| \begin{array}{cc} 1 & m \\ -a & cn \end{array} \right\|, \; Q = \left\| \begin{array}{cc} 1 & c \\ n & -am \end{array} \right\|. \qquad \square$$

Природно, постає питання, чи для матриці A існують перетворювальні матриці, які мають іншу структуру. Відповідь негативна.

Теорема 2.10. *Всі матриці з множини* $\mathbf{P}_A$ *мають вигляд*

$$\left\| \begin{array}{cc} \beta_1 & m_1 \\ -\alpha_1 a & \alpha_1 b + cn_1 \end{array} \right\|,$$

де

$$a(m_1\alpha_1) + b(\alpha_1\beta_1) + c(\beta_1 n_1) = e \in U(R).$$

Доведення. На підставі властивості 2.2 $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Phi P$, де група $\mathbf{G}_\Phi$ складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ ack_{21} & k_{22} \end{array} \right\|.$$

За матрицю P візьмемо матрицю, отриману в теоремі 2.9. Тобто

$$P = \left\| \begin{array}{cc} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{array} \right\|,$$

де
$$a(m\alpha)+b(\alpha\beta)+c(\beta n)=1.$$
І нехай $P_1\in\mathbf{P}_A$. Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця
$$H=\left\|\begin{array}{cc} h_{11} & h_{12}\\ ach_{21} & h_{22}\end{array}\right\|,$$
що $P_1=HP$. Отже,
$$P_1=\left\|\begin{array}{cc} h_{11} & h_{12}\\ ach_{21} & h_{22}\end{array}\right\|\left\|\begin{array}{cc} \beta & m\\ -\alpha a & \alpha b+cn\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc} \beta_1 & m_1\\ -\alpha_1 a & \alpha_1 b+cn_1\end{array}\right\|,$$
де
$$\alpha_1=c\beta h_{21}+\alpha h_{22},\ \ \beta_1=\beta h_{11}-\alpha\beta a h_{22},$$
$$m_1=mh_{11}+h_{22}(\alpha b+cn),\ n_1=nh_{22}+h_{21}(\beta b+am).$$
Оскільки $\det H=e\in U(R)$, то і $\det P_1=e$. Тому
$$a(m_1\alpha_1)+b(\alpha_1\beta_1)+c(\beta_1 n_1)=e. \qquad \square$$

Аналогічне твердження можна сформулювати щодо структури правих перетворювальних матриць матриці A.

2.5. Деякі властивості елементів кілець елементарних дільників

У теоремі 1.1 доведено, що над кільцем Безу R кожний примітивний рядок $\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c\end{array}\right\|$ доповнюється до оборотної матриці вигляду
$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c\\ 0 & * & *\\ * & * & *\end{array}\right\|.$$

Над кільцем елементарних дільників цей результат можна дещо посилити.

Теорема 2.11. *Для того, щоб кільце Безу R було кільцем елементарних дільників, необхідно та достатньо, щоб кожний примітивний рядок $\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c\end{array}\right\|$ доповнювався до оборотної матриці вигляду*
$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c\\ 0 & * & *\\ * & * & 0\end{array}\right\|.$$

Доведення. Оскільки $(a, b, c) = 1$, то існують такі m, n, α, β, що

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1.$$

Тоді шуканою буде матриця

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & -n & \alpha \\ \beta & -m & 0 \end{Vmatrix}.$$

Зворотні міркування є очевидними. □

Зауважимо, що на підставі властивості 1.18 над кільцями Безу стабільного рангу 1,5 кожний примітивний рядок $\begin{Vmatrix} a & b & c \end{Vmatrix}$, $c \neq 0$, доповнюється до оборотної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ * & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{Vmatrix}.$$

Наступна теорема формулює ту властивість елементів кільця Безу R, за якої R стає кільцем елементарних дільників. Для доведенням цього результату потрібне наступне твердження.

Лема 2.2. *Нехай* $A = \|a_{ij}\|_1^3$, $\det A = 1$ *і*

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Для того, щоб $\det B = 1$*, необхідно та достатньо, щоб існували такі елементи* s_2*,* s_3*, що*

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \end{Vmatrix} A.$$

Доведення. Необхідність. Оскільки

$$\det B = b_{11} \det \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} - b_{12} \det \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{Vmatrix} + b_{13} \det \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix} = 1,$$

то

$$BA^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} A.$$

Тобто

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| A.$$

Достатність. Оскільки

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{matrix} \right\| A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| AA^{-1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| E = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\|,$$

то

$$BA^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

З цієї рівності випливає, що $\det B = 1$. □

Теорема 2.12. *Для того, щоб кільце Безу R було кільцем елементарних дільників, необхідно та достатньо, щоб для кожної четвірки таких елементів a_1, a_2, b_1, b_2, що*

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) = 1,$$

існував такий елемент r, що

$$b_1 + rb_2 = \alpha\beta,$$

де

$$(\alpha, \beta) = (a_1, \alpha) = (a_2, \beta) = 1.$$

Доведення. Необхідність. У кільці R існують такі v_1, v_2, u_1, u_2, що

$$a_1v_1 - a_2v_2 = 1,$$

$$b_1u_1 - b_2u_2 = 1.$$

Отже, матриця

$$\left\| \begin{matrix} u_2v_2 & b_1 & u_2v_1 \\ u_1v_2 & b_2 & u_1v_1 \\ a_1 & 0 & a_2 \end{matrix} \right\| = A$$

є унімодулярною. Тобто

$$\det A = a_2b_2(u_2v_2) - \begin{vmatrix} u_1v_2 & u_1v_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} b_1 - a_1b_2(u_2v_1) = 1.$$

Позначимо

$$a = u_2v_2,\ b = \begin{vmatrix} u_1v_2 & u_1v_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},\ c = v_1u_2.$$

Очевидно, що
$$(a, b, c) = 1.$$
Тоді існують такі елементи α, β, m, n, що
$$a(m\alpha) - b(\alpha\beta) - c(\beta n) = 1.$$
Звідси випливає, що
$$(\alpha, \beta) = 1.$$
Таким чином, матриця
$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha m & \alpha\beta & \beta n \\ u_1v_2 & b_2 & u_1v_1 \\ a_1 & 0 & a_2 \end{array} \right\| = B$$
знову є унімодулярною. На підставі леми 2.2 існують такі елементи $s_2,\ s_3$, що
$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha m & \alpha\beta & \beta n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & s_2 & s_3 \end{array} \right\| A.$$
Тобто
$$b_1 + s_2 b_2 = \alpha\beta.$$
Оскільки
$$1 = \det B = a_1(-\beta n b_2) + a_1(\alpha\beta u_1 v_1) + \alpha \left(\left| \begin{array}{cc} m & \beta \\ u_1v_2 & b_2 \end{array} \right| a_2 \right),$$
то
$$(\alpha, a_1) = 1.$$
Аналогічно показуємо, що
$$(\beta, a_2) = 1.$$
Поклавши $r = s_2$, завершуємо доведення необхідності.

Достатність. Нехай a, b, c – взаємно прості елементи кільця R, причому $(a, c) \neq 0$. Розглянемо матрицю
$$\left\| \begin{array}{ccc} bu & (a,c) & bv \\ -\frac{c}{(a,c)} & 0 & \frac{a}{(a,c)} \end{array} \right\|,$$
де
$$\frac{a}{(a,c)}u + \frac{c}{(a,c)}v = -1.$$
Для елементів a, b, c існують такі m_1, m_2, m_3, що
$$am_1 + bm_2 + cm_3 = 1.$$

Отже,

$$\det \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ bu & (a,c) & bv \\ -\frac{c}{(a,c)} & 0 & \frac{a}{(a,c)} \end{array} \right\|}_{A} = \det A = 1.$$

Позначимо

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\|.$$

Очевидно, що

$$(a_{12}, a_{22}) = (a_{31}, a_{33}) = 1.$$

Згідно з припущенням існує такий елемент r, що

$$a_{12} + ra_{22} = \alpha\beta,$$

де

$$(\alpha, \beta) = (a_{31}, \alpha) = (a_{33}, \beta) = 1. \tag{2.7}$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} + ra_{21} & \alpha\beta & a_{13} + ra_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} a'_{11} & \alpha\beta & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\|.$$

Розглянемо систему конгруенцій

$$\begin{cases} a_{31}x \equiv a'_{11} (mod \alpha), \\ a_{33}x \equiv a'_{13} (mod \beta). \end{cases}$$

На підставі рівностей (2.7) ця система має розв'язок $x = s$. Тобто

$$a_{31}s - a'_{11} = -\alpha m,$$

$$a_{33}s - a'_{13} = -\beta n.$$

Звідси

$$a'_{11} + a_{31}(-s) = \alpha m,$$

$$a'_{13} + a_{33}(-s) = \beta n.$$

Отже,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} a'_{11} & \alpha\beta & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} m\alpha & \alpha\beta & \beta n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{array} \right\| = B.$$

Зауваживши, що

$$1 = \det B = a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n)$$

та скориставшись наслідком 2.1, завершуємо розгляд цього випадку.

Якщо $a = c = 0$, то $b \in U(R)$. Тоді достатньо покласти

$$\alpha = b^{-1},\ \beta = m = n = 1.$$

Доведення завершене. □

2.6. Група Зеліска та стабільний ранг кілець

Відомо [74]–[76], що повна лінійна група як комутативного, так і некомутативного кільця R є добутком групи верхніх трикутних матриць, груп нижніх та верхніх унітрикутних матриць тоді і тільки тоді, коли R є кільцем Ерміта стабільного рангу 1. Вкажемо подібні зв'язки, у випадку комутативних кілець стабільного рангу 1,5.

Нагадаємо, що комутативне кільце R має стабільний ранг 1,5, якщо з умови $(a, b, c) = 1$, $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ випливає існування такого $r \in R$, що

$$(a + br, c) = 1.$$

Позначимо через $U_n^{up}(R)$ та $U_n^{lw}(R)$ групи верхніх та нижніх унітрикутних $n \times n$ матриць над R, відповідно.

Теорема 2.13. *Нехай R – комутативне кільце Безу, $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособлива d-матриця. Наступні умови є еквівалентними:*

1) *R має стабільний ранг $1, 5$;*
2) *$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Phi U_2^{lw}(R) U_2^{up}(R)$ для всіх матриць Φ;*
3) *$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi U_n^{lw}(R) U_n^{up}(R)$ для всіх матриць Φ та для кожного $n \geq 2$.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^2 \in \mathrm{GL}_2(R)$. Тоді

$$(a_{21},\ a_{22}) = 1 \ \Rightarrow\ \left(a_{21},\ a_{22},\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

У кільці R існує таке r, що

$$\left(a_{22} + a_{21}r,\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Розглянемо матрицю $AU = \|a'_{ij}\|_1^2$, де

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки

$$\left(a'_{22}, \ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) = 1,$$

то на підставі теореми 2.7 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $HAU = V$ – нижня унітрикутна матриця. Тоді $A = H^{-1}VU^{-1}$. Таким чином,

$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Phi U_2^{lw}(R) U_2^{up}(R).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай $(a,b,c) = 1, \ \ abc \neq 0$. Маємо

$$a = (a,b)a_1, \ \ b = (a,b)b_1, \ \ (a_1, b_1) = 1.$$

Існують такі u, v, що

$$a_1 u + b_1 v = 1.$$

Отже, матриця

$$\left\| \begin{matrix} u & -v \\ b_1 & a_1 \end{matrix} \right\| = A$$

– оборотна. Розглянемо d-матрицю

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{matrix} \right\| = \Phi.$$

Згідно з умовою теореми, матриця A є добутком трьох матриць: $A = HUV$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi, \ \ U \in U_2^{lw}(R), \ \ V \in U_2^{up}(R)$. Зауваживши, що

$$H^{-1} = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ch_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|, \ \ U = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{matrix} \right\|, \ \ V^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

отримуємо

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{matrix} \right\| = H^{-1}AV^{-1} = H^{-1} \left(\left\| \begin{matrix} u & -v \\ b_1 & a_1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ch_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u & ur - v \\ b_1 & b_1 r + a_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} * & * \\ * & ch_{21}(ur - v) + h_{22}(b_1 r + a_1) \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$ch_{21}(ur - v) + h_{22}(b_1 r + a_1) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$(b_1 r + a_1, c) = 1.$$

Врахувавши те, що

$$((a,b),c)=1,$$

дістанемо

$$((a,b)(b_1r+a_1),c)=(a+br,c)=1.$$

А це означає, що кільце R має стабільний ранг 1,5.

Випадок, коли $a=0$ чи $b=0$, є очевидним.

3) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3). Для матриць другого порядку наше твердження правильне (див. доведення умови 2)). Припустимо його правильність для матриць порядку, меншого за n. Оскільки 2) $\Leftrightarrow$ 1), то R є кільцем Безу стабільного рангу 1,5. Нехай $A=\|a_{ij}\|_1^n\in\ \mathrm{GL}_n(R)$. Тоді

$$(a_{n1},\ \dots,\ a_{nn})=1\ \ \Rightarrow\ \ \left(a_{n1},\ \dots,\ a_{nn},\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)=1.$$

Згідно з властивістю 1.19 існують такі $r_1,\ \dots\ ,\ r_{n-1}$, що

$$\left(a_{nn}+a_{n.n-1}r_{n-1}+\ldots+a_{n1}r_1,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)=1.$$

Розглянемо матрицю $AU_n=\|a'_{ij}\|_1^n$, де

$$U_n=\left\|\begin{array}{cccc}1 & & 0 & r_1\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & & 1 & r_{n-1}\\ 0 & \ldots & 0 & 1\end{array}\right\|.$$

Оскільки

$$((a'_{n1},\ \dots,\ a'_{n.n-1}),\ a'_{nn})=1$$

і

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\ a'_{nn}\right)=1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}(a'_{n1},\ \dots,\ a'_{n.n-1}),\ a'_{nn}\right)=1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}a'_{n1},\ \frac{\varphi_n}{\varphi_2}a'_{n2},\ \dots,\ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}a'_{n.n-1},\ a'_{nn}\right)=1.$$

Використавши методи, що були використані при доведенні достатності теореми 2.7, знайдемо в групі $\mathbf{G}_\Phi$ таку матрицю H_n, що

$$H_nAU_n=\left\|\begin{array}{cc}A_1 & \mathbf{0}\\ A_2 & 1\end{array}\right\|.$$

Розглянемо d-матрицю $\Phi_{n-1} = \mathrm{diag}\,(\varphi_1, \ \ldots, \varphi_{n-1})$. Оскільки $A_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(R)$, то згідно з припущенням

$$A_1 = H_{n-1}V_{n-1}U_{n-1},$$

де $H_{n-1} \in \mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$, $V_{n-1} \in U^{lw}_{n-1}(R)$, $U_{n-1} \in U^{up}_{n-1}(R)$. Отже,

$$H_nAU_n = \left\| \begin{matrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} H_{n-1}V_{n-1}U_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_2 & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \underbrace{\left\| \begin{matrix} H_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|}_{M} \underbrace{\left\| \begin{matrix} V_{n-1} & \mathbf{0} \\ A_2U^{-1}_{n-1} & 1 \end{matrix} \right\|}_{S} \underbrace{\left\| \begin{matrix} U_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|}_{N} = MSN.$$

Таким чином, матрицю A можна записати у вигляді

$$A = (H_n^{-1}M)S(NU_n^{-1}).$$

Зауваживши, що $H_n^{-1}M \in \mathbf{G}_\Phi$, $S \in U^{lw}_n(R)$, $NU_n^{-1} \in U^{up}_n(R)$, отримуємо

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi U^{lw}_n(R)U^{up}_n(R).$$

Теорему доведено. □

2.7. Кільця матриць стабільного рангу 1,5

Усі кільця стабільного рангу 1,5, які розглядались були комутативними кільцями без дільників нуля. В цьому підрозділі буде показано, що кільця матриць другого порядку над комутативними кільцями Безу стабільного рангу 1,5 мають аналогічний стабільний ранг.

Нехай A, B – 2×2 матриці над кільцем елементарних дільників R, які мають, відповідно, форми Сміта

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ \varepsilon_2), \ \ \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ \delta_2),$$

$P_A \in \mathbf{P}_A, \ P_B \in \mathbf{P}_B$, причому $P_BP_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 = S$.

Лема 2.3. *Елемент* $((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$ *є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць* P_B *та* P_A.

Доведення. 1). Нехай A, B – неособливі матриці і F_A та F_B – інші їхні ліві перетворювальні матриці. Тобто $F_A \in \mathbf{P}_A$, $F_B \in \mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$ та $H_B \in \mathbf{G}_\Delta$, що $F_A = H_AP_A$, $F_B = H_BP_B$. Позначимо $F_BF_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Для доведення леми потрібно показати, що

$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = ((\varepsilon_2, \delta_2), s'_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_B = \left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ s_{21} \end{array} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}.$$

Розглянемо

$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)) = \left((\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21})[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2) \right).$$

Оскільки

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{(\varepsilon_2, \delta_2)} = \frac{\delta_2 [\varepsilon_1, \delta_1]}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то

$$(\varepsilon_2, \delta_2) \mid \frac{\delta_2}{\delta_1} [\varepsilon_1, \delta_1].$$

Отже,

$$\left((\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21})[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2) \right) = (h_{22} s_{21} [\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)).$$

Із оборотності матриці H_B випливає, що

$$\left(h_{22}, \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) = 1.$$

Отже, і

$$(h_{22}, (\varepsilon_2, \delta_2)) = 1.$$

Таким чином,

$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)).$$

Розглянемо $S H_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{array} \right\|,$$

то

$$t_{21} = \left\| \begin{array}{cc} s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nu_{21} \end{array} \right\| = s_{21} \nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nu_{21} s_{22}.$$

Зауваживши, що
$$(\varepsilon_2, \delta_2) \mid \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$$
та міркуючи аналогічно, отримуємо
$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2)) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], (\varepsilon_2, \delta_2))\,.$$
Зваживши на асоціативність кільця $M_2(R)$, переконуємось у правильності нашого твердження.

2). Нехай матриця A – неособлива і $B \sim \operatorname{diag}(\delta_1,\ 0)$. Тоді
$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\varepsilon_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$
Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ та
$$H_B = \left\| \begin{matrix} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|,$$
що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Для доведення леми потрібно показати, що
$$(\varepsilon_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\varepsilon_2, s'_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$
Розглянемо добуток матриць
$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$
де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Оскільки
$$H_B = \left\| \begin{matrix} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|,$$
то
$$k_{21} = \left\| \begin{matrix} 0 & e_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} s_{11} \\ s_{21} \end{matrix} \right\| = e_2 s_{21}.$$
Розглянемо
$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2) = (e_2 s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2)\,.$$
Оскільки e_2 оборотний елемент кільця, то
$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2)\,.$$

Розглянемо $S H_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Оскільки
$$H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$t_{21} = \left\| \begin{array}{cc} s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21} \end{array} \right\| = s_{21}\nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21}s_{22}.$$

Зауваживши, що

$$\varepsilon_2 \mid \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$$

та міркуючи аналогічно, як у випадку 1), отримуємо

$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \varepsilon_2)\,.$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_2(R)$, завершуємо розгляд цього випадку.

3). Нехай матриця B неособлива і $A \sim \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ 0)$. Тоді

$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\delta_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують такі

$$H_A = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & l_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|, \quad H_B \in \mathbf{G}_\Delta,$$

що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Для доведення леми потрібно показати, що

$$(\delta_2, s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = (\delta_2, s'_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_B = \left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ s_{12} \end{array} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21}s_{11} + h_{22}s_{12}.$$

Зауваживши, що

$$\delta_2 \mid \frac{\delta_2}{\delta_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$$

та міркуючи аналогічно, як і у випадку 1), отримуємо

$$(k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2)\,.$$

Розглянемо $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & -l_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$

то

$$t_{21} = \left\| \begin{array}{cc} s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} e_1 \\ 0 \end{array} \right\| = e_1 s_{21}.$$

Розглянемо

$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2) = (e_1 s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2).$$

Оскільки e_1 оборотний елемент кільця, то

$$(t_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2) = (s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1], \delta_2).$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_2(R)$, завершуємо розгляд цього випадку.

4). Нехай

$$A \sim \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad B \sim \left\| \begin{array}{cc} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

і F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці цих матриць. Тоді існують такі

$$H_A = \left\| \begin{array}{cc} e'_1 & v_{12} \\ 0 & e'_2 \end{array} \right\| \quad H_B = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|,$$

що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2 = S'$. Для доведення леми потрібно показати, що s_{21} та s'_{21} відрізняються на оборотний елемент кільця. Розглянемо добуток матриць

$$S' = F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Запишемо ці матриці в явному вигляді, тобто

$$\left\| \begin{array}{cc} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} e_1'^{-1} & * \\ 0 & e_2'^{-1} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} s''_{11} & s''_{12} \\ s_{21} u & s''_{22} \end{array} \right\|,$$

де $u = e_2 e_2'^{-1}$ – оборотний елемент кільця R. Отже, $s'_{21} = s_{21} u$, що і потрібно довести. □

Теорема 2.14. *Формою Сміта матриці* $(A,\ B)_l$ *є матриця*

$$\operatorname{diag}\left((\varepsilon_1,\ \delta_1),\ \ (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1] s_{21})\right).$$

Доведення. Розглянемо матрицю $\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\|$. На підставі теореми 1.10 існує така оборотна матриця U, що

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

причому $D = (A,\ B)_l$. Виконуються рівності

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| = P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} P_B P_A^{-1}\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Домножимо цю рівність справа на U :

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left(P_B^{-1}\right) \left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \left(\left\| \begin{matrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| U \right).$$

Отже,

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

– форма Сміта цих матриць. На підставі теореми 2.2 ν_1 дорівнює н.с.д. елементів матриць $S\mathrm{E}$, Δ або ж матриці D. Також

$$\nu_2 = \frac{\mu_2}{\nu_1},$$

де μ_2 н.с.д. мінорів другого порядку цих матриць. Звідси випливає, що формою Сміта матриці $D = (A,\ B)_l$ є матриця $\mathrm{diag}(\nu_1,\ \nu_2)$. Оскільки н.с.д. елементів матриці $S\mathrm{E}$ є ε_1, а Δ є δ_1, то

$$\nu_1 = (\varepsilon_1, \delta_1).$$

Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} s_{11}\varepsilon_1 & s_{12}\varepsilon_2 & \delta_1 & 0 \\ s_{21}\varepsilon_1 & s_{22}\varepsilon_2 & 0 & \delta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Зауваживши, що s_{ij}-ті є елементами оборотної матриці S, отримуємо

$$\mu_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2 s_{11},\ \varepsilon_2\delta_2 s_{12},\ \varepsilon_1\delta_1 s_{21},\ \varepsilon_2\delta_1 s_{22}) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2\left(s_{11},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}s_{12}\right),\ \varepsilon_1\delta_1\left(s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}s_{22}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2\left(s_{11},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right),\ \varepsilon_1\delta_1\left(s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\left(s_{11},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right),\ s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}s_{11},\ \frac{\delta_2\varepsilon_2}{\delta_1\varepsilon_1},\ s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}s_{11},\ s_{21}\right),\ \left(\frac{\delta_2\varepsilon_2}{\delta_1\varepsilon_1},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1},\ s_{21},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= (\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \varepsilon_2\delta_1,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 s_{21}) =$$

$$= (\varepsilon_1,\ \delta_1)\left(\varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)},\ \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}\right),\ \delta_2\left(\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)},\ \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}\right),\ \frac{\varepsilon_1\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}s_{21}\right) =$$

$$= (\varepsilon_1,\ \delta_1)\left(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}\right).$$

Отже,

$$\nu_2 = \frac{\mu_2}{\nu_1} = \left(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}\right).$$

На завершення доведення зішлемося на лему 2.3, яка показує інваріантність виразу $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})$ стосовно вибору перетворювальних матриць P_B та P_A. □

Наслідок 2.6. *Для того, щоб* $(A,\ B)_l = I$*, необхідно та достатньо, щоб*

$$(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}) = 1.$$

Доведення. Для того, щоб $(A,\ B)_l = I$, необхідно та достатньо, щоб

$$(\varepsilon_1,\ \delta_1)\left(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}\right) = 1. \tag{2.8}$$

Оскільки $(\varepsilon_1,\ \delta_1)$ є дільником $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21})$, то рівність (2.8) рівносильна умові

$$(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s_{21}) = 1.$$ □

Наслідок 2.7. *Якщо* $\varepsilon_2 = 0$, $\delta_2 \neq 0$, *то* $(A,\ B)_l = I$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\delta_1 = 1 \ \text{ і } \ (\delta_2,\ \varepsilon_1 s_{21}) = 1. \qquad \square$$

Наслідок 2.8. *Якщо* ε_2, $\delta_2 = 0$, *то* $(A,\ B)_l = I$ *тоді і тільки тоді, коли* $\varepsilon_1\delta_1 s_{21}$ *є оборотним елементом кільця* R. $\square$

Наслідок 2.9. *Якщо* $(A,\ B)_l = I$ *і* $s_{21} = 0$, *то матриці* A, B *є неособливими, причому*

$$(\det A,\ \det B) = 1. \qquad \square$$

Теорема 2.15. *Нехай* A, $B \in M_2(R)$ *і принаймні одна із них є неособливою матрицею. Тоді в множині* $\boldsymbol{P}_B\boldsymbol{P}_A^{-1}$ *існує нижня унітрикутна матриця.*

Доведення. Залишимось у позначеннях теореми 2.6. Оскільки $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B$, $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\mathrm{E} P_A$, то

$$\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1} = \mathbf{G}_\Delta P_B(\mathbf{G}_\mathrm{E} P_A)^{-1} = \mathbf{G}_\Delta P_B P_A^{-1}\mathbf{G}_\mathrm{E} = \mathbf{G}_\Delta S\mathbf{G}_\mathrm{E}.$$

Таким чином, домножуючи матрицю $P_BP_A^{-1} = S$ зліва на елементи групи $\mathbf{G}_\Delta$ і справа на елементи групи $\mathbf{G}_\mathrm{E}$, залишаємося в межах множини $\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Нехай $\det\Delta \neq 0$. На підставі теореми 2.13

$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Delta U_2^{\mathrm{lw}}(R)U_2^{\mathrm{up}}(R).$$

Оскільки $S \in \mathrm{GL}_2(R)$, то

$$S = HUV,\ \ H \in \mathbf{G}_\Delta,\ \ U \in U_2^{\mathrm{lw}}(R),\ \ V \in U_2^{\mathrm{up}}(R).$$

Отже, $U = H^{-1}SV^{-1}$. Зауваживши, що $H^{-1} \in \mathbf{G}_\Delta$, $V^{-1} \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$, приходимо до висновку, що $U \in \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Нехай $\det \mathrm{E} \neq 0$. Тоді виконується рівність

$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\mathrm{E} U_2^{\mathrm{lw}}(R)U_2^{\mathrm{up}}(R).$$

Перейшовши до оборотних матриць, отримаємо

$$\mathrm{GL}_2(R) = U_2^{\mathrm{up}}(R)U_2^{\mathrm{lw}}(R)\mathbf{G}_\mathrm{E}.$$

Тобто

$$S = MNK,\ \ M \in U_2^{\mathrm{up}}(R),\ \ N \in U_2^{\mathrm{lw}}(R),\ \ K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}.$$

Отже, $N = M^{-1}SK^{-1}$. Оскільки $U_2^{\mathrm{up}}(R) \subset \mathbf{G}_\Delta$, то $M^{-1} \in \mathbf{G}_\Delta$. Зауваживши, що $K^{-1} \in U_2^{\mathrm{up}}(R)$, приходимо до висновку, що $N \in \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 2.16. *Нехай матриці* A, B *мають, відповідно, форми Сміта* E, Δ, *причому* $AB \sim \mathrm{E}\Delta$. *Тоді* $\boldsymbol{P}_{AB} \subseteq \boldsymbol{P}_A$.

Доведення. На підставі теореми 2.20 (див. с. 99)

$$AB = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}\, P_B^{-1}\mathrm{E}Q_B^{-1} \sim \mathrm{E}\Delta$$

тоді і тільки тоді, коли матрицю $Q_A^{-1}P_B^{-1}$ можна записати у вигляді $Q_A^{-1}P_B^{-1} = K_1K_2$, де $K_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}^T$, тобто $\mathrm{E}K_1 = L_1\mathrm{E}$, де $L_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ і $K_2 \in \mathbf{G}_{\Delta}$. Тоді

$$AB = P_A^{-1}\mathrm{E}(Q_A^{-1}P_B^{-1})\Delta Q_B^{-1} = P_A^{-1}\mathrm{E}K_1K_2\Delta Q_B^{-1} = (L_1^{-1}P_A)^{-1}\mathrm{E}\Delta(Q_BL_2^{-1})^{-1}.$$

Це означає, що $L_1^{-1}P_A \in \mathbf{P}_{AB}$. Отже, $\mathbf{P}_{AB} = \mathbf{G}_{\mathrm{E}\Delta}(L_1^{-1}P_A)$. У свою чергу $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A$. Зауваживши, що $L_1^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, отримуємо

$$\mathbf{G}_{\mathrm{E}}(L_1^{-1}P_A) = (\mathbf{G}_{\mathrm{E}}L_1^{-1})P_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A = \mathbf{P}_A.$$

Оскільки $\mathbf{G}_{\mathrm{E}\Delta} \subseteq \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то приходимо до висновку, що $\boldsymbol{P}_{AB} \subseteq \boldsymbol{P}_A$. □

Теорема 2.17. *Нехай* A, B – *ненульові взаємно прості зліва* 2×2 *матриці над кільцем Безу* R, *стабільного рангу* $1,5$. *Тоді, якщо матриця* A *особлива, то існує така матриця* T, *що*

$$A + BT \in \mathrm{GL}_2(R).$$

Якщо матриця A *неособлива, то для кожного фіксованого* $\varphi \neq 0$ *із* R *існує така матриця* F_φ, *що*

$$A + BF_\varphi \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{matrix} \right\|,$$

причому $(\mu,\ \varphi) = 1$.

Для доведення цієї теореми потрібні такі твердження.

Лема 2.4. *Матриці* $(A,\ B)_l$ *та* $P_B^{-1}(P_BP_A^{-1}\mathrm{E},\ \Delta)_l$ *асоційовані справа.*

Доведення. Позначимо $P_BP_A^{-1} = S$. Як було зауважено під час доведення теореми 2.14 $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = D$, де

$$\left\| \begin{matrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| U = \left\| \begin{matrix} D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

$U \in \mathrm{GL}_4(R)$. Домноживши цю рівність зліва на P_B^{-1}, отримуємо

$$\left\| \begin{matrix} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{matrix} \right\| \left(\left\| \begin{matrix} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{matrix} \right\| U \right) = \left\| \begin{matrix} P_B^{-1}D & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Тобто $(A,\ B)_l = P_B^{-1}D = P_B^{-1}(S\mathrm{E},\ \Delta)_l$. □

Лема 2.5. *Матриці* $P_B P_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta V$ *та* $A + B(Q_B V Q_A^{-1})$ *еквівалентні.*

Доведення. Дійсно,

$$A + B(Q_B V Q_A^{-1}) = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} + P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}(Q_B V Q_A^{-1}) =$$

$$= P_B^{-1}(P_B P_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta V)Q_A^{-1}. \qquad \square$$

Доведення теореми 2.17. Нехай $\det A = 0$. Тобто $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ 0)$. На підставі наслідку 2.7 матриця B має вигляд $B = P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}$, $\Delta = \mathrm{diag}(1,\ \delta_2)$. Нехай $V = \|v_{ij}\|_1^2$ – параметрична матриця.

Оскільки $(A,\ B)_l = I$, то з леми 2.4 випливає, що і $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = I$.

1). Нехай $\delta_2 \neq 0$. Згідно з теоремою 2.15 матриці $P_A,\ P_B$ можна вибрати так, що

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{matrix} \right\| = S.$$

Зауваживши, що $P_{S\mathrm{E}} = S^{-1}$ і $P_\Delta = I$, отримуємо

$$P_{S\mathrm{E}} P_\Delta^{-1} = S^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l = I$, то з наслідку 2.7

$$(\delta_2,\ -s\varepsilon_1) = 1 \Rightarrow (\delta_2,\ s\varepsilon_1) = 1.$$

Розглянемо рівність

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + v_{11} & v_{12} \\ s\varepsilon_1 + v_{21}\delta_2 & v_{22}\delta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Покладемо $v_{21}^0 = 0,\ v_{22}^0 = 1$. Існують такі m, n, що

$$m\delta_2 - ns\varepsilon_1 = 1.$$

Покладемо $v_{11}^0 = m - \varepsilon_1, \quad v_{12}^0 = n$. Матрицю $\|v_{ij}^0\|_1^2$ позначимо через V^0. Отримана матриця $S\mathrm{E} + \Delta V^0$ є оборотною. На підставі леми 2.5 $A + BU \in \mathrm{GL}_2(R)$, де $U = Q_B V^0 Q_A^{-1}$.

2). Нехай $\delta_2 = 0$ і $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$. Тоді

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{matrix} s_{11}\varepsilon_1 + v_{11} & v_{12} \\ s_{21}\varepsilon_1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки

$$S^{-1} = e^{-1}\left\| \begin{matrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{matrix} \right\|,$$

де $e = \det S \in U(R)$, то, врахувавши попередні міркування, з наслідку 2.8 отримаємо

$$-e\varepsilon_1 s_{21} \in U(R) \Rightarrow \varepsilon_1 s_{21} \in U(R).$$

Покладемо

$$V^0 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді $S\mathrm{E} + \Delta V^0 \in \mathrm{GL}_2(R)$. Згідно з лемою 2.5 існує така матриця T, що $A + BT \in \mathrm{GL}_2(R)$.

3). Нехай $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Виберемо матриці P_A, P_B так, що

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{matrix} \right\| = S.$$

У параметричні матриці V покладемо $v_{22} = 0$. Розглянемо рівність

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ s\varepsilon_1 + v_{21}\delta_2 & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $(\varepsilon_1,\ \delta_1) \mid (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s)$, то $(\varepsilon_1,\ \delta_1) = 1$. Тому

$$(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ [\varepsilon_1,\ \delta_1]s) = (\varepsilon_2,\ \delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 s) = 1. \tag{2.9}$$

Оскільки $\delta_1|\delta_2$, то і $(\varepsilon_2,\ \delta_1\delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 s) = 1$. Існує таке u, що

$$(\varepsilon_1\delta_1 s + \delta_1\delta_2 u,\ \ \varepsilon_2) = 1.$$

Покладемо $v_{21}^0 = u,\ v_{22}^0 = 0$. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 s + \delta_2 v_{21}^0 & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{2.10}$$

Із (2.9) випливає, що $(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1) = 1$. Тоді для довільного $\varphi \neq 0$ із R також $(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \delta_1, \varphi) = 1$. Отже, існує таке r, що

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2 +\ \delta_1 r, \varphi) = 1.$$

Знайдуться такі p, q, що

$$p(\varepsilon_1\varepsilon_2 +\ \delta_1 r) + q\varphi = 1.$$

У параметричні матриці V покладемо $v_{21} = v_{22} = 0$. Розглянемо

$$\det \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ a & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\| = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \delta_1(\varepsilon_2 v_{11} - a v_{12}).$$

Оскільки $(a,\ \varepsilon_2)=1$, то існують такі $v_{11}^0,\ v_{12}^0$, що $\varepsilon_2 v_{11}^0 - a v_{12}^0 = r$. Позначимо $\|v_{ij}^0\|_1^2 = V^0$. Тоді $(\det(S\mathrm{E}+\Delta V^0),\ \varphi)=1$, причому з (2.10) випливає, що

$$S\mathrm{E}+\Delta V^0 \sim \mathrm{diag}(1,\ \mu), \quad \mu=\det(S\mathrm{E}+\Delta V^0).$$

Для завершення розгляду цього випадку достатньо скористатись лемою 2.5.

4). Нехай $\det A\neq 0,\ \det B=0$. Тоді

$$A=P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}, \mathrm{E}=\mathrm{diag}(1,\ \varepsilon_2),\ B=P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1},$$

$$\Delta=\mathrm{diag}(\delta_1,\ 0),\ P_BP_A^{-1}=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ s & 1\end{matrix}\right\|=S.$$

Розглянемо рівність

$$S\mathrm{E}+\Delta V=\left\|\begin{matrix}1+\delta_1v_{11} & \delta_1v_{12}\\ s & \varepsilon_2\end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$\det(S\mathrm{E}+\Delta V)=\varepsilon_2+(v_{11}\varepsilon_2-sv_{12})\,\delta_1.$$

Оскільки $(S\mathrm{E},\ \Delta)_l=I$, то на підставі наслідку 2.7

$$(\varepsilon_2,\ -\delta_1 s)=(\varepsilon_2,\ \delta_1 s)=1. \tag{2.11}$$

Тому $(\varepsilon_2,\ \delta_1)=1$. Тоді для довільного $\varphi\neq 0$ із R $(\varepsilon_2,\ \delta_1,\varphi)=1$. Отже, існує таке d, що

$$(\varepsilon_2+\delta_1 d,\ \varphi)=1.$$

З рівності (2.11) випливає, що $(\varepsilon_2,\ s)=1$. Виберемо такі $v_{11}^0,\ v_{12}^0$, що

$$v_{11}^0\varepsilon_2-sv_{12}^0=d.$$

Позначимо

$$\left\|\begin{matrix}v_{11}^0 & v_{12}^0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|=V^0.$$

Тоді $(\det(S\mathrm{E}+\Delta V^0),\ \varphi)=1$. Отже, згідно з лемою 2.5

$$A+B(Q_BV^0Q_A^{-1})\sim\mathrm{diag}(1,\ \nu),$$

де $(\nu,\ \varphi)=1$. □

Наслідок 2.10. *Нехай $A,\ B$ – ненульові взаємно прості зліва матриці з $M_2(R)$ і C – неособлива матриця. Тоді існує така матриця F_C, що*

$$(\det(A+\ BF_C),\ \det C)=1. \quad \square$$

Лема 2.6. *Нехай* A, B *– особливі* 2×2 *матриці над кільцем елементарних дільників. Тоді існують такі* A_1, B_1, *що*

$$A=(A,\ B)_l A_1,\ B=(A,\ B)_l B_1,$$

причому

$$(A_1,\ B_1)_l=I,\ \ \det A_1=\det B_1=0.$$

Доведення. Матриці A, B мають вигляд

$$A=P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1},\ \ \mathrm{E}=\operatorname{diag}(\varepsilon_1,0),\ \ B=P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1},\ \ \Delta=\operatorname{diag}(\delta_1,0).$$

З теореми 2.6 випливає, що матриця $(A,\ B)_l$ є особливою тоді і тільки тоді, коли $s_{21}=0$, де $P_BP_A^{-1}=S=\|s_{ij}\|_1^2$. Тобто $P_BP_A^{-1}\in\mathbf{G}_{\mathrm{E}}=\mathbf{G}_{\Delta}$ – група оборотних верхніх трикутних матриць. Це означає, що $\mathbf{P}_B\cap\mathbf{P}_A\neq\varnothing$. Нехай $P\in\mathbf{P}_B\cap\mathbf{P}_A$. Тобто матриці A та B мають вигляд $A=P^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, $B=P^{-1}\Delta Q_B^{-1}$. Тоді наступний розклад матриць на множники

$$A=\left(P^{-1}\left\|\begin{matrix}(\varepsilon_1,\ \delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\right)\left(\left\|\begin{matrix}\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\,\delta_1)} & 0\\ u & 0\end{matrix}\right\|Q_A^{-1}\right),$$

$$B=\left(P^{-1}\left\|\begin{matrix}(\varepsilon_1,\ \delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\right)\left(\left\|\begin{matrix}\frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\,\delta_1)} & 0\\ v & 0\end{matrix}\right\|Q_B^{-1}\right),$$

де

$$\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}v-\frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\ \delta_1)}u=1,$$

і буде шуканим. □

Теорема 2.18. *Нехай* R *– комутативне кільце Безу. Для того, щоб кільце* $M_2(R)$ *мало стабільний ранг* 1,5, *необхідно та достатньо, щоб кільце* R *мало стабільний ранг* 1,5.

Доведення. Достатність. Нехай A, B, C – ненульові взаємно прості зліва матриці із $M_2(R)$.

1). Нехай $\det A=0$ і $(A,\ B)_l=D$. Тоді $A=DA_1,\ B=DB_1$. На підставі леми 2.6 матриці A_1, B_1 можна вибрати так, що $(A_1,\ B_1)_l=I$. Тоді, якщо матриця D неособлива, то матриця A_1 є особливою. Якщо матриця D особлива, то особливою буде і матриця B. Тоді згідно з лемою 2.6 матрицю A_1 також можна вибрати особливою. Отже, вважатимемо, що у цьому випадку завжди $\det A_1=0$.

Використавши теорему 2.17, знайдемо таке T, що

$$A_1+\ B_1T=U\in\mathrm{GL}_2(R).$$

Оскільки $P_D = P_{DU}$, а також те, що $(D,\ C)_l = I$, із теореми 2.6 випливає, що $(A + BT,\ C)_l = I$.

2). Нехай $\det A \neq 0,\ \det C \neq 0$ і $(A,\ B)_l = I$. На підставі наслідку 2.10 існує така матриця T, що

$$(\det(A + \ BT),\ \det C) = 1.$$

Тоді $(A + BT,\ C)_l = I$.

Нехай $(A,\ B)_l = D \neq I$. Отже, $A = DA_1,\ B = DB_1$, де

$$D = P_D^{-1}\Gamma Q_D^{-1},\ \ \Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2),\ C = P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1},\ \Omega = \operatorname{diag}(\omega_1,\ \omega_2).$$

Згідно з наслідком 2.10 існує така матриця L, що

$$(\det(A_1 + \ B_1L),\ \det D \det C) = 1. \tag{2.12}$$

Звідси випливає, що $(A_1 + \ B_1L,\ C)_l = I$. Розглянемо матрицю

$$D(A_1 + \ B_1L) = F.$$

Нехай $\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2)$ – форма Сміта матриці $A_1 + \ B_1L$. Зваживши на (2.12) та використавши теорему 4.7 (с. 160), отримуємо, що

$$F = D(A_1 + \ B_1L) \sim \Delta\Psi = \operatorname{diag}(\gamma_1\psi_1,\ \gamma_2\psi_2) = \Gamma.$$

На підставі теореми 2.16 $\mathbf{P}_F \subseteq \mathbf{P}_D$. Це означає, що матрицю F можна записати у вигляді $F = P_D^{-1}\Gamma Q_F^{-1}$. Зваживши на (2.12), отримуємо, що

$$(\psi_1\psi_2,\ \gamma_1\gamma_2) = (\psi_1\psi_2,\ \omega_1\omega_2) = 1.$$

Отже,

$$(\psi_2,\ \omega_2) = (\psi_1,\ \omega_1) = (\psi_1,\ \omega_2) = 1.$$

Нехай $P_D P_C^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$. Розглянемо

$$(\psi_2\gamma_2,\ \ \omega_2,\ \ [\psi_1\gamma_1,\ \omega_1]s_{21}) = \left((\psi_2\gamma_2,\ \ \omega_2),\ \frac{\psi_1\gamma_1\omega_1}{(\psi_1\gamma_1,\ \omega_1)}s_{21}\right) =$$

$$= \left(\gamma_2,\ \ \omega_2,\ \frac{\psi_1\gamma_1\omega_1}{(\gamma_1,\ \omega_1)}s_{21}\right) = \left(\gamma_2,\ \ \omega_2,\ \frac{\gamma_1\omega_1}{(\gamma_1,\ \omega_1)}\psi_1 s_{21}\right) =$$

$$= (\gamma_2,\ \ (\omega_2,\ [\gamma_1,\ \omega_1]\psi_1)s_{21}) = (\gamma_2,\ \ \omega_2,\ [\gamma_1,\ \omega_1]s_{21})\,.$$

Оскільки $(D,\ C)_l = I$, то

$$(\gamma_2,\ \ \omega_2,\ [\gamma_1,\ \omega_1]s_{21}) = 1.$$

Таким чином,

$$(\psi_2\gamma_2,\ \ \omega_2,\ \ [\psi_1\gamma_1,\ \omega_1]s_{21}) = 1.$$

А це означає, що $(D(A_1 +\ B_1L),\ C)_l = I$. Тобто $(A + BL,\ C)_l = I$.

3). Нехай $\det A \neq 0,\ \det C = 0$. Отже, $C = P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1}$, $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1,\ 0)$. Спершу розглянемо випадок, коли $(A,\ B)_l = D \neq I$. Тобто $D = P_D^{-1}\Gamma Q_D^{-1}$, $\Gamma = \mathrm{diag}(1,\ \gamma_2)$. Оскільки $(D,\ C)_l = I$, то

$$(\gamma_2,\ \ \omega_1 s) = 1, \tag{2.13}$$

де $P_D P_C^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{matrix} \right\|$. Тоді $s \neq 0$. На підставі теореми 2.17 існує така матриця K, що $A_1 +\ B_1K \sim \mathrm{diag}(1,\ \mu)$, де $(\mu,\ \ \omega_1 s \det D) = 1$. Оскільки $(\mu,\ \ \det D) = 1$, то за аналогією з випадком 2) показуємо, що

$$A + BK = D(A_1 +\ B_1K) \sim P_D^{-1}\mathrm{diag}(1,\ \gamma_2\mu).$$

Оскільки також $(\mu,\ \ \omega_1 s) = 1$, то із (2.13) отримуємо, що $(\mu\gamma_2,\ \ \omega_1 s) = 1$. А це означає, що $(A + BK,\ C)_l = I$.

Нехай $(A,\ B)_l = I$. Виберемо матриці P_A та P_B так, що $P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{matrix} \right\|$. Спершу розглянемо випадок, коли $c \neq 0$. Позначимо $P_B P_C^{-1} = \|p_{ij}\|_1^2$. З рівності $(\varepsilon_1,\ \delta_1) = 1$ випливає, що і $(\varepsilon_1,\ \delta_1,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Виберемо елемент t_{11} так, що

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 t_{11},\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1, \tag{2.14}$$

причому

$$\det \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Це можна зробити, оскільки рівняння

$$\det \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 x & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{matrix} \right\| = 0$$

відносно змінної x має не більше одного розв'язку, а елементів, які задовольняють рівність (2.14), є більше. Зокрема, кожний елемент суміжного класу $t_{11} + (\varepsilon_1\delta_1 c)R$ також задовольнятиме рівність (2.14).

Оскільки $(A,\ B)_l = I$, то $(\varepsilon_2,\ \delta_2,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Тому знайдеться таке t_{22}, що

$$(\varepsilon_2 + \delta_2 t_{22},\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1.$$

Якщо $\delta_2 = 0$, то можемо покласти $t_{22} = 0$, оскільки $(\varepsilon_2,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Таким чином, $(ab,\ \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$, де $a = \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11},\ b = \varepsilon_2 + \delta_2 t_{22}$. Отже, і

$$\left(ab,\ \ \varepsilon_1\delta_1 c,\ \ \det \left\| \begin{matrix} a & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{matrix} \right\| \omega \right) = 1.$$

Тому існує таке t_{12}, що

$$\left(ab - \ \varepsilon_1\delta_1 c t_{12}, \ \det \left\| \begin{matrix} a & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{matrix} \right\| \omega \right) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & \delta_1 t_{12} & \omega p_{11} & 0 \\ \varepsilon_1 c & \varepsilon_2 + \delta_2 t_{22} & \omega p_{21} & 0 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} I & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$\left(P_B P_A^{-1} \mathrm{E} + \Delta \left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{matrix} \right\|, \ P_B P_C^{-1} \Omega \right)_l = I.$$

Тоді і

$$\left(P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1} + P_B^{-1} \Delta Q_B^{-1} \left(Q_B \left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{matrix} \right\| \right), \ P_C^{-1} \Omega Q_C^{-1} \right)_l = (A{+}BU, \ C)_l = I,$$

де $U = Q_B \left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{matrix} \right\|$.

На завершення залишається розглянути випадок, коли $(A, \ B)_l = I$, причому $P_B P_A^{-1} = I$, тобто $P_A = P_B$. На підставі наслідку 2.9 матриці A, B є неособливими і $(\det A, \ \det B) = 1$. Отже, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2, \ \delta_1 \delta_2) = 1$. Звідси випливає, що $(\varepsilon_1, \ \delta_1, \ \omega) = 1$, і $(\varepsilon_2, \ \delta_2, \ \omega) = 1$. Виберемо $q_{11}, \ q_{22}$ так, що

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 q_{11}, \ \omega) = 1, \ (\varepsilon_2 + \delta_2 q_{22}, \ \omega) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & 0 & \omega p_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 + \delta_2 q_{22} & \omega p_{21} & 0 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} I & 0 \end{matrix} \right\|,$$

де $P_B P_C^{-1} = \|p_{ij}\|_1^2$. Звідси отримуємо, що $(A + BV, \ C)_l = I$, де $V = Q_B \mathrm{diag}(q_{11}, \ q_{22})$. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай R – кільце Безу і $(a, \ b, \ c) = 1, \ c \neq 0$. Розглянемо матриці $A = \mathrm{diag}(1, \ a)$, $B = \mathrm{diag}(0, \ b)$, $C = \mathrm{diag}(0, \ c)$. Очевидно, що $(A, \ B, \ C)_l = I$. Тоді існує така матриця $T = \|t_{ij}\|_1^2$, що $(A + BT, \ C)_l = I$. Оскільки

$$A + BT = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ bt_{21} & a + bt_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bt_{21} & a + bt_{22} & 0 & c \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} I & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Звідси випливає, що $(a + bt_{22}, \ c) = 1$. □

Стабільний ранг кільця R (у позначеннях st.r.(R)) тісно пов'язаний зі стабільним рангом кільця $M_n(R)$ – $n \times n$ матриць над ним. Цей зв'язок встановив Л. Васерштейн [77]:

$$\text{st.r.}(M_n(R)) = 1 - \left[-\tfrac{\text{st.r.}(R)-1}{n} \right].$$

Тут символ [*] означає цілу частину числа. Згідно з цією формулою, якщо st.r.(R) дорівнює 1 чи 2, то кільце $M_n(R)$ має аналогічний стабільний ранг. З теореми 2.18 випливає, що кільце матриць другого порядку над кільцем Безу стабільного рангу 1,5 успадковує цю чудову властивість.

На завершення цього підрозділу вкажемо ще одну важливу властивість кілець Безу стабільного рангу $1,5$. На підставі теореми 2.1 це кільце є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.19. *Нехай A – $n \times m$ матриця над R – кільцем Безу стабільного рангу* $1,5$, *і* $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_k, \ 0, \ \ldots, \ 0)$ *– її форма Сміта, причому* $k > 1$. *Тоді існує такий рядок* $u = \| \ 1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n \ \|$, *що*

$$uA = \| \ b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m \ \|,$$

де $(b_1, b_2, \ \ldots, \ b_m) = \varphi_1$.

Доведення. Для визначеності покладемо $m \geq n$. Існують такі матриці $P \in \mathrm{GL}_n(R)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(R)$, що $PAQ = \Phi$. Розглянемо матрицю

$$U = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{k-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$(UP)A(QU) = \operatorname{diag}(\varphi_k, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \ldots, \ \varphi_{k-1}, \ \varphi_1, \ 0, \ \ldots, \ 0) = \Phi'.$$

Покладемо $P_1 = UP\det(UP)^{-1}$, $Q_1 = QU\det UP$. Тоді $P_1AQ_1 = \Phi'$, причому $\det P_1 = 1$. Розглянемо матрицю $P_1^{-1} = \|p_{ij}\|_1^n$. Маємо

$$\det P_1^{-1} = p_{11}\Delta_1 + \ldots + p_{1n}\Delta_n = 1,$$

де Δ_i – відповідні алгебраїчні доповнення. Згідно з теоремою 1.9 існують такі $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}$, що виконуються рівності

$$\begin{gathered} s_{11}\Delta_1 + s_{12}\Delta_2 + \ldots + s_{1n}\Delta_n = 1, \\ (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1k}) = 1, \\ (s_{1k}, \varphi_k) = 1. \end{gathered}$$

На підставі теореми 1.8 елементи $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}$ знаходяться так:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & t_2 & \ldots & t_n \end{matrix} \right\| P_1^{-1} = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \end{matrix} \right\|,$$

де $t_2, \ldots, t_n \in R$. Із рівності $P_1AQ_1 = \Phi'$ випливає, що $AQ_1 = P_1^{-1}\Phi'$. Доможивши зліва цю рівність на матрицю

$$\left\| \begin{matrix} 1 & t_2 & \ldots & t_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

маємо

$$\left\| \begin{matrix} 1 & t_2 & \ldots & t_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\| AQ_1 = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\| \Phi' =$$

$$= \left\| \begin{matrix} s_{11}\varphi_k & s_{12}\varphi_2 & \ldots & s_{1.k-1}\varphi_{k-1} & s_{1k}\varphi_1 & \mathbf{0} \\ p_{21}\varphi_k & p_{22}\varphi_2 & \ldots & p_{2.k-1}\varphi_{k-1} & p_{2k}\varphi_1 & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}\varphi_k & p_{n2}\varphi_2 & \ldots & p_{n.k-1}\varphi_{k-1} & p_{nk}\varphi_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|. \tag{2.15}$$

Н.с.д. елементів першого рядка отриманої матриці дорівнює

$$(s_{11}\varphi_k, s_{12}\varphi_2, \ldots, s_{1.k-1}\varphi_{k-1}, s_{1k}\varphi_1) =$$

$$= \varphi_1 \left(s_{11}\frac{\varphi_k}{\varphi_1}, s_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_1}s_{1.k-1}, s_{1k} \right) =$$

$$= \varphi_1 \left(\left(s_{1k}, s_{11}\frac{\varphi_k}{\varphi_1} \right), \left(s_{1k}, s_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right), \ldots, \left(s_{1k}, s_{1.k-1}\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_1} \right) \right) =$$

$$= \varphi_1(s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1k}) = \varphi_1.$$

Із рівності (2.15) та проведених міркувань випливає, що

$$\| \; 1 \quad t_2 \quad \ldots \quad t_n \; \| AQ_1 = \| \; s_{11} \quad s_{12} \quad \ldots \quad s_{1n} \; \| \Phi' \sim \| \; \varphi_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \; \|.$$

Отже, і

$$\| \; 1 \quad t_2 \quad \ldots \quad t_n \; \| A \sim \| \; \varphi_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \; \|.$$

Що і потрібно довести. □

Зауважимо, що подібний результат для адекватних кілець отримав О. Хелмер [8], який уточнив та узагальнив В. Петричкович [71].

2.8. Мультиплікативні властивості форми Сміта

Визначник матриці має властивість мультиплікативності: визначник добутку двох матриць дорівнює добутку визначників матриць співмножників. Форма Сміта, взагалі кажучи, не має такої властивості. Так матриці

$$A = \mathrm{diag}(1,\ 2),\ B = \mathrm{diag}(2,\ 1)$$

мають форму Сміта $\mathrm{diag}(1,\ 2)$, проте їх добуток

$$AB = \mathrm{diag}(1,\ 2)\ \mathrm{diag}(2,\ 1) = \mathrm{diag}(2,\ 2),$$

який одночасно є і формою Сміта добутку цих матриць не збігається з матрицею $\mathrm{diag}(1,\ 4)$. Однак, за певних умов, форма Сміта має властивість мультиплікативності. Зокрема, це буде якщо матриці мають взаємно прості визначники [78].

У цьому підрозділі вивчаємо мультиплікативність форми Сміта з точки зору розкладності оборотних матриць у добуток матриць із груп Зеліска. Всюди тут R є кільцем елементарних дільників.

Нехай

$$B = P_B^{-1}\Gamma Q_B^{-1},\ \ C = P_C^{-1}\Delta Q_C^{-1},$$

де

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_t, 0, \ldots, 0),\ \ \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_k, 0, \ldots, 0)$$

– форми Сміта відповідно матриць B та C. Розглянемо групу $\mathbf{G}_\Delta$ та множину оборотних матриць

$$\mathbf{G}_\Gamma^T = \{L \in \mathrm{GL}_n(R) |\ \exists\ L_1 \in \mathrm{GL}_n(R) : \Gamma L = L_1\Gamma.\}.$$

Легко зауважити, що множина $\mathbf{G}_\Gamma^T$ також є мультиплікативною групою, яку отримано з групи $\mathbf{G}_\Gamma$ транспонуванням. Таким чином, згідно з теоремою 2.6 групи $\mathbf{G}_\Delta$ та $\mathbf{G}_\Gamma^T$ складаються відповідно з оборотних матриць вигляду

$$H = \left\| \begin{matrix} H_1 & H_2 \\ \mathbf{0} & H_3 \end{matrix} \right\|, L = \left\| \begin{matrix} L_1 & \mathbf{0} \\ L_2 & L_3 \end{matrix} \right\|,$$

де

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,k-1} & h_{1k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,k-1} & h_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\delta_k}{\delta_1}h_{k1} & \frac{\delta_k}{\delta_2}h_{k2} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}h_{k,k-1} & h_{kk} \end{matrix} \right\|,$$

$$L_1 = \left\| \begin{matrix} l_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1}l_{12} & \ldots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_1}l_{1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_1}l_{1t} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_2}l_{2,k-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_1}l_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{t1} & l_{t2} & \ldots & l_{t,t-1} & l_{tt} \end{matrix} \right\|,$$

$H_3 \in \mathrm{GL}_{n-k}(R), L_3 \in \mathrm{GL}_{n-t}(R)$. Оскільки

$$BC = P_B^{-1}\Gamma U \Delta Q_C^{-1} \sim \Gamma U \Delta,$$

де $U = Q_B^{-1}P_C^{-1}$, то умова $BC \sim \Gamma\Delta$ рівносильна умові $\Gamma U \Delta \sim \Gamma\Delta$. Якщо припустити, що оборотну матрицю U можна записати у вигляді $U = LH$, де $L \in \mathbf{G}_\Gamma^T$, а $H \in \mathbf{G}_\Delta$, то

$$BC \sim \Gamma U \Delta = \Gamma L H \Delta = L_1 \Gamma \Delta H_1 \sim \Gamma\Delta.$$

Тобто ця умова є достатньою, щоб форма Сміта добутку матриць B і C дорівнювала добутку форм Сміта цих матриць. Постає питання про необхідність цієї умови. Позитивну відповідь на це дає така теорема.

Теорема 2.20. *Нехай*

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_t, 0, \dots, 0), \quad \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_k, 0, \dots, 0)$$

– форми Сміта матриць $B = P_B^{-1}\Gamma Q_B^{-1}$, $C = P_C^{-1}\Delta Q_C^{-1}$. Для того, щоб форма Сміта добутку цих матриць мала властивість мультиплікативності, необхідно та достатньо, щоб матрицю $U = Q_B^{-1}P_C^{-1}$ можна було записати у вигляді $U = LH$, де $L \in \mathbf{G}_\Gamma^T$, $H \in \mathbf{G}_\Delta$.

Доведення. Нехай

$$BC \sim \Gamma U \Delta = A = \left\| \begin{array}{cc} U_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \sim \Gamma\Delta, \tag{2.16}$$

де U_1 – $t \times k$ матриця. Для визначеності покладемо $t \geqslant k$. Таким чином, матрицю A можна записати у вигляді $A = P\Gamma\Delta Q$, де $P = \|p_{ij}\|_1^n$ та $Q = \|q_{ij}\|_1^n$ – деякі оборотні матриці.

Спершу покажемо, що матриці P та Q можна вибрати так, що вони матимуть вигляд

$$P = \left\| \begin{array}{cc} * & * \\ \mathbf{0}_{(n-t)\times t} & I_{n-t} \end{array} \right\|, Q = \left\| \begin{array}{cc} * & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \\ * & * \end{array} \right\|,$$

де $\mathbf{0}_{i\times j}$ – нульовий блок розміру $i \times j$ (якщо з контексту буде зрозумілий розмір нульового блоку, то вказувати його не будемо). Нехай $U = \|u_{ij}\|_1^n$. Згідно з рівністю (2.16)

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1 u_{11}\delta_1 & \dots & \gamma_1 u_{1k}\delta_k & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \gamma_k u_{k1}\delta_1 & \dots & \gamma_k u_{kk}\delta_k & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \gamma_t u_{t1}\delta_1 & \dots & \gamma_t u_{tk}\delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccc|c} p_{11}\gamma_1 & \dots & p_{1k}\gamma_k & \dots & p_{1t}\gamma_t & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ p_{k1}\gamma_1 & \dots & p_{kk}\gamma_k & \dots & p_{kt}\gamma_t & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ p_{t1}\gamma_1 & \dots & p_{tk}\gamma_k & \dots & p_{tt}\gamma_t & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ p_{n1}\gamma_1 & \dots & p_{nk}\gamma_k & \dots & p_{nt}\gamma_t & \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{ccccccc} \delta_1 q_{11} & \dots & \delta_1 q_{1k} & \dots & \delta_1 q_{1t} & \dots & \delta_1 q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_k q_{k1} & \dots & \delta_k q_{kk} & \dots & \delta_k q_{kt} & \dots & \delta_k q_{kn} \\ \hline \multicolumn{7}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\|.$$

Звідси випливає, що

$$\left\| \begin{array}{ccc} p_{t+1,1}\gamma_1 & \dots & p_{t+1,k}\gamma_k \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}\gamma_1 & \dots & p_{nk}\gamma_k \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccccc} \delta_1 q_{11} & \dots & \delta_1 q_{1k} & \dots & \delta_1 q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_k q_{k1} & \dots & \delta_k q_{kk} & \dots & \delta_k q_{kn} \end{array} \right\| = \mathbf{0}.$$

Тобто

$$\left\| \begin{array}{ccc} p_{t+1,1} & \dots & p_{t+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nk} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} \gamma_1\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_k\delta_k \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \end{array} \right\| = \mathbf{0}. \qquad (2.17)$$

Оскільки

$$\left\| \begin{array}{ccc} \gamma_1\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_k\delta_k \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \end{array} \right\| Q^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1\delta_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \gamma_k\delta_k & \end{array} \right\|,$$

то матриця

$$\left\| \begin{array}{ccc} \gamma_1\delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_k\delta_k \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \end{array} \right\|$$

має максимальний ранг, а отже, не є дільником нуля. Тоді з рівності (2.17) випливає, що

$$\left\| \begin{array}{ccc} p_{t+1,1} & \dots & p_{t+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nk} \end{array} \right\| = \mathbf{0}.$$

З цієї рівності та оборотності матриці P випливає, що н.с.д. мінорів максимального $(n-t)$-го порядку матриці

$$K = \left\| \begin{array}{cccccc} p_{t+1,k+1} & \dots & p_{t+1,t} & p_{t+1,t+1} & \dots & p_{t+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,k+1} & \dots & p_{nt} & p_{n,t+1} & \dots & p_{nn} \end{array} \right\|$$

дорівнює одиниці. Тому в групі $\mathrm{GL}_{n-k}(R)$ існує така матриця V_{n-k}, що

$$KV_{n-k} = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & I_{n-t} \end{array} \right\|.$$

Розглянемо матрицю

$$H = \left\| \begin{array}{cc} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{n-k} \end{array} \right\|.$$

Зауваживши, що

$$H^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{n-k}^{-1} \end{array} \right\|,$$

а також те, що

$$H^{-1}(\Gamma\Delta) = (\Gamma\Delta)H^{-1},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} A = P\Gamma\Delta Q = (PH)H^{-1}(\Gamma\Delta)Q = \\ = (PH)(\Gamma\Delta)(H^{-1}Q) = P_1\Gamma\Delta Q_1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Оскільки матриця $P_1 = PH$ має вигляд

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cccccc|ccc} p_{11} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} & p'_{1,t+1} & \dots & p'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} & p'_{t,t+1} & \dots & p'_{tn} \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\mathbf{0}} & \multicolumn{3}{c}{I_{n-t}} \end{array} \right\|,$$

а матриця $Q_1 = H^{-1}Q$ – вигляд

$$Q_1 = \left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \\ q'_{k+1,1} & \dots & q'_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q'_{n1} & \dots & q'_{nn} \end{array} \right\|,$$

то, зваживши на вигляд матриці A, з рівності (2.18) маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \left\| \begin{array}{cccccc} p_{11}\gamma_1 & \dots & p_{1k}\gamma_k & p'_{1,k+1}\gamma_{k+1} & \dots & p'_{1t}\gamma_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1}\gamma_1 & \dots & p_{tk}\gamma_k & p'_{t,k+1}\gamma_{k+1} & \dots & p'_{tt}\gamma_t \end{array} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{array}{cccc} \delta_1 q_{1,k+1} & \delta_1 q_{1,k+2} & \dots & \delta_1 q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_k q_{k,k+1} & \delta_k q_{k,k+2} & \dots & \delta_k q_{kn} \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\| = \\ = \left\| \begin{array}{cccccc} p_{11} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \gamma_1\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_k\delta_k \end{array} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{array}{cccc} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn} \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathbf{0}} \end{array} \right\|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

З оборотності матриці P_1 випливає, що матриця

$$\left\| \begin{matrix} p_{11} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} \end{matrix} \right\|$$

є оборотною. Тому рівність (2.19) рівносильна рівності

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} \gamma_1\delta_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \gamma_k\delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn} \\ \hline & \mathbf{0} & & \end{array} \right\| = \mathbf{0}$$

або ж

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_k\delta_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn} \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

А це можливо лише, коли

$$\left\| \begin{matrix} q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k,k+1} & q_{k,k+2} & \dots & q_{kn} \end{matrix} \right\| = \mathbf{0}.$$

Таким чином, матриця Q_1 має вигляд

$$Q_1 = \left\| \begin{matrix} q_{11} & \dots & q_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ q'_{k+1,1} & \dots & q'_{k+1,k} & q'_{k+1,k+1} & \dots & q'_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q'_{n1} & \dots & q'_{nk} & q'_{n,k+1} & \dots & q'_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Отже, першу частину доведення завершили. На другому кроці покажемо, що $P_1 \in \mathbf{G}_\Gamma$, $Q_1 \in \mathbf{G}_\Delta^T$. Маємо

$$A = P_1\Gamma\Delta Q_1 = P_1\Gamma \left\| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 q_{11} & \dots & \delta_1 q_{1k} & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \delta_k q_{k1} & \dots & \delta_k q_{kk} & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| =$$

$$= P_1\Gamma \left\| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc|c} q_{11} & \dots & q_{1k} & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} & \\ \hline & \mathbf{0} & & I_{n-k} \end{array} \right\|}_{K_1}. \qquad (2.20)$$

Оскільки $Q_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$, то

$$\left\| \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{kk} & \dots & q_{kk} \end{array} \right\| \in \mathrm{GL}_k(R).$$

Отже, матриця K_1 також оборотна. Домноживши рівність (2.20) справа на K_1^{-1}, отримуємо

$$AK_1^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc|c} p_{11}\gamma_1\delta_1 & \dots & p_{1k}\gamma_k\delta_k & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ p_{t1}\gamma_1\delta_1 & \dots & p_{tk}\gamma_k\delta_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| =$$

$$= \delta_1 \underbrace{\left\| \begin{array}{cccc|c} p_{11}\gamma_1 & p_{12}\frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_2 & \dots\dots & p_{1k}\frac{\delta_k}{\delta_1}\gamma_k & \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \mathbf{0} \\ p_{t1}\gamma_1 & p_{t1}\frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_2 & \dots\dots & p_{tk}\frac{\delta_k}{\delta_1}\gamma_k & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{C_1} = \delta_1 C_1.$$

З іншого боку,

$$AK_1^{-1} = (\Gamma U \Delta)K_1^{-1} =$$

$$= \delta_1\Gamma(U \operatorname{diag}(1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_k}{\delta_1}, 0, \dots, 0)K_1^{-1}) = \delta_1\Gamma B_1.$$

Тобто $\delta_1\Gamma B_1 = \delta_1 C_1$. Отже, $\Gamma B_1 = C_1$. З цієї рівності випливає, що $\gamma_i | p_{i1}\gamma_1$, $i = 2, \dots, t$. Тобто $\frac{\gamma_i}{\gamma_1} | p_{i1}$. Отже,

$$p_{i1} = \frac{\gamma_i}{\gamma_1} h_{i1}, \;\; i = 2, \dots, t.$$

За аналогічною схемою, домноживши рівність (2.20) зліва на матрицю P_1^{-1} , показуємо, що

$$q_{1i} = \frac{\delta_i}{\delta_1} l_{i1}, \;\; i = 2, \dots, k.$$

Таким чином, виконуються такі рівності:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccccc|c} \gamma_1 p_{11} & \gamma_2 p_{12} & \dots & \gamma_k p_{1k} & \gamma_{k+1} p'_{1,k+1} & \dots & \gamma_t p'_{1t} & \\ \gamma_2 h_{21} & \gamma_2 p_{22} & \dots & \gamma_k p_{2k} & \gamma_{k+1} p'_{2,k+1} & \dots & \gamma_t p'_{2t} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \gamma_t h_{t1} & \gamma_2 p_{t2} & \dots & \gamma_k p_{tk} & \gamma_{k+1} p'_{t,k+1} & \dots & \gamma_t p'_{tt} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{array} \right\| \times$$

$$\times\left\|\begin{array}{cccc|c} \delta_1 q_{11} & \delta_2 l_{12} & \ldots & \delta_k l_{1k} & \\ \delta_2 q_{21} & \delta_2 l_{22} & \ldots & \delta_2 l_{2k} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \delta_k q_{k1} & \delta_k l_{k2} & \ldots & \delta_k l_{kk} & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right\| = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_2)\times$$

$$\times\underbrace{\left\|\begin{array}{ccccccc|c} p_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{12} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_1} p_{1k} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1} p'_{1,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_1} p'_{1t} & \\ h_{21} & p_{22} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_2} p_{2k} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_2} p'_{2,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} p'_{2t} & \\ \frac{\gamma_3}{\gamma_2} h_{31} & p_{32} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_2} p_{3k} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_2} p'_{3,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} p'_{3t} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_2} h_{t1} & p_{t2} & \ldots & \frac{\gamma_k}{\gamma_2} p_{tk} & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_2} p'_{t,k+1} & \ldots & \frac{\gamma_t}{\gamma_2} p'_{tt} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{array}\right\|}_{P_2}\times$$

$$\times\underbrace{\left\|\begin{array}{ccccc|c} q_{11} & l_{12} & \frac{\delta_3}{\delta_2} l_{13} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{1k} & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \ldots & q_{2k} & \\ \frac{\delta_3}{\delta_1} q_{31} & \frac{\delta_3}{\delta_2} q_{32} & \frac{\delta_3}{\delta_2} q_{33} & \ldots & \frac{\delta_3}{\delta_2} q_{3k} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\delta_k}{\delta_1} q_{k1} & \frac{\delta_k}{\delta_2} q_{k2} & \frac{\delta_k}{\delta_2} q_{k3} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_2} q_{kk} & \\ \hline & & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{array}\right\|}_{Q_2} \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2). \tag{2.21}$$

Запишемо матрицю Q_2 у вигляді

$$Q_2 = \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \ldots, \frac{\delta_k}{\delta_2}, 0, \ldots, 0\right)\times$$

$$\times\underbrace{\left\|\begin{array}{ccccc|c} q_{11} & l_{12} & \frac{\delta_3}{\delta_2} l_{13} & \ldots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{1k} & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \ldots & q_{2k} & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{31} & q_{32} & q_{33} & \ldots & q_{3k} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \ldots & q_{kk} & \\ \hline & & \mathbf{0} & & & E_{n-k} \end{array}\right\|}_{K_2}.$$

Оскільки

$$\operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_k)\left\|\begin{array}{ccc} q_{11} & \ldots & q_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & \ldots & q_{kk} \end{array}\right\| = \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \ldots, \frac{\delta_k}{\delta_2}\right)\times$$

$$\times \underbrace{\left\|\begin{array}{ccccc} q_{11} & l_{12} & \frac{\delta_3}{\delta_2}l_{13} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2}l_{1k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & q_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \dots & q_{kk} \end{array}\right\|}_{K_2'} \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_2),$$

то, перейшовши в цій рівності до визначників, отримаємо, що $\det K_2' \in U(R)$. Тобто матриця K_2' оборотна, а отже, оборотною є і матриця

$$K_2' \oplus I_{n-k} = K_2.$$

Тоді з рівності (2.21) випливає, що

$$\operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\gamma_3}{\gamma_2}, \dots, \frac{\gamma_t}{\gamma_2}, 0, \dots, 0\right) U \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \dots, \frac{\delta_k}{\delta_2}, 0, \dots, 0\right) K_2^{-1} =$$

$$= P_2 \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\delta_3}{\delta_2}, \dots, \frac{\delta_k}{\delta_2}, 0, \dots, 0\right).$$

Зваживши на структуру матриці P_2, отримуємо $\frac{\gamma_i}{\gamma_2} | p_{i2}$, $i = 3, \dots, t$. Отже, $p_{i2} = \frac{\gamma_i}{\gamma_2} h_{i2}$, $i = 3, \dots, t$. Запишемо матрицю P_2 у вигляді

$$P_2 = \underbrace{\left\|\begin{array}{cccccccc|c} p_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1}p_{12} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1}p_{13} & \dots & \frac{\gamma_2}{\gamma_1}p_{1k} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1}p'_{1,k+1} & \dots & \frac{\gamma_2}{\gamma_1}p'_{1t} & \\ h_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2k} & p'_{2,k+1} & \dots & p'_{2t} & \\ \frac{\gamma_3}{\gamma_2}h_{31} & \frac{\gamma_3}{\gamma_2}h_{32} & p_{33} & \dots & p_{3k} & p'_{3,k+1} & \dots & p'_{3t} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_2}h_{t1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_2}h_{t2} & p_{t3} & \dots & p_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} & \\ \hline & & & & \mathbf{0} & & & & E_{n-t} \end{array}\right\|}_{L_2} \times$$

$$\times \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\gamma_3}{\gamma_2}, \dots, \frac{\gamma_t}{\gamma_2}, 0, \dots, 0\right).$$

За аналогією з доведенням оборотності матриці K_2 показуємо, що матриця L_2 є оборотною, а також те, що $q_{2i} = \frac{\delta_i}{\delta_2} l_{2i}$, $i = 3, \dots, t$. Продовжуючи описаний процес, показуємо, що матриці P_1 та Q_1 мають вигляд

$$P_1 = \left\|\begin{array}{ccccccc|cc} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} & p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} & \dots & p'_{1n} \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1}h_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} & p'_{2,k+1} & \dots & p'_{2t} & \dots & p'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_k}{\gamma_1}h_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} & p'_{k,k+1} & \dots & p'_{kt} & \dots & p'_{kn} \\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1}h_{k+1,1} & & \dots & & p'_{k+1,k+1} & \dots & p'_{k+1,t} & \dots & p'_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_1}h_{t1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_2}h_{t2} & \dots & \frac{\gamma_t}{\gamma_k}h_{tk} & p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} & \dots & p'_{tn} \\ \hline & & & \mathbf{0} & & & & I_{n-t} & \end{array}\right\|,$$

$$Q_1 = \left\| \begin{array}{ccccccc} q_{11} & \frac{\delta_2}{\delta_1} l_{21} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_1} l_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k-1,1} & q_{k-1,2} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{k-1,k} & 0 & \dots & 0 \\ q_{k1} & q_{k2} & \dots & q_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ q'_{k+1,1} & q'_{k+1,2} & \dots & q'_{k+1,k} & q'_{k+1,k+1} & \dots & q'_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nk} & q_{n,n+1} & \dots & q_{nn} \end{array} \right\|.$$

Розглянемо підматрицю матриці P_1 :

$$\left\| \begin{array}{ccc} p'_{1,k+1} & \dots & p'_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ p'_{t,k+1} & \dots & p'_{tt} \end{array} \right\| = F.$$

Для неї існує така матриця $V \in \mathrm{GL}_{t-k}(R)$, що

$$FV = \left\| \begin{array}{ccccc} h_{1,k+1} & h_{1,k+2} & \dots & h_{1,t-1} & h_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k+1,k+1} & h_{k+1,k+2} & \dots & h_{k+1,t-1} & h_{k+1,t} \\ 0 & h_{k+2,k+2} & \dots & h_{k+2,t-1} & h_{k+2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{tt} \end{array} \right\| = V_1.$$

Нехай

$$S_1 = \left\| \begin{array}{ccc} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_{21} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1} h_{k+1,1} & \dots & \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} h_{k+1,k} \\ \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_1} h_{k+2,1} & \dots & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_k} h_{k+2,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_t}{\gamma_1} h_{t1} & \dots & \frac{\gamma_t}{\gamma_k} h_{tk} \end{array} \right\|, \quad S_2 = \left\| \begin{array}{ccc} h_{1,t+1} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{t,t+1} & \dots & h_{tn} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$A = P_1 \Gamma \Delta Q_1 = P_1((I_k \oplus V \oplus I_{n-t}) \operatorname{diag}(\gamma_1\delta_1, \dots, \gamma_k\delta_k, \dots, 0, \dots, 0))Q_1 =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} S_1 & V_1 & S_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-t} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \Gamma\Delta \left\| \begin{array}{cccccccc} l_{11} & \frac{\delta_2}{\delta_1} l_{12} & \dots & \frac{\delta_{k-1}}{\delta_1} l_{1,k-1} & \frac{\delta_k}{\delta_1} l_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \dots & l_{k-1,k-1} & \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} l_{k-1,k} & 0 & \dots & 0 \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{k,k-1} & l_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ l_{k+1,1} & l_{k+1,2} & \dots & l_{k+1,k-1} & l_{k+1,k} & l_{k+1,k+1} & \dots & l_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,k-1} & l_{nk} & l_{n,k+1} & \dots & l_{nn} \end{array} \right\| =$$

$$= \Gamma H L \Delta, \tag{2.22}$$

де

$$H = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & \mathbf{0} \\ H_2 & I_{n-t} \end{array} \right\|, \quad H_1 = \left\| \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \end{array} \right\|,$$

$$H_{11} = \left\| \begin{array}{cccc} p_{11} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} p_{12} & \dots & \frac{\gamma_k}{\gamma_1} p_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k-1,1} & h_{k-1,2} & \dots & \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} h_{k-1,k} \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & h_{kk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{t1} & h_{t2} & \dots & h_{tk} \end{array} \right\|,$$

$$H_{12} = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_1} h_{1,k+1} & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_1} h_{1,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_1} h_{1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_1} h_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} h_{k,k+1} & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_k} h_{k,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_k} h_{k,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_k} h_{kt} \\ h_{k+1,k+1} & \frac{\gamma_{k+2}}{\gamma_{k+1}} h_{k+1,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_{k+1}} h_{k+1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_{k+1}} h_{k+1,t} \\ 0 & h_{k+2,k+2} & \dots & \frac{\gamma_{t-1}}{\gamma_{k+2}} h_{k+2,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_{k+2}} h_{k+2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{t-1,t-1} & \frac{\gamma_t}{\gamma_{t-1}} h_{t-1,t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{tt} \end{array} \right\|,$$

H_2 – довільна $(n-t) \times t$ матриця, $L = \left\| \begin{array}{cc} L_1 & L_2 \\ \mathbf{0} & L_3 \end{array} \right\|$,

$$L_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1,k-1} & l_{1k} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2,k-1} & l_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta_k}{\delta_1} l_{k1} & \frac{\delta_k}{\delta_2} l_{k2} & \dots & \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} l_{k,k-1} & l_{kk} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{\mathbf{0}_{(t-k)\times k}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \overline{L}_1 \\ \mathbf{0}_{(t-k)\times k} \end{array} \right\|,$$

L_2 – $t \times (n-k)$, L_3 – $(n-t) \times (n-k)$ – довільні матриці. Покажемо, що матриці H та L можна вибрати так, що $U = HL$. Запишемо матрицю U в блочному вигляді

$$U = \left\| \begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array} \right\|,$$

де U_{11} – $t \times k$ матриця. З рівності (2.22) випливає, що $\overline{\Gamma} U_{11} \overline{\Delta} = \overline{\Gamma} H_1 L_1 \overline{\Delta}$, де $\overline{\Gamma} = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_t)$, $\overline{\Delta} = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_k)$. Отже, $U_{11} = H_1 L_1$. Розглянемо рівняння $H_1 X = U_{12}$. Оскільки H_1 – оборотна матриця, то це рівняння має розв'язок $X_0 = H_1^{-1} U_{12}$. Покладемо $L_2 = X_0$. Розглянемо ще одне рівняння $Y \overline{L}_1 = U_{21}$. Воно має розв'язок $Y_0 = \overline{L}_1^{-1} U_{21}$. Покладемо $H_2 = \left\| \begin{array}{cc} Y_0 & \mathbf{0}_{k\times(t-k)} \end{array} \right\|$. І, нарешті, покладемо $L_3 = U_{22} - H_2 X_0$. Тоді легко переконатись, що $U = HL$. Доведення завершено. □

Розділ 3.
Техніка лінійної алгебри в матричних кільцях

Розділ присвячено дослідженню властивостей мінорів матриць над кільцями Безу та встановленню форм Сміта матриць певного вигляду. Отримані результати використовуватимуться в подальших розділах.

3.1. Властивості мінорів матриць над кільцями Безу

Позначимо через $\langle A \rangle_i$ н.с.д. мінорів i-го порядку матриці A, а через $\langle A \rangle$ – н.с.д. мінорів максимального порядку цієї матриці.

Твердження 3.1. *Нехай $A = \|a_{ij}\|$ – $n \times n$ матриця і B – її $t \times k$ підматриця. Тоді, якщо $t + k > n$, то* $\langle B \rangle_1 \mid \det A$.

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що матриця A має вигляд

$$A = \left\| \begin{array}{cc} B & C \\ * & * \end{array} \right\|.$$

Якщо це не так, то перестановкою рядків та стовпців зведемо матрицю A до потрібного вигляду. Такі перетворення, згідно з теоремою 1.4 не змінюють н.с.д. мінорів відповідних порядків.

Нехай спершу $t + k = n + 1$. У цьому випадку матриця C має розміри

$$t \times (n - k) = t \times (t - 1).$$

Це означає, що всі $t \times t$ підматриці матриці $\left\| \begin{array}{cc} B & C \end{array} \right\|$ містять принаймні один стовпець матриці B. Тому кожний мінор t-го порядку матриці $\left\| \begin{array}{cc} B & C \end{array} \right\|$ ділиться на $\langle B \rangle_1$. Тоді на підставі теореми Лапласа про розклад визначника матриці за елементами кількох рядків отримуємо, що $\langle B \rangle_1 \mid \det A$.

Очевидно, що це твердження буде правильним, якщо $t + k > n + 1$. $\square$

Із доведення цього твердження легко отримати такий результат.

Наслідок 3.1. *Якщо $n \times n$ матриця A містить нульову $t \times k$ підматрицю, причому $t + k > n$, то* $\det A = 0$. $\square$

Наслідок 3.2. *Якщо $n \times n$ матриця A має вигляд*

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \mathbf{0}_{(n-p)\times p} & A_{22} & A_{23} \end{matrix} \right\|,$$

де $\mathbf{0}_{(n-p)\times p}$ – нульова $(n-p)\times p$ матриця, причому $\langle A_{23}\rangle = 0$, то $\det A = 0$.

Доведення. Матриця $\left\| \begin{matrix} A_{22} & A_{23} \end{matrix} \right\|$ є квадратною, порядку $n-p$. Оскільки $\langle A_{23}\rangle = 0$, то за теоремою Лапласа $\det \left\| \begin{matrix} A_{22} & A_{23} \end{matrix} \right\| = 0$. Це означає, що всі мінори максимального порядку матриці $\left\| \begin{matrix} \mathbf{0}_{(n-p)\times p} & A_{22} & A_{23} \end{matrix} \right\|$ дорівнюють нулю. Звідси випливає, що $\det A = 0$. □

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ – $m \times n$ матриця, $m > n$. Позначимо через $\delta_k(A)$ найбільший спільний дільник мінорів максимального порядку цієї матриці, які містять її k останніх рядків, $k \leqslant n$.

Лема 3.1. *Якщо $U = \|u_{ij}\| \in \mathrm{GL}_{m-k}(R)$, то*

$$\delta_k(A) = \delta_k((U \oplus I_k)A).$$

Доведення. Розглянемо матрицю

$$B = (U \oplus I_k)A = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m-k.1} & \ldots & b_{m-k.n} \\ a_{m-k+1.1} & \ldots & a_{m-k+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Кожну підматрицю n-го порядку матриці B, яка містить її k останніх рядків, можна записати так:

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} b_{i_1 1} & \ldots & b_{i_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_{n-k} 1} & \ldots & b_{i_{n-k} n} \\ a_{m-k+1.1} & \ldots & a_{m-k+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|}_{B_{i_1, \ldots, i_{n-k}}} = \underbrace{\left\| \begin{matrix} u_{i_1 1} & \ldots & u_{i_1 m-k} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \mathbf{0} \\ u_{i_{n-k} 1} & \ldots & u_{i_{n-k}.m-k} & & \\ & & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{matrix} \right\|}_{U_{i_1, \ldots, i_{n-k}}} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-k.1} & \ldots & a_{m-k.n} \\ a_{m-k+1.1} & \ldots & a_{m-k+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

де $1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-k} \leqslant m-k$. Легко видно, що необхідною умовою відмінності від нуля мінора максимального (n-го) порядку матриці $U_{i_1,\dots,i_{n-k}}$ є присутність у ньому останніх k рядків цієї матриці. Розпишемо $\det B_{i_1,\dots,i_{n-k}}$ як суму добутків відповідних мінорів n-го порядку матриць $U_{i_1,\dots,i_{n-k}}$ та A. Із щойно зробленого зауваження випливає, що кожний відмінний від нуля доданок є добутком мінора матриці A, який містить останні її k рядків, на відповідний мінор матриці $U_{i_1,\dots,i_{n-k}}$. Це означає, що $\delta_k(A) | \det B_{i_1,\dots,i_{n-k}}$. Звідси випливає,що

$$\delta_k(A) | \delta_k((U \oplus I_k)A).$$

З аналогічних міркувань

$$\delta_k(B) | \delta_k((U^{-1} \oplus I_k)B) = \delta_k((U^{-1} \oplus I_k)(U \oplus I_k)A) = \delta_k(A).$$

Оскільки н.с.д. визначається з точністю до асоційовності, то $\delta_k(A) = \delta_k(B)$. Доведеня завершено. □

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ – $m \times n$ матриця. Викреслимо її i-ий рядок та j-ий стовпець. Н.с.д. мінорів максимального порядку отриманої матриці позначимо через b_{ij}. Матрицю $A^* = \|b_{ij}\|$ називатимемо **доповнювальною матрицею матриці** A.

Твердження 3.2. *Нехай $A = \|a_{ij}\|$ – $n \times n$ матриця. Н.с.д. елементів кожної $t \times k$, $t + k > n$, підматриці матриці A^* є дільником* $\det A$.

Доведення. Нехай

$$\left\langle \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 = \beta,$$

де $t + k = n + 1$. Розглянемо матрицю

$$A_{tk} = \left\| \begin{matrix} a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t.k+1} & \dots & a_{tn} \end{matrix} \right\|,$$

яка є $t \times (t-1)$ підматрицею матриці A. У групі $\mathrm{GL}_t(R)$ існує така матриця U , що

$$UA_{tk} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{t.t-1} \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$(U \oplus I_{n-t})A = \left\| \begin{matrix} f_{11} & \dots & f_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & \dots & f_{2k} & c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ f_{31} & \dots & f_{3k} & c_{31} & c_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{t1} & \dots & f_{tk} & c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{t.t-1} \\ a_{t+1.1} & \dots & a_{t+1.k} & a_{t+1.k+1} & a_{t+1.k+2} & \dots & a_{t+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n.k+1} & a_{n.k+2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = C.$$

Зауважимо, що мінори b_{11} , b_{21} , $\dots$, b_{t1} ще можна охарактеризувати як всі мінори максимального порядку матриці

$$\left\| \begin{matrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = F_1,$$

які містять її останні $n - t$ рядки. Тобто

$$\delta_{n-t}(F_1) = (b_{11} \ , \ b_{21} \ , \ \dots \ , \ b_{t1}).$$

Позначимо через L_1 матрицю, отриману із матриці C шляхом викреслення її першого стовпця. Нехай $C^* = \|d_{ij}\|_1^n$. Оскільки $L_1 = (U \oplus I_{n-t})F_1$, то на підставі леми 3.1

$$\delta_{n-t}(F_1) = \delta_{n-t}(L_1).$$

При цьому

$$\delta_{n-t}(L_1) = (d_{11} \ , \ d_{21} \ , \ \dots \ , \ d_{t1}).$$

Отже,

$$(b_{11} \ , \ b_{21} \ , \ \dots \ , \ b_{t1}) = (d_{11} \ , \ d_{21} \ , \ \dots \ , \ d_{t1}).$$

Аналогічно показуємо, що

$$(b_{1i} \ , \ b_{2i} \ , \ \dots \ , \ b_{ti}) = (d_{1i} \ , \ d_{2i} \ , \ \dots \ , \ d_{ti}),$$

$i = 1, \ \dots \ , k$. Це означає, що

$$\beta | \left\langle \begin{matrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 ,$$

Отже, $\beta | (d_{11} \ , \ d_{12} \ , \ \dots \ , \ d_{1k})$. Зваживши на те, що

$$\det C = f_{11}d_{11} - f_{12}d_{12} + \ \cdots \ (-1)^{k+1} f_{1k}d_{1k},$$

отримуємо $\beta|\det C$. Зауваживши, що $\det A$ відрізняється від $\det C$ лише оборотним множником, приходимо до висновку, що $\beta|\det A$.

Якщо $t \times k$ підматриця матриці A^* знаходиться не в лівому верхньому куті, то перестановкою рядків та стовпців матриці A, отримаємо матрицю B, в якій виділена підматриця знаходиметься у потрібному місці. Тоді $\beta|\det B$. Оскільки $\det A = \pm\det B$, то $\beta|\det A$. Доведеня завершено. □

Оскільки елементи взаємної матриці A_* матриці A відрізняються від елементів доповнювальної матриці лише знаком та розташуванням елементів, отримуємо.

Наслідок 3.3. *Н.с.д. елементів кожної* $t\times k$, $t+k > n$, *підматриці взаємної матриці* A_* *є дільником* $\det A$. □

Твердження 3.3. *Нехай* $A = \|a_{ij}\|$ – $m\times n$ *матриця. Тоді н.с.д. елементів кожної* $t\times k$, $t+k > \min(m,n)$, *підматриці матриці* $A^* = \|b_{ij}\|$ *є дільником* $\langle A\rangle$.

Доведення. Для визначеності покладемо $m \geqslant n$. Випадок, коли $m = n$, розглянуто в твердженні 3.2 Тому нехай $m > n$. Позначимо

$$\beta = \left\langle \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 .$$

Розглянемо $n \times n$ підматрицю матриці A вигляду

$$C = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & \dots & a_{tn} \\ * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * \end{matrix} \right\| .$$

І нехай $C^* = \| d_{ij} \|_1^n$ – її доповнювальна матриця. Оскільки $b_{ij}|d_{ij}$, $i = 1 , \dots , t$, $j = 1 , \dots , k$, то

$$\beta \left| \left\| \begin{matrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{matrix} \right\| \right. .$$

Тоді, якщо

$$\left\langle \begin{matrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{t1} & \dots & d_{tk} \end{matrix} \right\rangle_1 = \gamma,$$

то $\beta|\gamma$. Згідно з твердженням 3.2 $\gamma|\det C$, а отже, і $\beta|\det C$.

Тепер розглянемо підматрицю матриці A

$$D_j = \left\| \begin{array}{ccc} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 1} & \dots & a_{i_n n} \end{array} \right\|,$$

$1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant m$, яка не містить її j -го рядка, $1 \leqslant j \leqslant t$. За означенням b_{j1} дорівнює н.с.д. мінорів $(n-1)$ -го порядку матриці

$$A_{j1} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1.2} & \cdots & a_{j-1.n} \\ a_{j+1.2} & \cdots & a_{j+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Оскільки матриця

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 2} & \dots & a_{i_n n} \end{array} \right\|$$

є підматрицею матриці A_{j1} , то

$$b_{j1} \left| \left\langle \begin{array}{ccc} a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 2} & \dots & a_{i_n n} \end{array} \right\rangle \right..$$

Звідси випливає, що $b_{j1}|\det D_j$. Оскільки $\beta|b_{j1}$, то $\beta|\det D_j$. Тобто $\beta|\langle A\rangle$. Зауваживши, що розташування вибраної $t \times k$ підматриці матриці A^*, як і у твердженні 3.2, не впливає на кінцевий результат, завершуємо доведення. □

Нехай U – примітивна $m \times n$, $m \leqslant n$, матриця. Позначимо через $U_{i_1 \dots i_k}$ матрицю, яка складається зі стовпців $i_1, ..., i_k$ матриці U, $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

Твердження 3.4. *Н.с.д. мінорів максимального порядку матриці U, які містять матрицю $U_{i_1 \dots i_k}$, дорівнює $\langle U_{i_1 \dots i_k} \rangle$.*

Доведення. Якщо $k = m$, твердження є очевидним. Нехай $1 \leqslant k < m$. Домножимо матрицю U справа на таку оборотну матрицю L, що

$$UL = \left\| \begin{array}{cc} S & U_{i_1 \dots i_k} \end{array} \right\|.$$

Для матриці $U_{i_1 \ldots i_k}$ існує така оборотна матриця K, що

$$KU_{i_1 \ldots i_k} = \left\| \begin{array}{ccc} u_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & u_k \\ & \mathbf{0} & \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} U'_{i_1 \ldots i_k} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $U'_{i_1 \ldots i_k}$ – $k \times k$ матриця. Тоді

$$KUL = K \left\| \begin{array}{cc} S & U_{i_1 \ldots i_k} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} * & U'_{i_1 \ldots i_k} \\ T & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Кожний мінор максимального порядку матриці KUL, який містить матрицю

$$\left\| \begin{array}{c} U'_{i_1 \ldots i_k} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

має вигляд

$$\det \left\| \begin{array}{cc} * & U'_{i_1 \ldots i_k} \\ T_{m-k} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де T_{m-k} – $(m-k) \times (n-k)$ – підматриця матриці T. Тому н.с.д. таких мінорів дорівнює $u_1 \ldots . u_k \tau$, де $\tau = \langle T \rangle$. Оскільки матриця KUL є примітивною, тому примітивною буде і матриця T. Отже, $\tau = 1$. Врахувавши тепер, що кожний необхідний нам мінор максимального порядку матриці U відрізняється від відповідного йому мінора матриці KUL щонайбільше як на одиницю кільця R, а саме на визначник оборотної матриці, переконуємось у правильності нашого твердження. □

Введемо скорочене позначення мінорів матриці $A = \|a_{ij}\|$:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_{n-p} \end{pmatrix} = \det \left\| \begin{array}{ccc} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_p k_1} & \ldots & a_{i_p k_p} \end{array} \right\|.$$

Наслідок 3.4. *Нехай $U = \|U_{ij}\|_1^2$ – оборотна блочна матриця, де U_{ij} – $n \times n$ матриці. Нехай також $U^{-1} = \|V_{ij}\|_1^2$ і $\delta_k(U_{ij})$, $\delta_k(V_{ij})$ – н.с.д. мінорів k-го порядку відповідно матриць U_{ij}, V_{ij}. Тоді*

$$\delta_k(U_{11}) = \delta_k(V_{22}), \;\; \delta_k(U_{21}) = \delta_k(V_{21}), \;\; \delta_k(U_{12}) = \delta_k(V_{12}), \;\; \delta_k(U_{22}) = \delta_k(V_{11}),$$

$k = 1, \ldots, n.$

Доведення. Мінори матриць U, U^{-1} пов'язані наступним чином:

$$U^{-1}\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \pm(\det U)^{-1} U \begin{pmatrix} k'_1 & \dots & k'_{n-p} \\ i'_1 & \dots & i'_{n-p} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

де $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ разом із $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{n-p}$ та $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ разом із $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{n-p}$ утворюють повну систему індексів $1, 2, \ldots, 2n$ (дивись 30 с. монографії [79]). Використавши твердження 3.4 та формулу (3.1), завершуємо доведення. □

Зваживши на теорему 2.2, цей наслідок можна сформулювати ще так.

Наслідок 3.4*. *Форми Сміта матриць U_{11} та V_{22}, U_{12} та V_{12}, U_{21} та V_{22}, U_{22} та V_{11} збігаються, тобто відповідні матриці еквівалентні.* □

Аналогічний результат отримано в [73].

Твердження 3.5. *Нехай $U = \|u_{ij}\|_1^n$ і $U^{-1} = V = \|v_{ij}\|_1^n$, причому*

$$U' = \begin{Vmatrix} u_{i_1k_1} & u_{i_1k_2} & \dots & u_{i_1k_p} \\ u_{i_2k_1} & u_{i_2k_2} & \dots & u_{i_2k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i_sk_1} & u_{i_sk_2} & \dots & u_{i_sk_p} \end{Vmatrix}$$

і

$$V' = \begin{Vmatrix} v_{k'_1i'_1} & v_{k'_1i'_2} & \dots & v_{k'_1i'_{n-s}} \\ v_{k'_2i'_1} & v_{k'_2i'_2} & \dots & v_{k'_2i'_{n-s}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{k'_{n-p}i'_1} & v_{k'_{n-p}i'_2} & \dots & v_{k'_{n-p}i'_{n-s}} \end{Vmatrix}.$$

Тоді, якщо $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ разом із $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{n-s}$ і $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ разом із $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{n-p}$ утворюють повну систему індексів $1, 2, \ldots, n$, то $\langle U' \rangle = \langle V' \rangle$.

Доведення. Припустимо, що $s \geq p$. Із рівності (3.1) випливає, що мінори

$$U\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix}, \quad V\begin{pmatrix} k'_1 \dots k'_{n-p} \\ i'_1 \dots i'_{n-p} \end{pmatrix}$$

є асоційовними в кільці R. При цьому мінори $V\begin{pmatrix} k'_1 \dots k'_{n-p} \\ i'_1 \dots i'_{n-p} \end{pmatrix}$ можна охарактеризувати як усі мінори, що містять підматрицю V'. Використавши твердження 3.4, завершуємо розгляд цього випадку. Випадок $s < p$ аналогічний. □

Твердження 3.6. *Нехай $a_1, \ldots, a_n$ – елементи кільця Безу. Тоді існує така $(n-1) \times n$ матриця, в якій мінори $(n-1)$-го порядку дорівнюють $a_1, \ldots, a_n$.*

Доведення. Спершу розглянемо випадок, коли $n = 3$. Якщо $(a_1, a_2) \neq 0$, то шуканою буде матриця

$$\left\| \begin{matrix} (a_1, a_2) & ua_3 & -va_3 \\ 0 & \frac{a_1}{(a_1,a_2)} & \frac{a_2}{(a_1,a_2)} \end{matrix} \right\|,$$

де елементи u, v задовольняють рівність

$$u\frac{a_2}{(a_1, a_2)} + v\frac{a_1}{(a_1, a_2)} = 1.$$

Якщо $a_1 = a_2 = 0$, то такою буде матриця

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{matrix} \right\|.$$

Нехай $(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \delta$. Припустимо, що існує така $(n-2) \times (n-1)$ матриця S, мінорами $(n-2)$-го порядку якої є

$$\frac{a_1}{\delta}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{\delta}.$$

Оскільки

$$\left(\frac{a_1}{\delta}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{\delta}\right) = 1,$$

то існують такі $v_1, \ldots, v_{n-1}$, що матриця

$$\left\| \begin{matrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_{n-1} \\ & & S & \end{matrix} \right\|$$

матиме визначник 1. Тоді шуканою буде матриця

$$\left\| \begin{matrix} \delta & v_1 a_n & v_2 a_n & \ldots & v_{n-1} a_n \\ \mathbf{0} & & & S & \end{matrix} \right\|.$$

Доведення завершене. □

Лема 3.2. *Нехай*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{matrix} \right\|$$

– примітивна матриця, в якій $\alpha_i |\ \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. *Тоді*

$$(a_{n-i+1,i},\ \alpha_i) = 1, i = 1,\ \dots\ ,\ n.$$

Доведення. Із примітивності матриці A випливає примітивність всіх її стовпців, зокрема останнього. Це означає, що $(a_{1n},\ \alpha_n) = 1$. Отже, існують такі u та v, що $ua_{1n} + v\alpha_n = 1$. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} u & \mathbf{0} & v \\ \mathbf{0} & I_{2n-2} & \mathbf{0} \\ -\alpha_n & \mathbf{0} & a_{1n} \end{matrix} \right\| A =$$

$$= \left\| \begin{matrix} ua_{11} & ua_{12} & \dots & ua_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_{n-1} & 0 \\ -\alpha_n a_{11} & -\alpha_n a_{12} & \dots & -\alpha_n a_{1,n-1} & 0 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = A_1.$$

З примітивності матриці A_1 випливає, що

$$(a_{2,n-1},\ \alpha_{n-1}) = 1$$

і подальше доведення цієї леми виконується за щойно описаною схемою. □

Твердження 3.7. *Нехай R – кільце елементарних дільників і A – $m \times s$ матриця над R з формою Сміта*

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_s),$$

де $\alpha_{k+1} \notin U(R)$, $m \geq s$. Тоді для того, щоб матриця A була підматрицею деякої оборотної $n \times n$ матриці, необхідно та достатньо, щоб $n \geq m+s-k$.

Доведення. Необхідність. Нехай матриця A є підматрицею оборотної $n\times n$ матриці U. Без обмеження загальності можемо вважати, що матриця U має вигляд

$$U=\left\|\begin{array}{cc} A & B\\ C & D\end{array}\right\|,$$

де B, C, D – матриці відповідних розмірів. Нехай P та Q – перетворювальні матриці матриці A, тобто

$$PAQ=\left\|\begin{array}{cc} I_k & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & S\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}}\end{array}\right\|=\Phi,$$

де $S=\operatorname{diag}(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_s)$. Тоді

$$\left\|\begin{array}{cc} P & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_{n-m}\end{array}\right\| U \left\|\begin{array}{cc} Q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_{n-s}\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc} \Phi & PB\\ CQ & D\end{array}\right\|.$$

Нехай F – $n\times(s-k)$ матриця, яка складається з $k+1, k+2,\ldots,s$ стовпців матриці

$$\left\|\begin{array}{cc} \Phi & PB\\ CQ & D\end{array}\right\|.$$

Тоді

$$F=\left\|\begin{array}{c} \mathbf{0}\\ S\\ \mathbf{0}\\ C_k\end{array}\right\|,$$

де C_k – підматриця матриці C. Оскільки $\alpha_{k+1}|\alpha_j$, $j=k+1,\ldots,s$, то α_{k+1} ділитиме всі мінори максимального $s-k$-го порядку матриці F, в яких міститься хоча б один із перших m рядків цієї матриці. Отже, через примітивність матриці F серед її мінорів максимального порядку повинен бути мінор, який не містить перших m рядків цієї матриці. Це означає, що $(n-m)\times(s-k)$ матриця C_k містить не менш ніж $s-k$ рядків. Тобто

$$n-m\geq s-k \;\Rightarrow\; n\geq m+s-k.$$

Достатність. Нехай

$$U=\left\|\begin{array}{cc} P^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_{s-k}\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{ccc} I_k & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & S & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{m-k}\\ \mathbf{0} & I_{s-k} & \mathbf{0}\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cc} Q^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_{m-k}\end{array}\right\|.$$

Матриця U і буде прикладом шуканої оборотної матриці порядку $n=m+s-k$. Доведення завершене. □

Із доведення цього твердження випливають такі результати, за якими можна оцінити кількість одиничних інваріантних множників підматриць примітивної матриці в залежності від розмірів цих підматриць.

Наслідок 3.5. *Нехай A – $m \times s$ матриця, $m \geq s$, яка має l відмінних від одиниці інваріантних множників. Тоді матриця A доповнюється до примітивної l рядками.* □

Наслідок 3.6. *Якщо $m \times s$ матриця, $m \geq s$, доповнюється до примітивної l рядками, то кількість відмінних від одиниці її інваріантних множників не перевищує l.* □

3.2. Інваріантні множники блочно-трикутних матриць та їх діагональних блоків

У 1952 році У. Рот [80] вказав критерії розв'язності лінійних матричних рівняннь типу Сильвестра:

$$AX - YB = C, \tag{3.2}$$

$$AX - XB = C. \tag{3.3}$$

А саме, довів, що матричне рівняння (3.2) над полем має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні, а рівняння (3.3) – подібні між собою. Є зрозумілим бажання інших дослідників узагальнити ці елегантні результати. Серед багатьох праць, присвячених цій тематиці, виділимо лише декілька. Так у [81] доведено, що результат Рота, що стосується розв'язності рівняння (3.2) (надалі властивість Рота), залишається правильним для комутативних областей головних ідеалів. У [82] цей результат узагальнено для довільних комутативних кілець. Підкреслюючи важливість отриманих результатів, у праці [83] було введено поняття кілець з властивістю Рота як таких, над якими є правильною властивість Рота. Зокрема, прикладом таких кілець є комутативні області елементарних дільників. Над такими кільцями еквівалентність матриць рівносильна рівності (з точністю до асоційовності) відповідних інваріантних множників цих матриць. Тобто, в цьому випадку, задача розв'язності матричного рівняння (3.2) зводиться до встановлення взаємозв'язку між інваріантними множниками блочно-трикутної матриці з її діагональними блоками. Перший результат у цьому напрямку отримав М. Ньюмен [84], який показав, що над комутативними областями головних ідеалів, коли

$$(\det A,\ \det B) = 1,$$

множина елементарних дільників матриці

$$\left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{matrix} \right\|$$

є об'єднанням елементарних дільників матриць A і B. Цей підрозділ присвячений дослідженню взаємозв'язку між інваріантними множниками матриць

$$\left\| \begin{matrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{matrix} \right\|,\ A,\ B.$$

Нехай R – кільце елементарних дільників.

Теорема 3.1. *Нехай D_1 та D_3 – $k \times k$ неособливі матриці, що мають, відповідно, форми Сміта*

$$\Delta_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_k),\ \ \Delta_3 = \operatorname{diag}(\beta_1,\ \beta_2,\ \ \ldots\ ,\beta_k),$$

причому

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \\ D_2 & D_3 \end{matrix} \right\| \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ \ldots\ ,\ 1}_{k},\ \underbrace{\varphi\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi}_{k}).$$

Тоді інваріантні множники α_i та β_j можна вибрати так, щоб

$$\alpha_t\beta_{k-t+1} = \varphi, \quad i = 1,\ \ldots\ ,k.$$

Доведення. Для матриць D_1 та D_3 існують такі оборотні матриці P_1, Q_1, P_3, Q_3, що

$$P_1 D_1\, Q_1 = \Delta_1, P_3 D_3 Q_3 = \Delta_3.$$

Тоді

$$\left\| \begin{matrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_3 \end{matrix} \right\| D \left\| \begin{matrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_1 D_1 Q_1 & \mathbf{0} \\ P_3 D_2 Q_1 & P_3 D_3 Q_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ D_2' & \Delta_3 \end{matrix} \right\|.$$

Отже, без обмеження загальності, можна вважати, що матриця D має вигляд

$$D = \left\| \begin{array}{cccccccccccc}
\alpha_1 & & & & & \mathbf{0} & & & & & & \mathbf{0} \\
 & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & \alpha_{s-1} & & & & & & & & & \\
 & & & \alpha_s & & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \\
\mathbf{0} & & & & & \alpha_k & & & & & & \\
a_{11} & \dots & a_{1.s-1} & a_{1s} & \dots & a_{1k} & \beta_1 & & & & & \mathbf{0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & & & & \\
a_{t-1.1} & \dots & a_{t-1.s-1} & a_{t-1.s} & \dots & a_{t-1.k} & & & \beta_{t-1} & & & \\
a_{t1} & \dots & a_{t.s-1} & a_{ts} & \dots & a_{tk} & & & & \beta_t & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \ddots & \\
a_{k1} & \dots & a_{k.s-1} & a_{ks} & \dots & a_{kk} & \mathbf{0} & & & & & \beta_k
\end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ A & \Delta_3 \end{array} \right\|.$$

Нехай $t+s = k+1$. На першому кроці покажемо, що $\varphi|\alpha_s\beta_t$. Нехай $(\alpha_s\beta_t, \varphi) = \tau_s$. Тобто $\varphi = \tau_s\sigma_s$, причому

$$\left(\frac{\alpha_s\beta_t}{\tau_s},\ \sigma_s\right) = 1. \tag{3.4}$$

Доведемо, що σ_s є дільником всіх мінорів k-го порядку матриці D. Викреслимо в цій матриці t-ий рядок та s-ий стовпець. Отриману матрицю позначимо через D_{st} :

$$D_{st} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccccccccccc}
\alpha_1 & & & & & \mathbf{0} & & & & & & \mathbf{0} \\
 & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & \alpha_{s-1} & & & & & & & & & \\
 & & & \alpha_{s+1} & & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \\
\mathbf{0} & & & & & \alpha_k & & & & & & \\
a_{11} & \dots & a_{1.s-1} & a_{1.s+1} & \dots & a_{1k} & \beta_1 & & & & & \mathbf{0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \ddots & & & & \\
a_{t-1.1} & \dots & a_{t-1.s-1} & a_{t-1.s+1} & \dots & a_{t-1.k} & & & \beta_{t-1} & & & \\
a_{t+1.1} & \dots & a_{t+1.s-1} & a_{t+1.s+1} & \dots & a_{t+1.k} & & & & \beta_{t+1} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \ddots & \\
a_{k1} & \dots & a_{k.s-1} & a_{k.s+1} & \dots & a_{kk} & \mathbf{0} & & & & & \beta_k
\end{array} \right\|.$$

Нехай $d_{st}^{(k-1)}$ – довільний мінор $(k-1)$-го порядку матриці D_{st}. Оскільки

$$D \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ \dots \ , 1}_{k}, \ \varphi \ , \ \dots \ , \varphi),$$

то кожний мінор $(k+1)$-го порядку матриці D ділиться на φ, зокрема, й мінор $\alpha_s \beta_t d_{st}^{(k-1)}$. Тому

$$\sigma_s | \frac{\alpha_s \beta_t}{\tau_s} d_{st}^{(k-1)}.$$

Із рівності (3.4) випливає, що $\sigma_s | d_{st}^{(k-1)}$. Таким чином, σ_s є дільником всіх мінорів $(k-1)$-го порядку матриці D_{st}, зокрема, й

$$\sigma_s| \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-1} \ \beta_{t+1} \ \dots \ \beta_{k-1} \ \Rightarrow \ \sigma_s| \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{k-1};$$

$$\sigma_s| \ \alpha_1 \alpha_2 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-1} \ \beta_{t+1} \ \dots \ \beta_{k-2} \ \Rightarrow \ \sigma_s| \ \alpha_1 \alpha_2 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{k-2};$$

$$\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots$$

$$\sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_{s-1} \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-1} \ \Rightarrow \ \sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_{s-1} \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_t.$$

А також

$$\sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_{s-1} \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-1} \ \Rightarrow \ \sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_s \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-1};$$

$$\sigma_s|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \alpha_{s+1} \beta_1 \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-2} \ \Rightarrow \ \sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_{s+1} \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{t-2};$$

$$\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots$$

$$\sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_{s-1} \alpha_{s+1} \dots \ \alpha_{k-1} \beta_1 \ \Rightarrow \ \sigma_s| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \ \alpha_{k-1} \ \beta_1.$$

Кожний мінор k-го порядку, складений з діагональних елементів матриці D, має вигляд $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_{1q}}$, де індекси

$$i_1, \ \dots \ , i_p, \ j_1, \ \dots \ , j_q \in \{1, \ \dots \ , k\},$$

$p + q = k$. Оскільки $\alpha_1 \dots \alpha_p \mid \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p}$ й $\beta_1 \dots \beta_q \mid \beta_{j_1} \dots \beta_{j_{1q}}$, то

$$\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q | \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_{1q}}.$$

Тоді з виписаних подільностей випливає, що $\sigma_s | \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_{1q}}$. Нехай $l, \ m$ такі індекси, що $1 \leqslant l \leqslant s, \ 1 \leqslant m \leqslant t$. Тоді $\varphi | \alpha_l \beta_m d_{lm}^{(k-1)}$, де $d_{lm}^{(k-1)}$ – довільний мінор $(k-1)$-го порядку матриці D_{lm}. Оскільки $\alpha_l | \ \alpha_s$, і $\beta_m | \ \beta_t$, то $\varphi| \ \alpha_s \beta_t d_{lm}^{(k-1)}$. Тому, як і в попередньому випадку, $\sigma_s| \ d_{lm}^{(k-1)}$. Таким чином, σ_s є дільником всіх мінорів $(k-1)$-го порядку матриць

$$D_{11} \ , \ \dots \ , \ D_{1s},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$D_{t1}\,, \quad \dots \quad , \; D_{ts}.$$

Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{matrix} A \\ \Delta_1 \end{matrix} \right\|.$$

Нехай

$$\left\| \begin{matrix} A \\ \Delta_1 \end{matrix} \quad \right\|^* = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1s} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{ts} & \dots & b_{tk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2k.1} & \dots & b_{2k.s} & \dots & b_{2k.k} \end{matrix} \right\|$$

– її доповнювальна матриця. Оскільки σ_s є дільником всіх мінорів $(k-1)$-го порядку матриці D_{ij}, то $\sigma_s | b_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant t,\ 1 \leqslant j \leqslant s$. Отже,

$$\sigma_s | \left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & \dots & b_{ts} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $t + s = k + 1 > k$, то згідно з твердженням 3.3 σ_s є дільником всіх мінорів k-го порядку матриці $\left\| \begin{matrix} A \\ \Delta_1 \end{matrix} \right\|$, а отже, й матриці $\left\| \begin{matrix} \Delta_1 \\ A \end{matrix} \right\|$.

Аналогічно міркуючи, показуємо, що σ_s ділить всі мінори k-го порядку матриці $\left\| \begin{matrix} A & \Delta_3 \end{matrix} \right\|$.

Розглянемо мінор k-го порядку $\alpha_1 \dots \alpha_\mu \beta_1 \dots \beta_\nu \det K,\ \mu \geqslant \nu$, де K – підматриця відповідного порядку матриці A. Згідно зі щойно доведеним

$$\sigma_s | \ \alpha_1 \dots \alpha_\mu \left\langle \begin{matrix} a_{1.\mu+1} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu.\mu+1} & \dots & a_{\nu k} \\ a_{\nu+1.\mu+1} & \dots & a_{\nu+1.k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k.\mu+1} & \dots & a_{kk} \end{matrix} \right\rangle.$$

Тоді тим більше

$$\sigma_s | \ \alpha_1 \dots \alpha_\mu \left\langle \begin{matrix} a_{\nu+1.\mu+1} & \dots & a_{\nu+1.k} \\ a_{\nu+2.\mu+1} & \dots & a_{\nu+2.k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k.\mu+1} & \dots & a_{kk} \end{matrix} \right\rangle e\beta_1 \dots \beta_\nu.$$

Отже, $\sigma_s | \alpha_1 \dots \alpha_\mu \beta_1 \dots \beta_\nu \det K$. Якщо ж $\nu > \mu$, то шуканий результат отримуємо із того, що

$$\sigma_s | \ \beta_1 \dots \beta_\nu \left\langle \begin{matrix} a_{\nu+1.1} & \dots & a_{\nu+1.k} \\ a_{\nu+2.1} & \dots & a_{\nu+2.k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{matrix} \right\rangle .$$

Аналогічно показуємо, що $\sigma_s | \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_{1q}}$, де $i_1, \ \dots \ , i_p, \ j_1, \ \dots \ , j_q \in \{1, \ \dots \ , k\}$, $p + q = k$. Таким чином, ми довели, що σ_s є дільником всіх мінорів k-го порядку матриці D. Взявши до уваги, що

$$D \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ \dots \ , 1}_{k}, \ \varphi \, , \ \dots \ , \ \varphi), \tag{3.5}$$

отримуємо, що $\sigma_s \in U(R)$. Згадавши, що $\varphi = \tau_s \sigma_s$, одержуємо, що φ і τ_s є ассоційовними між собою. Оскільки н.с.д. елементів визначається з точністю до асоційовності, то $(\alpha_s \beta_t, \ \varphi) = \varphi$. Звідси випливає, що

$$\varphi \mid \alpha_s \beta_t, \ \ t + s = k + 1.$$

Отже, $\alpha_s \beta_t = \varphi u_s$. Тоді

$$\det D = \alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_k \beta_1 \beta_2 \cdots \ \beta_k =$$

$$= (\alpha_1 \beta_k)(\alpha_2 \beta_{k-1}) \ \cdots \ (\alpha_k \beta_1) = \varphi^k u_1 u_2 \ \cdots \ u_k.$$

З іншого боку, згідно з (3.5) $\det D = \varphi^k e$, де $e \in U(R)$. Таким чином, $u_1 u_2 \ \cdots \ u_k = e \in U(R)$. Зауваживши, що інваріантні множники матриці вибирають з точністю до асоційовності, приходимо до висновку, що можемо підібрати α_i і β_j так, щоб

$$\alpha_1 \beta_k = \alpha_2 \beta_{k-1} = \cdots = \alpha_k \beta_1 = \varphi.$$

Теорему доведено. □

Для розгляду загального випадку встановимо декілька допоміжних тверджень.

Лема 3.3. *Якщо*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1.k-1} & a_{1k} & a_{1.k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{s.k-1} & a_{sk} & a_{s.k+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s+2.1} & \dots & a_{s+2.k-1} & a_{s+2.k} & a_{s+2.k+1} & \dots & a_{s+2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m.k-1} & a_{mk} & a_{m.k+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \operatorname{diag}(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_k),$$

де $k = \min(m,\ n)\ ,\ \ \alpha_i \mid \alpha_{i+1}\ ,\ i = 1,\ \ldots\ ,\ k-1,$ *то*

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \ldots & a_{1.k-1} & a_{1.k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{s.k-1} & a_{s.k+1} & \ldots & a_{sn} \\ a_{s+2.1} & \ldots & a_{s+2.k-1} & a_{s+2.k+1} & \ldots & a_{s+2.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{m.k-1} & a_{m.k+1} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \operatorname{diag}(\alpha_2\ ,\ \alpha_3\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_k).$$

Доведення. Легко переконатись у правильності таких еквівалентностей

$$A \sim \left\| \begin{array}{ccccccc} a_{11} & \ldots & a_{1.k-1} & 0 & a_{1.k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{s.k-1} & 0 & a_{s.k+1} & \ldots & a_{sn} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{s+2.1} & \ldots & a_{s+2.k-1} & 0 & a_{s+2.k+1} & \ldots & a_{s+2.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{m.k-1} & 0 & a_{m.k+1} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & \ldots & a_{1.k-1} & a_{1.k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{s1} & \ldots & a_{s.k-1} & a_{s.k+1} & \ldots & a_{sn} \\ 0 & a_{s+2.1} & \ldots & a_{s+2.k-1} & a_{s+2.k+1} & \ldots & a_{s+2.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m1} & \ldots & a_{m.k-1} & a_{m.k+1} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{diag}(\beta_2\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k) \end{array} \right\|,$$

де

$$A_1 \sim \operatorname{diag}(\beta_2,\ \ldots\ ,\beta_k),$$

$\beta_i \mid \beta_{i+1}\ ,\ i = 2,\ \ldots\ ,k-1$. Звідси випливає, що α_i і β_i, $i = 2,\ \ldots\ ,k$, асоційовні між собою. □

Лема 3.4. *Нехай*

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \sim \operatorname{diag}(\ \alpha_1,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\alpha_n) = \Delta,$$

де $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots , n-1$. *Тоді*

$$B = \left\| \begin{matrix} A_{11} & \mathbf{0} & A_{12} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ A_{21} & \mathbf{0} & A_{22} \end{matrix} \right\| \sim \operatorname{diag}(1, \ \alpha_1, \ \alpha_2 \ , \ \dots \ , \alpha_n).$$

Доведення. Існують такі оборотні матриці $P, \ Q, U, \ V$, що

$$PBQ = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{matrix} \right\| = B_1, \ UAV = \Delta.$$

Тоді

$$B \sim B_1 \sim \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{matrix} \right\| B_1 \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & UAV \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{matrix} \right\| = \operatorname{diag}(1, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \dots \ , \alpha_n),$$

що і потрібно довести. □

Теорема 3.2. *Нехай*

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 & \mathbf{0} \\ D_2 & D_3 \end{matrix} \right\| \sim \operatorname{diag}(\overbrace{1, \ \dots \ , \ 1 \ , \ \underbrace{\varphi \ , \ \dots \ , \ \varphi}_{s}}^{p+q}),$$

$\varphi \neq 0$, *де* D_1 *та* D_3 *– квадратні матриці з формами Сміта*

$$\Delta_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \dots \ , \alpha_q), \Delta_3 = \operatorname{diag}(\beta_1, \ \beta_2, \ \dots \ , \beta_p),$$

відповідно. Тоді інваріантні множники α_i *та* β_j *можна підібрати так, що у випадку*

1) $p \leq s \leq q$, *матимемо*

$$\alpha_1 \ = \ \alpha_2 \ = \ \dots \ = \alpha_{q-s} = 1,$$

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi,$$

$$\alpha_{q-s+p+1} \ = \ \alpha_{q-s+p+2} \ = \ \dots \ = \ \alpha_q = \varphi;$$

2) $p, q \geq s$,

$$\alpha_1 \ = \ \alpha_2 \ = \ \dots \ = \alpha_{q-s} = 1,$$

$$\beta_1 \ = \ \beta_2 \ = \ \dots \ = \beta_{p-s} = 1,$$

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi;$$

3) $p, q \leq s$,

$$\alpha_1\beta_{q+p-s} = \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \dots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi,$$

$$\alpha_{q+p-s+1} = \alpha_{q+p-s+2} = \dots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} \dots = \beta_p = \varphi.$$

Доведення. Нехай $p \leq s \leq q$. На підставі наслідку 3.6

$$\alpha_1 \ = \ \alpha_2 \ = \ \ldots \ = \alpha_{q-s} = 1.$$

Викресливши в матриці D перші $q - s$ рядків та стовпців, отримаємо матрицю

$$\left\| \begin{array}{cc} C_1 & \mathbf{0} \\ C_2 & D_3 \end{array} \right\|,$$

яка згідно з лемою 3.3 має форму Сміта

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ \ldots \ , \ 1}_{p} \, , \ \underbrace{\varphi \ , \ \ldots \ , \ \varphi}_{s}).$$

Використавши лему 3.4, отримаємо

$$\left\| \begin{array}{c|cc} C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & E_{s-p} & \mathbf{0} \\ C_2 & \mathbf{0} & D_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} C_1' & \mathbf{0} \\ C_2' & D_3' \end{array} \right\| \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ \ldots \ , \ 1}_{s} \, , \ \underbrace{\varphi \ , \ \ldots \ , \ \varphi}_{s} \,),$$

де

$$C_1' \sim \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_{q-s+1}, \ \alpha_{q-s+2}, \ \ldots \ , \alpha_q}_{s}),$$

$$D_3' \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ \ldots \ , 1}_{s-p} \, , \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots \ , \beta_p).$$

На підставі теореми 3.1

$$\alpha_{q-s}\beta_p = \alpha_{q-s+1}\beta_{p-1} = \cdots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi;$$

$$\alpha_{q-s+p+1} \ = \ \alpha_{q-s+p+2} \ = \ \ldots \ = \ \alpha_q = \varphi.$$

Нехай $p, q \geq s$. Знову ж таки, згідно з наслідком 3.6

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{q-s} = 1,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{p-s} = 1.$$

Викресливши рядки та стовпці, в яких знаходяться ці одиниці, та використавши лему 3.3, отримаємо

$$\left\| \begin{array}{cc} F_1 & \mathbf{0} \\ F_2 & F_3 \end{array} \right\| \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ \ldots \ , \ 1}_{s} \, , \ \underbrace{\varphi \ , \ \ldots \ , \ \varphi}_{s} \,),$$

де

$$F_1 \sim \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_{q-s+1}, \ \alpha_{q-s+2}, \ldots, \alpha_q}_{s}),$$

$$F_3 \sim \mathrm{diag}(\underbrace{\beta_{p-s+1}, \beta_{p-s+2}, \dots, \beta_p}_{s}).$$

Тоді на підставі теореми 3.1

$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \dots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi.$$

Нехай $p, q \le s$. Згідно з лемою 3.4

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} D_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{s-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline D_2 & \mathbf{0} & D_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{s-p} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & \mathbf{0} \\ H_2 & H_3 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s}, \underbrace{\varphi, \dots, \varphi}_{s}),$$

причому

$$H_1 \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-q}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q),$$

$$H_3 \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-p}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p).$$

Отже,

$$\alpha_1\beta_{q+p-s} = \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \dots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi,$$

$$\alpha_{q+p-s+1} = \alpha_{q+p-s+2} = \dots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} \dots = \beta_p = \varphi.$$

Теорему доведено. □

Зауваження. Випадок $q \le s \le p$ є симетричним до випадку $p \le s \le q$ і тому його не розглядаємо.

Якщо R – кільце головних ідеалів, то отримані результати можна використати для встановлення взаємозв'язку між інваріантними множниками неособливої блочно-трикутної матриці

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_1 & \mathbf{0} \\ D_2 & D_3 \end{array} \right\| \sim \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

з її діагональними блоками, коли

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$$

є попарно взаємно простими. Для цього застосуємо локально глобальний метод, який запропонував Л. Герстейн [85].

Нехай p – нерозкладний елемент кільця R. Через $R_{(p)}$ позначимо локалізацію кільця R за простим ідеалом (p). Тобто $R_{(p)}$ – кільце, яке складається з елементів вигляду $x = p^{\nu}\frac{a}{b}$, де $a,\ b$ – елементи кільця R, взаємно прості з p, $\nu \in N\bigcup\{0\}$. Оскільки

$$\Phi = I\varphi_1 \operatorname{diag}\left(1,\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ \ldots\ ,\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \times$$

$$\times \operatorname{diag}\left(1,\ \ 1,\ \frac{\varphi_3}{\varphi_2},\ \ldots\ ,\ \frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right)\ \cdots \operatorname{diag}\left(1,\ \ldots\ ,\ 1,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right),$$

то матрицю Φ можна записати як добуток матриць вигляду

$$\operatorname{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ p^{\mu},\ \ldots\ ,\ p^{\mu}).$$

Згідно з теоремою 5.6 з праці [85] матриця D у кільці $R_{(p)}$ матиме форму Сміта $\operatorname{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ p^{\mu},\ \ldots\ ,p^{\mu})$. Отже, інваріантні множники матриць D_1 і D_3 у кільці $R_{(p)}$ пов'язані між собою рівностями, які виписані в теоремі 3.2. Тоді, щоб знайти форми Сміта матриць D_1 і D_3 у кільці R, потрібно знайти форми Сміта матриць D_1 і D_3 у всіх локалізаціях кільця R по нерозкладних дільниках елемента φ_n та перемножити відповідні інваріантні множники цих матриць.

3.3. Форма Сміта деяких матриць

Нехай $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособлива d-матриця.

Лема 3.5. *Нехай S – $n \times m$ матриця і*

$$\Phi_i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big),$$

$i = 2, \ldots, n$. *Тоді, якщо $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то*

$$\Phi_i HS \overset{l}{\sim} \Phi_i S, \ \ i = 2, \ldots, n.$$

Доведення. Оскільки матриця Φ неособлива, то згідно з теоремою 2.6 група $\mathbf{G}_\Phi$ складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1.n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2.n-1} & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n.n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Отже, j-ий стовпець матриці H має вигляд

$$h_j = \left\| h_{1j} \quad \cdots \quad h_{jj} \quad \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1.j} \quad \cdots \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Тоді $\Phi_i h_j =$

$$= \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{1j} \cdots \frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \quad \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{jj} \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{j+1.j} \cdots \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij} \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j} h_{i+1.j} \cdots \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T =$$

$$= \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left\| \frac{\varphi_j}{\varphi_1} h_{1j} \ \cdots \ \frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \ h_{jj} \ \cdots \ h_{ij} \ \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} h_{i+1.j} \ \cdots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_i} h_{nj} \right\|^T,$$

$i = 2, \ldots, n, \ i > j$. Це означає, що всі елементи першого стовпця матриці $\Phi_i H$ діляться на $\frac{\varphi_i}{\varphi_1}$, другого на $\frac{\varphi_i}{\varphi_2}$, і т.д., $(i-1)$-го на $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$. Отже,

$$\Phi_i H = K_i \Phi_i,$$

де матриця K_i є часткою від ділення справа матриці $\Phi_i H$ на матрицю Φ_i. Оскільки матриця Φ_i неособлива і $H \in \mathrm{GL}_n(R)$, то і $K_i \in \mathrm{GL}_n(R)$. Отже,

$$K_i^{-1} \Phi_i H = \Phi_i.$$

Домножимо справа цю рівність на $n \times m$ матрицю S

$$K_i^{-1} \Phi_i H S = \Phi_i S.$$

Звідси випливає, що

$$\Phi_i S \overset{l}{\sim} \Phi_i H S,$$

$i = 2, \ldots, n.$ □

Позначимо

$$F_i = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1} \Big), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Лема 3.6. *Якщо $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то існують такі оборотні матриці H_i, що $F_i H = H_i F_i$, $i = 2, \ldots, n$.*

Доведення. Розглянемо матрицю

$$\Delta^i = \mathrm{diag}\Big(\varphi_{i-1}, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_i, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1} \Big).$$

Згідно з позначеннями леми 3.5

$$\Delta_i^i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big) = F_i.$$

Із доведення леми 3.5 випливає, що існує така оборотна матриця H_i, що $\Delta_i^i H = H_i \Delta_i^i$. Тобто $F_i H = H_i F_i$, $i = 2, \ldots, n$. □

Нехай $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця. Позначимо

$$P_{ij} = \left\| \begin{array}{cccc} p_{ij} & p_{i.j+1} & \ldots & p_{in} \\ p_{i+1.j} & p_{i+1.j+1} & \ldots & p_{i+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \ldots & p_{nn} \end{array} \right\|, \ P_j = \left\| \begin{array}{cccc} p_{1j} & p_{1.j+1} & \ldots & p_{1n} \\ p_{2j} & p_{2.j+1} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \ldots & p_{nn} \end{array} \right\|$$

– її підматриці, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Форма Сміта матриці P_{ij} має вигляд

$$S(P_{ij}) = \left\| \begin{array}{cc} Q_j^i & \mathbf{0} \end{array} \right\|, Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \ldots, q_{j,n-i+1}^i),$$

якщо $i > j$ та

$$S(P_{ij}) = \left\| \begin{array}{c} Q_j^i \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|, Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \ldots, q_{j,n-j+1}^i),$$

якщо $i \leqslant j$.

Твердження 3.8. *Форма Сміта матриці $F_i P_j$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, дорівнює*

$$\left\| \begin{array}{c} \mathrm{E}_j^i \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $\mathrm{E}_j^i =$

$$= \begin{cases} \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j1}^i\right), \ldots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j,n-i+1}^i\right)\right) \oplus \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} E_{i-j}, & \textit{якщо} \quad i > j; \\ \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j1}^i\right), \ldots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q_{j,n-j+1}^i\right)\right), & \textit{якщо} \quad i \leqslant j. \end{cases}$$

Доведення. Спершу розглянемо випадок, коли $i > j, n - i + 1 > j - 1$. Для матриці P_{ij} існують такі оборотні матриці U, V, що

$$UP_{ij}V = S(P_{ij}) = \left\| \begin{array}{cc} Q_j^i & \mathbf{0} \end{array} \right\|$$

– форма Сміта матриці P_{ij}, де

$$Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \ldots, q_{j,n-i+1}^i).$$

Тоді

$$(I_{i-1} \oplus U)P_j V = \left\| \begin{matrix} M_1 & M_2 \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_1.$$

З примітивності матриці D_1 випливає примітивність матриці

$$\left\| \begin{matrix} M_2 \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

а отже, й $(i-1)\times(i-j)$ матриці M_2. Із того, що $i > j$ випливає, що $i-1 \geqslant i-j$. Отже, існує така оборотна матриця L, що

$$LM_2 = \left\| \begin{matrix} I_{i-j} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$(L \oplus I_{n-i+1})D_1 = \left\| \begin{matrix} K_1 & I_{i-j} \\ K_2 & \mathbf{0} \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_2.$$

А отже,

$$D_2 \left\| \begin{matrix} I_{n-i+1} & \mathbf{0} \\ -K_1 & I_{i-j} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & I_{i-j} \\ K_2 & \mathbf{0} \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_3,$$

де матриця K_2 має розміри $(j-1) \times (n-i+1)$. Розглянемо примітивну матрицю P^i, складену з останніх $n-i+1$ рядків матриці P :

$$P^i = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} p_{i1} & \dots & p_{i.j-1} & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{n.j-1} & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} p_{i1} & \dots & p_{i.j-1} & \\ \dots & \dots & \dots & P_{ij} \\ p_{n1} & \dots & p_{n.j-1} & \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$UP^i(I_{j-1} \oplus V) = \left\| \begin{matrix} p'_{i1} & \dots & p'_{i.j-1} & q_{j1}^i & & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & & \mathbf{0} \\ p'_{n1} & \dots & p'_{n.j-1} & 0 & & q_{j,n-i+1}^i & \end{matrix} \right\|.$$

З примітивності цієї матриці випливає примітивність матриці

$$\left\| \begin{matrix} p'_{i1} & \dots & p'_{i.j-1} & q_{j1}^i & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ p'_{n1} & \dots & p'_{n.j-1} & 0 & & q_{j,n-i+1}^i \end{matrix} \right\|.$$

Це означає, що d-матриця $\operatorname{diag}(q_{j1}^i,\ \dots,\ q_{j,n-i+1}^i)$ доповнюється $j-1$ стовпцями до примітивної матриці. Згідно з наслідком 3.6 це означає, що кількість відмінних від одиниці інваріантних множників матриці $\operatorname{diag}(q^i_{j1},\ \ldots,\ q^i_{j,n-i+1})$ не перевищує $j-1$. Згідно з припущенням $n-i+1>j-1$. Звідси випливає, що

$$q^i_{j1}=q^i_{j2}=\cdots=q^i_{jt}=1,$$

де $t=n-i-j+2$. Тобто

$$D_3=\left\|\begin{array}{ccc}\mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{i-j}\\ K_2^1 & K_2^2 & \mathbf{0}\\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0}\end{array}\right\|,$$

де $Q^i_{j,t+1}=\operatorname{diag}(q^i_{j,t+1},\ldots,q^i_{j,n-i+1}), K_2^2$ – матриця порядку $j-1$. Тоді

$$\left\|\begin{array}{cccc}I_{i-j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_{j-1} & -K_2^1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{j-1}\end{array}\right\| D_3=\left\|\begin{array}{ccc}\mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{i-j}\\ \mathbf{0} & K_2^2 & \mathbf{0}\\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0}\end{array}\right\|=D_4.$$

У групі $\mathrm{GL}_{j-1}(R)$ існує така матриця S, що

$$SK_2^2=\left\|\begin{array}{ccccc}k_{1,t+1} & k_{1,t+2} & \ldots & k_{1,\bar{i}-1} & k_{1\bar{i}}\\ k_{2,t+1} & k_{2,t+2} & \ldots & k_{2,\bar{i}-1} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ k_{j-1,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0\end{array}\right\|=\bar{K}_2^2, \tag{3.6}$$

де $\bar{i}=n-i+1$. Отже,

$$(I_{i-j}\oplus S\oplus I_{\bar{i}})D_4=\left\|\begin{array}{ccc}\mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{i-j}\\ \mathbf{0} & \bar{K}_2^2 & \mathbf{0}\\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0}\end{array}\right\|=D_5.$$

Таким чином, $D_5=NP_jM$, де матриця N (M) – добуток усіх оборотних матриць, на які домножували матрицю P_j зліва (справа). При цьому матриця N має вигляд

$$N=\left\|\begin{array}{cc}N_1 & N_2\\ \mathbf{0} & N_3\end{array}\right\|,$$

де матриця N_3 має порядок $n-i+1$. Тоді

$$F_iN=\left\|\begin{array}{cc}\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_1 & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_2\\ \mathbf{0} & N_3\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc}N_1 & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_2\\ \mathbf{0} & N_3\end{array}\right\|F_i=\bar{N}F_i.$$

Оскільки матриця F_i неособлива, то $\det N=\det\bar{N}$. Отже, матриця $\bar{N}$ оборотна. Тоді

$$F_iD_5=F_iNP_jM=\bar{N}F_iP_jM.$$

Звідси випливає, що $F_iP_j \sim F_iD_5$. Очевидно, що

$$F_iD_5 = \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & I_{i-j} \\ 0 & \bar{K}_2^2\Gamma_{j,t+1}^i & 0 \\ I_t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{j,t+1}^i & 0 \end{array} \right\|}_{D_6} \times$$

$$\times \Big(I_t \oplus \operatorname{diag}((\psi_i, q_{j,t+1}^i), \ldots, (\psi_i, q_{j\bar{i}}^i)) \oplus \psi_i I_{i-j} \Big),$$

де

$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \Gamma_{j,t+1}^i = \operatorname{diag}(\gamma_{t+1}, \gamma_{t+2}, \ldots, \gamma_{\bar{i}}), \gamma_l = \frac{\psi_i}{(\psi_i, q_{jl}^i)},$$

$$\Delta_{j,t+1}^i = \operatorname{diag}(\delta_{j,t+1}^i, \delta_{j,t+2}^i, \ldots, \delta_{j\bar{i}}^i),\ \delta_{jl}^i = \frac{q_{jl}^i}{(\psi_i, q_{jl}^i)},$$

$l = t+1, t+2, \ldots, \bar{i}$. Для завершення доведення потрібно показати, що матриця D_6 примітивна. Для цього достатньо довести, що матриця

$$D_7 = \left\| \begin{array}{c} \bar{K}_2^2\Gamma_{j,t+1}^i \\ \Delta_{j,t+1}^i \end{array} \right\|$$

є примітивною. З примітивності матриці D_5 випливає примітивність матриці

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{K}_2^2 \\ Q_{j,t+1}^i \end{array} \right\|.$$

Тоді на підставі леми 3.2 виконуються рівності

$$(q_{j,t+1}^i, k_{j-1,t+1}) = (q_{j,t+2}^i, k_{j-2,t+2}) = \ldots = (q_{j\bar{i}}^i, k_{1\bar{i}}) = 1. \tag{3.7}$$

Оскільки $\delta_{j\bar{i}}^i | q_{j\bar{i}}^i$ і згідно з рівністю (3.7)

$$(q_{j\bar{i}}^i, k_{1\bar{i}}) = 1 \Rightarrow (\delta_{j\bar{i}}^i, k_{1\bar{i}}) = 1.$$

Зваживши також на те, що

$$(\delta_{j\bar{i}}^i, \gamma_{\bar{i}}) = 1,$$

отримуємо

$$(\gamma_{\bar{i}} k_{1\bar{i}}, \delta_{j\bar{i}}^i) = 1.$$

Отже, існують такі u та v, що

$$u\gamma_{\bar{i}} k_{1\bar{i}} + v\delta_{j\bar{i}}^i = 1.$$

З огляду на те, що $\delta^i_{j,t+1}|\delta^i_{j,t+2}|\ldots|\delta^i_{j\bar{i}}$, отримуємо

$$\left\| \begin{matrix} u & \mathbf{0} & v \\ \mathbf{0} & I_{2j-4} & \mathbf{0} \\ -\delta^i_{j\bar{i}} & \mathbf{0} & \gamma_{\bar{i}} k_{1\bar{i}} \end{matrix} \right\| D_7 =$$

$$= \left\| \begin{matrix} * & * & \ldots & * & 1 \\ \gamma_{t+1}k_{2,t+1} & \gamma_{t+2}k_{2,t+2} & \ldots & \gamma_{\bar{i}-1}k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{t+1}k_{j-1,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \delta^i_{j,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i_{j,t+2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \delta^i_{j,\bar{i}-1} & 0 \\ \delta^i_{j\bar{i}}s_{t+1} & \delta^i_{j\bar{i}}s_{t+2} & \ldots & \delta^i_{j\bar{i}}s_{\bar{i}-1} & 0 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \gamma_{t+1}k_{2,t+1} & \gamma_{t+2}k_{2,t+2} & \ldots & \gamma_{\bar{i}-1}k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{t+1}k_{j-1,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \delta^i_{j,t+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i_{j,t+2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \delta^i_{j,\bar{i}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = D_8.$$

Продовживши описаний процес, отримаємо, що матриця D_8 є примітивною, а отже, примітивною буде і матриця D_6. Зауваживши, що

$$I_t \oplus \mathrm{diag}((\psi_i, q^i_{j,t+1}), \ldots, (\psi_i, q^i_{j\bar{i}})) \oplus \psi_i I_{i-j} =$$

$$= \mathrm{diag}\Big((\psi_i, q^i_{j1}), \ldots, (\psi_i, q^i_{j\bar{i}})\Big) \oplus \psi_i I_{i-j} = \mathrm{E}^i_j,$$

переконуємось у правильності нашого твердження.

Якщо $i > j,\ n - i + 1 \leqslant j - 1$, матрицю P_j правосторонніми перетвореннями з $\mathrm{GL}_{n-j+1}(R)$ та допустимими лівосторонніми перетвореннями, тобто такими, які не змінюють форму Сміта матриці $F_i P_j$, зводимо до вигляду

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & I_{i-j} \\ L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

якщо $i < j$ —

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ L_2 \\ \mathbf{0} \\ Q^i_{j,t+1} \end{matrix} \right\|,$$

де матриці L_1, L_2 мають вигляд (3.6). Тобто ці випадки є частковими випадками першого, а тому їх доводять за аналогічною схемою. Твердження доведено повністю. □

Поставимо у відповідність кожній матриці P_{ij} діагональну матрицю

$$S(\Phi, P_{ij}) = \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q^i_{j1}\right), \ldots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q^i_{jk}\right)\right),$$

де $k = n - i + 1$, якщо $i > j$, та $k = n - j + 1$, якщо $i \leqslant j$.

Теорема 3.3. *Якщо $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то діагональні елементи матриць $S(\Phi, P_{ij})$, $S(\Phi, (HP)_{ij},)$ $i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ є асоційовними.*

Доведення. На підставі леми 3.6

$$F_i H = H_i F_i, \;\; i = 2, \ldots, n.$$

Оскільки матриці F_i неособливі, то

$$\det H = \det H_i,$$

а отже, матриці H_i оборотні. Позначимо через P_j та U_j матриці, складені з останніх $n - j + 1$ стовпців матриць P та U, відповідно. Зауваживши, що $U_j = HP_j$, отримуємо

$$F_i U_j = F_i H P_j = H_i F_i P_j \sim F_i P_j.$$

Тобто інваріантні множники форм Сміта матриць $F_i U_j$ та $F_i P_j$ можуть відрізнятись лише на одиниці кільця R, явний вигляд яких вказано в твердженні 3.8. Таким чином, ненульові елементи матриць $S(\Phi, P_{ij}), S(\Phi', U_{ij})$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, мають вигляд

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q^i_{js}\right), \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, q^i_{js} l_{ijs}\right),$$

де $l_{ijs} \in U(R)$. Очевидно, що вони можуть відрізнятися лише на одиниці кільця R, тобто є асоційовними. □

Розділ 4. Подільність та асоційовність матриць

У цьому розділі на основі запропонованих критеріїв подільності та асоційовності матриць починається систематичне вивчення дільників матриць. Доводиться, що їх генератором є породжуюча множина. В свою чергу, група Зеліска відповідає за асоційовність матриць.

У цьому розділі R – кільце елементарних дільників.

4.1. Подільність матриць і породжуюча множина

Нехай A та B – $n \times n$ матриці над R. Тоді існують такі оборотні матриці P_A, P_B, Q_A, Q_B, що

$$P_A A Q_A = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0) = \mathrm{E},$$

$$P_B B Q_B = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0) = \Phi,$$

де $\varepsilon_k \neq 0, \varphi_t \neq 0$, $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, \varphi_j | \varphi_{j+1}, i = 1, \ldots, k-1, j = 1, \ldots, t-1$.

Означення 4.1. Породжуючою множиною називається множина

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \{L \in \mathrm{GL}_n(R) |\ \exists\ S \in M_n(R):\ L\mathrm{E} = \Phi S\}.$$

Введена множина відіграє головну роль у описанні дільників матриць.

Теорема 4.1. *Матриця* $B = P_B^{-1} \Phi Q_B^{-1}$ *є лівим дільником матриці* $A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}$*, тобто* $A = BC$ *тоді і тільки тоді, коли* $P_B = L P_A$*, де* $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Доведення. Необхідність. Домноживши матрицю A зліва на P_B, отримаємо

$$P_B A = P_B(BC) = (P_B B)C = (\Phi Q_B^{-1})C = \Phi(Q_B^{-1} C).$$

З іншого боку,

$$P_B A = (P_B P_A^{-1})(P_A A) = (P_B P_A^{-1}) \mathrm{E} Q_A^{-1}.$$

Отже,

$$(P_B P_A^{-1})\mathrm{E}Q_A^{-1} = \Phi(Q_B^{-1}C).$$

Таким чином,

$$(P_B P_A^{-1})\mathrm{E} = \Phi S,$$

де $S = Q_B^{-1}CQ_A$. Це означає, що

$$P_B P_A^{-1} = L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Тобто $P_B = LP_A$.

Достатність. Нехай

$$(P_B P_A^{-1})\mathrm{E} = \Phi S.$$

Тоді

$$P_B A = P_B(P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}) = (P_B P_A^{-1})\mathrm{E}Q_A^{-1} = \Phi S Q_A^{-1}.$$

Тобто

$$A = P_B^{-1}\Phi S Q_A^{-1} = (P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1})(Q_B S Q_A^{-1}) = BC,$$

де $C = Q_B S Q_A^{-1}$. □

Очевидним наслідком цієї теореми є таке твердження.

Теорема 4.2. *Всі дільники матриці $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ з формою Сміта Φ мають вигляд $(LP_A)^{-1}\Phi Q^{-1}$, де $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi), Q^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R)$.* □

Наслідок 4.1. *Множина $(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ є множиною всіх лівих дільників матриці $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ з формою Сміта Φ.* □

Говоритимемо, що матриці A, B асоційовні справа (зліва), якщо існує така оборотна матриця U, що $A = BU$ $(A = UB)$. Той факт, що матриця A асоційовна справа (зліва) до матриці B позначатимемо $A \overset{r}{\sim} B$ $(A \overset{l}{\sim} B)$.

З правої (лівої) асоційовності матриць випливає їх еквівалентність. Тому асоційовні матриці мають однакові форми Сміта. Таким чином, якщо матриці A, B асоційовні справа (зліва), то їх завжди можна записати у вигляді

$$A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1},\ B = P_B^{-1}\Phi V_B^{-1}.$$

Теорема 4.3. *Нехай $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$. Наступні умови є еквівалентними:*

1) $A \overset{r}{\sim} B$;

2) $P_B = HP_A$, *де* $H \in \mathbf{G}_\Phi$;

3) $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_A$.

Доведення. Нехай виконується умова 1). Тоді існує така оборотна матриця U, що $A = BU$. Тобто
$$P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1} = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}U.$$
Отже,
$$P_B P_A^{-1}\Phi = \Phi Q_B^{-1}UQ_A.$$
Це означає, що
$$P_B P_A^{-1} = H \in \mathbf{G}_\Phi.$$
Тобто $P_B = HP_A$.

Навпаки, нехай $P_B = HP_A$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Зауваживши, що з рівності
$$H\Phi = \Phi K,$$
де $K \in \mathrm{GL}_n(R)$, випливає
$$H^{-1}\Phi = \Phi K^{-1},$$
отримуємо
$$B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1} = (HP_A)^{-1}\Phi Q_B^{-1} = P_A^{-1}H^{-1}\Phi Q_B^{-1} =$$
$$= P_A^{-1}\Phi K^{-1}Q_B^{-1} = (P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1})(Q_A K^{-1}Q_B^{-1}) = AV,$$
де $V = Q_A K^{-1} Q_B^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R)$. Отже, $A \overset{r}{\sim} B$. Тобто умови 1) та 2) еквівалентні.

Тепер покажемо еквівалентність умов 2) та 3). Згідно з властивістю 2.2
$$\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Phi P_A, \;\; \mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P_B.$$
Тоді, якщо $P_B = HP_A$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то
$$\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P_B = \mathbf{G}_\Phi HP_A = \mathbf{G}_\Phi P_A = \mathbf{P}_A.$$

Нехай $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_A$. Тобто $\mathbf{G}_\Phi P_B = \mathbf{G}_\Phi P_A$. Оскільки $I \in \mathbf{G}_\Phi$, то $P_B \in \mathbf{G}_\Phi P_A$. Отже, існує така матриця $H \in \mathbf{G}_\Phi$, що $P_B = HP_A$. □

Нехай B – лівий дільник матриці A. Тоді для довільної оборотної матриці U виконується рівність
$$A = BC = (BU)(U^{-1}C).$$
Тобто всі матриці, які асоційовні справа до матриці B, знову є лівими дільниками матриці A. Тому, природно, в множині всіх лівих дільників матриці A шукати лише ті, що неасоційовні справа.

Згідно з наслідком 4.1 множина всіх лівих дільників матриці A з формою Сміта Φ має вигляд $(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$. Отже, наше завдання полягає в тому, щоб із цієї множини вибрати всі неасоційовні між собою матриці. Для цього нам знадобляться наступні властивості групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Властивість 4.1. *Виконується рівність*

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Доведення. Нехай $H \in \mathbf{G}_\Phi, L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тобто

$$H\Phi = \Phi K, L\mathrm{E} = \Phi S, K \in \mathrm{GL}_n(R), S \in M_n(R).$$

Тоді

$$HL\mathrm{E} = H\Phi S = \Phi KS.$$

Тобто $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. З іншого боку, $I \in \mathbf{G}(\Phi)$ а отже, $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тому $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. □

Властивість 4.2. *Виконується рівність*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)\mathbf{G}_\mathrm{E} = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Доведення подібне до доведення властивості 4.1. □

Із властивості 4.1 випливає, що множину $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ можна розбити на класи суміжності $\mathbf{G}_\Phi L$, де $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Позначимо через $\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$ множину представників цих класів.

Теорема 4.4. *Множина* $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ *складається з усіх лівих неасоційовних справа дільників матриці* A, *які мають форму Сміта* Φ.

Доведення. Нехай $L_1, L_2 \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) \subset \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Згідно з теоремою 4.2 матриці $(L_1 P_A)^{-1}\Phi$ та $(L_2 P_A)^{-1}\Phi$ є лівими дільниками матриці A. Припустимо, що матриці $B_1 = (L_1 P_A)^{-1}\Phi$ та $B_2 = (L_2 P_A)^{-1}\Phi$ асоційовні справа. Оскільки

$$L_1 P_A \in \mathbf{P}_{B_1}, \quad L_2 P_A \in \mathbf{P}_{B_2},$$

то згідно з теоремою 4.3

$$L_2 P_A = H L_1 P_A,$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. З цієї рівності випливає, що $L_2 = HL_1$. Зваживши на те, що $L_1, L_2 \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$, отримуємо $L_1 = L_2$. Тобто множина $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ складається з лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ.

Нехай тепер B – лівий дільник матриці A з формою Сміта Φ. На підставі теореми 4.2 матриця B має вигляд $B = (LP_A)^{-1}\Phi Q^{-1}$, де $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Нехай $W \in \mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$ і є представником класу $\mathbf{G}_\Phi L$. Тобто $L = HW$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. У множині $(\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ розглянемо матрицю $B_1 = (WP_A)^{-1}\Phi$. Оскільки $LP_A = H(WP_A)$, то згідно з теоремою 4.3 матриці B, B_1 асоційовні справа.

Тобто для кожного дільника матриці A, який має форму Сміта Φ у множині $(\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$, існує матриця, асоційовна до неї справа.

Матриця P_A визначена неоднозначно. Нехай $P \in \mathbf{P}_A$ і $B = (WP)^{-1}\Phi$, де $W \in \mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)$. На підставі властивості 2.2 в групі $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ існує така матриця S, що $P = SP_A$. Отже, $B = (WSP_A)^{-1}\Phi$. Згідно з властивістю 4.2 $WS \in \mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ і тому попадає в деякий клас суміжності $\mathbf{G}_\Phi V$, де $V \in \mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)$. Отже, в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $WS = HV$. Тоді

$$B = (WP)^{-1}\Phi = (WSP_A)^{-1}\Phi = (HVP_A)^{-1}\Phi =$$
$$= (VP_A)^{-1}H^{-1}\Phi = (VP_A)^{-1}\Phi K^{-1} = B_1K^{-1},$$

де $B_1 \in (\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$. Тобто для кожної матриці з $(\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)P)^{-1}\Phi$ у множині $(\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ існує асоційовна справа до неї матриця. Обернені міркування також будуть правильними. Отже, незалежно від вибору перетворювальної матриці P_A множина $(\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ складається з усіх лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ. $\square$

4.2. Структура матриць породжуючої множини

Опишемо структуру елементів породжуючої множини $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$.

Теорема 4.5. *Нехай* $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,0,\dots,0)$,

$$\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_t,0,\dots,0),$$

де $\varepsilon_k \neq 0, \varphi_t \neq 0$, $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}, \varphi_j|\varphi_{j+1}, i = 1,\dots,k-1, j = 1,\dots,t-1,\ k,t \leq n$.

Якщо $\Phi|\mathrm{E}$, *то множина* $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ *складається з усіх оборотних матриць вигляду*

$$\left\|\begin{matrix} L_1 & * \\ L_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{matrix}\right\|, \tag{4.1}$$

де

$$L_1 = \left\|\begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1.k-1} & l_{1k} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2.k-1} & l_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_1)}l_{k1} & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_2)}l_{k2} & \dots & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_{k-1})}l_{k.k-1} & l_{kk} \end{matrix}\right\|,$$

$$L_2 = \left\|\begin{matrix} \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_1)}l_{k+1.1} & \dots & \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_k)}l_{k+1.k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_t}{(\varphi_t,\varepsilon_1)}l_{t1} & \dots & \frac{\varphi_t}{(\varphi_t,\varepsilon_k)}l_{tk} \end{matrix}\right\|.$$

Якщо $\Phi \nmid \mathrm{E}$, *то* $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi) = \varnothing$.

Доведення. Нехай $L = \|p_{ij}\|_1^n \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тобто L – оборотна матриця, для якої існує така матриця $S = \|s_{ij}\|_1^n \in M_n(R)$, що

$$L\mathrm{E} = \Phi S.$$

Таким чином,

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \varepsilon_1 p_{11} & \dots & \varepsilon_k p_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 p_{t1} & \dots & \varepsilon_k p_{tk} & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 p_{t+1.1} & \dots & \varepsilon_k p_{t+1.k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 p_{n1} & \dots & \varepsilon_k p_{nk} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \varphi_1 s_{11} & \dots & \varphi_1 s_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_t s_{t1} & \dots & \varphi_t s_{tn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|. \qquad (4.2)$$

Оскільки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \neq 0$, то

$$\left\| \begin{array}{ccc} p_{t+1.1} & \dots & p_{t+1.k} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nk} \end{array} \right\| = \mathbf{0}.$$

Тобто оборотна матриця L містить нульову $(n-t) \times k$ підматрицю. Тоді з наслідку 3.1 випливає, що $(n-t)+k \leq n$. Тобто $t \geq k$. Із рівності (4.2) отримуємо $\varphi_i | \varepsilon_j p_{ij}$, $i = 1, \dots, t, j = 1, \dots, k$. Тобто

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} \Big| \frac{\varepsilon_j}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} p_{ij}.$$

Звідси $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} | p_{ij}$. Тобто

$$p_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} p'_{ij}.$$

Таким чином, матриця L має вигляд

$$L = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\varphi_1}{(\varphi_1, \varepsilon_1)} p'_{11} & \dots & \frac{\varphi_1}{(\varphi_1, \varepsilon_k)} p'_{1k} & p_{1.k+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_1)} p'_{k1} & \dots & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_k)} p'_{kk} & p_{k.k+1} & \dots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_1)} p'_{t1} & \dots & \frac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_k)} p'_{tk} & p_{t.k+1} & \dots & p_{tn} \\ 0 & \dots & 0 & p_{t+1.k+1} & \dots & p_{t+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & p_{n.k+1} & \dots & p_{nn} \end{array} \right\|. \qquad (4.3)$$

Розглянемо підматриці

$$L_i = \left\| \begin{array}{ccc} p_{i1} & \dots & p_{ii} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{ni} \end{array} \right\|,$$

$i = 1, \ldots, k$, матриці L. Оскільки

$$\frac{\varphi_{i+r}}{(\varphi_{i+r}, \varepsilon_{j-l})} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} \frac{\left(\varphi_{i+r}, \frac{\varphi_{i+r}}{\varphi_i}\varepsilon_j\right)}{(\varphi_{i+r}, \varepsilon_{j-l})}, \quad l < j, \tag{4.4}$$

то $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_i)} | \langle L_i \rangle_1$. Матриці L_i мають розміри $(n-i+1) \times i$. Зваживши на те, що

$$n - i + 1 + i = n + 1 > n,$$

на підставі твердження 3.1 $\langle L_i \rangle_1 | \det L \in U(R)$. Тому $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_i)} \in U(R)$, $i = 1, \ldots, k$. Оскільки н.с.д. елементів визначається з точністю до дільників одиниці, можемо вважати, що

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_i)} = 1.$$

Тобто $\varphi_i = (\varphi_i, \varepsilon_i)$. Звідси $\varphi_i | \varepsilon_i, i = 1, \ldots, k$. Отже, $\Phi | \mathrm{E}$. Таким чином, отримана умова є необхідною умовою для того, щоб множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ була непорожньою. І отже, якщо $\Phi \nmid \mathrm{E}$, то $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \varnothing$.

З подільності $\Phi | \mathrm{E}$ випливає, що $\varphi_i | \varepsilon_{i+j}$, $j = 0, \ldots, k-i$. Тому

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i+j})} \in U(R).$$

Таким чином, на елементи $p_{i.i+j}$ не накладаються жодні обмеження. Тобто матриця L має вигляд (4.1).

Навпаки, припустимо, що $\Phi | \mathrm{E}$ і матриця L має вигляд (4.1). Тоді легко переконатись, що

$$L\mathrm{E} = \Phi S,$$

де

$$S = \begin{Vmatrix} M_1 & * \\ M_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{Vmatrix},$$

$$M_1 = \begin{Vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{\varphi_1} l_{11} & \frac{\varepsilon_2}{\varphi_1} l_{12} & \ldots & \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varphi_1} l_{1.k-1} & \frac{\varepsilon_k}{\varphi_1} l_{1k} \\ \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & \frac{\varepsilon_2}{\varphi_2} l_{22} & \ldots & \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varphi_2} l_{2.k-1} & \frac{\varepsilon_k}{\varphi_2} l_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_k,\varepsilon_1)} l_{k1} & \ldots & \ldots & \frac{\varepsilon_{k-1}}{(\varphi_k,\varepsilon_{k-1})} l_{k.k-1} & \frac{\varepsilon_k}{\varphi_k} l_{kk} \end{Vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{Vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_1)} l_{k+1.1} & \ldots & \frac{\varepsilon_k}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_k)} l_{k+1.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_1}{(\varphi_t,\varepsilon_1)} l_{t1} & \ldots & \frac{\varepsilon_k}{(\varphi_t,\varepsilon_k)} l_{tk} \end{Vmatrix}.$$

Теорему доведено. □

Об'єднуючи результати теорем 4.5, 4.1, отримуємо.

Теорема 4.6. *Матриця* $B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$ *є лівим дільником матриці* $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\Phi|\mathrm{E}$ *і* $P_B = LP_A$, *де* L *– оборотна матриця вигляду* (4.1). □

Властивість 4.3. *Елемент* $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}$, $i > j$, *є дільником всіх елементів матриць* L_1, L_2, *що окреслені прямокутником з вершинами* $(i,1)$, (i,j), (t,j), $(t,1)$:

$$\begin{array}{cccc} f_{i1}h_{i1} & f_{i2}h_{i2} & \dots & f_{ij}h_{ij} \\ f_{i+1.1}h_{i+1.1} & f_{i+1.2}h_{i+1.2} & \dots & f_{i+1.j}h_{i+1.j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{t1}h_{t1} & f_{t2}h_{t2} & \dots & f_{tj}h_{tj}, \end{array}$$

де

$$f_{pq} = \frac{\varphi_p}{(\varphi_p,\varepsilon_q)}.$$

Тобто

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} | \frac{\varphi_{i+p}}{\varphi_{j-q}} h_{i+p.j-q},\ p = 0, 1,\ \dots\ , n-i,\ \ q = 0, 1,\ \dots\ , j-1.$$

Доведення випливає з рівності (4.4). □

4.3. Властивості групи Зеліска та породжуючої множини

Дослідимо зв'язки між повною лінійною групою, групою Зеліска та породжуючою множиною.

Нехай Е та Ф – d-матриці над кільцем елементарних дільників R, причому $\Phi|\mathrm{E}$.

Властивість 4.4. *Виконується включення*

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\mathrm{E} \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Доведення. Нехай $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Оскільки $\mathrm{E} = \Phi\Delta$, то виконуються рівності

$$(HK)\mathrm{E} = H\mathrm{E}K_1 = H\Phi\Delta K_1 = \Phi(H_1\Delta K_1).$$

Тобто $HK \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тому $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\mathrm{E} \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. □

Щоб сформулювати умову рівності множин $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ та $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\mathrm{E}$, встановимо декілька допоміжних тверджень.

Позначимо через S_i матрицю, отриману з $n \times n$ матриці S викресленням її перших i рядків та перших i стовпців, а через $\overline{S}_i$ – матрицю, отриману викресленням її перших i рядків та останніх $n - i$ стовпців.

Лема 4.1. *Нехай* E, Φ *– неособливі матриці і* F *– нижня унітрикутна матриця, що записана у вигляді*

$$F = HS, \tag{4.5}$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $S \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. *Тоді в групах* $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ *існують, відповідно, такі нижні унітрикутні матриці* $H_1,\ S_1$, *що* $F = H_1 S_1$.

Доведення. З рівності (4.5) випливає, що для матриці S у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що матриця HS є нижньою унітрикутною. Згідно з теоремою 2.7 це означає, що

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \det S_i\right) = 1, \quad i = 1,\ \dots\ ,\ n-1.$$

На підставі властивості 2.4 $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} | \left\langle \overline{S}_i \right\rangle_1$. Взявши до уваги, що матриця $\|\overline{S}_i S_i\|$ примітивна, приходимо до висновку, що

$$\left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i},\ \det S_i\right) = 1, \quad i = 1,\ \dots\ ,\ n-1.$$

Таким чином,

$$\left(\frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_{i+1}}{\varepsilon_i\varphi_i},\ \det S_i\right) = 1, \quad i = 1,\ \dots\ ,\ n-1. \tag{4.6}$$

Розглянемо d-матрицю $\Gamma = \mathrm{diag}(\varepsilon_1\varphi_1,\ \dots\ ,\ \varepsilon_n\varphi_n)$. Зваживши на рівність (4.6) та використавши теорему 2.7, отримаємо, що в групі $\mathbf{G}_\Gamma$ існує така матриця K, що $KS = S_1$ є нижньою унітрикутною матрицею. Зауваживши, що $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E} \bigcap \mathbf{G}_\Phi$, отримуємо

$$F = HS = (HK^{-1})(KS) = H_1 S_1,$$

де $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, $S_1 \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Оскільки F і S_1 нижні унітрикутні матриці, то такою ж буде і матриця H_1. □

Лема 4.2. *Нехай* $(a_1,\ \dots\ ,\ a_n) = 1$ *і* $\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1},\ a_n\right) = 1$. *Тоді в групі* $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ *існує матриця з останнім стовпцем* $\|a_1\ \dots\ a_n\|^T$ *і визначником* 1.

Доведення. Нехай $n = 2$. Оскільки $(a_1,\ a_2) = 1$ і

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\ a_2\right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1,\ a_2\right) = 1.$$

Тому існують такі u, v, що

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1u + a_2v = 1.$$

Тоді шуканою буде матриця

$$\left\| \begin{matrix} v & a_1 \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}u & a_2 \end{matrix} \right\|.$$

Припустимо, що це твердження правильне для всіх матриць, порядку меншого за n. Нехай $(a_2, \ldots, a_n) = \delta$. Тоді

$$\left(\frac{a_2}{\delta}, \ldots, \frac{a_n}{\delta}\right) = 1.$$

Оскільки $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} | \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}$, і $\frac{a_n}{\delta} | a_n$, то

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}, \frac{a_n}{\delta}\right) = 1.$$

За припущенням індукції в групі $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)}$ існує матриця вигляду

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} & \frac{a_2}{\delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} & \frac{a_n}{\delta} \end{matrix} \right\| = U_1,$$

причому $\det D = 1$. Отже,

$$\det \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} & a_n \end{matrix} \right\| = \delta.$$

Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}x_2 & u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}x_n & u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} & a_n \end{matrix} \right\| = V,$$

де $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі. Тоді

$$\det V = x_1\delta - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}x_2a_1\Delta_1 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}x_na_1\Delta_{n-1},$$

де

$$\Delta_i = \det \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i-1.1} & \ldots & u_{i-1.n-2} \\ u_{i+1.1} & \ldots & u_{i+1.n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-2} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки матриця

$$D = \begin{Vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1.n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1.1} & \dots & u_{n-1.n-2} \end{Vmatrix}$$

складається з перших $n-2$ стовпців оборотної матриці U_1, то

$$\langle D \rangle = (\Delta_1,\ \dots\ ,\ \Delta_{n-1}) = 1.$$

Зваживши на те, що $\delta | a_n$ і

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1},\ \ a_n \right) = 1,$$

отримуємо

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1},\ \ \delta \right) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1},\ \ \delta \right) = 1,\ \ i = 2,\ \dots,\ n.$$

Тоді

$$\left(\delta,\ \ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} a_1 \Delta_1,\ \ \dots\ \ ,\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} a_1 \Delta_{n-1}\right) = \left(\left(\delta,\ \ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} a_1 \Delta_1\right),\ \ \dots\ \ ,\ \left(\delta,\ \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} a_1 \Delta_{n-1}\right)\right) =$$

$$= (\delta,\ \ a_1\Delta_1,\ \ \dots\ \ ,\ a_1\Delta_{n-1}) = (\delta,\ \ a_1(\Delta_1,\ \ \dots\ \ ,\ \Delta_{n-1})) = (\delta,\ \ a_1) = 1.$$

Отже, існують такі $x_1 = v_1,\ \dots\ ,\ x_n = v_n$, що $\det V = 1$. □

Лема 4.3. *Нехай* Е *– неособлива матриця, причому* $\Phi | \mathrm{E}$ *і*

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \right),$$

$i = 2,\ \dots\ ,\ n, j = 1,\ \dots\ ,\ n-1, i > j$. *Якщо* L *– нижня унітрикутна матриця з* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, *то в групах* $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$ *існують такі нижні унітрикутні матриці* $H,\ K$, *що* $L = HK$.

Доведення. Нехай $n = 2$. Розглянемо матрицю

$$L = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ f_{21} l & 1 \end{Vmatrix},$$

де

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\ \ \varepsilon_1)} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right).$$

У кільці R існують такі $u,\ v$, що

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v.$$

Тоді

$$L = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21}l & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}ul & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}vl & 1 \end{matrix} \right\| = HK.$$

Отже, наше твердження правильне для матриць другого порядку.

Припустимо його правильність для всіх матриць порядку, меншого за n, і розглянемо нижню унітрикутну матрицю

$$L = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ f_{21}l_{21} & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ f_{n-1.1}l_{n-1.1} & f_{n-1.2}l_{n-1.2} & & 1 & 0 \\ \hline f_{n1}l_{n1} & f_{n2}l_{n2} & \dots & f_{n.n-1}l_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $f_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)}$. Позначимо

$$\Phi_n = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \dots\ ,\ \varphi_{n-1}),\ \ \mathrm{E}_n = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1}),$$

$$\Phi_1 = \operatorname{diag}(\varphi_2,\ \dots\ ,\ \varphi_n),\ \ \mathrm{E}_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_2,\ \dots\ ,\ \varepsilon_n).$$

Оскільки $L_{11} \in \mathbf{L}(\mathrm{E}_n, \Phi_n)$, то в групах $\mathbf{G}_{\Phi_n}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}_n}$ існують, відповідно, такі нижні унітрикутні матриці $H_1,\ K_1$, що $L_{11} = H_1K_1$. Зваживши на те, що

$$\left\| \begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\Phi,\ \left\| \begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\mathrm{E},$$

а також використавши властивості 4.1, 4.2, отримаємо

$$\left\| \begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| L \left\| \begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1}l'_{n1} & f_{n2}l'_{n2} & \dots & f_{n.n-1}l'_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix} \right\| = S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Оскільки $S_{22} \in \mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$, то згідно з припущенням індукції в групах $\mathbf{G}_{\Phi_1}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}_1}$ існують такі нижні унітрикутні матриці $H_2,\ K_2$, що $S_{22} = H_2K_2$. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2^{-1} \end{matrix} \right\| S \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2^{-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1}a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $a \in R$. Оскільки

$$f_{n1} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right),$$

то в кільці R існують такі $u_n, \ v_n$, що

$$f_{n1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_n + \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_n.$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1}a & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right\| = \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_n a & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right\|}_{M} \underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_n a & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right\|}_{N}.$$

Таким чином, виконується рівність

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2^{-1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\| L \left\| \begin{array}{cc} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2^{-1} \end{array} \right\| = MN.$$

Тобто

$$L = \left(\left\| \begin{array}{cc} H_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2 \end{array} \right\| M \right) \left(N \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} K_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\| \right) = HK,$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. □

Властивість 4.5. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$ і E – неособлива матриця, причому $\Phi | \mathrm{E}$. Для того, щоб*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\mathrm{E} \mathbf{G}_\Phi,$$

необхідно та достатньо, щоб

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \right)$$

для всіх $i = 2, \ \ldots \ , \ n, j = 1, \ \ldots \ , \ n - 1, i > j$.

Доведення. Необхідність. Нехай $n = 2$. Оскільки в множині $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ існує матриця

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ f_{21} & 1 \end{array} \right\|, \ \ f_{21} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \ \varepsilon_1)},$$

то $F = HK$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$, причому згідно з лемою 4.1 матриці H, K можна вважати нижніми унітрикутними. Тобто

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k.$$

Зауваживши, що $f_{21}|\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ і $f_{21}|\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, отримуємо

$$f_{21} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

Припустимо, що наше твердження правильне для всіх матриць порядку, меншого за n. Тоді з рівності

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}_n, \Phi_n) = \mathbf{G}_{\Phi_n}\mathbf{G}_{\mathrm{E}_n}$$

випливає

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right),$$

$i = 2,\ \dots\ ,\ n-1,\ \ j = 1,\ ...\ ,\ n-2,\ \ i > j$. Також із рівності

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1) = \mathbf{G}_{\Phi_1}\mathbf{G}_{\mathrm{E}_1}$$

випливає

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right),$$

$i = 3,\ \dots\ ,\ n,\ \ j = 2,\ ...\ ,\ n,\ \ i > j$. І для завершення доведення необхідності потрібно показати, що

$$f_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\ \ \varepsilon_1)} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right).$$

У множині $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ існує матриця

$$L = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} & 0 & & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

яку згідно з припущенням нашої теореми та леми 4.1 можна записати у вигляді $L = HS$, де H та S – нижні унітрикутні матриці з груп $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$, відповідно. Тоді

$$H = LS^{-1} = L \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ s_{21} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ s_{n-1.1} & s_{n-1.2} & & 1 & 0 \\ f_{n1} + s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n.n-1} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_\Phi.$$

З цього включення випливає, що

$$f_{n1} + s_{n1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1}.$$

Зауваживши, що $s_{n1} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} s'_{n1}$, отримуємо

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right) | f_{n1}.$$

З іншого боку, $f_{n1} | \frac{\varphi_n}{\varphi_1}$ і $f_{n1} | \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}$. Тобто

$$f_{n1} | \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right),$$

Отже,

$$f_{n1} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right).$$

Достатність. Нехай $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. На підставі теореми 2.13 матрицю L можна записати у вигляді $L = HVK$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, а матриці V, K, – нижня та верхня унітрикутні матриці, відповідно. Згідно з наслідком 2.2 група верхніх унітрикутних матриць є підгрупою будь-якої групи Зеліска. Тому $K \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. З урахуванням властивості 4.1, 4.2, з рівності

$$V = H^{-1} L K^{-1}$$

випливає, що $V \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Згідно з лемою 4.3 матрицю V можна записати у вигляді $V = H_1 K_1$, де $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, $K_1 \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Таким чином,

$$L = (HH_1)(K_1 K),$$

що і потрібно довести. □

Властивість 4.6. *Виконується рівність*

$$\mathbf{L}(\Phi, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi.$$

Доведення цієї властивості безпосередньо випливає з порівняння структури матриць, з яких складається множина $\mathbf{L}(\Phi, \Phi)$ (теорема 4.5) та група $\mathbf{G}_\Phi$ (теорема 2.6). □

Проаналізуємо елементи матриць із множини $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Позначимо

$$d_{ij} = \left(\frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} \left(\frac{(\varphi_{i-1}, \varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}} \left(\cdots \left(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} \right), \cdots \right), \frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j} \right), \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_j} \right),$$

де $i > j + 1$.

Лема 4.4. *Виконується рівність*

$$(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j) \frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} \cdots \frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} = (\varphi_i, \varepsilon_j d_{ij}) = s_{ij}.$$

Доведення. Маємо

$$(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j) \frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} = \left(\varphi_{j+2}, \varepsilon_j \left(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} \right) \right) =$$

$$= (\varphi_{j+2}, \varepsilon_j d_{j+2.j}) = s_{j+2.j}.$$

Припустимо, що

$$(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j) \frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} \cdots \frac{(\varphi_{i-1}, \varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}} = (\varphi_{i-1}, \varepsilon_j d_{i-1.j}) = s_{i-1.j}.$$

Тоді

$$s_{i-1.j} \frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_1} =$$

$$= \Bigg(\varphi_{i-1}, \varepsilon_j \Bigg(\frac{(\varphi_{i-1}, \varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}} \Bigg(\cdots \Bigg(\frac{(\varphi_{i-1}, \varepsilon_{j+2})}{\varphi_{j+2}} \Bigg(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}, \frac{\varepsilon_{j+2}}{\varepsilon_j} \Bigg),$$

$$\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j} \Bigg), \cdots \Bigg), \frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j} \Bigg) \Bigg) \frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} = (\varphi_i, \varepsilon_j d_{ij}) = s_{ij}.$$

Лему доведено. □

Позначимо $f_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)}$, $i > j$.

Властивість 4.7. *Виконується рівність*

$$f_{ij} = f_{j+1.j} f_{j+2.j+1} \dots f_{i.i-1} (f_{ij}, d_{ij}),$$

де $i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$

Доведення. Маємо

$$\frac{f_{ij}}{f_{j+1.j} f_{j+2.j+1} \dots f_{i.i-1}} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} \frac{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)}{\varphi_{j+1}} \frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+2}} \dots \frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_i} =$$

$$= \frac{1}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} (\varphi_{j+1}, \varepsilon_j) \frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} \dots \frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} = \frac{s_{ij}}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} =$$

$$= \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j d_{ij})}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)}, \frac{\varepsilon_j}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} d_{ij} \right) = (f_{ij}, d_{ij}),$$

що і потрібно довести. □

Лема 4.5. *Виконується подільність* $(f_{ij}, d_{ij}) | (f_{i+k.j-s}, d_{i+k.j-s})$.

Доведення. Маємо

$$d_{i+k.j-s} = \Bigg(\frac{(\varphi_{i+k}, \varepsilon_{i+k-1})}{\varphi_{i+k-1}} \Bigg(\cdots \Bigg(\frac{(\varphi_{j-s+3}, \varepsilon_{j-s+2})}{\varphi_{j-s+2}} \Bigg(\frac{(\varphi_{j-s+2}, \varepsilon_{j-s+1})}{\varphi_{j-s+1}},$$

$$\frac{\varepsilon_{j-s+1}}{\varepsilon_{j-s}} \Bigg), \frac{\varepsilon_{j-s+2}}{\varepsilon_{j-s}} \Bigg), \cdots \Bigg), \frac{\varepsilon_{i+k-1}}{\varepsilon_{j-s}} \Bigg) =$$

$$= \Bigg(\frac{(\varphi_{i+k}, \varepsilon_{i+k-1})}{\varphi_{i+k-1}} \Bigg(\cdots \Bigg(\frac{(\varphi_{j-s+3}, \varepsilon_{j-s+2})}{\varphi_{j-s+2}} \Bigg(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} d_{j+1.j-s},$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j-s}} \Bigg), \frac{\varepsilon_{j-s+2}}{\varepsilon_{j-s}} \Bigg), \cdots \Bigg), \frac{\varepsilon_{i+k-1}}{\varepsilon_{j-s}} \Bigg).$$

Оскільки $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j} | \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{j-s}}$, то

$$d_{ij} | \left(\frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} \left(\cdots \left(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} d_{j+1.j-s}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j-s}} \right), \cdots \right), \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{j-s}} \right).$$

Отже, $d_{ij} | d_{i+k.j-s}$. Зауваживши також, що $f_{ij} | f_{i+k.j-s}$, отримуємо $(f_{ij}, d_{ij}) | (f_{i+k.j-s}, d_{i+k.j-s})$. Лему доведено. □

Порівнюючи структуру елементів матриць із групи $\mathbf{G}_\Phi$ (властивість 2.3) та множини $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ (властивість 4.7), бачимо їх очевидну схожість. Тому, природно, постає питання, коли існує така d-матриця Δ, що $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Delta$.

У випадку матриць порядку 2 така d-матриця Δ існує завжди. Так, якщо $\varphi_2 \neq 0$, то

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_{\Delta_2}, \quad \text{де} \quad \Delta_2 = \operatorname{diag}\left(1,\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}\right).$$

Якщо ж $\varphi_2 = 0$, то множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ є групою одиниць кільця верхніх трикутних матриць. У випадку матриць порядку, більшого за 2, таке твердження правильне не завжди.

Приклад 4.1. Нехай $\mathrm{E} = \operatorname{diag}(2, 6, 12)$ та $\Phi = \operatorname{diag}(1, 2, 6)$ – цілочислові d-матриці. На підставі теореми 4.5 множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ складається зі всіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ 3l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$L = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Однак матриця

$$L^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

вже не належить множині $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тобто, у цьому випадку, множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ мультиплікативно не замкнена. $\diamondsuit$

Відповідь на питання, коли $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ є мультиплікативною групою для матриць вищих порядків, дає наступне твердження.

Властивість 4.8. *Для того, щоб існувала така d-матриця Δ, що $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Delta$, де*

$$\mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0),\ \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0),$$

$1 \leq k \leq n,\ 1 \leq t \leq n,\ n > 2,\ \Phi | \mathrm{E}$, *необхідно та достатньо, щоб*

1) *у випадку* $\det\Phi \neq 0$ *виконувались умови* $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$ *або ж*

$$\frac{f_{n1}}{f_{21} f_{32} \cdots f_{n.n-1}} \in U(R);$$

2) *у випадку* $\det\Phi = 0$ *виконувались умови* $k = t$, $(f_{k1}, d_{k1}) = 1$ *або ж*

$$\frac{f_{k1}}{f_{21} f_{32} \cdots f_{k.k-1}} \in U(R).$$

Доведення. Необхідність. Нехай Φ – неособлива матриця. Розглянемо матриці порядку 3. Множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ містить матрицю

$$A_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{array} \right\|.$$

Тому і

$$A_3^2 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2f_{21} & 1 & 0 \\ 2f_{31} + f_{21}f_{32} & 2f_{32} & 1 \end{array} \right\| \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Отже,

$$2f_{31} + f_{21}f_{32} = f_{31}l_{31}.$$

На підставі властивості 4.7

$$f_{31} = f_{21}f_{32}(f_{31}, d_{31}).$$

Тоді

$$f_{21}f_{32}(f_{31}, d_{31})(l_{31} - 2) = f_{21}f_{32}.$$

Тобто

$$(f_{31}, d_{31})(l_{31} - 2) = 1.$$

Таким чином, $(f_{31}, d_{31}) = 1$.

Припустимо, що наше твердження правильне для матриць, порядку меншого за n. І нехай $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ – мультиплікативна група порядку n. Ця група містить підгрупу $1 \oplus \mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$, де

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \Phi_1 = \mathrm{diag}(\varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Звідси випливає, що множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$ також є мультиплікативною групою. Оскільки множина $\mathbf{L}(\mathrm{E}_1, \Phi_1)$ складається з оборотних матриць порядку $n-1$ вигляду

$$\left\| \begin{array}{cccc} l_{22} & l_{23} & \ldots & l_{2n} \\ f_{32}l_{32} & l_{33} & \ldots & l_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n2}l_{n2} & f_{n3}l_{n3} & \ldots & l_{nn} \end{array} \right\|,$$

то згідно з припущенням

$$(f_{n2}, d_{n2}) = 1. \tag{4.7}$$

Розглянемо матрицю

$$A_n = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} & f_{n2} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right\| \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Оскільки $A_n^2 = \|a_{ij}\|_1^n \in \mathbf{L}(\text{E}, \Phi)$, то

$$a_{n1} = 2f_{n1} + f_{n2}f_{21} = f_{n1}l_{n1}.$$

Зваживши на рівність (4.7) та врахувавши властивість 4.7, отримаємо

$$f_{n2} = f_{32} \dots f_{n.n-1},$$

$$f_{n1} = f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}(f_{n1}, d_{n1}).$$

Отже,

$$f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}(f_{n1}, d_{n1})(l_{n1} - 2) = f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}.$$

Звідси випливає, що $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$.

Нехай E, Φ – особливі матриці. На підставі теореми 4.5 множина $\mathbf{L}(\text{E}, \Phi)$ містить нульовий $(n-t) \times k$ блок. З іншого боку, оскільки $\mathbf{L}(\text{E}, \Phi)$ є групою $\mathbf{G}_\Delta$, яка згідно з теоремою 2.6 містить нульовий $(n-s) \times s$ блок. Отже, $k = t$. З теореми 2.6 також випливає, що

$$\mathbf{L}(\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k),\ \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)) = \mathbf{G}_{\Delta_k}.$$

Тоді на підставі щойно доведеного $(f_{k1}, d_{k1}) = 1$.

Достатність. Нехай Φ – неособлива матриця. Згідно з лемою 4.5

$$(f_{ij}, d_{ij}) | (f_{n1}, d_{n1}) = 1,\ i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$$

Таким чином,

$$(f_{ij}, d_{ij}) = 1,\ i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$$

Тоді підставі леми 4.7

$$f_{ij} = f_{j+1.j}f_{j+2.j+1} \dots f_{i.i-1},\ i = 3, 4, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n-2; i > j+1.$$

Отже, шуканою d-матрицею буде матриця

$$\Delta = \text{diag}(1, f_{21}, f_{21}f_{32}, \dots, f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}).$$

Якщо Φ, E особливі матриці, то легко переконатись, що тоді

$$\Delta = \text{diag}(1, f_{21}, f_{21}f_{32}, \dots, f_{21}f_{32} \dots f_{k.k-1}, 0, \dots, 0).$$

Для завершення доведення теореми досить зауважити, що згідно з властивістю 4.7 умови $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$ і

$$\frac{f_{n1}}{f_{21}f_{32} \dots f_{n.n-1}} \in U(R)$$

еквівалентні. $\square$

Властивість 4.9. *Для того, щоб*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi,$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися такі умови:

1) *якщо* $k = t = n$, *то* $(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ *;*

2) *якщо* $k < n, t = n$, *то*
i) $\varphi_{k+1} = \varphi_{k+2} = \ldots = \varphi_n$,
ii) $(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, k$ *;*

3) *якщо* $k, t < n$, *то*
iii) $k = t$,
iiii) $(\varphi_k, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, k-1$.

Доведення. Розгляненмо випадок, коли $k = t = n$. Рівність множин $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $\mathbf{G}_\Phi$ рівносильна тому, що $L_1 = H_1$. Отже,

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, \ \ i = 2, \ldots, n, \ \ j = 1, \ldots, n-1, i > j.$$

Зокрема,

$$(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j, \ \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Навпаки, якщо

$$(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j, \ \ j = 1, \ldots, n-1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right) = 1.$$

З цієї рівності випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right) = 1, \ \ i = j+1, j+2, \ldots, n.$$

Отже,

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right) = \varphi_j, \ \ i = 2, \ldots, n, \ \ j = 1, \ldots, n-1, i > j.$$

Випадок 2). Рівність множин $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ та $\mathbf{G}_\Phi$ в цьому випадку рівносильна тому, що

$$H_1 = \left\| \begin{array}{cc} L_1 & * \\ L_2 & * \end{array} \right\|.$$

Тобто

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = 1, i = k+2, k+3, \ldots, n, j = k+1, k+2, \ldots, n-1, i > j \tag{4.8}$$

і

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, k, i > j. \tag{4.9}$$

Зокрема,

$$\frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_{k+1}} = \frac{\varphi_{k+3}}{\varphi_{k+2}} = \cdots = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} = 1.$$

Таким чином,

$$\varphi_{k+1} = \varphi_{k+2} = \ldots = \varphi_n. \tag{4.10}$$

Зауваживши, що

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_q} = \frac{\varphi_p}{\varphi_{p-1}} \frac{\varphi_{p-1}}{\varphi_{p-2}} \cdots \frac{\varphi_{q+1}}{\varphi_q},$$

де $p > q$, отримуємо, що рівності (4.8) і (4.10) еквівалентні. Аналогічно, як і вище, переконуємось, що умови ii), (4.9) еквівалентні.

На завершення розглянемо випадок 3). Маємо

$$\left\| \begin{array}{cc} L_1 & * \\ L_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{array} \right\|.$$

Розміри нульових підматриць є $(n-t) \times k$ і $(n-t) \times t$. Отже, $k = t$. Це означає, що матриця L_2 порожня. Крім того, міркування, подібні до проведених вище, показують, що

$$(\varphi_k, \varepsilon_j) = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

□

Властивість 4.10. *Нехай* E *– неособлива матриця і* E $=$ ΦΔ. *Якщо* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi$, *то* Δ *є* d*-матрицею.*

Доведення. Матриця Δ має вигляд

$$\Delta = \operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_2}{\varphi_2}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\varphi_n}\right).$$

Розглянемо добуток

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varphi_{i+1}} \frac{\varphi_i}{\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_i}{\varphi_{i+1}\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_i}{(\varphi_{i+1}, \varepsilon_i)[\varphi_{i+1}, \varepsilon_i]} = \mu_{i+1.i},$$

$i = 1, \dots, n-1$. Оскільки $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi$, то з властивості 4.9 випливає, що $(\varphi_{i+1}, \varepsilon_i) = \varphi_i$. Тому

$$\mu_{i+1.i} = \frac{\varepsilon_{i+1}\varphi_i}{\varphi_i[\varphi_{i+1}, \varepsilon_i]} = \frac{\varepsilon_{i+1}}{[\varphi_{i+1}, \varepsilon_i]}.$$

Оскільки $\varphi_{i+1}|\varepsilon_{i+1}$ і $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$, то $[\varphi_{i+1},\varepsilon_i]|\varepsilon_{i+1}$. Тобто $\mu_{i+1.i}\in R$ і

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varphi_{i+1}}=\frac{\varepsilon_i}{\varphi_i}\mu_{i+1.i}.$$

$i=1,\ldots,n-1$. Таким чином, Δ є d-матрицею. □

Зауважимо, що з тієї умови, що Δ є d-матрицею, не випливає, що $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathbf{G}_\Phi$.

Приклад 4.2. Нехай $\mathrm{E}=\operatorname{diag}(a,a^3)$, $\Phi=\operatorname{diag}(1,a)$, $a\neq 0$. Тоді $\Delta=\operatorname{diag}(a,a^2)$. При цьому $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_2(R)$, а група $\mathbf{G}_\Phi$ складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\|\begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ ah_{21} & h_{22}\end{array}\right\|.$$

Властивість 4.11. *Для того, щоб*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_n(R),$$

необхідно та достатньо, щоб $\varphi_n|\varepsilon_1$.

Доведення. Необхідність. Згідно з теоремою 4.5 множина $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ складається з матриць вигляду (4.1). Оскільки

$$\left\|\begin{array}{cccc} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & 0\end{array}\right\|\in \mathrm{GL}_n(R)=\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi),$$

то матриці з множини $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ не містять в нижньому лівому куті нульового блока. Це рівносильно тому, що $\varphi_n\neq 0$, причому

$$\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}=1.$$

Тобто $\varphi_n=(\varphi_n,\varepsilon_1)$. Отже, $\varphi_n|\varepsilon_1$.

Достатність. Оскільки $\varphi_n|\varepsilon_1$, то $\varphi_n|\varepsilon_j$, $j=1,\ldots,n$. Звідси випливає, що $\varphi_i|\varepsilon_j$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,k$. Тоді

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}=1.$$

Тобто

$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_n(R).$$ □

Нехай

$$\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ \ldots, \ \gamma_n), \ \ \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ \ldots, \ \delta_n),$$

– неособливі d-матриці.

Теорема 4.7. *Для того, щоб* $\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta$*, необхідно та достатньо, щоб*

$$\left(\det \frac{1}{\delta_1}\Delta, \ \det \frac{1}{\gamma_1}\Gamma\right) = 1.$$

Доведення. Необхідність. Нехай

$$\left(\det \frac{1}{\delta_1}\Delta, \ \det \frac{1}{\gamma_1}\Gamma\right) = \sigma \neq 1$$

і $\frac{\gamma_r}{\gamma_1}$ – такий перший з діагональних елементів матриці $\frac{1}{\gamma_1}\Gamma$, що

$$\left(\frac{\gamma_r}{\gamma_1}, \sigma\right) = \sigma_1 \neq 1.$$

Нехай також $\frac{\delta_s}{\delta_1}$ – такий перший з діагональних елементів матриці $\frac{1}{\delta_1}\Delta$, що

$$\left(\frac{\delta_s}{\delta_1}, \sigma_1\right) = \sigma_2 \neq 1.$$

При цьому

$$\left(\frac{\delta_{s-1}}{\delta_1}, \sigma_2\right) = \left(\frac{\gamma_{r-1}}{\gamma_1}, \sigma_2\right) = \ 1.$$

Оскільки

$$\frac{\delta_s}{\delta_1} = \frac{\delta_{s-1}}{\delta_1} \frac{\delta_s}{\delta_{s-1}},$$

то, зваживши на попередню рівність, отримуємо, що

$$\sigma_2 | \frac{\delta_s}{\delta_{s-1}}.$$

Звідси випливає, що σ_2 є дільником усіх елементів матриці

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\delta_s}{\delta_1} & \ldots & \frac{\delta_s}{\delta_{s-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\delta_n}{\delta_1} & \ldots & \frac{\delta_n}{\delta_{s-1}} \end{array} \right\|.$$

Таким чином, у кожній матриці із групи $\mathbf{G}_\Delta$ у нижньому лівому куті міститься $(n-s+1)\times(s-1)$ матриця, всі елементи якої діляться на σ_2.

Аналогічно показуємо, що в кожній матриці із групи $\mathbf{G}_\Gamma^T$ у верхньому правому куті міститься $(r-1)\times(n-r+1)$ матриця, всі елементи якої діляться на σ_2. Оскільки

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta,$$

то існують такі матриці $L \in \mathbf{G}_\Gamma^T$ та $H \in \mathbf{G}_\Delta$, що

$$LH = \left\| \begin{matrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{matrix} \right\| = T.$$

Тоді $L = TH^{-1}$. Матриця H^{-1} має таку ж саму структуру, що і матриця H. Тому в матриці L у лівому верхньому куті міститься $(n-s+1)\times(s-1)$ матриця, а в правому верхньому куті – $(r-1)\times(n-r+1)$ матриця, всі елементи яких діляться на σ_2.

Якщо $n-s+1 \leqslant r-1$, то матриця L містить

$$(n-s+1)\times((s-1)+(n-r+1))$$

підматрицю, всі елементи якої діляться на σ_2. Оскільки

$$(n-s+1)+(s-1)+(n-r+1) = (n+1)+(n-r) \geqslant n+1,$$

то згідно з твердженням 3.1 $\sigma_2 \mid \det L$, що суперечить оборотності цієї матриці.

Якщо $n-s+1 > r-1$, то матриця L містить

$$(r-1)\times((s-1)+(n-r+1))$$

підматрицю, всі елементи якої діляться на σ_2. Оскільки

$$(r-1)+(s-1)+(n-r+1) = n+s-1 = (n+1)+(s-2) \geqslant n+1,$$

то і в цьому випадку $\sigma_2 \mid \det L$ – суперечність. Таким чином, $T \notin \mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta$. Отже, $\mathbf{G}_\Gamma^T \mathbf{G}_\Delta \neq \mathrm{GL}_n(R)$ – протиріччя.

Достатність. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^2 \in \mathrm{GL}_2(R)$ і

$$\left(a_{11},\ \frac{\delta_2}{\delta_1} a_{12} \right) = \sigma.$$

Із теореми 6.3 випливає, що в групі $\mathbf{G}_\Delta$ існує така матриця H, що

$$AH = \left\| \begin{matrix} \sigma & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки
$$\left(\frac{\delta_2}{\delta_1},\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) = 1, \quad \text{і} \quad \sigma \,|\frac{\delta_2}{\delta_1},$$
то
$$\left(\sigma,\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) = 1.$$
Тому в групі $\mathbf{G}_\Gamma^T$ знайдеться така матриця L, для якої
$$\det(LAH) = 1$$
і
$$LAH = \left\| \begin{array}{cc} 1 & a \\ b & c \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ b & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right\|.$$
Отже,
$$A = \underbrace{\left(L^{-1}\left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ b & 1 \end{array} \right\|\right)}_{L_1} \underbrace{\left(\left\| \begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right\| H^{-1}\right)}_{H_1},$$
де $L_1 \in \mathbf{G}_\Gamma^T$ та $H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$. Тобто теорема правильна для матриць другого порядку.

Вважатимемо, що наше припущення правильне для матриць порядку $n - 1$. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$. Міркуючи аналогічно, як і вище, знайдемо в групах $\mathbf{G}_\Gamma^T$ та $\mathbf{G}_\Delta$ такі матриці L та H, що
$$LAH = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{array} \right\|.$$
Згідно з припущенням оборотну матрицю A_{n-1} можна записати у вигляді
$$A_{n-1} = L_{n-1}H_{n-1},$$
де
$$L_{n-1} \in \mathbf{G}_{\Gamma_1}^T, \ \ H_{n-1} \in \mathbf{G}_{\Delta_1}, \ \ \Gamma_1 = \mathrm{diag}\,(\gamma_2, \ \ \ldots, \ \ \gamma_n),$$
$$\Delta_1 = \mathrm{diag}\,(\delta_2, \ \ \ldots, \delta_n).$$
Отже,
$$A = \left(L^{-1}\left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{n-1} \end{array} \right\|\right) \left(\left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{n-1} \end{array} \right\| H^{-1}\right).$$
Зауваживши, що
$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{n-1} \end{array} \right\| \in \mathbf{G}_\Gamma^T, \ \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{n-1} \end{array} \right\| \in \mathbf{G}_\Delta,$$
переконуємося у правильності нашого твердження. Теорему доведено. □

Розділ 5.
Факторизація матриць

5.1. Окремі випадки факторизацій матриць

У попередньому розділі встановлені умови подільності та асоційовності матриць. У цьому підрозділі показується зв'язок властивостей множини $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ з властивостями дільників матриць, що породжені цією множиною.

Всюди, якщо це спеціально не обумовлено, R – кільце елементарних дільників.

Теорема 5.1. *Матриця $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ має єдиний з точністю до асоційовності дільник із формою Сміта Φ тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi.$$

Доведення. Із теореми 4.4 випливає, що матриця A має єдиний з точністю до асоційовності дільник із формою Сміта Φ, тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) = \{I\}$, тобто $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi$. □

Умови рівності множин $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $\mathbf{G}_\Phi$ у термінах інваріантних множників вказано у властивості 4.9.

Якщо матриця A має форму Сміта E і $P \in \mathbf{P}_A$ та Φ – d-матриця така, що $\mathrm{E} = \Phi\Delta$, то

$$A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1} = (P^{-1}\Phi)(\Delta Q^{-1}) = (P^{-1}\Phi U^{-1})(U\Delta Q^{-1}),$$

де $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. Звідси випливає, що множина $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ є множиною лівих дільників матриці A з формою Сміта Φ. Відразу постає питання, чи ця множина вичерпує всі ліві дільники матриці A з формою Сміта Φ. Повна відповідь отримана в наступній теоремі.

Теорема 5.2. *Множина $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ складається з усіх лівих дільників матриці $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$ з формою Сміта Φ тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\mathrm{E}.$$

Доведення. Необхідність. На підставі наслідку 4.1 множина $(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ є множиною всіх лівих дільників матриці A з формою Сміта Φ. Нехай

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R).$$

Це рівносильно тому, що для кожної матриці L із $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ та V із $\mathrm{GL}_n(R)$ існують такі матриці $P\in\mathbf{P}_A$ та $U\in\mathrm{GL}_n(R)$, що

$$(LP_A)^{-1}\Phi V=P^{-1}\Phi U.$$

Оскільки $\mathbf{P}_A=\mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A$, то в групі $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ існує така матриця K, що $P=KP_A$. Отже,

$$(LP_A)^{-1}\Phi V=(KP_A)^{-1}\Phi U.$$

Звідси отримуємо

$$(KL^{-1})\Phi=\Phi(UV^{-1}).$$

Це означає, що $KL^{-1}=H\in\mathbf{G}_\Phi$. Тобто $L=H^{-1}K$. Зваживши на те, що $H^{-1}\in\mathbf{G}_\Phi$, отримуємо $L\in\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Отже, $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)\subseteq\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Оскільки згідно з властивістю 4.4 $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_{\mathrm{E}}\subseteq\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$, то $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_{\mathrm{E}}=\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$.

Достатність. Маємо

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)=(\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)=(\mathbf{G}_\Phi(\mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A))^{-1}\times$$

$$\times\Phi\mathrm{GL}_n(R)=(\mathbf{G}_\Phi\mathbf{P}_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)=\mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{G}_\Phi\Phi\mathrm{GL}_n(R)=\mathbf{P}_A^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R).$$

Теорему доведено. □

Умови рівності множин $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$, $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}\mathbf{G}_\Phi$ над кільцем Безу стабільного рангу 1,5 сформульовано у властивості 4.5.

У теоремі 5.1 наведено умови, за яких матриця A має лише один з точністю до асоційовності дільник з формою Сміта Φ. У наступній теоремі розглядаємо інший "крайній"випадок – коли всі матриці із заданою формою Сміта є дільниками матриці A.

Теорема 5.3. *Для того, щоб кожна матриця з формою Сміта* Φ *була лівим дільником матриці* $A=P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, *необхідно та достатньо, щоб* $\Phi|\mathrm{E}$ *і*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)=\mathrm{GL}_n(R).$$

Доведення. Необхідність умови $\Phi|\mathrm{E}$ доведена в теоремі 4.6.

Нехай U – оборотна матриця. Тоді матриця $(UP_A)^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці A. Множина всіх лівих дільників матриці A з формою Сміта Φ має вигляд $(\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$. Отже, в множині $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ знайдеться така матриця L, а в групі $\mathrm{GL}_n(R)$ така V, що

$$(UP_A)^{-1}\Phi=(LP_A)^{-1}\Phi V^{-1}.$$

Звідси отримуємо $LU^{-1}\Phi=\Phi V^{-1}$. Це означає, що $LU^{-1}=H\in\mathbf{G}_\Phi$. Тобто $U=H^{-1}L$. Отже, кожну оборотну матрицю U можна зобразити як добуток матриць із групи $\mathbf{G}_\Phi$ та множини $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$. Таким чином,

$$\mathrm{GL}_n(R)\subseteq\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi).$$

Оскільки виконується і обернене включення, то

$$\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Згідно з властивістю 4.1

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Отже, $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathrm{GL}_n(R)$.

Достатність. Нехай $B = P_B^{-1} \Phi Q_B^{-1}$ – довільна матриця з формою Сміта Φ. Оскільки

$$P_B P_A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi),$$

то на підставі теореми 4.1 матриця B є лівим дільником матриці A. $\square$

Умови рівності множин $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi),\ \mathrm{GL}_n(R)$ на мові інваріантних можників сформульовано у властивості 4.11.

Згідно з теоремою 1.11, якщо матриці A, B є лівими дільники одна одної, то вони асоційовні справа. Розглянемо випадок, коли вони одночасно є лівими та правими дільниками одна одної.

Теорема 5.4. *Нехай матриця B – лівий дільник матриці A, а матриця A – правий дільник матриці B. Тоді матриці A, B асоційовні справа й зліва.*

Доведення. Нехай матриці A, B мають форми Сміта E, Φ, відповідно. Оскільки $A = BC$, то на підставі теореми 4.1 $\Phi | \mathrm{E}$. Також виконується рівність $B = DA$. Перейшовши до транспонованих матриць, отримаємо $B^T = A^T D^T$. Тобто матриця A^T – лівий дільник матриці B^T. Оскільки операція транспонування не змінює визначників усіх підматриць матриці A, то зваживши на теорему 2.2, отримуємо $A^T \sim A \sim \mathrm{E}$. Отже, $\mathrm{E} | \Phi$. Це означає, що відповідні інваріантні множники матриць Φ та E асоційовні. Звідси випливає, що матриці A, B можна записати у вигляді

$$A = P_A^{-1} \Phi Q_A^{-1},\ B = P_B^{-1} \Phi Q_B^{-1}.$$

Оскільки $A = BC$, то згідно з теоремою 4.1 $P_B = L P_A^{-1}$, де $L \in \mathbf{L}(\Phi, \Phi)$. На підставі властивості 4.6 $\mathbf{L}(\Phi, \Phi) = \mathbf{G}_{\boldsymbol{\Phi}}$. Взявши до уваги теорему 4.3, приходимо до висновку, що матриці A та B асоційовні справа.

З аналогічних міркувань із рівності $B^T = A^T D^T$ випливає, що й матриці B^T та A^T є асоційовними справа. Отже, матриці A та B асоційовні зліва. $\square$

Приклад 5.1. Щоб побудувати приклад матриць, що одночасно є лівими та правими дільниками одна одної, можна поступити так. Нехай

$$A = P_1^{-1} \Phi Q_1^{-1} = P_2^{-1} \Phi Q_2^{-1}.$$

Тоді матриці

$$M = P_1^{-1}\Phi Q_2^{-1}, \;\; N = P_2^{-1}\Phi Q_1^{-1}$$

власне і будуть такими. Дійсно,

$$M = P_1^{-1}\Phi Q_2^{-1} = (P_1^{-1}P_2)P_2^{-1}\Phi Q_2^{-1} =$$

$$= (P_1^{-1}P_2)P_1^{-1}\Phi Q_2^{-1} = (P_1^{-1}P_2)^2 P_2^{-1}\Phi Q_2^{-1} = (P_1^{-1}P_2)^2 N.$$

Подібно показується, що $N = M(Q_2Q_1^{-1})^2$. ♢

5.2. Неасоційовні дільники матриць і множина Казімірського

Наші подальші дослідження спрямовані на знаходження множини $\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Нехай $f \in R$. Розглянемо фактор-кільце R/R_f. Позначимо через $K(f)$ множину представників суміжних класів цього фактор-кільця.

Нехай

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \;\; \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

– неособливі d-матриці, причому $\Phi|\mathrm{E}$. Позначимо через $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}k_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}k_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}k_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}k_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

де $k_{ij} \in K\left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varphi_j}\right)$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i > j$.

Множина $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ називається **множиною Казімірського** на честь відомого українського алгебраїста, який вперше розглянув матриці такого вигляду.

Встановимо взаємозв'язок між породжуючою множиною $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, множиною Казімірського $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ та групами $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\mathrm{E}$.

Теорема 5.5. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу* 1,5. *Якщо Φ – неособлива d-матриця, що є дільником d-матриці* E, *то*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R).$$

Доведення. Нехай $L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Згідно з теоремою 2.13 існують $H \in \mathbf{G}_\Phi$, нижня унітрикутна матриця S та верхня унітрикутна матриця U, що $L = HSU$. Тобто $S = H^{-1}LU^{-1}$. Згідно з наслідком 2.2 група верхніх унітрикутних матриць є підгрупою будь-якої групи Зеліска. Тому $U \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Використавши властивості 4.1, 4.2, отримуємо, що $S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. На підставі леми 5.3 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ знайдеться така матриця H_1, що $H_1 S = V \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тоді

$$L = HSU = (HH_1^{-1})(H_1 S)U = H_2 VU.$$

Зауваживши, що $H_2 \in \mathbf{G}_\Phi$, отримуємо

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R).$$

Згідно з властивостями 4.1, 4.2

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi), \ \ \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)\mathbf{G}_\mathrm{E} = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Оскільки $U_n^{up}(R) \subset \mathbf{G}_\mathrm{E}$ і $I \in U_n^{up}(R)$, то

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Тоді з включення $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) \subset \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ випливає, що

$$\mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R) \subseteq \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Отже,

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R).$$

Теорему доведено. □

Наслідок 5.1. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу* 1,5. *Множина*

$$(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)\, U_n^{up}(R)P)^{-1}\, \Phi \mathrm{GL}_n(R)$$

є множиною всіх лівих дільників матриці $A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1}$ з формою Сміта Φ.

Доведення. На підставі наслідку 4.1 множина $(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R)$ є множиною всіх лівих дільників матриці A з формою Сміта Φ. Зваживши на теорему 5.5, отримуємо

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) = (\mathbf{G}_\Phi \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) U_n^{up}(R)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R) =$$

$$= P^{-1}U_n^{up}(R)\mathbf{V}^{-1}(\mathrm{E}, \Phi)\mathbf{G}_\Phi\Phi\mathrm{GL}_n(R) = P^{-1}U_n^{up}(R)\mathbf{V}^{-1}(\mathrm{E}, \Phi)\Phi\mathrm{GL}_n(R) =$$

$$= (\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)\, U_n^{up}(R)P)^{-1}\Phi\mathrm{GL}_n(R).$$ □

Теорема 5.6. *Множину* $\mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi)$ *можна вибрати так, щоб*

$$\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi) \subseteq \mathbf{W}(\mathrm{E},\Phi).$$

Доведення. Нехай $U, V \in \mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)$. Запишемо їх у блочному вигляді

$$U = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}u_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}u_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}u_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}u_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} M_1^U & \mathbf{0} \\ \hline M_2^U & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline N_1^U & N_2^U \end{array} \right\|,$$

$$V = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}v_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}v_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}v_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}v_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} M_1^V & \mathbf{0} \\ \hline M_2^V & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline N_1^V & N_2^V \end{array} \right\|.$$

Припустимо, що ці матриці є представниками одного класу суміжності множини $\mathbf{L}(\mathrm{E},\Phi)$ по групі $\mathbf{G}_\Phi$. Тобто $HV = U$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Оскільки множина нижніх унітрикутних матриць утворює групу, то матриця H також є нижньою унітрикутною матрицею вигляду

$$H = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} M_1^H & \mathbf{0} \\ \hline M_2^H & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline N_1^H & N_2^H \end{array} \right\|.$$

Спершу розглянемо матриці другого порядку:

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}u_{21} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}v_{21} & 1 \end{array} \right\|.$$

Отже,

$$\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}u_{21} - \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}v_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21}.$$

Зауваживши, що

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1},$$

отримуємо

$$u_{21} - v_{21} = \frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{21}.$$

Тобто

$$u_{21} \equiv v_{21} \left(\operatorname{mod} \frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} \right).$$

Оскільки

$$u_{21}, v_{21} \in K \left(\frac{\varphi_2, \varepsilon_1}{\varphi_1} \right),$$

то $u_{21} = v_{21}$. Отже, $V = V_1$.

Вважатимемо, що наше припущення правильне для матриць порядку, меншого за n, і розглянемо матриці порядку n. Рівність $HV = U$ запишемо у вигляді

$$\left\| \begin{matrix} M_1^H & \mathbf{0} \\ M_2^H & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} M_1^V & \mathbf{0} \\ M_2^V & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} M_1^U & \mathbf{0} \\ M_2^U & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки

$$M_1^H \in \mathbf{G}_{diag(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}, \quad M_1^V, M_1^U \in \mathbf{V}(\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}), \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})),$$

то за припущенням індукції $M_1^V = M_1^U$.

Аналогічно з рівності

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_1^H & N_2^H \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_1^V & N_2^V \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_1^U & N_2^U \end{matrix} \right\|$$

та включень

$$N_2^H \in \mathbf{G}_{\operatorname{diag}(\varphi_2, \ldots, \varphi_n)}, \quad N_2^V, N_2^U \in \mathbf{V}(\operatorname{diag}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \operatorname{diag}(\varphi_2, \ldots, \varphi_n))$$

випливає, що $N_2^V = N_2^U$. Тобто матриці V, U відрізняються одна від одної лише елементом, який знаходиться на позиції $(n1)$. Тоді

$$UV^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & \\ s_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = H,$$

де

$$s_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} (u_{n1} - v_{n1}) = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{n1}.$$

Отже,

$$u_{n1} - v_{n1} = \frac{(\varphi_n, \varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{n1}.$$

Тобто

$$u_{n1} \equiv v_{n1} \left(\mathrm{mod} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_1)}{\varphi_1} \right).$$

Оскільки

$$u_{n1}, v_{n1} \in K \left(\frac{\varphi_n, \varepsilon_1}{\varphi_1} \right),$$

то $u_{n1} = v_{n1}$. Отже, $V = U$, що і потрібно довести. □

Нехай $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособлива d-матриця і $2 \leq j_1 < j_2 \cdots < j_g \leq n$ – множина індексів, при яких елементи φ_i, φ_{i-1} є неасоційовними в кільці R, $i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_g\}$.

Теорема 5.7. *Для того, щоб*

$$\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi),$$

необхідно та достатньо, щоб кожний дільник елемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ мав спільний нетривіальний дільник з елементом $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$.

Перед доведенням цієї теореми встановимо низку допоміжних тверджень.

Лема 5.1. *Нехай кожний нетривіальний дільник елемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ має спільний дільник з $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}$. Тоді, якщо для деякого d виконується умова*

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, d \right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1}, d)} \right) = 1.$$

Доведення. Нехай

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1}, d)} \right) = \alpha_i \neq 1.$$

Звідси випливає, що α_i є дільником елемента $\frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1})}$. Тоді згідно з припущенням леми

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, \alpha_i \right) \neq 1$$

– протиріччя. □

Лема 5.2. *Нехай L – оборотна матриця вигляду*

$$L = \left\| \begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1.n-1} & l_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2.n-1} & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{array} \right\| = \|l'_{ij}\|_1^n.$$

Тоді

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, l'_{ij}, l'_{i+1.j}, \dots, l'_{nj} \right) = 1,$$

$i = 2, 3, \dots, n, \ \ j = i, i+1, \dots, n.$

Доведення. Припустимо, що

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, l'_{ij}, l'_{i+1.j}, \dots, l'_{nj} \right) = \delta_{ij} \neq 1.$$

Розглянемо підматрицю

$$L_{ij} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_1)} l_{i1} & \dots & \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} l_{i.i-1} & l'_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{i-1})} l_{n.i-1} & l'_{nj} \end{array} \right\|$$

матриці L. З властивості 4.3 випливає, що $\delta_{ij} | \left\langle L_{ij} \right\rangle_1$. Матриця L_{ij} має розміри $(n-i+1) \times i$. Зауваживши, що $n - i + 1 + i = n + 1 > n$, на підставі твердження 3.1 отримуємо $\delta_{ij} | \det L$. А це суперечить тому, що матриця L оборотна. □

Лема 5.3. *Нехай S – нижня унітрикутна матриця з $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $HS \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$.*

Доведення. Згідно з теоремою 4.5 матриця S має вигляд

$$S = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|.$$

Розглянемо матрицю

$$H_0 = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

де h_{ij} – параметри, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i > j$.

Якщо $n = 2$, то

$$H_0 S = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} s_{21} & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} \left(\frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} h_{21} + s_{21} \right) & 1 \end{matrix} \right\| = S_1.$$

Нехай

$$s_{21} \equiv k_{21} \left(\bmod \frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} \right),$$

де $k_{21} \in K \left(\frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} \right)$. Тоді

$$k_{21} = s_{21} + \frac{(\varphi_2, \varepsilon_1)}{\varphi_1} r_{21},$$

де $r_{21} \in R$. Поклавши $h_{21} = r_{21}$, отримуємо $S_1 \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$.

Вважатимемо, що наше припущення правильне для матриць порядку, меншого за n, і розглянемо матриці порядку n. Нехай $H_0 S = \|d_{ij}\|_1^n$. Тоді

$$d_{nj} = \left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} \cdots \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n.n-1} \quad 1 \right\| \times$$

$$\times \left\| \underbrace{0 \ldots 0}_{j-1} \quad 1 \quad \frac{\varphi_{j+1}}{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)} s_{j+1.j} \cdots \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_j)} s_{nj} \right\|^T =$$

$$= \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} + \frac{\varphi_n}{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)} h_{n.j+1} s_{j+1.j} + \cdots + \frac{\varphi_n}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_j)} h_{n.n-1} s_{n-1.j} + \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_j)} s_{nj} =$$

$$= \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_j)} \times$$

$$\times \left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{\varphi_j} h_{nj} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{(\varphi_{j+1}, \varepsilon_j)} h_{n.j+1} s_{j+1.j} + \cdots + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_j)} h_{n.n-1} s_{n-1.j} + s_{nj} \right),$$

$j = 1, \ldots, n-1$. Нехай $j = n-1$ і

$$s_{n.n-1} \equiv k_{n.n-1} \left(\bmod \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}{\varphi_{n-1}} \right),$$

де $k_{n.n-1} \in K \left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}{\varphi_{n-1}} \right)$. Отже,

$$k_{n.n-1} = s_{n.n-1} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}{\varphi_{n-1}} r_{n.n-1},$$

де $r_{n.n-1} \in R$. Покладемо $h_{n.n-1} = r_{n.n-1}$. Нехай $j = n-2$ і

$$s_{n.n-2} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_{n-2})} r_{n.n-1} s_{n-1.n-2} \equiv k_{n.n-2} \left(\mathrm{mod} \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{\varphi_{n-2}} \right),$$

де $k_{n.n-2} \in K\left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{\varphi_{n-2}}\right)$. Тоді існує таке $r_{n.n-2} \in R$, що

$$k_{n.n-2} = s_{n.n-2} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_{n-2})} r_{n.n-1} s_{n-1.n-2} + \frac{(\varphi_n, \varepsilon_{n-2})}{\varphi_{n-2}} r_{n.n-2}.$$

Покладемо $h_{n.n-2} = r_{n.n-2}$. Продовжуючи описаний процес, отримаємо таку нижню унітрикутну матрицю

$$H_1 = \begin{Vmatrix} I & \mathbf{0} \\ h & 1 \end{Vmatrix},$$

де

$$h = \begin{Vmatrix} \frac{\varphi_n}{\varphi_1} r_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} r_{n.n-1} \end{Vmatrix},$$

що

$$H_1 S = \begin{Vmatrix} S' & \mathbf{0} \\ g & 1 \end{Vmatrix},$$

де S' – нижня унітрикутна матриця з множини

$$\mathbf{L}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})),$$

$$g = \begin{Vmatrix} \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} k_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} k_{n.n-1} \end{Vmatrix},$$

$k_{nj} \in K\left(\frac{(\varphi_n, \varepsilon_j)}{\varphi_j}\right)$, $j = 1, \dots, n-1$. За припущенням індукції в групі $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}$ існує така матриця H', що

$$H'S' \in \mathbf{V}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})).$$

Отже, $(H' \oplus 1) H_1 S \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$, що і потрібно довести. □

Лема 5.4. *Нехай* $\bar{l} = \begin{Vmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{Vmatrix}^T$ *– примітивний стовпець, причому*

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_1, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n-1}, l_n \right) = 1.$$

Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ *існує така матриця* H, *що* $H\bar{l} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}^T$.

Доведення. Існують такі елементи $u_1, \dots, u_n$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_1 u_1 + \ldots + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n-1} u_{n-1} + l_n u_n = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1}, u_n \right) = 1.$$

Скориставшись теоремою 1.1, доповнимо примітивний рядок

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1 \quad \cdots \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1} \quad u_n \right\|$$

до оборотної матриці вигляду

$$H_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1 & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} u_2 & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1} & u_n \end{array} \right\|.$$

На підставі теореми 2.6 $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$. Оскільки

$$H_1 \bar{l} = \left\| \; t_1 \quad \ldots \quad t_{n-1} \quad 1 \; \right\|^T,$$

то

$$\underbrace{\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & -t_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & -t_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right\|}_{H_2} H_1 \bar{l} = \left\| \; 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1 \; \right\|^T.$$

Матриця H_2 належить групі $\mathbf{G}_\Phi$. Отже, шуканою буде матриця $H = H_2 H_1$. Лему доведено. $\square$

Повернемося до доведення **теореми 5.7.**

Доведення. Необхідність. Нехай δ_i – нетривіальний дільник $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $i_1 \leqslant i \leqslant i_g$. Припустимо, що

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}, \delta_i \right) = 1.$$

Тоді існують такі u, v, що

$$u \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})} + v \delta_i = 1.$$

Розглянемо матрицю

$$L_i = I_{i-2} \oplus \left\| \begin{matrix} v & -u \\ \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})} & \delta_i \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-i}.$$

Згідно з теоремою 4.5 $L_i \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Матриця, складена з останніх $n-i+1$ стовпців матриці L_i, має вигляд

$$S_i = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|,$$

Домноживши її зліва на Φ_i, отримаємо

$$\Phi_i S_i = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -u\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $\delta_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, то

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} = \delta_i \gamma_i.$$

Тоді

$$\left(I_{i-2} \oplus \left\| \begin{matrix} 1 & u\gamma_i \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \oplus I_{n-i} \right) \Phi_i S_i =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Тобто

$$\Phi_i S_i \overset{l}{\sim} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}.$$

З іншого боку, останні $n-i+1$ стовпці будь-якої матриці з множини $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ мають вигляд

$$M_i = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_{i+1}}{(\varphi_{i+1}, \varepsilon_i)} l_{i+1.i} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_i)} l_{ni} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{i+1})} l_{n.i+1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$\Phi_i M_i = M_i \overset{l}{\sim} \begin{Vmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{Vmatrix}.$$

Припустимо, що матриця $V_i \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$ є представником суміжного класу $\mathbf{G}_\Phi L_i$. Тобто в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $V_i = HL_i$. На підставі леми 3.5 $\Phi_i V_i \overset{l}{\sim} \Phi_i L_i$. З цієї еквівалентності випливає, що $\Phi_i S_i \overset{l}{\sim} \Phi_i M_i$. Проте матриця $\Phi_i S_i$ має ліву форму Ерміта

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}.$$

а матриця $\Phi_i M_i$

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{0} \\ I_{n-i+1} \end{Vmatrix}.$$

Прийшли до протиріччя.

Достатність. Нехай

$$L = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1.n-1} & l_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2.n-1} & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{Vmatrix}$$

– матриця з $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Для доведення нашого твердження потрібно показати, що існує така матриця $H \in \mathbf{G}_\Phi$, що $HL \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$. Процес доведення розіб'ємо на два кроки. Спершу знайдемо таку матрицю $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, що матриця $H_1 L$ буде нижньою унітрикутною.

Якщо $n = 2$, з оборотності матриці L випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}, l_{22}\right) = 1.$$

Згідно з лемою 5.1

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, l_{22}\right) = 1.$$

Для завершення розгляду цього випадку достатньо скористатись теоремою 2.7.

Припустимо, що наше припущення правильне для матриць порядку, меншого за n, і розглянемо матриці порядку n. На підставі леми 5.2

$$\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}, l_{nn}\right) = 1.$$

Згідно з лемою 5.1 також

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, l_{nn}\right) = 1.$$

Тоді

$$\delta = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n-1.n}, l_{nn}\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} l_{n-2.n}, l_{n-1.n}\right), l_{nn}\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} l_{n-2.n}, l_{n-1.n}, l_{nn}\right).$$

Знову ж таки, згідно з лемою 5.2

$$\left(\frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1}, \varepsilon_{n-2})}, (l_{n-1.n}, l_{nn})\right) = 1.$$

Отже,

$$\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}}, (l_{n-1.n}, l_{nn})\right) = 1.$$

Тоді

$$\delta = \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} \left(\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-3}} l_{n-3.n}, l_{n-2.n}\right), (l_{n-1.n}, l_{nn})\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_1} l_{1n}, \cdots, \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-3}} l_{n-3.n}, l_{n-2.n}, l_{n-1.n}, l_{nn}\right).$$

Продовжуючи описаний процес, отримаємо

$$\delta = (l_{1n}, \ldots, l_{nn}) = 1.$$

Згідно з лемою 5.4 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_0 , що

$$H_0 L = \left\| \begin{array}{cc} L' & \mathbf{0} \\ g & 1 \end{array} \right\|.$$

На підставі властивості 4.1 $H_0 L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Тому

$$L' \in \mathbf{L}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}), \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})).$$

Згідно з припущенням індукції існує така матриця $H' \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}$, що матриця $H'L'$ є нижньою унітрикутною. Тобто матриця $H_1 = (H' \oplus 1) H_0' H_0$ є шуканою і матриця $H_1 L \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ є нижньою унітрикутною.

Тепер для завершення доведення теореми достатньо скористатись лемою 5.3 і знайти таку матрицю $H_2 \in \mathbf{G}_\Phi$, що $H_2 H_1 L \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$, а також використати результати теореми 4.4. $\square$

Об'єднуючи теореми 4.4, 5.7, отримаємо наступний результат.

Теорема 5.8. *Множина $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1} \Phi$ складається з усіх лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ тоді і тільки тоді, коли кожний дільник елемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ має спільний нетривіальний дільник з елементом $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$.* $\square$

Зауважимо, що коли умови цієї теореми не виконуються, то множина $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi) P_A)^{-1} \Phi$ описує лише частину дільників матриці A з формою Сміта Φ.

Приклад 5.2. Розглянемо матрицю

$$A = \left\| \begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 5x^3 \end{matrix} \right\| = \mathrm{E}$$

над кільцем

$$Q = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{Q},\ i \in \mathbb{N} \right\},$$

яка збігається зі своєю формою Сміта E. Знайдемо всі її ліві неасоційовні справа дільники матриці з формою Сміта

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 5x \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки

$$x = 5\left(\frac{1}{5}x\right),$$

то кожний дільник елемента $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 5x$ має спільний дільник з елементом

$$\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} = \frac{5x}{(5x, 5)} = x.$$

Тоді згідно з теоремою 5.8 шукана множина дільників має вигляд

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ xk & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \Phi \right\} = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -xk & 5x \end{matrix} \right\| \right\},$$

де $k \in K\left(\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1}\right) = K(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. ♢

Для кільця головних ідеалів теорему 5.8 можна переформулювати на мові степенів нерозкладних дільників інваріантних множників матриць E та Φ.

Розкладемо елементи $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$, у добуток степенів нерозкладних множників:

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} = g_{i1}^{k_{i1}} \cdots g_{il}^{k_{il}}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}} = g_{i1}^{q_{i1}} \cdots g_{il}^{q_{il}} h_{i1}^{p_{i1}} \cdots h_{ir}^{p_{ir}}.$$

Теорема 5.9. *Нехай R – кільце головних ідеалів. Множина $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ складається з усіх лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ тоді і тільки тоді, коли $k_{ij} > q_{ij}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$, $j = 1, \ldots, l$.*

Доведення. Запишемо елемент $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$ у вигляді

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} = \frac{\varphi_i/_{\varphi_{i-1}}}{\left(\varphi_i/_{\varphi_{i-1}}, \varepsilon_{i-1}/_{\varphi_{i-1}}\right)}, \tag{5.1}$$

$i = j_1, j_2, \ldots, j_g$. Згідно з теоремою 5.7, щоб множина $(\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi)P_A)^{-1}\Phi$ складалась з усіх лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ, необхідно та достатньо, щоб кожний дільник елемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_i - 1}$ мав спільний дільник з елементом $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_g$. Зваживши на рівність (5.1), для того, щоб g_{im} був дільником $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$, потрібно, щоб

$$g_{im} | \frac{g_{im}^{k_{im}}}{(g_{im}^{k_{im}}, g_{im}^{q_{im}})}.$$

А це можливо лише, коли $k_{im} > q_{im}$. □

Приклад 5.3. Нехай A – цілочислова матриця з формою Сміта

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(1,\ 2,\ 2^3 3^1 5^1,\ 2^5 3^2 5^2).$$

Опишемо ліві неасоційовні справа дільники матриці A, які мають форму Сміта $\Phi = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 2^3,\ 2^4 3^2)$. У цьому випадку

$$\mathbf{V}(\mathrm{E},\Phi) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 r_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 2^3 3^2 r_{42} & 2\ 3\ r_{43} & 1 \end{array} \right\|,$$

де $r_{32}, r_{42} \in K(2) = \{0,1\}$, $r_{43} \in K(3) = \{0,1,2\}$.

Множиною індексів, за яких елементи φ_i та φ_{i-1} не є асоційовними, буде $\{3,4\}$. Тоді

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_2} = 2^3 \Rightarrow k_{31} = 3,$$
$$\frac{\varepsilon_2}{\varphi_2} = 2^1 \Rightarrow q_{31} = 1.$$

Отже, $k_{31} > q_{31}$. Також

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_3} = 2^1 3^2 \Rightarrow k_{41} = 1, k_{42} = 2,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varphi_3} = 2^0 3^1 5^1 \Rightarrow q_{41} = 0, q_{42} = 1$$

і

$$k_{41} > q_{41}, k_{42} > q_{42}.$$

Оскільки виконуються всі умови теореми 5.9, то множина всіх лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ, має вигляд $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$.

Якщо ж шукати дільники матриці A з формою Сміта

$$\Phi_1 = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 2^3,\ 2^4 3),$$

то

$$\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi_1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 r_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 2^3 3\, r_{42} & 2\, r_{43} & 1 \end{Vmatrix},$$

де $r_{32}, r_{42} \in K(2)$, $r_{43} \in K(3)$. У цьому випадку

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_3} = 2^1 3^1 \Rightarrow k_{41} = k_{42} = 1,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varphi_3} = 2^0 3^1 \Rightarrow q_{41} = 0,\ q_{42} = 1.$$

і $k_{42} = q_{42} = 1$. Тобто умови теореми 5.9 не виконуються і множина $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ не вичерпує всіх лівих неасоційовних справа дільників матриці A, які мають форму Сміта Φ_1. Зокрема, в множині $(\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ не існує матриці, асоційовної справа до матриці

$$P_A^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi_1,$$

яка є лівим дільником матриці A. $\diamondsuit$

5.3. Значення матриці на системі коренів діагональних елементів d-матриці

Використаємо отримані результати для опису дільників поліноміальних матриць. Для їх викладу нам знадобляться результати цього підрозділу.

Нехай F – алгебраїчно замкнуте поле характеристики нуль і $G(x) = \|g_{ij}(x)\|$ – $n \times p$ матриця над $F[x]$. Під похідною матриці $G(x)$ розумітимемо $G'(x) = \|g'_{ij}(x)\|$. Похідні вищих порядків позначатимемо через $G''(x), G'''(x), \ \dots\ , G^{(t)}(x)$.

Нехай

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_1)^{k_2} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r}$$

— унітальний поліном над F.

Означення 5.1. [54] Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$ називають числову матрицю

$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_r \end{array} \right\|, \quad H_i = \left\| \begin{array}{c} G'(\alpha_i) \\ G''(\alpha_i) \\ \dots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{array} \right\|,$$

$i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ r$.

В означенні матриці $M_{G(x)}(\varphi)$ суттєву роль відіграє порядок запису полінома $\varphi(x)$ у вигляді добутку співмножників $(x - \alpha_j)^{k_j}$. Щоб підкреслити цю залежність, матрицю $M_{G(x)}(\varphi)$ також позначатимемо через $M_{G(x)}[\alpha_1^{k_1},\ \dots\ ,\ \alpha_r^{k_r}]$.

Нехай $g_i(x)$ — i-ий рядок $n \times m$ матриці $G(x)$, $i = 1,\ \dots\ ,\ n$, і

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ \dots\ ,\ \ \varphi_n(x)),$$

де $\varphi_i(x)$ – унітальні поліноми, $i = 1,\ \dots\ ,\ n$.

Означення 5.2. Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів діагональних елементів матриці $\Phi(x)$ називають матрицю

$$M_{G(x)}(\Phi) = \left\| \begin{array}{c} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ M_{g_2(x)}(\varphi_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{array} \right\|,$$

де блок $M_{g_j(x)}(\varphi_j)$ відсутній, якщо $\deg \varphi_j(x) = 0$.

Властивість 5.1. *Якщо $L = \|l_{ij}\|$ – $p \times t$ матриця над F, то*

$$M_{G(x)L}(\Phi) = M_{G(x)}(\Phi)L.$$

Доведення. Оскільки

$$g_i(x)L = \left\| \begin{array}{ccc} g_{i1}(x) & \dots & g_{ip}(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} l_{11} & \dots & l_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{p1} & \dots & l_{pt} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} g_{i1}(x)l_{11} + \dots + g_{ip}(x)l_{p1} & \dots & g_{i1}(x)l_{1t} + \dots + g_{ip}(x)l_{pt} \end{array} \right\|,$$

то $(g_i(x)L)' =$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} g'_{i1}(x)l_{11} + \dots + g'_{ip}(x)l_{p1} & \dots & g'_{i1}(x)l_{1t} + \dots + g'_{ip}(x)l_{pt} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} g'_{i1}(x) & \dots & g'_{ip}(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} l_{11} & \dots & l_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{p1} & \dots & l_{pt} \end{array} \right\| = g'_i L, \quad i = 1, \ \dots \ , \ n.$$

Звідси випливає, що

$$(g_i(x)L)^{(j)} = g_i^{(j)} L.$$

Отже,

$$M_{g_i(x)L}(\varphi_i(x)) = M_{g_i(x)}(\varphi_i(x))L.$$

Тому

$$M_{G(x)L}(\Phi) = \left\| \begin{array}{c} M_{g_1(x)L}(\varphi_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)L}(\varphi_n) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} M_{g_1(x)}(\varphi_1)L \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n)L \end{array} \right\| = M_{G(x)}(\Phi)L.$$

Доведення завершено. □

Властивість 5.2. *Виконується рівність*

$$M_{G_1(x)+G_2(x)}(\Phi) = M_{G_1(x)}(\Phi) + M_{G_1(x)}(\Phi).$$

Доведення не викликає жодних труднощів. □

Властивість 5.3. *Щоб*

$$M_{G(x)}(\Phi) = \mathbf{0}, \tag{5.2}$$

необхідно та достатньо, щоб $G(x) = \Phi(x)Q(x)$.

Доведення. Умова (5.2) означає, що коли $\deg \varphi_i(x) \geqslant 1$, то

$$M_{g_i(x)}(\varphi_i(x)) = \mathbf{0}.$$

Це рівносильно тому, що кожний елемент рядка $g_i(x)$ кратний $\varphi_i(x)$. Тобто матриця $G(x)$ має вигляд

$$G(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \varphi_1(x)q_{11}(x) & \dots & \varphi_1(x)q_{1p}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n(x)q_{n1}(x) & \dots & \varphi_n(x)q_{np}(x) \end{array} \right\| =$$

$$= diag\,(\varphi_1(x), \ \dots \ , \quad \varphi_n(x)) \left\| \begin{array}{ccc} q_{11}(x) & \dots & q_{1p}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1}(x) & \dots & q_{np}(x) \end{array} \right\| = \Phi(x)Q(x).$$

Що і потрібно довести. □

Нехай $A(x)$ – неособлива матриця над $F[x]$. Для неї існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \Phi(x), \tag{5.3}$$

де $\Phi(x)$ – форма Сміта матриці $A(x)$. Дослідимо властивості групи $\mathbf{G}_\Phi$ та значення матриці $G(x)$ на системі коренів діагональних елементів матриці $\Phi(x)$.

Нехай

$$\Phi_\alpha = \operatorname{diag}((x-\alpha)^{s_1},\ (x-\alpha)^{s_2},\ \ldots\ ,\ (x-\alpha)^{s_n}) \tag{5.4}$$

— матриця над $F[x]$, причому $s_i \geqslant 0,\ s_i \leqslant s_{i+1},\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1$. Нехай

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_{\nu_1},\ \ s_{\nu_1+1} = s_{\nu_1+2} = \cdots = s_{\nu_2},\ \ldots$$

$$\ldots\ , s_{\nu_{p-1}+1} = s_{\nu_{p-1}+2} = \cdots = s_{\nu_p} = s_n,$$

де $s_{\nu_1} < s_{\nu_2} < \ldots < s_{\nu_p}$. Виберемо в групі $\mathbf{G}_{\Phi_\alpha}$ довільну матрицю $H(x) = \|h_{ij}\|_1^n$. Розіб'ємо її на блоки таким чином, щоб діагональними блоками були матриці

$$H_{11} = \begin{Vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1.\nu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{\nu_1.1} & \ldots & h_{\nu_1.\nu_1} \end{Vmatrix},\ H_{22} = \begin{Vmatrix} h_{\nu_1+1.\nu_1+1} & \ldots & h_{\nu_1+1.\nu_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{\nu_2.\nu_1+1} & \ldots & h_{\nu_2\nu_2} \end{Vmatrix}, \cdots$$

$$\cdots\ ,\ H_{pp} = \begin{Vmatrix} h_{\nu_{p-1}+1.\nu_{p-1}+1} & \ldots & h_{\nu_{p-1}+1.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n.\nu_{p-1}+1} & \ldots & h_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Лема 5.5. $\det H_{ii}(\alpha) \neq 0,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p.$

Доведення. За теоремою 2.6 елементи матриці $H(x)$ мають вигляд $h_{ij} = (x-\alpha)^{s_i - s_j} q_{ij}$ для всіх $i > j$. Тому матриця $H(\alpha)$ має вигляд

$$H(\alpha) = \begin{Vmatrix} H_{11}(\alpha) & * & & * \\ \mathbf{0} & H_{22}(\alpha) & & * \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & H_{pp}(\alpha) \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$\det H(\alpha) = H_{11}(\alpha)H_{22}(\alpha)\cdots H_{pp}(\alpha).$$

Оскільки матриця $H(x)$ оборотна, то $\det H(\alpha) \neq 0$. Таким чином,

$$H_{11}(\alpha)H_{22}(\alpha)\cdots H_{pp}(\alpha) \neq 0.$$

Звідси випливає, що $\det H_{ii}(\alpha) \neq 0,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p.$ □

Лема 5.6. *Нехай $D(x)$ – $n \times m$ матриця над $F[x]$ і $H(x) \in \mathbf{G}_{\Phi_\alpha}$. Тоді*

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha) = FM_{D(x)}(\Phi_\alpha),$$

де F – оборотна матриця, причому

$$\det F = \pm\,|H_{11}(\alpha)|^{s_{\nu_1}}\ \ |H_{22}(\alpha)|^{s_{\nu_2}} \cdots |H_{pp}(\alpha)|^{s_{\nu_p}}\,.$$

Доведення. Маємо

$$M_{H(x)D(x)}(\,\Phi_\alpha) = \left\| \begin{array}{c} M_{h_1(x)D(x)}[\,\alpha^{(s_1)}] \\ M_{h_2(x)D(x)}[\,\alpha^{(s_2)}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{h_n(x)D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}] \end{array} \right\|,$$

де $h_i(x)$ – i-ий рядок матриці $H(x)$. Застосуваши до похідної добутку двох поліноміальних матриць формулу Лейбніца, отримаємо

$$(h_i(x)D(x))^{(q)} = h_i^{(q)}(x)D(x) + \binom{q}{1} h_i^{(q-1)}(x)D'(x) + \ \cdots\ +$$

$$+\binom{q}{q-2} h_i''(x)D^{(q-2)}(x) + \binom{q}{1} h_i'(x)D^{(q-1)}(x) + h_i(x)D^{(q)}(x).$$

Таким чином, $M_{h_i(x)D(x)}[\,\alpha^{(s_i)}] =$

$$= \left\| \begin{array}{c} h_i(\alpha)D(\alpha) \\ h_i'(\alpha)D(\alpha) + h_i(\alpha)D'(\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_i^{(s_i-1)}(\alpha)D(\alpha) + \binom{s_i-1}{1} h_i^{(s_i-2)}(\alpha)D'(\alpha) + \cdots + h_i(\alpha)D^{(s_i-1)}(\alpha) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} h_i(\alpha) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ h_i'(\alpha) & h_i(\alpha) & & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & & \\ h_i^{(s_i-1)}(\alpha) & \binom{s_i-1}{1} h^{(s_i-2)} & \ldots & h_i(\alpha) \end{array} \right\| M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_i)}] =$$

$$= R_{s_i} M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_i)}],\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Отже,

$$M_{H(x)D(x)}(\,\Phi_\alpha) = \left\| \begin{array}{cc} R_{s_k} & \mathbf{0} \\ R_{s_{k+1}} & \mathbf{0} \\ \cdots & \\ R_{s_n} & \end{array} \right\| M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}] = RM_{D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}]. \tag{5.5}$$

Зваживши на структуру елементів блоків матриці $H(x)$, що стоять під її головною діагоналлю, бачимо, що матриця R містить нульові стовпці. Викресливши їх, отримаємо деяку матрицю L. Викреслимо в матриці $M_{D(x)}[\ \alpha^{(s_n)}]$ ті рядки, що відповідають викресленим стовпцям матриці R. Отриману матрицю шляхом перестановки рядків зведемо до матриці $M_{D(x)}(\Phi_\alpha)$. Таким чином, рівність (5.5) рівносильна рівності

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha) = LTM_{D(x)}(\ \Phi_\alpha),$$

де T – матриця перестановок. У свою чергу для матриці L існують такі матриці перестановок M, N, що у матриці $L_1 = MLN$ першими s_{ν_1} діагональними блоками буде матриця $H_{11}(\alpha)$, наступними s_{ν_2} – матриця $H_{22}(\alpha)$, і т.д. останніми s_{ν_p} – матриця $H_{pp}(\alpha)$. При цьому структура матриці $L_1 = MLN$ є така, що

$$\det L_1 = \pm\,|H_{11}(\alpha)|^{s_{\nu_1}}\ \ |H_{22}(\alpha)|^{s_{\nu_2}}\cdots|H_{pp}(\alpha)|^{s_{\nu_p}}\,.$$

Оскільки $L_1 = MLN = M(LT)T^{-1}N$, то $LT = M^{-1}L_1N^{-1}T = F$. Зауваживши, що матриці перестановок M, N, T мають визначники ± 1, отримуємо, що і

$$\det F = \pm\,|H_{11}(\alpha)|^{s_{\nu_1}}\ \ |H_{22}(\alpha)|^{s_{\nu_2}}\cdots|H_{pp}(\alpha)|^{s_{\nu_p}}\,.$$

На підставі леми 5.5 $\det F \neq 0$. Лему доведено. □

Приклад 5.4. Нехай $\Phi_0(x) = \operatorname{diag}(x,\ x,\ x,\ x^2,\ x^2,\ x^3)$. Матриці з групи $\mathbf{G}_\Phi$ мають вигляд

$$H(x) = \left\|\begin{array}{ccc|cc|c} h_{11}(x) & h_{12}(x) & h_{13}(x) & h_{14}(x) & h_{15}(x) & h_{16}(x)\\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & h_{23}(x) & h_{24}(x) & h_{25}(x) & h_{26}(x)\\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & h_{33}(x) & h_{34}(x) & h_{35}(x) & h_{36}(x)\\ \hline xh_{41}(x) & xh_{42}(x) & xh_{43}(x) & h_{44}(x) & h_{45}(x) & h_{46}(x)\\ xh_{51}(x) & xh_{52}(x) & xh_{53}(x) & h_{54}(x) & h_{55}(x) & h_{56}(x)\\ \hline x^2h_{61}(x) & x^2h_{62}(x) & x^2h_{63}(x) & xh_{64}(x) & xh_{65}(x) & h_{66}(x) \end{array}\right\|.$$

Нульовими стовпцями матриці R будуть $7, 8, 9, 13-17$ стовпці. Після їх викреслення та відповідної перестановки рядків та стовпців отримаємо

$$L_1 = \left\|\begin{array}{ccc|cc|cc|ccc} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & h_{44} & h_{45} & 0 & 0 & h_{46} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & h_{54} & h_{55} & 0 & 0 & h_{56} & 0 & 0\\ \hline * & * & * & * & * & h_{44} & h_{45} & * & h_{46} & 0\\ * & * & * & * & * & h_{54} & h_{55} & * & h_{56} & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & h_{66} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & h_{66} \end{array}\right\|,$$

де $h_{ij} = h_{ij}(0)$. Не важко переконатись, що

$$\det L_1 = \pm \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{44} & h_{45} \\ h_{54} & h_{55} \end{vmatrix}^2 h_{66}^3.$$

$\diamondsuit$

Розглянемо загальний випадок. Нехай

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

– неособлива d-матриця з унітальними поліномами на головній діагоналі і

$$\det \Phi(x) = (x-\alpha_1)^{t_1} (x-\alpha_2)^{t_2} \cdots (x-\alpha_q)^{t_q}.$$

Тоді матрицю $\Phi(x)$ можна записати у вигляді

$$\Phi(x) = \Phi_{\alpha_1}(x)\Phi_{\alpha_2}(x) \cdots \Phi_{\alpha_q}(x),$$

де матриці $\Phi_{\alpha_i}(x)$ мають вигляд (5.4).

Властивість 5.4. *Існує така оборотна матриця K, що*

$$KM_{G(x)}(\Phi) = \left\| \begin{matrix} M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{matrix} \right\|. \tag{5.6}$$

Доведення. Легко переконатися, що перестановкою рядків матрицю $M_{G(x)}(\Phi)$ можна звести до вигляду (5.6). Тобто K є матрицею перестановок а отже, є оборотною. $\square$

Теорема 5.10. *Нехай $D(x)$ – $n \times m$ матриця над $F[x]$ і $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$. Тоді існує така оборотна матриця N, що*

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = NM_{D(x)}(\Phi).$$

Доведення. З властивості 5.4 випливає, що існує така оборотна матриця T, що

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = T \left\| \begin{matrix} M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{matrix} \right\|.$$

На підставі леми 5.6 існують такі оборотні матриці L_{α_i}, що

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_i}) = L_{\alpha_i} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_i}),$$

$i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q$. Таким чином,

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ L_{\alpha_2} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{\alpha_q} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} =$$

$$= T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} T^{-1} \right) \left(T \begin{Vmatrix} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots\cdots \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(T \begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} T^{-1} \right)}_{N} M_{D(x)}(\Phi).$$

Зауваживши, що матриця N оборотна, завершуємо доведення теореми. □

Наслідок 5.2. *Якщо* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{H(x)D(x)}(\ \Phi) = \operatorname{rang} M_{D(x)}(\ \Phi). \qquad \square$$

Наслідок 5.3. *Якщо* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$ *і* $\det M_{D(x)}(\ \Phi) \neq 0$, *то і* $\det M_{H(x)D(x)}(\ \Phi) \neq 0$. □

Поставимо у відповідність поліному $(x-\alpha)^k$ матрицю

$$J_{\alpha^{(k)}} = \begin{Vmatrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 2 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k-1 & \alpha \end{Vmatrix},$$

а поліному $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_l)^{k_l}$ – матрицю

$$J(\varphi) = J_{\alpha_1^{(k_1)}} \oplus \cdots \oplus J_{\alpha_l^{(k_l)}}.$$

Якщо $\deg\varphi_i(x) = 0$, то матриця $J(\varphi_i)$ порожня. Матриці

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ \ldots \ , \ \varphi_n(x))$$

поставимо у відповідність блочно-діагональну матрицю

$$J(\Phi) = J(\varphi_1) \oplus \cdots \oplus J(\varphi_n).$$

Властивість 5.5. *Виконується рівність*

$$M_{xG(x)}(\Phi) = J(\Phi)M_{G(x)}(\Phi).$$

Доведення. Нехай

$$\varphi_i(x) = (x-\alpha_1)^{k_{i1}}\cdots(x-\alpha_t)^{k_{it}},$$

та $g_i(x)$ – i-ий рядок матриці $G(x)$, $i = 1, \ \ldots \ , \ n$. Тоді

$$M_{xg_i(x)}(\, x-\alpha_j)^{k_{ij}} = M_{xg_i(x)}[\, \alpha_j^{(k_{ij})}] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \alpha_j g_i(\alpha_j) \\ g_i(\alpha_j) + \alpha_j g_i'(\alpha_j) \\ 2g_i'(\alpha_j) + \alpha_j g_i''(\alpha_j) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (k_{ij}-1)g_i^{(k_{ij}-2)}(\alpha_j) + \alpha_j g_i^{(k_{ij}-1)}(\alpha_j) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \alpha_j & & & & 0 \\ 1 & \alpha_j & & & \\ & 2 & \alpha_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k_{ij}-1 & \alpha_j \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} g_i(\alpha_j) \\ g_i'(\alpha_j) \\ g_i''(\alpha_j) \\ \cdots \\ g_i^{(k_{ij}-1)}(\alpha_j) \end{matrix} \right\| =$$

$$= J_{\alpha_j^{(k_{ij})}} M_{g_i(x)}[\, \alpha_j^{(k_{ij})}].$$

Отже,

$$M_{xg_i(x)}(\, \varphi_i) = \left\| \begin{matrix} M_{xg_i(x)}[\, \alpha_1^{(k_{i1})}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{xg_i(x)}[\, \alpha_t^{(k_{it})}] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} J_{\alpha_1^{(k_{i1})}} M_{g_i(x)}[\, \alpha_1^{(k_{i1})}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_{\alpha_t^{(k_{it})}} M_{g_i(x)}[\, \alpha_t^{(k_{it})}] \end{matrix} \right\| =$$

$$= J(\varphi_i)M_{g_i(x)}(\ \varphi_i).$$

Таким чином,

$$M_{xG(x)}(\Phi) = \left\| \begin{array}{c} M_{xg_1(x)}(\ \varphi_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{xg_n(x)}(\ \varphi_n) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} J(\ \varphi_1)M_{g_1(x)}(\ \varphi_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J(\ \varphi_n)M_{g_n(x)}(\ \varphi_n) \end{array} \right\| = J(\Phi)M_{G(x)}(\Phi).$$

Доведення завершено. □

5.4. Регуляризація поліноміальних матриць

Нехай $A(x)$ – неособлива $n \times n$ матриця над $F[x]$, що записана у вигляді матричного полінома над F:

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1}x^{k-1} + \ \cdots \ + A_0.$$

Матрицю $A(x)$ називають унітальною, якщо $A_k = I$ – одинична матриця. Говоритимемо, що $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0.$$

Лема 5.7. *Якщо поліноміальна матриця $A(x)$ регуляризується справа, то лише єдиним чином.*

Доведення. Нехай існують такі оборотні матриці $U(x)$, $V(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0 = A_1(x),$$
$$A(x)V(x) = Ix^k - M_{k-1}x^{k-1} - \ \cdots \ - M_0 = A_2(x).$$

Тоді $A_2(x) = A_1(x)L(x)$, де $L(x) = U^{-1}(x)V(x)$. Оскільки $L(x)$ оборотна матриця, то $\det L(x)$ – ненульовий елемент поля F. Отже, $\deg\det L(x) = 0$. Тому

$$\deg\det A_2(x) = \deg\det(A_1(x)L(x)) =$$
$$= \deg\det A_1(x) + \deg\det L(x) = \deg\det A_1(x).$$

Зауваживши, що $\deg\det A_1(x) = ns$, а $\deg\det A_2(x) = nk$, приходимо до висновку, що $k = s$. Таким чином,

$$Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - M_0 = (Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0)L(x). \tag{5.7}$$

Записавши матрицю $L(x)$ у вигляді матричного полінома, перемноживши та прирівнявши матричні коефіцієнти в рівності (5.7), переконуємося, що $L(x) = I$. Тобто $A_2(x) = A_1(x)$. Лему доведено. □

Як було вже зауважено, для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що задовольняють рівність (5.3).

Теорема 5.11. *Для того, щоб матричний поліном $A(x)$ регуляризувався справа, необхідно та достатньо, щоб*

1) $\det A(x) = ns$,

2) *рівняння*

$$M_{P(x)\| Ix^{s-1} \ \dots \ Ix \ \ I\|}(\Phi)\ X = M_{P(x)x^s}(\Phi) \tag{5.8}$$

мало розв'язок.

Доведення. Необхідність. Нехай існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0 = K(x). \tag{5.9}$$

Оскільки

$$\deg\ \det(A(x)U(x)) = \deg\ \det(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0) = ns$$

і

$$\deg\ \det(A(x)U(x)) = \deg\ \det A(x) + \deg\ \det U(x),$$

де $\deg\ \det U(x) = 0$, то $\deg\ \det A(x) = ns$.

З рівностей (5.9) та (5.3) випливає, що

$$P(x)A(x)U(x) = P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0) = \Phi(x)Q^{-1}(x)U(x).$$

На підставі властивості 5.3

$$M_{\Phi(x)Q^{-1}(x)U(x)}(\Phi) = \mathbf{0}.$$

Тому

$$M_{P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0)}(\Phi) = \mathbf{0}. \tag{5.10}$$

Використавши властивості 5.2, 5.1, дістанемо

$$M_{P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots \ - D_0)}(\Phi) =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)x^{s-1}D_{s-1}}(\Phi) - \ \cdots \ - M_{P(x)D_0}(\Phi) =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)x^{s-1}}(\Phi)D_{s-1} - \ \cdots \ - M_{P(x)}(\Phi)D_0 =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - \left\| \begin{matrix} M_{P(x)x^{s-1}}(\Phi) & \dots & M_{P(x)x}(\Phi) & M_{P(x)}(\Phi) \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} D_{s-1} \\ \dots \\ D_1 \\ D_0 \end{matrix} \right\| = M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)\| Ix^{s-1} \ \dots \ Ix \ \ I\|}(\Phi) \left\| \begin{matrix} D_{s-1} \\ \dots \\ D_1 \\ D_0 \end{matrix} \right\|.$$

Врахувавши рівність (5.10), отримаємо

$$M_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \dots\ Ix\ \ I\|}(\Phi)\begin{Vmatrix} D_{s-1} \\ \dots \\ D_1 \\ D_0 \end{Vmatrix} = M_{P(x)x^s}(\Phi). \tag{5.11}$$

Це означає, що рівняння (5.8) має розв'язок.

Для завершення доведення необхідності залишається показати, що умова 2) не залежить від вибору перетворювальної матриці $P(x)$. Нехай $P_1(x)$ – інша ліва перетворювальна матриця матриці $A(x)$. Це означає, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H(x)$, що $P_1(x)= H(x)P(x)$. Згідно з теоремою 5.10 існує така оборотна матриця N, що

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = NM_{D(x)}(\Phi),$$

де $D(x)$ – довільна $n \times m$ матриця. Тобто рівняння

$$M_{P_1(x)\|\ Ix^{s-1}\ \dots\ Ix\ \ I\|}(\Phi)\ X = M_{P_1(x)x^s}(\Phi)$$

рівносильне рівнянню

$$NM_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \dots\ Ix\ \ I\|}(\Phi)\ X = NM_{P(x)x^s}(\Phi)$$

яке, в свою чергу, рівносильне розв'язному рівнянню (5.8).

Достатність. Нехай рівняння (5.8) розв'язне і $\begin{Vmatrix} M_{s-1} \\ \dots \\ M_1 \\ M_0 \end{Vmatrix}$ – його розв'язок. Провівши міркування зворотні до щойно зроблених, отримаємо

$$M_{P(x)(Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \ \dots\ - M_0)}(\Phi) = \mathbf{0}.$$

Згідно з властивістю 5.2

$$P(x)(Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots\ - M_0) = P(x)K(x) = \Phi(x)T(x). \tag{5.12}$$

Оскільки

$$ns = \deg\ \det\Phi(x) = \deg\ \det(P(x)K(x)) =$$

$$= \deg\ \det(\Phi(x)T(x)) = \deg\ \det\Phi(x) + \deg\ \det T(x),$$

то $\deg\det T(x) = 0$. Зваживши на те, що матриця $P(x)K(x)$ – неособлива, отримуємо, що $T(x)$ є оборотною матрицею.

Домноживши рівність (5.12) справа на оборотну матрицю $L(x) = T^{-1}(x)Q^{-1}(x)$, дістанемо

$$P(x)K(x)T^{-1}(x)Q^{-1}(x) = \Phi(x)Q^{-1}(x).$$

Тобто

$$K(x)L(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)Q^{-1}(x) = A(x).$$

Оскільки $A(x)L^{-1}(x) = K(x)$ унітальна матриця, то $A(x)$ регуляризується справа. Теорему доведено. □

Щойно доведену теорему також можна переформулювати так.

Теорема 5.12. *Для того, щоб матричний поліном $A(x)$ регуляризувався справа, необхідно та достатньо, щоб*

1) $\deg\ \det A(x) = ns$,

2) $\det M_{P(x)\|\ I\ \ Ix\ \ \dots\ \ Ix^{s-1}\|}(\Phi) \neq 0$.

Доведення. Необхідність умови 1) доведено в теоремі 5.11.

На підставі леми 5.7 матричний поліном $A(x)$ регуляризується справа єдиним чином. Це означає, що рівняння (5.8) має єдиний розв'язок. А це рівносильно виконанню умови 2). □

Теорема 5.13. *Нехай для поліноміальної матриці $A(x)$ існує така оборотна матриця $U(x)$, що*

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \ \cdots\ - D_0.$$

Тоді матриці-коефіцієнти D_i знаходять з рівності

$$\left\|\begin{array}{c} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{array}\right\| = M^{-1}_{P(x)\|\ Ix^{s-1}\ \ \dots\ \ Ix\ \ I\|}(\Phi)M_{P(x)x^s}(\Phi). \tag{5.13}$$

Доведення. Матриці-коефіцієнти D_i унітального полінома $A(x)U(x)$, як це показано під час доведення необхідності теореми 5.11, задовольняють рівність (5.11). За теоремою 5.12 матриця $M_{P(x)\|\ I\ \ Ix\ \ \dots\ \ Ix^{s-1}\|}(\Phi)$ є оборотною. Отже, виконується рівність (5.13). □

Наслідок 5.4. *Нехай матриця $A(x)$ регуляризується справа наступним чином:*

$$A(x)U(x) = Ix - D.$$

Тоді матрицю D знаходять із рівності

$$D = T^{-1}J(\Phi)T,$$

де $T = M_{P(x)}(\Phi)$.

Доведення. На підставі теореми 5.13 і властивості 5.5 отримуємо наступні рівності

$$D = M^{-1}_{P(x)}(\Phi)M_{P(x)x}(\Phi) = M^{-1}_{P(x)}(\Phi)J(\Phi)M_{P(x)}(\Phi),$$

що і потрібно довести. □

5.5. Один метод побудови форми Жордана

Використаємо одержані результати для пошуку форми Жордана матриць над F. Для цього дещо модифікуємо поняття значення рядка $g(x)$ на системі коренів полінома

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}.$$

Позначимо

$$\tilde{M}_{g(x)}(f(x)) = \left\| \begin{array}{c} \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_1^{(k_1)}] \\ \cdots \\ \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_m^{(k_m)}] \end{array} \right\|,$$

де

$$\tilde{M}_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}] = \left\| \begin{array}{c} 1g(\alpha_i) \\ \frac{1}{1!}g'(\alpha_i) \\ \frac{1}{2!}g''(\alpha_i) \\ \cdots \\ \frac{1}{(k_i-1)!}g^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{array} \right\|.$$

Легко зауважити, що

$$\tilde{M}_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}] = T_{\alpha_i^{(k_i)}} M_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}],$$

де

$$T_{\alpha_i^{(k_i)}} = \operatorname{diag}\left(1,\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \ldots\ ,\ \frac{1}{(k_i-1)!}\right).$$

Нехай $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$. Позначимо

$$\tilde{M}_{G(x)}(\Phi) = \left\| \begin{array}{c} \tilde{M}_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{M}_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{array} \right\|.$$

Очевидно, що

$$\tilde{M}_{G(x)}(\Phi) = T_\Phi M_{G(x)}(\Phi),$$

де T_Φ – діагональна матриця, яка є прямою сумою всіх матриць $T_{\alpha_{ij}}^{(k_{ij})}$.

Теорема 5.14. *Нехай $A \in M_n(F)$ і $A(x) = Ix - A$ – її характеристична матриця з формою Сміта $\Phi(x)$ і $P(x) \in \mathbf{P}_{A(x)}$. Тоді матриця*

$$J_*(\Phi) = \tilde{M}_{P(x)}(\Phi)\, A \tilde{M}_{P(x)}^{-1}(\Phi)$$

є формою Жордана матриці A.

Доведення. Очевидно, що матриця $A(x) = Ex - A$ регуляризується справа одиничною матрицею. Згідно з теоремою 5.12 це означає, що

$$\det M_{P(x)}(\Phi) \neq 0 \;\Rightarrow\; \det \tilde{M}_{P(x)}(\Phi) \neq 0.$$

Оскільки матриця $A(x)$ регуляризується справа єдиним чином, то на підставі наслідку 5.4

$$A = M_{P(x)}^{-1}(\Phi) J(\Phi) M_{P(x)}(\Phi). \tag{5.14}$$

Прямими обрахунками перевіряємо, що

$$T_{\alpha^{(k)}} J_{\alpha^{(k)}} T_{\alpha^{(k)}}^{-1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ & \frac{1}{1!} & & & \\ & & \frac{1}{2!} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{1}{(k_i-1)!} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 2 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k-1 & \alpha \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ & 1! & & & \\ & & 2! & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & (k_i-1)! \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 1 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \alpha \end{matrix} \right\|$$

є кліткою Жордана, що відповідає елементарному дільнику $(x-\alpha)^k$. Тому матриця $T_\Phi J(\Phi) T_\Phi^{-1}$ є Жордановою матрицею.

Запишемо рівність (5.14) у вигляді

$$A = M_{P(x)}^{-1}(\Phi) J(\Phi) M_{P(x)}(\Phi) =$$

$$= \left(M_{P(x)}^{-1}(\Phi) T_\Phi^{-1} \right) \left(T_\Phi J(\Phi) T_\Phi^{-1} \right) \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Phi) \right) =$$

$$= \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Phi) \right)^{-1} J_*(\Phi) \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Phi) \right) = \tilde{M}_{P(x)}^{-1}(\Phi) J_*(\Phi) \tilde{M}_{P(x)}(\Phi),$$

що і потрібно довести. □

Приклад 5.5. Зведемо матрицю

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{matrix} \right\|$$

до її форми Жордана.

Спершу знайдемо форму Сміта характеристичної матриці $A(x) = Ex - A$:

$$P(x)\ (Ex - A)\ Q(x) = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ (x-1)^3) = \Phi(x),$$

де

$$P(x) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & x+7 \\ x-2 & 4x-7 & -x^2-5x+12 \end{matrix} \right\|,$$

$$Q(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & -4 & -4x^2+5x-4 \\ 0 & 1 & x^2-x-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

На другому кроці будуємо її перетворювальну матрицю:

$$\tilde{M}_{P(x)}\,(\Phi) = \tilde{M}_{\|\, x-2 \quad 4x-7 \quad -x^2-5x+12 \,\|}\,(x-1)^3 = \left\| \begin{matrix} -1 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = T.$$

Зауваживши, що

$$T^{-1} = \left\| \begin{matrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|,$$

отримуємо

$$TAT^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

– форма Жордана матриці A. ♢

5.6. Визначальна матриця та її властивості

Для опису неасоційовних дільників матриць над кільцями елементарних дільників ми використовували множину Казімірського $\mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$. Схожу роль у знаходженні унітальних дільників поліноміальних матриць відіграє визначальна матриця [57]. Цей підрозділ присвячений вивченню її властивостей.

Нехай

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1(x),\ \ldots,\ \varepsilon_n(x)),\quad \Phi(x) = \mathrm{diag}\,(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$$

– неособливі d-матриці над $F[x]$, причому $\Phi(x) | \mathrm{E}(x)$, $\deg\det\Phi(x) = nr$.

Визначальною матрицею називається матриця

$$V(\mathrm{E},\Phi)=\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}k_{21} & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}k_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}k_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}k_{n,n-1} & 1 \end{array}\right\|, \quad (5.15)$$

де

$$k_{ij}=\begin{cases} 0, & (\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j,\\ k_{ij0}+k_{ij1}x+\ldots+k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}, & (\varphi_i,\varepsilon_j)\neq\varphi_j, \end{cases}$$

$$h_{ij}=\deg\frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varphi_j}-1,\ i=2,3,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n-1,\ i>j,$$

де k_{ijl} – параметри, $i=2,3,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n-1$.

Надалі під виразом $\frac{f}{g}(\alpha)=0$ розумітимемо значення частки поліномів $f(x)$, $g(x)$ на елементі $\alpha\in F$.

Властивість 5.6. *Якщо*

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}(\alpha)=0,\ \ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}(\alpha)\neq 0,\ \ i>j,$$

то

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\alpha)k_{ij}(\alpha)\neq 0.$$

Доведення. Припустимо, що $k_{ij}(x)=0$. Отже, $(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j$. Тоді виконується рівність

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}=\frac{\varepsilon_i\varphi_i(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varepsilon_j\varphi_i\varphi_j}=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{(\varepsilon_i\varphi_i,\varepsilon_i\varepsilon_j)}{\varphi_i\varepsilon_j}.$$

Звідси випливає, що $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}(\alpha)=0$, а це суперечить умові твердження.

Зауваживши, що $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}|\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$ і взявши до уваги, що $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}(\alpha)\neq 0$, отримуємо $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\alpha)\neq 0$. Тобто

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\alpha)k_{ij}(\alpha)\neq 0.$$

□

Властивість 5.7. *Якщо* $k_{ij}(x)=0, i>j$, *то*

$$k_{ij}(x)=k_{i-1.j}(x)=\ldots=k_{j+1.j}(x)=0. \quad (5.16)$$

Доведення. Згідно з умовою твердження $(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j$. Оскільки $\varphi_t | \varphi_i$, $t = i-1, i-2, \ldots, j+1$, то $(\varphi_t, \varepsilon_j) | (\varphi_i, \varepsilon_j)$. З іншого боку, $\varphi_j | \varepsilon_j$ та $\varphi_i | \varphi_t$. Тобто $\varphi_j | (\varphi_t, \varepsilon_q)$. Отже, $(\varphi_i, \varepsilon_j) | (\varphi_t, \varepsilon_q)$. Таким чином, $(\varphi_t, \varepsilon_q) = \varphi_q$, $t = i-1$, $i-2, \ldots, j+1$. А це і означає виконання рівностей (5.16). □

Розглянемо добуток матриць

$$V(\mathrm{E}, \Phi) T(x) = U(x),$$

де $T(x) \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Позначимо через $U_i(x)$ підматрицю матриці $U(x)$, отриману викресленням перших i рядків та перших i стовпців матриці $U(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Згідно з формулою Біне - Коші

$$\det U_i(x) = \sum_j |V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)|\, |T_{ji}(x)| + \det T_i(x),$$

де $\sum\limits_j |V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)|\, |T_{ji}(x)|$ – сума добутків усіх можливих мінорів максимального $(n-i)$-го порядку матриці $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)$, побудованих на останніх рядках матриці $V(\mathrm{E}, \Phi)$, за винятком мінора унітрикутної матриці, що дорівнює одиниці, на відповідні мінори того ж порядку матриці $T(x)$, $T_i(x)$ – підматриця матриці $T(x)$, отримана викресленням перших i рядків та перших i стовпців матриці $T(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Через $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ позначатимемо матрицю $V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi)$, в якій змінна x замінена на $\alpha \in F$.

Лема 5.8. *Для того, щоб*

$$\det U_i(\alpha) = \sum_j |V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)|\, |T_{ji}(\alpha)| + \det T_i(\alpha) = 0, \tag{5.17}$$

необхідно та достатньо, щоб усі доданки цієї суми дорівнювали нулю.

Доведення. Достатність очевидна.

Необхідність. Для доведення необхідності досить зауважити, що мінори $|V_{ij}(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)|$ є сумою добутків елементів поля F та параметрів k_{ijl}, $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$. При цьому набір параметрів, які зустрічаються в кожному такому мінорі, не повторюється в жодному іншому. □

Теорема 5.15. *Виконується рівність*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}(x), \det U_i(x)\right) = 1,\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Доведення. Припустимо, що для деякого $i = r$

$$\left(\frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r}(x), \det U_r(x)\right) = \delta(x).$$

Нехай α – корінь полінома $\delta(x)$, тобто $\delta(\alpha) = 0$. Позначимо

$$E_r(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_1}(x) & \ldots & \frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(x) \\ \frac{\varepsilon_{r+2}}{\varepsilon_1}(x) & \ldots & \frac{\varepsilon_{r+2}}{\varepsilon_r}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}(x) & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_r}(x) \end{array} \right\|, \quad F_r(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_1}(x) & \ldots & \frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r}(x) \\ \frac{\varphi_{r+2}}{\varphi_1}(x) & \ldots & \frac{\varphi_{r+2}}{\varepsilon_r}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}(x) & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_r}(x) \end{array} \right\|.$$

Припустимо, що $\frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(\alpha) = 0$. Тоді, згідно з властивістю 2.4, $E_r(\alpha) = \mathbf{0}$. Тобто матриця $T(\alpha)$ має вигляд

$$T(\alpha) = \left\| \begin{array}{cc} * & * \\ \mathbf{0} & T_r(\alpha) \end{array} \right\|.$$

На підставі леми 5.8 рівність (5.17) виконується лише, коли $|T_r(\alpha)| = 0$. Отже, $|T(\alpha)| = 0$, а це протирічить оборотності матриці $T(x)$.

Припустимо, що в матриці $E_r(\alpha)$ немає жодного нуля. Згідно з припущенням $\frac{\varphi_{r+1}}{\varphi_r}(\alpha) = 0$. Зваживши на властивість 2.4, отримуємо $F_r(\alpha) = \mathbf{0}$. На підставі властивості 5.6 у матриці

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mu_{r+1.1}(\alpha) & \ldots & \mu_{r+1.r}(\alpha) \\ \mu_{r+2.1}(\alpha) & \ldots & \mu_{r+2.r}(\alpha) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n1}(\alpha) & \ldots & \mu_{nr}(\alpha) \end{array} \right\|, \quad \mu_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)}(\alpha) k_{ij}(\alpha),$$

немає жодного нульового елемента. Згідно з лемою 5.8 рівність (5.17) виконується, коли всі мінори $T_{jr}(\alpha)$ та $T_r(\alpha)$ є нулями. Звідси випливає, що $|T(\alpha)| = 0$ – протиріччя.

Припустимо, що в матриці $E_r(\alpha)$ є нулі. Нехай

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}(\alpha) = 0, \quad \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{q+1}}(\alpha) \neq 0, \quad \frac{\varepsilon_{p-1}}{\varepsilon_q}(\alpha) \neq 0.$$

Згідно з наслідком 2.4, частка $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}$ знаходиться на першій піддіагоналі матриці $T(x)$. У матриці $E_r(\alpha)$ є лише один такий елемент, а саме $\frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(\alpha)$. Тобто $(p, q) = (r+1, r)$. Отже, $\frac{\varepsilon_{r+1}}{\varepsilon_r}(\alpha) = 0$, а цей випадок ми уже розглянули. Це означає, що нулі в матриці $E_r(\alpha)$ можуть розташовуватись лише так

$$a)\ E_r(\alpha) = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \divideontimes \end{array} \right\|, \quad b)\ E_r(\alpha) = \left\| \begin{array}{c} \divideontimes \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|, \quad c)\ E_r(\alpha) = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \divideontimes \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Розглянемо випадок a). Для спрощення викладу доведення реалізуємо його на прикладі матриці сьомого порядку. Загальність доведення від цього не постраждає. Отже, нехай $n = 7, r = 3$ і матриця $E_3(\alpha)$ має вигляд

$$E_3(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right\|,$$

де всі $*$ – не нулі. На підставі властивості 2.5 матриця $T(\alpha)$ має вигляд

$$T(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & t_{42} & t_{43} & & W & & \\ 0 & t_{52} & t_{53} & & & & \\ 0 & t_{62} & t_{63} & & & & \\ 0 & t_{72} & t_{73} & & & & \end{array} \right\|, \quad t_{ij} \neq 0.$$

Оскільки $F_3(\alpha) = \mathbf{0}$, то згідно з властивістю 5.6 матриця $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ має вигляд

$$V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & \mathbf{0} & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & & & \\ \hline \cdot & \mu_{42} & \mu_{43} & 1 & & & \\ \cdot & \mu_{52} & \mu_{53} & \cdot & 1 & & \\ \cdot & \mu_{62} & \mu_{63} & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & \mu_{72} & \mu_{73} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|, \quad \mu_{\mathrm{ij}} \neq 0.$$

Всі мінори максимального порядку, що побудовані на останніх чотирьох рядках та останніх шести стовпцях матриці $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$, не нулі і містять змінні, відсутні в усіх інших. Тому рівність (5.17) виконується лише тоді, коли всі мінори максимального порядку матриці W дорівнюють нулю. Тоді, згідно з наслідком 3.2, $|T(\alpha)| = 0$ – протиріччя.

Випадок b). Нехай

$$E_3(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

На підставі властивості 2.5 матриця $T(\alpha)$ має вигляд

$$T(\alpha)=\left\|\begin{array}{ccccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{array}\right\| = \|\ t_{ij}\ \|_1^7 .$$

Матриця $V(\mathrm{E},\Phi,\alpha)$ має вигляд

$$V(\mathrm{E},\Phi,\alpha)=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & \mathbf{0} & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & & & \\ \hline \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & 1 & & & \\ \mu_{51} & \mu_{52} & \mu_{53} & \cdot & 1 & & \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right\|, \quad \mu_{\mathrm{ij}} \neq 0.$$

Всі мінори максимального порядку матриці

$$\left\|\begin{array}{ccccc|cc} \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{51} & \mu_{52} & \mu_{53} & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right\|,$$

що містять її останні два стовпці, ненульові. Тоді рівність (5.17) виконується лише, коли всі відповідні мінори максимального порядку матриці $T(\alpha)$ дорівнюють нулю. Всі такі мінори мають вигляд

$$\det\left\|\begin{array}{cc|cc} t_{i4} & t_{i5} & t_{i6} & t_{i7} \\ t_{j4} & t_{j5} & t_{j6} & t_{j7} \\ \hline 0 & 0 & t_{66} & t_{67} \\ 0 & 0 & t_{76} & t_{77} \end{array}\right\|, \quad 1 \leq i < j \leq 5.$$

Якщо

$$\det\left\|\begin{array}{cc} t_{66} & t_{67} \\ t_{76} & t_{77} \end{array}\right\| = 0,$$

то $|T(\alpha)| = 0$ – протиріччя. Нехай

$$\det\left\|\begin{array}{cc} t_{66} & t_{67} \\ t_{76} & t_{77} \end{array}\right\| \neq 0.$$

Тоді всі мінори другого порядку матриці $T(\alpha)$, що побудовані на її 4 і 5 стовпцях, дорівнюють нулю. Тобто і в цьому випадку $|T(\alpha)| = 0$.

Випадок c). Нехай

$$E_3(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

На підставі властивості 2.5 матриця $T(\alpha)$ має вигляд

$$T(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{array} \right\| = \| \ t_{ij} \ \|_1^7.$$

Матриця $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$ має вигляд

$$V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha) = \left\| \begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & & & & & 0 & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & & & \\ \hline \cdot & \cdot & \mu_{43} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \mu_{53} & \cdot & 1 & & \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|, \quad \mu_{\mathrm{ij}} \neq 0.$$

Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc} \mu_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{53} & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|,$$

що є підматрицею матриці $V(\mathrm{E}, \Phi, \alpha)$. Всі мінори максимального порядку, що містять її два останні стовпці є ненульовими. Отже, відповідні мінори матриці $T(\alpha)$ є нулями. Вони мають вигляд

$$\det \left\| \begin{array}{cc|cc} t_{i4} & t_{i5} & t_{i6} & t_{i7} \\ t_{j4} & t_{j5} & t_{j6} & t_{j7} \\ \hline 0 & 0 & t_{66} & t_{67} \\ 0 & 0 & t_{76} & t_{77} \end{array} \right\|, \quad 3 \leq i < j \leq 5.$$

Подальші міркування такі самі, як у випадку b). Теорему доведено. $\square$

5.7. Унітальні дільники поліноміальних матриць

У 1978 році в "Доповідях АН УРСР"[55] була анонсована, а в 1980 році в "Українському математичному журналі"опублікована стаття П. Казімірського [56], в якій давалась вичерпна відповідь на питання, яке впродовж багатьох років цікавило алгебраїстів, а саме, в ній вказувались необхідні та достатні умови того, що матричний поліном над полем комплексних чисел має унітальний дільник. Рік по цьому виходить із друку його монографія [57] де вже не обмежений вузькими рамками журнальної статті, учений виклав основні засади теорії розкладу матричних поліномів на множники. Можна з впевненістю сказати, що це були роки розквіту теорії факторизації поліноміальних матриць – на протязі досить короткого проміжку часу, окрім уже згаданих праць, опубліковано десятки статей, в яких за тих чи інших обмежень розв'язували згадану задачу. В цьому підрозділі висвітлено сучасний підхід до її розв'язання.

Нехай F – алгебраїчно замкнуте поле характеристики нуль, $A(x)$ – неособлива $n \times n$ матриця над $F[x]$. Для неї існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)) = \mathrm{E}(x)$$

– форма Сміта матриці $A(x)$. Нехай $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ – d-матриця, причому $\Phi(x)|\mathrm{E}(x)$, $\deg\det\Phi(x) = nr$. Розглянемо визначальну матрицю $V(\mathrm{E}, \Phi)$. Позначимо через $F(k)$ трансцедентне розширення поля F внаслідок приєднання всіх параметрів k_{ijl}, що фігурують у матриці $V(\mathrm{E}, \Phi)$.

Теорема 5.16. *Для того, щоб із неособливої поліноміальної матриці $A(x)$ можна було виділити лівий унітальний дільник з формою Сміта $\Phi(x)$, необхідно та достатньо, щоб матриця*

$$(V(\mathrm{E}, \Phi)P(x))^{-1}\,\Phi(x)$$

регуляризувалася справа над $F(k)[x]$.

Доведення. Необхідність. Нехай $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – унітальний матричний поліном із формою Сміта $\Phi(x)$. На підставі наслідку 4.1 всі дільники матриці $A(x)$ утворюють множину

$$(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P(x))^{-1}\,\Phi(x)\mathrm{GL}_n(F[x]).$$

Отже, матрицю $B(x)$ можна записати у вигляді

$$B(x) = (L(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x),$$

де $L(x) \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, $K(x) \in \mathrm{GL}_n(F[x])$. На підставі теореми 5.5

$$L(x) = H(x)V_0(x)S(x),$$

де $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, $V_0(x) \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi)$, $S(x) \in U_n^{up}(F[x]) \subset \mathbf{G}_\mathrm{E}$. Тоді

$$B(x) = (L(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x) = (H(x)V_0(x)S(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x).$$

Згідно з властивістю 2.2 множина всіх лівих перетворювальних матриць матриці $A(x)$ має вигляд $\mathbf{P}_{A(x)} = \mathbf{G}_\mathrm{E}P$. Отже, $S(x)P(x) = P_0(x)$ – ліва перетворювальна матриця матриці $A(x)$. Тоді

$$B(x) = (H(x)V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x) = P_0^{-1}(x)V_0^{-1}(x)H^{-1}(x)\Phi(x)K(x).$$

Оскільки

$$H^{-1}(x)\Phi(x) = \Phi(x)H_1(x),$$

де $H_1(x) \in \mathrm{GL}_n(F[x])$, то

$$B(x) = P_0^{-1}(x)V_0^{-1}(x)\Phi(x)H_1(x)K(x) = (V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)K_1(x).$$

Матриця $B(x)$ унітальна, а тому матриця $(V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)$ також регуляризується справа. Замінивши у матриці $V_0(x)$ коефіцієнти поліномів на відповідні параметри k_{ijl}, отримуємо, що матриця $(V(\mathrm{E}, \Phi)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)$ регуляризується справа над $F(k)[x]$.

Нехай $P_1(x) \in \mathbf{P}_{A(x)}$. Покажемо, що матриця

$$D(x) = (V(\mathrm{E}, \Phi)P_1(x))^{-1}\Phi(x)$$

також регуляризується справа. Оскільки $P_1(x) = N(x)P_0(x)$, де $N(x) \in \mathbf{G}_\mathrm{E}$, то

$$\begin{aligned} D(x) &= (V(\mathrm{E}, \Phi)P_1(x))^{-1}\,\Phi(x) = (V(\mathrm{E}, \Phi)N(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x) = \\ &= ((V(\mathrm{E}, \Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,\Phi(x). \end{aligned}$$

Взявши до уваги теорему 5.15, на підставі теореми 2.7 отримуємо, що існує така матриця $T(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, що $T(x)V(\mathrm{E}, \Phi)N(x)$ є нижньою унітрикутною матрицею над $F(k)[x]$. Згідно з лемою 5.3 існує така матриця $T_1(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, що

$$T_1(x)T(x)V(\mathrm{E}, \Phi)N(x) = V_1(\mathrm{E}, \Phi) \in \mathbf{V}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} D(x) = {} & (T_1(x)T(x)\,(V(\mathrm{E}, \Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,T_1(x)T(x)\Phi(x) = \\ & = ((T_1(x)T(x)V(\mathrm{E}, \Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)\left(\tilde{T}(x)\tilde{T}_1(x)\right) = \\ & = (V_1(\mathrm{E}, \Phi)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)T_2(x). \end{aligned}$$

Перепозначивши в матриці $V_1(\mathrm{E}, \Phi)$ параметри k_{ijl} через k'_{ijl}, отримуємо, що матриця $\left(V(\mathrm{E}, \Phi)P_1(x)\right)^{-1}\Phi(x)T_2(x)$, а отже, і $\left(V(\mathrm{E}, \Phi)P_1(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа над $F(k)[x]$.

Достатність. Розглянемо матрицю

$$\left(V(\mathrm{E}, \Phi)P(x)\right)^{-1}\Phi(x) = B(x).$$

Згідно з умовою теореми вона регуляризується справа над $F(k)[x]$. Тобто існує така матриця $U(x) \in \mathrm{GL}_n(F(k)[x])$, що

$$B(x)U(x) = Ix^r + B_{r-1}x^{r-1} + \ldots + B_1x + B_0 = D(x).$$

Очевидно, що матрицю $A(x)$ можна вважати матрицею над $F(k)[x]$. Згідно з наслідком 4.1 всі ліві дільники матриці $A(x)$ з формою Сміта $\Phi(x)$ утворюють множину

$$\left(\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)\mathrm{GL}_n(F(k)[x]).$$

Оскільки $V(\mathrm{E}, \Phi) \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, то $D(x)$ є лівим дільником матриці $A(x)$:

$$A(x) = D(x)C(x).$$

На підставі теореми 5.12 матриця $B(x)$ регуляризується справа тоді і лише тоді, коли

$$\det M_{P(x)\| \; I \;\; Ix \;\; \ldots \;\; Ix^{r-1} \|}(\Phi) = f(k_{210}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}, x) \neq 0.$$

Оскільки поле F має характеристику нуль, то воно містить нескінченну кількість елементів. Отже, знайдуться такі елементи $p_{210}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}$, що

$$f(p_{210}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}) \neq 0.$$

Тоді матриця $\overline{D}(x)$, яку отримують з матриці $D(x)$ заміною змінних $k_{210}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}, x$ на відповідні елементи $p_{210}, \ldots, p_{n,n-1,h_{n,n-1}}, p_{nn}$ із поля F, і буде шуканим унітальним дільником матриці $A(x)$. $\square$

Застосуємо отримані результати до пошуку розв'язків односторонніх матричних рівнянь.

Приклад 5.6. Розв'яжемо рівняння

$$X^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.18}$$

Цьому рівнянню відповідає поліноміальна матриця

$$A(x) = Ix^2 - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix}.$$

На підставі узагальненої теореми Безу матриця B є коренем рівняння (5.18) тоді і лише тоді, коли

$$A(x) = (Ix - B)C(x).$$

Тобто задача пошуку коренів рівняння (5.18) зводиться до пошуку лівих унітальних дільників матриці $A(x)$. Для цього зведемо цю матрицю до її форми Сміта:

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}}_{P(x)} A(x) \underbrace{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}}_{Q(x)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 \end{Vmatrix} = \mathrm{E}(x).$$

Оскільки $\deg\ \det(Ix - B) = 3$ і через те, що форма Сміта матриці $Ix - B$ є дільником матриці $\mathrm{E}(x)$, то потенційними формами Сміта шуканих дільників будуть матриці

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(1,\ 1,\ x^3), \ \ \Phi_1(x) = \operatorname{diag}(1,\ x,\ x^2).$$

Спершу опишемо дільники з формою Сміта $\Phi(x)$.

Матрицям $\Phi(x)$, $\mathrm{E}(x)$ відповідає визначальна матриця

$$V(\mathrm{E},\ \Phi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & ax^2 + bx & 1 \end{Vmatrix},$$

де a, b – параметри. Тоді матриця $A(x)$ має шуканий дільник тоді і тільки тоді, коли матриця $(V(\mathrm{E},\ \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа. Оскільки

$$\det M_{V(\mathrm{E},\ \Phi)P(x)}(\Phi) = \det M_{\|\, x^2 \ 1 \ ax^2+bx \,\|}(x^3) = \det \underbrace{\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 2 & 0 & 2a \end{Vmatrix}}_{T} = 2b \neq 0,$$

то на підставі теорем 5.16, 5.12, 5.13 матриця $A(x)$ має лівий унітальний дільник вигляду

$$B = T^{-1} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix} T = \begin{Vmatrix} 0 & ab^{-1} & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

де $b \neq 0$. Замінивши ab^{-1} на параметр c, отримаємо, що всі матриці з множини

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \end{matrix} \right\| \ \mid \ c \in F, \ \ b \in F \backslash \{0\} \right\} \qquad (5.19)$$

є розв'язками рівняння (5.18). Більше того, згідно з теоремою 5.9, ця множина є множиною всіх коренів рівняння (5.18) з формою Сміта $\Phi(x)$.

Зауваживши, що матриця $(V(\mathrm{E}, \ \Phi_1)P(x))^{-1}\Phi_1(x)$ не регуляризується справа, отримуємо, що множина (5.19) складається з усіх коренів рівняння (5.18). $\diamondsuit$

5.8. Структура найбільших спільних дільників матриць[1]

У цьому підрозділі продовжимо дослідження найбільшого спільного дільника матриць, розпочаті в підрозділі 1.5. Головну увагу буде зосередимо на вивченні його структури, тобто на його формі Сміта та перетворювальних матрицях. Розпочнемо цей аналіз із матриць другого порядку над кільцями Безу стабільного рангу 1,5.

Нехай A – 2×2 матриця. Для неї існують такі оборотні матриці P_A, Q_A, що $P_A A Q_A = \mathrm{E}$, де $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$. Розглянемо групу $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ всіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Для зручності іноді цю групу також позначатимемо через $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Розглянемо також матрицю $B = P_B^{-1} \Delta Q_B^{-1}$, де $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \mid \delta_2$. На підставі властивості 2.2 множини лівих перетворювальних матриць $\mathbf{P}_B, \mathbf{P}_A$ утворюють суміжні класи $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B, \mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$. Дослідимо множину $\mathbf{P}_B \mathbf{P}_A^{-1}$.

Лема 5.9. *Нехай $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 = S$. Тоді елемент*

$$((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$$

є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B та P_A.

Доведення. Нехай принаймні одна з матриць A, B неособлива і нехай F_A та F_B – їхні ліві перетворювальні матриці. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ та $H_B \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{\delta_1}}$, що

$$F_A = H_A P_A, \ F_B = H_B P_B.$$

[1]Результати цього підрозділу отримано спільно з А. Романівим.

Позначимо $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2$. Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_B = \left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ s_{21} \end{array} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}.$$

Розглянемо

$$\mu = ((\varepsilon_2, \delta_2),\ k_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]) = \left((\varepsilon_2, \delta_2),\ \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21} \right) [\varepsilon_1, \delta_1] \right) =$$

$$= \left((\varepsilon_2, \delta_2),\ \frac{\delta_2}{\delta_1} [\varepsilon_1, \delta_1] h_{21} s_{21} + h_{22} s_{21} [\varepsilon_1, \delta_1] \right).$$

Оскільки

$$\frac{\delta_2 [\varepsilon_1, \delta_1]}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то

$$(\varepsilon_2, \delta_2) \mid \frac{\delta_2}{\delta_1} [\varepsilon_1, \delta_1].$$

Отже,

$$\mu = ((\varepsilon_2, \delta_2),\ h_{22} s_{21} [\varepsilon_1, \delta_1]) = \tau \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau},\ \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{\tau} h_{22} s_{21} \right) =$$

$$= \tau \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau},\ h_{22} s_{21} \right),$$

де $\tau = ((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1])$. Оскільки

$$\frac{\delta_2 \left((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1] \right)}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} = \frac{(\delta_2 (\varepsilon_2, \delta_2), \delta_2 [\varepsilon_1, \delta_1])}{\delta_1 (\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то

$$\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau} \,\Big|\, \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

З оборотності матриці H_B випливає, що

$$\left(h_{22},\ \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) = 1.$$

Отже, і

$$\left(h_{22},\ \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{\tau}\right) = 1.$$

Тому

$$\mu = \tau\left(\frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{\tau},\ s_{21}\right) = \big((\varepsilon_2,\delta_2),\ s_{21}(\varepsilon_2,\delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]\big) = \big((\varepsilon_2,\delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]\big).$$

Таким чином,

$$\big((\varepsilon_2,\delta_2),\ k_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]\big) = \big((\varepsilon_2,\delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]\big).$$

Розглянемо $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$t_{21} = \left\| \begin{matrix} s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21} \end{matrix} \right\| = s_{21}\nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\nu_{21}s_{22}.$$

Зауваживши, що

$$\frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{\big((\varepsilon_2,\delta_2),\ [\varepsilon_1,\delta_1]\big)} \,\Big|\, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

та міркуючи так само, як і вище, отримуємо

$$\big((\varepsilon_2,\delta_2),\ t_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]\big) = \big((\varepsilon_2,\delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]\big).$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_2(R)$, завершуємо розгляд цього випадку.

Нехай

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,\quad B \sim \left\| \begin{matrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

і $F_A \in \mathbf{P}_A$, $F_B \in \mathbf{P}_B$. Тоді існують такі

$$H_A = \left\| \begin{matrix} e_1' & v_{12} \\ 0 & e_2' \end{matrix} \right\|,\quad H_B = \left\| \begin{matrix} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|,$$

що $F_A = H_AP_A$, $F_B = H_BP_B$. Позначимо $F_BF_A^{-1} = \|s_{ij}'\|_1^2 = S'$. Для доведення леми потрібно показати, що s_{21} та s_{21}' відрізняються на оборотний елемент кільця. Розглянемо добуток матриць

$$S' = F_BF_A^{-1} = H_BP_B(H_AP_A)^{-1} = H_BP_BP_A^{-1}H_A^{-1} = H_BSH_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Запишемо ці матриці у явному вигляді, тобто

$$\left\| \begin{array}{cc} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} e_1'^{-1} & * \\ 0 & e_2'^{-1} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} s''_{11} & s''_{12} \\ s_{21}u & s''_{22} \end{array} \right\|,$$

де $u = e_2 e_2'^{-1}$ – оборотний елемент кільця R. Отже, $s'_{21} = s_{21}u$, що і потрібно довести. □

Лема 5.10. *Нехай a, $b \in R$. Для того, щоб оборотну матрицю $S = \|s_{ij}\|_1^2$ можна було записати у вигляді $S = L_a L_b$, де $L_a \in \mathbf{G}_a$, $L_b \in \mathbf{G}_b$, необхідно та достатньо, щоб $s_{21} = (a, b)t$.*

Доведення. Необхідність Нехай $S = L_a L_b$, де $L_a \in \mathbf{G}_a$, $L_b \in \mathbf{G}_b$. Запишемо ці матриці у розгорнутому вигляді

$$S = \left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ al_{21} & l_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ bh_{21} & h_{22} \end{array} \right\| = L_a L_b.$$

Звідси отримуємо, що

$$\left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} l'_{11} & l'_{12} \\ al_{21}h_{11} + bl_{22}h_{22} & l'_{22} \end{array} \right\|,$$

тобто

$$s_{21} = al_{21}h_{11} + bl_{22}h_{22}.$$

А це означає, що $s_{21} = (a, b)t$.

Достатність. Якщо $a = b = 0$, то $s_{21} = 0$. Тоді $S \in \mathbf{G}_a = \mathbf{G}_b$ і доведення очевидне.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то $s_{21} = bt$. Тобто $S \in \mathbf{G}_b$.

Розглянемо випадок, коли $a, b \neq 0$. З оборотності матриці S випливає, що

$$(s_{21}, s_{22}) = 1.$$

На підставі теореми 1.9 існують такі k_{12}, k_{22}, що

$$s_{21}k_{12} + s_{22}k_{22} = 1,$$

де $(k_{22}, b) = 1$. Отже, $(k_{12}b, k_{22}) = 1$. Звідси випливає, що існують такі k_{11}, k_{21}, що

$$k_{11}k_{22} - bk_{21}k_{12} = 1.$$

Це означає, що матриця $K_1 = \left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ bk_{21} & k_{22} \end{matrix} \right\|$ належить групі $\mathbf{G}_b$. Тоді

$$SK_1 = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ (a,b)t & s_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ bk_{21} & k_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{matrix} \right\| = S_1.$$

Отже,

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -g_{12} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| S_1 = H_1 S_1 = \left\| \begin{matrix} q_{11} & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{matrix} \right\| = S_2,$$

де $H_1 \in \mathbf{G}_a$. Оскільки матриця S_2 є оборотною, то q_{11} є оборотним елементом кільця R. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| S_2 = H_2 S_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $H_2 \in \mathbf{G}_a$. Оскільки $H_1, H_2 \in \mathbf{G}_a$, то $H_3 = H_2 H_1 \in \mathbf{G}_a$ і

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{matrix} \right\| = H_3 S K_1.$$

У кільці R існують такі u та v, що

$$(a,b)g_{21} = (au + bv)g_{21} = aug_{21} + bvg_{21}.$$

Розглянемо матриці

$$H_4 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ aug_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_a, \ \ K_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ bvg_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_b.$$

Тоді $H_3 S K_1 = H_4 K_2$. Тобто

$$S = (H_3^{-1} H_4)(K_2 K_1^{-1}).$$

Зауваживши, що $H_3^{-1} H_4 \in \mathbf{G}_a$, $K_2 K_1^{-1} \in \mathbf{G}_b$, переконуємося у правильності нашого твердження. □

Лема 5.11. *Нехай*

$$A = P_A^{-1} \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\| Q_A^{-1}, \ B = P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{matrix} \right\| Q_B^{-1}$$

– матриці над R і

$$D = P_D^{-1} \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{matrix} \right\| Q_D^{-1}, \ T = P_T^{-1} \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\| Q_T^{-1},$$

причому

$$A = DA_1, \ \ B = DB_1, \ \ A = TA_2, \ \ B = TB_2.$$

Тоді, якщо $\gamma_1 | \varphi_1 = (\varepsilon_1, \ \delta_1)$ та $\gamma_2 | \varphi_2$, то $D = TN$.

Доведення. Згідно з теоремою 4.1 маємо:

$A = DA_1 \Rightarrow P_D = L_A P_A$, де $L_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$,

$B = DB_1 \Rightarrow P_D = L_B P_B$, де $L_B \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$.

З аналогічних міркувань отримуємо:

$A = TA_2 \Rightarrow P_T = K_A P_A$, де $K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}}$,

$B = TB_2 \Rightarrow P_T = K_B P_B$, де $K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \delta_1)}}$.

Розглянемо добуток

$$P_T P_D^{-1} = K_A P_A P_A^{-1} L_A^{-1} = K_A L_A^{-1} =$$

$$= \underbrace{\begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)} k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}}_{K_A} \underbrace{\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix}}_{L_A^{-1}}.$$

Тобто

$$P_T P_D^{-1} = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}\right) l_{21} & l_{22} \end{Vmatrix}.$$

На підставі властивості 1.4

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}\right) = \frac{(\gamma_2, \varphi_2)}{(\gamma_2, \varphi_2, \varepsilon_1)}.$$

Оскільки $\gamma_2 \,|\varphi_2$, то

$$\frac{(\gamma_2, \varphi_2)}{(\gamma_2, \varphi_2, \varepsilon_1)} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}.$$

Отже,

$$P_T P_D^{-1} = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Vmatrix} = M. \qquad (5.20)$$

З іншого боку,

$$P_T P_D^{-1} = K_B P_B P_B^{-1} L_B^{-1} = K_B L_B^{-1}.$$

Аналогічно показуємо, що

$$P_T P_D^{-1} = \begin{Vmatrix} v_{11} & \nu_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \delta_1)} \nu_{21} & \nu_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Vmatrix} = M. \qquad (5.21)$$

З рівностей (5.20) та (5.21) випливає, що $\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)} \,|m_{21}$ та $\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \delta_1)} \,|m_{21}$, тобто

$$\left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \delta_1)}\right] |m_{21} \,.$$

Згідно з властивістю 1.6,

$$\left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varepsilon_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \delta_1)}\right] = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, (\varepsilon_1, \delta_1))}.$$

Оскільки $(\varepsilon_1, \delta_1) = \varphi_1$, то

$$\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, (\varepsilon_1, \delta_1))} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varphi_1)}.$$

Отже, $M \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \varphi_1)}}$. Згідно з умовою твердження матриця $\mathrm{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$ є дільником матриці $\mathrm{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2)$. Тому на підставі теореми 4.1 $D = TN$. Лему доведено. □

Лема 5.12. *Нехай A і B – особливі матриці і* $P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & s \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|$. *Тоді*

1) *для будь-яких інших матриць $P'_A \in \mathbf{P}_A$ та $P'_B \in \mathbf{P}_B$ маємо*

$$P'_A P'^{-1}_B = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ 0 & s'_{22} \end{matrix} \right\|,$$

2) $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$.

Доведення. 1). Оскільки A і B особливі матриці, то групи $\mathbf{G}_{\mathrm{E}},\ \mathbf{G}_{\Delta}$ збігаються з групою оборотних верхніх трикутних матриць.

Нехай P'_A та P'_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ та $H_B \in \mathbf{G}_{\Delta}$, що

$$P'_A = H_A P_A,\ \ P'_B = H_B P_B.$$

Розглянемо добуток матриць

$$P'_A P'^{-1}_B = H_A P_A (H_B P_B)^{-1} = H_A P_A P_B^{-1} H_B^{-1} = H_A S H_B^{-1}.$$

Оскільки H_A та H_B^{-1} є верхніми трикутними матрицями, то і $H_A S H_B^{-1}$ також буде верхньою трикутною матрицею.

2). Зауваживши, що

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & 1 \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| = H \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \mathbf{G}_{\Delta}$$

отримуємо $P_B = H P_A$, де $H \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Взявши до уваги, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, маємо $P_B \in \mathbf{P}_A$. Тобто $P_B \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B$. □

Теорема 5.17. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$. І нехай*

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2),\ \ B \sim \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\, \delta_2),$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тоді*

$$(A, B)_l = (L_A P_A)^{-1}\Phi = (L_B P_B)^{-1}\Phi,$$

де

$$\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\, \varphi_2) = \mathrm{diag}((\varepsilon_1, \delta_1),\ ((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])),$$

а матриці L_A та L_B задовольняють рівність $L_B^{-1} L_A = P_B P_A^{-1}$ і належать, відповідно, до груп $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$ та $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$.

Доведення. Відразу зауважимо, що згідно з лемою 5.9 елемент $((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B. При цьому згідно з наслідком 2.14 формою Сміта матриці $(A,\ B)_l$ є матриця Φ.

Спершу розглянемо випадок, коли принаймі одна з матриць A, B є неособливою або ж коли $s_{21} \neq 0$ і вони особливі.

Покажемо, що матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна записати у вигляді

$$P_B P_A^{-1} = MN, \tag{5.22}$$

де

$$M \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\, \delta_1)}},\ N \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}},\ \varphi_2 = ((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]).$$

Використавши властивість 1.5, отримуємо

$$\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}\right) = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, [\varepsilon_1, \delta_1])} = \frac{((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} =$$

$$= \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},\ \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} s_{21}\right) = \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},\ s_{21}\right) = \mu.$$

Оскільки $\mu | s_{21}$, то на підставі леми 5.10 матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна зобразити у вигляді (5.22). З цієї рівності випливає, що

$$M^{-1} P_B = N P_A.$$

Перепозначивши $M^{-1} = L_B$, $N = L_A$, отримуємо

$$(L_A P_A)^{-1}\Phi = (L_B P_B)^{-1}\Phi = D.$$

Оскільки $\Phi\,|\mathrm{E}$ та $\Phi\,|\Delta$, а також врахувавши те, що

$$L_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}} = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi) \neq \varnothing,\ \ L_B \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}} = \mathbf{L}(\Delta, \Phi) \neq \varnothing,$$

то на підставі теореми 4.1 матриця D є лівим спільним дільником матриць A та B.

Нехай $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$, де $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$, $\gamma_1|\gamma_2$ – інший лівий спільний дільник матриць A та B. Форма Сміта матриці T ділить форму Сміта матриці $(A,B)_l$, яка згідно з наслідком 2.14 є матрицею Φ. Тобто $\Gamma|\Phi$. Тому $\gamma_1|\varphi_1 = (\varepsilon_1,\ \delta_1)$ та $\gamma_2|\varphi_2$. Тоді на підставі леми 5.11 матриця T є лівим дільником матриці D. Отже, D – лівий н.с.д. матриць A, B.

На завершення розглянемо випадок, коли $s_{21} = 0$ і

$$A \sim \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ 0),\ \ B \sim \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\ 0).$$

На підставі леми 5.12 $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$. Нехай $U \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B$. Це означає, що матриці A та B можна записати у вигляді

$$A = U^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1},\ \ B = U^{-1}\Delta Q_B^{-1}.$$

Розглянемо матрицю

$$D = U^{-1}\operatorname{diag}((\varepsilon_1,\delta_1),\ 0) = U^{-1}\Phi.$$

Оскільки

$$A = \left(U^{-1}\begin{Vmatrix} (\varepsilon_1,\delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right)\left(\begin{Vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} Q_A^{-1}\right) = DA_1,$$

$$B = \left(U^{-1}\begin{Vmatrix} (\varepsilon_1,\delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right)\left(\begin{Vmatrix} \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} Q_B^{-1}\right) = DB_1,$$

то D є спільним лівим дільником матриць A та B.

Нехай $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$, де $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2)$, $\gamma_1|\gamma_2$ – інший спільний лівий дільник матриць A та B. Отже, $\Gamma|\mathrm{E}$ та $\Gamma|\Delta$. Звідси випливає, що $\gamma_1|\varepsilon_1$ та $\gamma_1|\delta_1$. Тобто $\gamma_1|(\varepsilon_1,\delta_1)$. Отже, $\Gamma|\Phi$. Тоді на підставі леми 5.11 матриця T є лівим дільником матриці D. Отже, D є лівим н.с.д. матриць A та B. Теорему доведено. □

Наступний результат стосується лівих н.с.д. матриць вищих порядків за деяких обмежень на їхні форми Сміта.

Лема 5.13. *Нехай R – кільце елементарних дільників. І нехай*

$$A \sim \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n),\ \ B \sim \Delta = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta)$$

– неособливі матриці над R, причому $P_B P_A^{-1} = S = \|s_{ij}\|_1^n$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. Тоді елемент

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})$$

є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B та P_A.

Доведення. Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ та $H_B \in \mathbf{G}_{\Delta}$, що

$$F_A = H_A P_A, \quad F_B = H_B P_B.$$

Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^n$. На підставі теореми 2.6 матриця H_B має вигляд

$$H_B = \left\| \begin{array}{cccc} h_{11} & \dots & h_{1.n-1} & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1.1} & \dots & h_{n-1.n-1} & h_{n-1.n} \\ \delta h_{n1} & \dots & \delta h_{n.n-1} & h_{nn} \end{array} \right\|.$$

Отже,

$$k_{ni} = \left\| \begin{array}{cccc} \delta h_{n1} & \dots & \delta h_{n.n-1} & h_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{n-1.i} \\ s_{ni} \end{array} \right\| =$$

$$= \delta(h_{n1}s_{1i} + \dots + h_{n.n-1}s_{n-1.i}) + h_{nn}s_{ni} = \delta l_i + h_{nn}s_{ni}, i = 1, \dots, n-1.$$

Розглянемо

$$((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 k_{n1},\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1}k_{n.n-1}) =$$

$$= ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \delta\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_1 h_{nn}s_{n1},\ \dots\ ,\ \delta\varepsilon_{n-1}l_{n-1} + \varepsilon_{n-1}h_{nn}s_{n.n-1}) = d.$$

Оскільки $(\varepsilon_n, \delta)\,|\delta$, то

$$d = ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 h_{nn}s_{n1},\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1}h_{nn}s_{n.n-1}) =$$

$$= ((\varepsilon_n,\ \delta),\ h_{nn}(\varepsilon_1 s_{n1},\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1}s_{n.n-1}))\,.$$

Із оборотності матриці H_B випливає, що $(h_{nn}, \delta) = 1$. Отже, і

$$(h_{nn}, (\varepsilon_n, \delta)) = 1.$$

Таким чином,

$$((\varepsilon_n, \delta), k_{n1}\varepsilon_1, \dots, k_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \dots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\,.$$

Позначимо $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^n$. Оскільки $H_A^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то на підставі теореми 2.6 матриця H_A^{-1} має вигляд

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccc} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1.n-1} & v_{1n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2.n-1} & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}v_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}v_{n2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}v_{n.n-1} & v_{nn} \end{array} \right\|.$$

Отже,

$$t_{ni} = \left\| \begin{matrix} s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} v_{i+1.i} \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_i} v_{ni} \end{matrix} \right\| = s_{n1}v_{1i} + \ldots +$$

$$+ s_{ni}v_{ii} + s_{n.i+1}\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}v_{i+1.i} + \ldots + s_{nn}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_i}v_{ni},\ i = 1, \quad \ldots, n-1.$$

Розглянемо

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) =$$

$$= \ ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1 v_{11} + s_{n2}\varepsilon_2 v_{21} + \ldots + s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}v_{n-1.1} + s_{nn}\varepsilon_n v_{n1}, \ldots$$

$$\ldots, s_{n1}\varepsilon_{n-1}v_{1.n-1} + s_{n2}\varepsilon_{n-1}v_{2.n-1} + \ldots + s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}v_{n-1.n-1} + s_{nn}\varepsilon_n v_{n.n-1}).$$

Оскільки $((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})$ є дільником всіх виписаних доданків, то

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) \mid ((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\ .$$

З іншого боку, $S = \|t_{ij}\|_1^n H_A$. Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) \mid ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\ .$$

А це означає, що

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})\,.$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_n(R)$, завершуємо доведення. □

Лема 5.14. *Нехай*

$$\frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_i)} = \mu_i,$$

де $\varphi = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})$. *Тоді* $\mu_i \,|s_{ni}\,,\ i = 1, \ldots, n-1$.

Доведення. Оскільки

$$\mu_i = \frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, s_{ni}\varepsilon_{ni}, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_i)} =$$

$$= \frac{\left(((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1})\,, \varepsilon_i \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} s_{n.i+1}, \ldots, s_{n.n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i} \right) \right)}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)} =$$

$$= \left(\frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)}, \frac{\varepsilon_i}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} s_{n.i+1}, \ldots, s_{n.n-1} \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i} \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)}, \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} s_{n.i+1}, \ldots, s_{n.n-1} \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i} \right) \right),$$

то $\mu_i \,|s_{ni}\,, \; i = 1, \ldots, n-1.$ □

Теорема 5.18. *Нехай R – кільце елементарних дільників. І нехай*

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \;\; B \sim \Delta = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \delta)$$

– неособливі матриці, причому $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тоді*

$$(A, B)_l = P_B^{-1}\Phi,$$

де $\Phi = \mathrm{diag}\,(1, \; \ldots \;, \; 1, \; \varphi)$, $\varphi = ((\varepsilon_n, \delta), \; \varepsilon_1 s_{n1}, \; \ldots \;, \; \varepsilon_{n-1} s_{n.n-1})$.

Доведення. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемою 5.13 елемент

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}),$$

а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Оскільки $\varphi \; | \; \delta$, то

$$B = (P_B^{-1}\Phi) \left(\mathrm{diag} \left(1, \; \ldots \;, \; 1, \; \frac{\delta}{\varphi} \right) Q_B^{-1} \right).$$

Тобто матриця $D = P_B^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці B.

З іншого боку $\varphi|\varepsilon_n$, тобто $\Phi|\mathrm{E}$. На підставі леми 5.14 елемент $\frac{\varphi}{(\varphi, \, \varepsilon_i)}$ є дільником s_{ni}, $i = 1, \ldots, n-1$. Отже, $P_B P_A^{-1} = S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$. Згідно з теоремою 4.1 це означає, що $D = P_B^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці A. Таким чином, матриця $D = P_B^{-1}\Phi$ є лівим спільним дільником матриць A, B.

Нехай $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$ – інший лівий спільний дільник матриць A, B. Оскільки форма Сміта матриці T є дільником форм Сміта матриць A, B, то матриця Γ має вигляд

$$\Gamma = \mathrm{diag}\,(1, \; \ldots \;, \; 1, \; \gamma)\,,$$

де $\gamma\,|\varepsilon_n$ та $\gamma\,|\delta$. Тобто

$$\gamma\,|(\varepsilon_n, \delta)\,. \tag{5.23}$$

На підставі теореми 4.1

$$P_T = K_A P_A, \text{ де } K_A \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Gamma),$$
$$P_T = K_B P_B, \text{ де } K_B \in \mathbf{L}(\Delta, \Gamma).$$

Отже,

$$K_A P_A = K_B P_B \Rightarrow P_B P_A^{-1} = K_B^{-1} K_A.$$

Матриця $K_B^{-1} K_A$ має вигляд

$$K_B^{-1} K_A = \left\| \begin{array}{cccc} v_{11} & \dots & v_{1.n-1} & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1.1} & \dots & v_{n-1.n-1} & v_{n-1.n} \\ \gamma v_{n1} & \dots & \gamma v_{n.n-1} & v_{nn} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccc} u_{11} & \dots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1.1} & \dots & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_1)} u_{n1} & \dots & \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_{n-1})} u_{n.n-1} & u_{nn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} l_{11} & \dots & l_{1.n-1} & l_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1.1} & \dots & l_{n-1.n-1} & l_{n-1.n} \\ \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_1)} l_{n1} & \dots & \frac{\gamma}{(\gamma,\varepsilon_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{array} \right\| = P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n .$$

Таким чином,

$$\frac{\gamma}{(\gamma, \varepsilon_i)} \mid s_{ni}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Тобто

$$\gamma \mid s_{ni}(\gamma, \varepsilon_i) = (\gamma s_{ni}, \varepsilon_i s_{ni}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Звідси випливає, що $\gamma \mid \varepsilon_i s_{ni}$, $i = 1, \dots, n-1$. Врахувавши подільність (5.23), отримуємо

$$\gamma \mid \ ((\varepsilon_n, \delta),\ \varepsilon_1 s_{n1},\ \dots\ ,\ \varepsilon_{n-1} s_{n.n-1}) = \varphi.$$

Таким чином, $\Gamma \,|\Phi$.

Оскільки $P_T = K_B P_B$ і $P_D = P_B$, то

$$P_T P_D^{-1} = K_B P_B P_B^{-1} = K_B \in \mathbf{L}(\Delta, \Gamma).$$

Зваживши на те, що $\mathbf{L}(\Delta, \Gamma) = \mathbf{L}(\Phi, \Gamma)$, на підставі теореми 4.1 приходимо до висновку, що матриця T є лівим дільником матриці $D = P_B^{-1}\Phi$. Отже, матриця $P_B^{-1}\Phi$ є найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B. Теорему доведено. □

Наслідок 5.5. *Матриці A та B взаємно прості зліва тоді і тільки тоді, коли*

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \dots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = 1. \qquad \square$$

Наслідок 5.6. *Множини лівих перетворювальних матриць $(A,B)_l$ та B пов'язані між собою такими співвідношеннями:*

1) $\mathbf{P}_{(A,B)_l} = \mathbf{G}_\Phi P_B$.
2) $\mathbf{P}_B \subseteq \mathbf{P}_{(A,B)_l}$.

Доведення. Рівність 1 випливає з властивості 2.2.

Оскільки

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B, \ \ \mathbf{P}_{(A,B)_l} = \mathbf{G}_\Phi P_B$$

та $\mathbf{G}_\Delta \subseteq \mathbf{G}_\Phi$, то $\mathbf{P}_B \subseteq \mathbf{P}_{(A,B)_l}$. □

5.9. Структура найменших спільних кратних матриць[2]

У цьому підрозділі встановимо взаємозв'язки між формами Сміта матриць A та B та формами Сміта їх найменшого спільного правого кратного та відповідні взаємозв'язки між перетворювальними матрицями цих матриць.

Нехай R – кільце Безу стабільного рангу 1,5.

Лема 5.15. *Нехай*

$$M = P_M^{-1} \operatorname{diag}(\omega_1,\ \omega_2) Q_M^{-1},\ F = P_F^{-1} \operatorname{diag}(\tau_1,\ \tau_2) Q_F^{-1}$$

– праві спільні кратні матриць

$$A = P_A^{-1} \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) Q_A^{-1},\ B = P_B^{-1} \operatorname{diag}(\delta_1,\ \delta_2) Q_B^{-1}.$$

Тоді, якщо $\omega_1 | \tau_1$ та $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2 | \tau_2$, то $F = MN$.

Доведення. Згідно з теоремою 4.1 маємо

$$P_A = L_M P_M, \text{ де } L_M \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}},$$
$$P_B = L_{M_1} P_M, \text{ де } L_{M_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}.$$

Звідси випливає, що $P_M = L_M^{-1} P_A$ та $P_M = L_{M_1}^{-1} P_B$.

З аналогічних міркувань

$$P_A = L_F P_F, \text{ де } L_F \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}},$$
$$P_B = L_{F_1} P_F, \text{ де } L_{F_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)}}.$$

Отже, $P_F = L_F^{-1} P_A$ та $P_F = L_{F_1}^{-1} P_B$. Тоді

$$P_F P_M^{-1} = L_F^{-1} P_A P_A^{-1} L_M = L_F^{-1} L_M =$$

[2]Результати цього підрозділу отримано спільно з А. Романівим.

$$= \underbrace{\left\| \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}k_{21} & k_{22} \end{array} \right\|}_{L_F^{-1}} \underbrace{\left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|}_{L_M}.$$

Таким чином,

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}\right) l_{21} & l_{22} \end{array} \right\|.$$

На підставі властивості 1.5

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}\right) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,[\tau_1,\omega_1])}.$$

Оскільки $\omega_1|\tau_1$, то

$$\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,[\tau_1,\omega_1])} = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}.$$

А це означає, що

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}l_{21} & l_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{array} \right\| = G. \tag{5.24}$$

З іншого боку,

$$P_F P_M^{-1} = L_{F_1}^{-1} P_B P_B^{-1} L_{M_1}^{-1} = L_{F_1}^{-1} L_{M_1}^{-1}.$$

Аналогічно показуємо, що

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)}v_{21} & v_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{array} \right\| = G. \tag{5.25}$$

З рівностей (5.24) та (5.25) випливає, що $\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}\,|g_{21}$ та $\frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)}\,|g_{21}$. Тобто

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)}\right] |g_{21} \,.$$

Згідно з властивістю 1.7

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)}\right] = \frac{[\varepsilon_2,\delta_2]}{([\varepsilon_2,\delta_2],\tau_1)}.$$

Оскільки $[\varepsilon_2,\delta_2] = \omega_2$, то

$$\frac{[\varepsilon_2,\delta_2]}{([\varepsilon_2,\delta_2],\tau_1)} = \frac{\omega_2}{(\omega_2,\tau_1)}.$$

Отже, $G \in \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2,\tau_1)}}$. Зваживши на те, що матриця $\operatorname{diag}(\omega_1,\ \omega_2)$ є дільником матриці $\operatorname{diag}(\tau_1,\ \tau_2)$, а також взявши до уваги теорему 4.1, отримаємо, що $F = MN$. □

Теорема 5.19. *Нехай*

$$A \sim \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2),\ B \sim \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\ \delta_2),$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тоді*

1) *якщо принаймні одна з матриць A, B неособлива або A та B особливі, причому $s_{21} \neq 0$, то*

$$[A, B]_r = (L_M P_A)^{-1}\Omega = (L_{M_1} P_B)^{-1}\Omega,$$

де

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1](\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),\, s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1])} & 0 \\ 0 & [\varepsilon_2, \delta_2] \end{matrix} \right\|,$$

а матриці L_M та L_{M_1} задовольняють рівність $L_{M_1}^{-1} L_M = P_B P_A^{-1}$ і належать, відповідно, до груп $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$ та $\mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$,

2) *якщо матриці A, B особливі, причому $s_{21} = 0$, то $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$ і*

$$[A, B]_r = P^{-1}\Omega,$$

де

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,\ P \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B.$$

Доведення. 1). Відразу зауважимо, що згідно з лемою 5.9 елемент $((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])$, а отже, і матриця Ω не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Покажемо, що матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна записати у вигляді

$$P_B P_A^{-1} = KT, \tag{5.26}$$

де

$$K \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}},\ \ T \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}},\ \ \omega_1 = \frac{[\varepsilon_1, \delta_1] \cdot (\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])}.$$

Використавши властивість 1.4, отримуємо

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, \omega_1)}\right) = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{(\varepsilon_2, \delta_2, \omega_1)} = \frac{((\varepsilon_2, \delta_2),\ s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1])}{((\varepsilon_2, \delta_2),\ [\varepsilon_1, \delta_1])} =$$

$$= \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},\ \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} s_{21}\right) = \left(\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},\ s_{21}\right) = \mu.$$

Тобто $\mu | s_{21}$. На підставі леми 5.10 матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна зобразити у вигляді (5.26). Отже,

$$K^{-1} P_B = T P_A.$$

Перепозначивши $K^{-1} = L_{M_1}$, $T = L_M$, маємо

$$(L_M P_A)^{-1}\Omega = (L_{M_1} P_B)^{-1}\Omega = M.$$

Оскільки $\mathrm{E}|\Omega$ та $\Delta|\Omega$, а також врахувавши те, що $L_M^{-1} \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$ та $L_{M_1}^{-1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$ на підставі теореми 4.1 приходимо до висновку, що матриця M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай $F = P_F^{-1}\Upsilon Q_F^{-1}$, де $\Upsilon = \mathrm{diag}(\tau_1,\ \tau_2)$, $\tau_1|\tau_2$ – інше спільне праве кратне матриць A та B. Тобто $F = AA_2$, $F = BB_2$. Отже, $\mathrm{E}|\Upsilon$ та $\Delta|\Upsilon$. Оскільки $\varepsilon_2|\tau_2$ та $\delta_2|\tau_2$, то $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2|\tau_2$. Із того, що $\varepsilon_1|\tau_1$ та $\delta_1|\tau_1$, випливає, що $[\varepsilon_1, \delta_1]|\tau_1$. Тобто $\tau_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]x$. Окрім того, $P_A = K_A P_F$, де $K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\ \tau_1)}}$ та $P_B = K_B P_F$, де $K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\ \tau_1)}}$. Тобто $P_F = K_A^{-1} P_A$ і $P_F = K_B^{-1} P_B$. Отже,

$$K_B K_A^{-1} = P_B P_A^{-1}.$$

Матриця $K_B K_A^{-1}$ має вигляд

$$K_B K_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2,\ \tau_1)} u_{21} & u_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\ \tau_1)} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),\ \tau_1)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{z}{(z,\ tx)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2,$$

де $z = (\varepsilon_2, \delta_2)$, $t = [\varepsilon_1,\ \delta_1]$. Таким чином, $s_{21} = \frac{z}{(z,\ tx)} l_{21}$. Міркуючи аналогічно, як під час доведення теореми 5.17, показуємо, що $\omega_1|\tau_1$. Отже, $\Omega|\Upsilon$. Тоді на підставі леми 5.15 матриця M є лівим дільником матриці F. Таким чином, M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B.

2). Згідно з лемою 5.12 незалежно від вибору матриць P_A та P_B елемент s_{21} дорівнює нулю. На підставі леми 5.12 $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \varnothing$. Нехай $U \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B$. Це означає, що матриці A та B можна записати у вигляді

$$A = U^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}, \quad B = U^{-1}\Delta Q_B^{-1}.$$

Розглянемо матрицю

$$M = U^{-1} \left\| \begin{matrix} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = U^{-1}\Omega.$$

Оскільки

$$M = \left(U^{-1} \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| Q_A^{-1} \right) \cdot \left((Q_A \left\| \begin{matrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\varepsilon 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$= \left(U^{-1} \left\| \begin{matrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| Q_B^{-1} \right) \cdot \left(Q_B \left\| \begin{matrix} \frac{[\varepsilon_1, \delta_1]}{\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right),$$

то M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай $F = P_F^{-1} \Gamma Q_F^{-1}$ – інше спільне праве кратне матриць A та B. Це означає, що відповідні інваріантні множники матриці F є кратні інваріантним множникам матриць A та B. Оскільки другі інваріантні множники цих матриць є нулі, то матриця Γ має вигляд $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ 0)$. Окрім того, $\varepsilon_1 | \gamma_1$ та $\delta_1 | \gamma_1$. Тому $[\varepsilon_1, \delta_1] | \gamma_1$, тобто $\gamma_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]\alpha$. Отже, $\Omega \mid \Gamma$. Оскільки $F = AF_1$, то $P_A = U = LP_F$, де $L \in \mathbf{L}(\Gamma, \mathrm{E})$ – група оборотних верхніх трикутних матриць. Зауваживши, що $\mathbf{L}(\Gamma, \mathrm{E}) = \mathbf{L}(\Gamma, \Omega)$, отримуємо, що $U = LP_F$, де $L \in \mathbf{L}(\Gamma, \Omega)$, а це на підставі леми 5.15 означає, що матриця M є лівим дільником матриці F. Отже, M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B. Теорему доведено. □

Наслідок 5.7. *Якщо матриці A та B особливі, причому і $s_{21} \neq 0$, то*

$$M = [A, B]_r = \mathbf{0}. \qquad \square$$

Подальші дослідження спрямуємо на вивчення найменшого спільного правого кратного неособливих матриць з формами Сміта

$$\mathrm{E} = \operatorname{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \varepsilon),\ \Delta = \operatorname{diag}(1,\ \dots\ ,\ 1,\ \delta)$$

над кільцями Безу стабільного рангу 1,5.

Лема 5.16. *Нехай $A \sim \mathrm{E}$, $B \sim \Delta$. Тоді елемент*

$$((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{n.n-1})$$

є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Доведення. Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують такі $H_A \in G_{\mathrm{E}}$ та $H_B \in G_\Delta$, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Врахувавши структуру матриць H_B, H_A^{-1} (теорема 2.6) та асоціативність кільця $M_n(R)$, доведення цього твердження не викликає жодних труднощів. □

Лема 5.17. *Нехай*

$$\mu = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})}, \quad \omega_{n-1} = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}.$$

Тоді $\mu \mid (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$.

Доведення. Оскільки

$$\mu = \frac{(\varepsilon,\delta)}{\left((\varepsilon,\delta), \frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})}\right)} = \frac{(\varepsilon,\delta)((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})}{((\varepsilon,\delta)((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1}),(\varepsilon,\delta))} =$$
$$= ((\varepsilon, \delta), (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})),$$

то $\mu \,|(s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$. □

Лема 5.18. *Нехай* $S = \|s_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$ *і*

$$\Omega = \mathrm{diag}(1, \ \ldots \ , \ 1, \ \omega_{n-1}, \ \omega_n),$$

де $\omega_{n-1}|\, \omega_n$*. Для того, щоб існували такі оборотні матриці*

$$L_A = \left\| \begin{matrix} & & * & * & \\ \varepsilon l_{n1} & \ldots & \varepsilon l_{n.n-2} & \frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{5.27}$$

$$L_B = \left\| \begin{matrix} & & * & * & \\ \delta p_{n1} & \ldots & \delta p_{n.n-2} & \frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})} p_{n.n-1} & p_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{5.28}$$

що $SL_A = L_B$*, необхідно та достатньо, щоб*

$$\frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})} \ \mid \ (s_{n1}, \ \ldots \ , \ s_{n.n-1}) \, .$$

Доведення. Необхідність. Позначимо

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_{n-1})} = a, \quad \frac{\delta}{(\delta, \omega_{n-1})} = b.$$

Очевидно, що

$$L_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(1, \ \ldots \ , \ 1, \ a)} = \mathbf{G}_a \ \text{ і } \ L_B \in \mathbf{G}_{diag(1, \ \ldots \ , \ 1, \ b)} = \mathbf{G}_b.$$

Отже,

$$S = L_B L_A^{-1} \in \mathbf{G}_b \mathbf{G}_a.$$

Звідси випливає, що $(a, b)|\; s_{ni}, \ i = 1, \ \ldots \ , \ n-1$. На підставі властивості 1.4

$$(a, b) = \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_{n-1})}, \frac{\delta}{(\delta, \omega_{n-1})} \right) = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})}.$$

Таким чином,

$$\frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})} \mid (s_{n1}, \ \dots \ , \ s_{n.n-1}).$$

Достатність. Спершу розглянемо випадок, коли матриця S має вигляд

$$S = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\|.$$

Нехай $(a, b) = \alpha$. Тоді існують такі $t_1, \ t_2$, що

$$at_1 + bt_2 = \alpha.$$

Згідно з умовою леми $\alpha \ \mid (s_{n1}, \ \dots \ , \ s_{n.n-1})$. Тому,

$$(s_{n1}, \ \dots \ , \ s_{n.n-1}) = \alpha\beta.$$

Отже, існує така оборотна матриця U, що

$$\left\| \begin{array}{ccc} s_{n1} & \dots & s_{n.n-1} \end{array} \right\| U = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & \alpha\beta \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$S \left\| \begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{U} & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & -a\beta t_1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{U} & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & b\beta t_2 & 1 \end{array} \right\|.$$

Що і потрібно було довести.

Нехай тепер $S = \|s_{ij}\|_1^n$ – довільна матриця із $\mathrm{GL}_n(R)$. З теореми 2.13 випливає, що існують такі матриці $H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$ та $T \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, що

$$H_1ST = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ c_{n-1.1} & \dots & c_{n-1.n-2} & 1 & 0 \\ \hline c_{n1} & c_{n1} & & c_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} C_{11} & \mathbf{0} \\ \hline C_{21} & 1 \end{array} \right\|.$$

Розглянемо матрицю

$$H_2 = \left\| \begin{array}{c|c} C_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$H_2H_1ST = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 1 & 0 \\ c_{n1} & \dots & c_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = C.$$

Зауважимо, що $H_2 \in \mathbf{G}_\Delta$, а отже, і $H_2H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$. Очевидно, що $\alpha \mid (c_{n1}, \ \dots \ , c_{n.n-1})$. Згідно зі щойно доведеним існують така матриця L'_A вигляду (5.27) та L'_B вигляду (5.28), що $CL'_A = L'_B$. Тобто

$$HSTL'_A = L'_B.$$

Отже,

$$S(TL'_A) = H^{-1}L'_B.$$

На підставі властивості 4.1 матриці $TL'_A = L_A$, $H^{-1}L'_B = L_B$ знову мають вигляд (5.27) та (5.28), відповідно. □

Лема 5.19. *Нехай*

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \varepsilon), \quad \Delta = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \delta),$$

$U = \|u_{ij}\|_1^n \in \mathrm{GL}_n(R)$. *Тоді*

$$\mathrm{E}U\Delta \sim \mathrm{diag}(1, \ \dots \ , 1, \ \gamma_{n-1}, \ \gamma_n). \tag{5.29}$$

Доведення. Розглянемо добуток

$$\mathrm{E}U\Delta = \left\| \begin{array}{ccc|c} u_{11} & \dots & u_{1.n-1} & \delta u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1.1} & \dots & u_{n-1.n-1} & \delta u_{n-1.n} \\ \hline \varepsilon u_{n1} & \dots & \varepsilon u_{n.n-1} & \varepsilon\delta u_{nn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array} \right\|.$$

Оскільки матриця U_{11} має порядок $n-1$ і є підматрицею оборотної матриці порядку n, то згідно з твердженням 3.7

$$U_{11} \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ \dots \ , 1}_{n-2}, \ u).$$

Звідси і випливає еквівалентність (5.29). □

Теорема 5.20. *Нехай A, B – неособливі $n \times n$ матриці над кільцем Безу стабільного рангу $1,5$, причому*

$$A \sim \mathrm{diag}(1, \ \dots \ , 1, \ \varepsilon) = \mathrm{E}, \ \ B \sim \mathrm{diag}(1, \ \dots \ , 1, \ \delta) = \Delta,$$

$P_BP_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. *Тоді*

$$[A, B]_r = (L_AP_A)^{-1}\Omega = (L_BP_B)^{-1}\Omega,$$

де

$$\Omega = \mathrm{diag}\left(1, \dots 1, \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{n.n-1})}, [\varepsilon, \delta]\right),$$

а матриці L_A та L_B належать, відповідно, множинам $\mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $\mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ та задовольняють рівність $(P_BP_A^{-1})L_A = L_B$.

Доведення. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемою 5.16 елемент

$$((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}),$$

а отже, і матриця Ω не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1} & P_B^{-1} \Delta Q_B^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$P_B \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (P_B P_A^{-1}) \mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\|.$$

З теореми 2.13 випливає, що матриці $P_B,\ P_A$ можна вибрати таким чином, що $P_B P_A^{-1}$ буде нижньою унітрикутною матрицею. Отже,

$$\left\| \begin{matrix} (P_B P_A^{-1}) \mathrm{E} & \Delta \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ * & & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_{n1} & \ldots & s_{n.n-1} & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & \delta \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \operatorname{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ ((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})).$$

Зваживши на теорему 1.10, отримаємо

$$(A, B)_l \sim \operatorname{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ ((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})).$$

На підставі теореми 1.20 матрицю $[A, B]_r$ можна записати у вигляді

$$[A, B]_r = BUA_1, \quad \text{де} \quad A = (A, B)_l A_1, \quad U \in \mathrm{GL}_n(R).$$

Оскільки матриця A має однин відмінний від одиниці інваріантний множник, то її правий дільник A_1 також має аналогічну кількість відмінних від одиниці інваріантних множників. Тоді згідно із лемою 5.19 $[A, B]_r$ має не більше двох відмінних від одиниці інваріантних множників:

$$[A, B]_r \sim \operatorname{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ \omega_{n-1},\ \omega_n).$$

З теореми 1.18 випливає, що

$$\det A \det B = \det(A, B)_l \det[A, B]_r.$$

Тобто

$$\det[A, B]_r = \frac{\det A \det B}{\det(A, B)_l} = \frac{\varepsilon\delta}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})} = \omega_{n-1}\omega_n.$$

Оскільки матриці A, B є лівими дільниками матриці $[A, B]_r$, то їхні форми Сміта ділять матрицю $\operatorname{diag}(1, \ \ldots \ , 1, \ \omega_{n-1}, \ \omega_n)$. Отже, $[\varepsilon, \delta] | \omega_n$. З іншого боку, зі структури матриць множин $\mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $\mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ випливає, що ніяких інших обмежень на інваріантний множник ω_n не накладається. Тому $\omega_n = [\varepsilon, \delta]$. Отже,

$$\omega_{n-1} = \frac{\varepsilon\delta(\varepsilon, \delta)}{\varepsilon\delta\left((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}\right)} = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}.$$

Таким чином,

$$[A, B]_r \sim \operatorname{diag}\left(1, \ldots 1, \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}, [\varepsilon, \delta]\right) = \Omega.$$

На підставі властивості 1.4

$$\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_{n-1})}, \frac{\delta}{(\delta, \omega_{n-1})}\right) = \left(\frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})}\right) = \mu.$$

Використавши лему 5.17, отримуємо, що

$$\mu \,|(s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}) \,.$$

Тоді згідно з лемою 5.18 існують такі матриці $L_A \in L(\Omega, \mathrm{E})$, $L_B \in L(\Omega, \Delta)$, що

$$P_B P_A^{-1} L_A = L_B.$$

Звідси випливає, що

$$L_A^{-1} P_A \Omega = L_B^{-1} P_B \Omega = M.$$

Оскільки $\mathrm{E}|\Omega$ та $\Delta|\Omega$, то на підставі теореми 4.1 матриця M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай N – найменше спільне праве кратне матриць A та B. Із щойно доведеного випливає, що $N \sim \Omega$. Отже, $N = P_N^{-1} \Omega Q_N^{-1}$. Тоді матриця

$$M = L_A^{-1} P_A \Omega = P_M^{-1} \Omega$$

є правим кратним матриці N: $M = N N_1$. Згідно з теоремою 4.1 це рівносильно тому, що $P_N = L P_M$, де $L \in \mathbf{L}(\Omega, \Omega)$. Зваживши на властивість 4.6, отримуємо

$$\mathbf{L}(\Omega, \Omega) = \mathbf{G}_\Omega.$$

На підставі теореми 4.3 матриці M та N асоційовні справа. Таким чином, матриця M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B. Теорему доведено. □

Розділ 6.
Інваріанти примітивних матриць стосовно дії групи Зеліска

Під час розв'язання деяких факторизаційних задач виникає необхідність описувати всі неасоційовні справа матриці з фіксованою формою Сміта. Прикладом цього є опис всіх лівих неасоційовних справа дільників матриці

$$A(x) = \left\| \begin{array}{cc} x^3 & 0 \\ 0 & x^3 \end{array} \right\|,$$

які мають форму Сміта

$$\Phi(x) = \left\| \begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{array} \right\|.$$

Такими будуть усі матриці з формою Сміта $\Phi(x)$, тобто всі матриці вигляду $P^{-1}(x)\Phi(x)Q^{-1}(x)$, де $P(x), Q(x)$ – оборотні матриці. Дійсно:

$$A(x) = \left(P^{-1}(x)\mathrm{diag}(x,\ x^2)Q^{-1}(x)\right)\left(Q(x)\mathrm{diag}(x^2,\ x)P(x)\right).$$

Для встановлення того факту, що матриці асоційовні справа, тобто відрізняються правим оборотним множником, використовують форму Ерміта. Проте, якщо застосувати цю форму як генератор неасоційовних матриць, то зможемо описати лише неасоційовні матриці з заданим визначником. Так

$$\left\{ \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ ax^2+bx+c & x^3 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} x & 0 \\ ax+b & x^2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} x^2 & 0 \\ a & x \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} x^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

де a, b, c незалежно одне від одного пробігають всі елементи з поля F, є множиною всіх неасоційовних справа поліноміальних матриць другого порядку над кільцем $F[x]$ із визначником $\det \Phi(x) = x^3$. При цьому матриці з формою Сміта $\Phi(x)$ попадуть у множину

$$\left\{ \left\| \begin{array}{cc} x & 0 \\ ax+b & x^2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} x^2 & 0 \\ a & x \end{array} \right\| \right\},$$

де $a, b, c \in F$. Проте, ця множина також містить матриці, які не мають форми Сміта $\Phi(x)$. Зокрема, такими є матриці

$$\left\| \begin{array}{cc} x & 0 \\ 1 & x^2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} x^2 & 0 \\ 1 & x \end{array} \right\|.$$

Уже цей простий приклад свідчить, що форма Ерміта є "грубим інструментом"для розв'язання цієї "делікатної"задачі. Тому виникає потреба в побудові такої канонічної форми матриць стосовно односторонніх перетворень, уже сам вигляд якої говорив би про форму Сміта матриці.

Над кільцем елементарних дільників R кожна матриця з формою Сміта Φ має вигляд $P^{-1}\Phi Q^{-1}$, де $P, Q \in \mathrm{GL}_n(R)$. Отже, правими перетвореннями з групи $\mathrm{GL}_n(R)$ ця матриця зводиться до вигляду $P^{-1}\Phi$. Оскільки матриця Φ є інваріантом стосовно таких перетворень, то природно будувати необхідну нам форму у вигляді $P^{-1}\Phi$. На підставі властивості 2.2 в якості матриці P може бути вибрана кожна матриця з суміжного класу $\mathbf{G}_\Phi P$. Тобто запис матриці у вигляді $P^{-1}\Phi$ не є канонічним. Отже, поставлена задача рівносильна пошуку "канонічних"матриць у класі $\mathbf{G}_\Phi P$. Дослідження останніх двох розділів монографії присвячені власне цій задачі.

6.1. Ф-стрижень стовпця та його властивості

Нехай $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця і $\Phi = \mathrm{diag}\,(\varphi_1,\ \ldots, \varphi_n)$ – неособлива d-матриця. Введемо такі позначення:

P^m – матриця, складена з останніх m рядків матриці P, $1 \le m < n$,

$P^m_{i_1,\ldots,i_k}$ – матриця, складена з $i_1, \ldots, i_k$ стовпців матриці P^m, $1 \le k \le n$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$,

$$\delta^m_{i_1,\ldots,i_k} = \left\langle P^m_{i_1,\ldots,i_k} \right\rangle, \ \ \Delta^m_{i_1,\ldots,i_k} = \left\langle V^m_{i_1,\ldots,i_k} \right\rangle,$$

де $V = HP$.

Теорема 6.1. *Якщо* $H \in \mathbf{G}_\Phi$, *то*

$$\left(\delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right),$$

$m = 1, \ldots, n-1$.

Доведення. Нехай $m < k \le n$ і μ – довільний мінор порядку m матриці $P^m_{i_1,\ldots,i_k}$. Аналогічно побудований мінор матриці $V^m_{i_1,\ldots,i_k}$ позначимо через ν. Правильність нашого твердження, якщо $k = m$ доведено в лемі 2.1. Отже,

$$\left(\mu, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\nu, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

Звідси випливає, що

$$\left(\delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

На завершення розглянемо випадок $1 \leq k < m$. Нехай $\mu_1, \ldots, \mu_t$ – всі мінори m-го порядку матриці P^m, які містять підматрицю $P^m_{i_1,\ldots,i_k}$. Через $\nu_1, \ldots, \nu_t$ позначимо відповідні мінори матриці V^m. Тоді, згідно з доведеним

$$\left(\mu_i, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\nu_i, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).$$

$i = 1, \ldots, t$. На підставі твердження 3.4

$$(\mu_1, \ldots, \mu_t) = \delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \ (\nu_1, \ldots, \nu_t) = \Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}\left(\delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) &= \left(\mu_1, \ldots, \mu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \\ &= \left(\left(\mu_1, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right), \ldots, \left(\mu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right)\right) = \\ &= \left(\left(\nu_1, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right), \ldots, \left(\nu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right)\right) = \\ &= \left(\nu_1, \ldots, \nu_t, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1,\ldots,i_k}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}\right).\end{aligned}$$

Теорему доведено. □

Нехай R – кільце елементарних дільників і $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособлива d-матриця над R. Кожна оборотна матриця складається з примітивних стовпців. Тому вивчення дії групи $\mathbf{G}_\Phi$ на оборотні матриці природно розпочати з вивчення її дії на примітивні стовпці.

Позначимо $\Phi_1 = I_n$,

$$\Phi_i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Нехай $\mathbf{a} = \|a_1 \ \ldots \ a_n\|^T$ – примітивний стовпець.

Означення 6.1. **Φ-стрижнем** стовпця $\mathbf{a}$ (в позначеннях $R_\Phi(\mathbf{a})$) називається стовпець $\| \ \delta_1 \ \ \ldots \ \ \delta_n \ \|^T$, де δ_i-ті отримуються з еквівалентності

$$\Phi_i\mathbf{a} = \left\|\frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_1 \ \cdots \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1} \ \ a_i \ \ldots \ \ a_n\right\|^T \sim \|\delta_i \ 0 \ \ldots \ 0\|^T,$$

$i = 1, \ \ldots, \ n.$

Теорема 6.2. *Якщо $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то $R_\Phi(\mathbf{a}) = R_\Phi(H\mathbf{a})$.*

Доведення. Згідно з лемою 3.5

$$\Phi_i H\mathbf{a} \overset{l}{\sim} \Phi_i \mathbf{a} \overset{l}{\sim} \|\delta_i \; 0 \; \dots \; 0\|^T ,$$

$i = 2, \; \dots, \; n$. Очевидно також, що

$$I_n H\mathbf{a} \overset{l}{\sim} I_n \mathbf{a} \overset{l}{\sim} \|1 \; 0 \; \dots \; 0\|^T .$$

Отже, $R_\Phi(\mathbf{a}) = R_\Phi(H\mathbf{a})$. □

З цієї теореми випливає, що Ф-стрижень стовпця $\mathbf{a}$ є інваріантом стосовно дії групи $\mathbf{G}_\Phi$ на стовпець $\mathbf{a}$.

Зауваживши, що $\delta_i | a_i$, $i = 1, \; \dots, n$, із теореми 6.2 отримуємо.

Наслідок 6.1. *Якщо* $R_\Phi(\mathbf{a}) = \| \; \delta_1 \; \dots \; \delta_n \; \|^T$, *то стовпець* $\mathbf{a}$ *можна записати так:* $\mathbf{a} = \| \; \delta_1 b_1 \; \; \delta_2 b_2 \; \dots \; \; \delta_n b_n \; \|^T$. □

Оскільки $I_n \mathbf{a} \sim \| \; 1 \; \dots \; 0 \; \|^T$, то $\delta_1 = 1$. Вкажемо взаємозв'язок між елементами Ф-стрижня стовпця $\mathbf{a}$.

Властивість 6.1. *Виконуються рівності*

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \; \frac{a_i}{\delta_{i-1}} \; , \; \frac{a_{i+1}}{\delta_{i-1}}, \; \cdots \; , \; \frac{a_n}{\delta_{i-1}} \right) \delta_{i-1}, \; \; i = 2, \; \dots, n.$$

Доведення. Виконуються рівності

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} a_1, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} a_{i-1}, \; a_i, \; \dots \; , \; a_n \right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_1} a_1, \cdots, \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}} a_{i-2} \right), \; a_{i-1}, \; a_i, \; \dots, \; a_n \right) =$$

$$= \delta_{i-1} \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \frac{\left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_1} a_1, \; \cdots \; , \; \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}} a_{i-2} \right)}{\delta_{i-1}}, \frac{a_{i-1}}{\delta_{i-1}}, \; \dots, \; \frac{a_n}{\delta_{i-1}} \right) =$$

$$= \delta_{i-1} \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \; \frac{a_i}{\delta_{i-1}}, \; \dots, \; \frac{a_n}{\delta_{i-1}} \right),$$

$i = 2, \dots, n$. □

Наслідок 6.2. *Елементи* δ_i, $i = 2, \ldots, n$, Φ*-стрижня стовпця* $\mathbf{a}$ *задовольняють умови*

1) $\delta_1 \mid \delta_2 \mid \ldots \mid \delta_n$,
2) $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $i = 2, \ldots, n$. □

Оскільки $\delta_1 = 1$, то кожний Φ-стрижень є примітивним стовпцем. Проте, не кожний примітивний стовпець буде Φ-стрижнем деякого примітивного стовпця. Це буде лише за умов, сформульованих у наступному твердженні.

Властивість 6.2. *Стовпець* $\| \, 1 \; \tau_2 \; \ldots \; \tau_n \, \|^T$ *є* Φ*-стрижнем деякого примітивного стовпця* $\| \, a_1 \; \ldots \; a_n \, \|^T$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*

1) $\tau_i \mid \frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \quad i = 2, \ldots, n$;
2) $\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}} \mid \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n$.

Доведення. Необхідність. Нехай

$$R_\Phi \left(\|a_1 \ldots a_n\|^T \right) = \|1\tau_2 \ldots \tau_n\|^T .$$

Тоді

$$\tau_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} a_1, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n \right),$$

$i = 2, \ldots, n$. Згідно з властивістю 1.10

$$\tau_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_1} a_2, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n \right).$$

Отже, $\tau_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_1}$, $i = 2, \ldots, n$.

Умова 2) отримана в наслідку 6.2.

Достатність. Розглянемо примітивний стовпець

$$\tau = \| \, 1 \;\; \tau_2 \; \ldots \; \tau_n \, \|^T ,$$

елементи якого задовольняють рівності 1) та 2). Покажемо, що Φ-стрижень цього стовпця збігається зі самим стовпцем. Нехай

$$R_\Phi(\tau) = \| \, \delta_1 \; \ldots \; \delta_n \, \|^T .$$

Тоді

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \tau_1, \; \frac{\varphi_i}{\varphi_2} \tau_2, \; \cdots, \; \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \tau_{i-1}, \; \tau_i, \; \ldots, \; \tau_n \right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1},\ \frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2,\ \cdots,\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1},\ \tau_i,\ \ldots,\ \tau_n\right).$$

З умови 2) випливає, що $\tau_i \mid \tau_{i+1} \mid \ldots \mid \tau_n$. Також згідно з умовою 1) $\tau_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_1}$. Отже,

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1},\ \tau_i,\ \tau_{i+1},\ \ldots,\ \tau_n\right) = \tau_i.$$

Тобто

$$\delta_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}, \tau_i\right).$$

Оскільки $\tau_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1}$, причому

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}}\tau_{j-1} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\tau_j\right)\left(\frac{\varphi_j \tau_{j-1}}{\varphi_{j-1}\tau_j}\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\tau_j\right)\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} \Big/ \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}}\right),$$

$2 \leqslant j-1 \leqslant i-1$, то у послідовності

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_2}\tau_2,\ \cdots,\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\tau_{i-1},\ \tau_i$$

кожний попередній елемент ділиться на наступний. Отже, $\delta_i = \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$. Таким чином, $R_\Phi(\tau) = \tau$. □

Згідно з наслідком 6.1 кожний примітивний стовпець $\mathbf{a}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{a} = \|\ \delta_1 b_1\ \ \delta_2 b_2\ \ \ldots\ \delta_n b_n\ \|^T,$$

де

$$\|\delta_1\ \ \delta_2\ \ \ldots\ \delta_n\|^T = R_\Phi(\mathbf{a}).$$

Оскільки δ_i, $i = 1, \ldots, n$ є інваріантами стосовно дії групи $\mathbf{G}_\Phi$, то перетвореннями з цієї групи елементи стовпця $\mathbf{a}$ щонайбільше можна замінити на δ_i або ж на нуль. Зведемо примітивний стовпець $\mathbf{a}$ перетвореннями з $\mathbf{G}_\Phi$ до простішого вигляду.

Теорема 6.3. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$. Якщо*

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \|\ \delta_1\ \ \delta_2\ \ \ldots\ \delta_n\ \|^T$$

– Ф-стрижень примітивного стовпця $\mathbf{a} = \|\ a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n\ \|^T$, то в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що

$$H\mathbf{a} = \|\ b\ \ \ \delta_2\ \ \ldots\ \ \delta_n\ \|^T,\ \ (b,\ \delta_n) = 1.$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.9 існують такі елементи $u_1, \ \dots, \ u_n$, що
$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}a_1u_1+\dots+\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}a_{n-1}u_{n-1}+a_nu_n=\delta_n,$$
де
$$\left(u_n, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)=1.$$
Оскільки
$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \mid \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} \mid \dots \mid \frac{\varphi_n}{\varphi_1},$$
то на підставі властивості 1.10
$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1,\cdots,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1},u_n\right)=\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2,\cdots,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1},u_n\right)=$$
$$=\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2,\cdots,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1},\left(u_n,\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)\right)=1.$$
Тоді, згідно з теоремою 1.1, рядок
$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 \ \cdots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} \ \ u_n \right\|$$
можна доповнити до оборотної матриці H_n вигляду
$$H_n=\left\|\begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2.n-1} & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_2 & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} & u_n \end{array}\right\|,$$
яка належатиме групі $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді
$$H_n \left\| \, a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n \, \right\|^T=\left\| b_1 \ \dots \ b_{n-1} \ \delta_n \, \right\|^T.$$
На підставі теореми 6.2 цей стовпець знову ж таки матиме Ф-стрижень $\| \, \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \dots \ \delta_n \, \|^T$. Це означає, що
$$\Phi_{n-1}H_n \left\| \, a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ a_n \, \right\|^T \sim \left\| \, \delta_{n-1} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0 \, \right\|^T.$$
Отже, існують такі елементи $v_1, \ \dots \ , \ v_n$, що
$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1}b_1v_1+\dots+\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}}b_{n-2}v_{n-2}+b_{n-1}v_{n-1}+\delta_nv_n=\delta_{n-1}.$$
Згідно з теоремою 1.9 ці елементи виберемо так, що
$$(v_1,\dots,v_{n-1})=1,$$

причому

$$\left(v_{n-1}, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Як і у попередньому випадку,

$$\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} v_1, \cdots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} v_{n-2}, v_{n-1}\right) = 1.$$

Із теореми 1.1 випливає, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує матриця H_{n-1} з такими двома останніми рядками:

$$\left\| \begin{array}{lllll} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} v_1 & \cdots & \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} v_{n-2} & v_{n-1} & v_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$H_{n-1} H_n \| \, a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n \;\; \|^T = \| \, c_1 \; \ldots \; c_{n-2} \;\; \delta_{n-1} \;\; \delta_n \, \|^T.$$

Продовжуючи описаний процес, на $(n-1)$-му кроці отримаємо таку матрицю $H_2 \cdots H_n \in \mathbf{G}_\Phi$, що

$$H_2 \cdots H_n a = \| \, d \;\; \delta_2 \;\; \ldots \;\; \delta_n \, \|^T.$$

Якщо $(d, \; \delta_n) = 1$, то теорему доведено. Якщо ж ця умова не виконується, то з примітивності стовпця $\mathbf{a}$, а також із того, що $\delta_2 \mid \delta_3 \mid \ldots \mid \delta_n$, випливає $(d, \; \delta_2) = 1$. Тому і $(d, \; \delta_2, \; \delta_n) = 1$. Оскільки $\delta_n \neq 0$ і кільце R має стабільний ранг 1,5, то існує такий елемент r, що $(d + r\delta_2, \;\; \delta_n) = 1$. Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує матриця

$$H_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & r \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \oplus I_{n-2},$$

для якої

$$H_1 \cdots H_n \mathbf{a} = H\mathbf{a} = \| \, b \;\; \delta_2 \; \ldots \; \delta_n \, \|^T,$$

де $b = d + r\delta_2$. Теорему доведено. □

Зауважимо, що в кільцях елементарних дільників, які не є кільцями стабільного рангу 1,5 теорема 6.3, взагалі кажучи, не виконується.

Приклад 6.1. Нехай

$$R = \left\{ a + b_1 x + b_2 x^2 + \;\; \cdots \;\; \mid \; a \in \mathbb{Z}, \; b_i \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{N} \right\}$$

і

$$\Phi = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 7x \end{array} \right\|, \quad \mathbf{a} = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 5x \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\|.$$

Проте в групі $\mathbf{G}_\Phi$ не існує такої матриці H, що

$$H\mathbf{a} = \left\| \begin{array}{c} * \\ x \end{array} \right\|.$$

Дійсно, якщо припустити, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця

$$H = \left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ 7xh_{21} & h_{22} \end{array} \right\|,$$

що

$$H\mathbf{a} = \left\| \begin{array}{c} * \\ x \end{array} \right\|,$$

то

$$7xh_{21} + 5xh_{22} = x.$$

Тобто

$$7h_{21} + 5h_{22} = 1.$$

Тоді згідно з лемою 1.8

$$\left\| \begin{array}{cc} h_{21} & h_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -2-5r & 3+7r \end{array} \right\|,$$

де $r \in R$. При цьому елемент r повинен задовольняти умову

$$\left\| \begin{array}{cc} 7x(-2-5r) & 3+7r \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Елемент x взаємно простий лише із одиницями кільця R, які мають вигляд

$$\pm 1 + b_1x + b_2x^2 + \ \cdots .$$

Тому

$$3 + 7r = \pm 1 + b_1x + b_2x^2 + \ \cdots .$$

Тобто

$$r_1 = -\frac{4}{7} + c_1x + c_2x^2 + \ \cdots$$

або ж

$$r_2 = -\frac{2}{7} + d_1x + d_2x^2 + \ \cdots ,$$

які не є елементами кільця R. $\diamondsuit$

Оскільки жоден з елементів δ_i Φ-стрижня стовпця $\mathbf{a}$ не дорівнює нулю, то не дорівнюватимуть йому й елементи стовпця

$$H \| \, a_1 \ \ldots \ a_n \, \|^T = \| \, b \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_n \, \|^T .$$

Однак, якщо, наприклад,

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \ \mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \end{matrix} \right\|^T ,$$

то $R_\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. При цьому в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця

$$H = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\varphi_3}{\varphi_2} & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

що

$$H\mathbf{a} = \| \, 1 \ 0 \ 0 \, \|^T .$$

Тому постає питання пошуку умов, за яких елементи стовпця $\mathbf{a}$ перетвореннями з групи $\mathbf{G}_\Phi$ можна замінити на нуль.

Теорема 6.4. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$ і*

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \| \, \delta_1 \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_n \, \|^T .$$

Для того, щоб у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існувала така матриця K, що

$$K\mathbf{a} = \| \, b \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_k \ 0 \ \ldots \ 0 \, \|^T , 1 \le k < n,$$

(якщо $k = 1$, то $b = 1$), необхідно та достатньо, щоб

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \left\| \begin{matrix} \delta_1 \ \ldots \ \delta_{k-1} & \delta_k & \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k & \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_k}\delta_k & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k \end{matrix} \right\|^T .$$

Доведення. Необхідність. Оскільки перетворення з групи $\mathbf{G}_\Phi$ не змінюють Φ-стрижня стовпця, то

$$R_\Phi \left(\| \, b \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_k \ 0 \ \ldots \ 0 \, \|^T \right) = \| \, \delta_1 \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_n \, \|^T .$$

Із властивості 6.1 випливає, що

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ 0, \ \ldots, \ 0 \right) = \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},$$

$i = k+1, k+2, \ldots, n$. Отже,

$$\delta_{k+1} = \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k,$$

$$\delta_{k+2} = \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_{k+1}} \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \delta_k = \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_k} \delta_k,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$\delta_n = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} \cdots \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \delta_k = \frac{\varphi_n}{\varphi_k} \delta_k.$$

Достатність. Нехай $k > 1$. На підставі теореми 6.3, без обмеження загальності, можемо вважати, що

$$\mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} b & \delta_2 & \dots & \delta_k & \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\delta_k & \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_k}\delta_k & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k \end{matrix} \right\|^T,$$

де

$$\left(b, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\delta_k \right) = 1.$$

Тоді

$$\underbrace{\left(I_{k-1} \oplus \left\| \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ -\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & 1 \end{matrix} \right\| \right)}_{K} \mathbf{a} =$$
$$= \left\| \begin{matrix} b & \delta_2 & \dots & \delta_k & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|^T,$$

де $K \in \mathbf{G}_\Phi$.

Нехай $k = 1$. Тоді

$$R_\Phi(\mathbf{a}) = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \frac{\varphi_3}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \end{matrix} \right\|^T.$$

Згідно з теоремою 6.3 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця K_1, що

$$K_1\mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} b & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \frac{\varphi_3}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \end{matrix} \right\|^T.$$

де

$$\left(b, \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \right) = 1.$$

З цієї рівності випливає, що

$$\left(b, \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) = 1.$$

У кільці R існують такі u та v, що

$$bu + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} v = 1.$$

Тоді

$$\left\| \begin{matrix} u & v & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\varphi_3}{\varphi_1} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & 1 \end{matrix} \right\| K_1\mathbf{a} = \| \ 1 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \|^T .$$

Теорему доведено. □

Нехай тепер δ_k – перший знизу елемент матриці $K\mathbf{a}$ із теореми 6.4, для якого не виконується умова

$$\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} = \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}}.$$

Це означає, що елемент δ_k не можна замінити на нуль перетвореннями з групи $\mathbf{G}_\Phi$. Однак за певних умов інші елементи цього стовпця можна. Нехай $\delta_t, \quad 2 \leqslant t < k$, – перший знизу елемент матриці $K\mathbf{a}$, який задовольняє умову

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \Big/ \frac{\delta_t}{\delta_{t-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} \right) = 1.$$

Теорема 6.5. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$ і*

$$K\mathbf{a} = \| \ b \ \ \delta_2 \ \ \dots \ \ \delta_k \ \ 0 \ \ \dots 0 \ \|^T$$

– примітивний стовпець, причому

$$R_\Phi(K\mathbf{a}) = \| \ \delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \dots \ \ \delta_n \ \|^T .$$

Для того, щоб у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існувала така матриця L, що

$$LK\mathbf{a} = \| \ b \ \ \delta_2 \ \ \dots \ \ \delta_{s-1} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ \delta_{t+1} \ \ \delta_{t+2} \ \ \dots \ \ \delta_k \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0 \ \|^T , \qquad (6.1)$$

$2 \leqslant t < k$, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \Big/ \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_i} \right) = 1, \qquad (6.2)$$

$i = t, t-1, \dots, s$.

Доведення. Необхідність. Оскільки

$$R_\Phi(K\mathbf{a}) = R_\Phi(LK\mathbf{a}),$$

то
$$\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_i},\ \frac{\delta_{t+1}}{\delta_{i-1}},\ \frac{\delta_{t+2}}{\delta_{i-1}},\ \ldots,\ \frac{\delta_k}{\delta_{i-1}}\right) = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \frac{\delta_{t+1}}{\delta_{i-1}}\right),$$
$i = t, t-1, \ldots, s$. Тобто
$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\Big/\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_i}\right) = 1,\ i = t, t-1, \ldots, s.$$

Достатність. У кільці R існують такі елементи u_t , v_t, що
$$u_t\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}\Big/\frac{\delta_t}{\delta_{t-1}} + v_t\frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = 1.$$
Розглянемо матрицю
$$L_t = I_{t-2} \oplus \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}u_t & -1 & v_t \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \oplus I_{n-t-1} \in \mathbf{G}_\Phi.$$
Тоді на позиції t у стовпці $L_tK\mathbf{a}$ стоятиме елемент
$$u_t\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}\delta_{t-1} - \delta_t + v_t\delta_{t+1} = \delta_t\left(u_t\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}\Big/\frac{\delta_t}{\delta_{t-1}} + v_t\frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} - 1\right) = 0.$$
Отже,
$$L_tKa = \|b\ \ \delta_2\ \ \ldots\ \ \delta_{t-1}\ \ 0\ \ \delta_{t+1}\ \ \delta_{t+2}\ \ \ldots\ \ \delta_k\ \ \ldots\ \ 0\|^T.$$
Знову ж таки в кільці R існують такі елементи u_{t-1}, v_{t-1}, що
$$u_{t-1}\frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_{t-2}}\Big/\frac{\delta_{t-1}}{\delta_{t-2}} + v_{t-1}\frac{\delta_{t+1}}{\delta_{t-1}} = 1.$$
Розглянемо матрицю
$$L_{t-1} = I_{t-3} \oplus \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_{t-2}}u_{t-1} & -1 & 0 & v_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \oplus I_{n-t-1} \in \mathbf{G}_\Phi.$$
Тоді
$$L_{t-1}L_tK\mathbf{a} = \|b\ \ \delta_2\ \ \ldots\delta_{t-2}\ \ 0\ \ 0\ \ \delta_{t+1}\ \ \delta_{t+2}\ \ \ldots\ \ \delta_k\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\|^T.$$
Продовжуючи процес, перетвореннями з групи $\mathbf{G}_\Phi$ зведемо стовпець $\mathbf{a}$ до вигляду (6.1).

Окремо, через його специфіку, слід розглянути випадок, коли $s = 2$. На підставі попередніх міркувань у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $\overline{L}$, що

$$\overline{L}K\mathbf{a} = \|b \;\; \delta_2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \delta_{t+1} \;\; \delta_{t+2} \;\; \ldots \;\; \delta_k \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\|^T,$$

причому виконується умова

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big/\frac{\delta_2}{\delta_1}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}\right) = 1.$$

Оскільки $(b, \delta_n) = 1$, то і

$$\left(b, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}\right) = 1.$$

Отже,

$$\left(b\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big/\frac{\delta_2}{\delta_1}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_2}\right) = 1.$$

Це означає, що в кільці R існують такі елементи u_2, v_2, що

$$u_2 b\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big/\frac{\delta_2}{\delta_1} + v_2\frac{\delta_{t+1}}{\delta_2} = 1.$$

Тоді матриця

$$L_2 = \left\|\begin{array}{llllll} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_2 b & -1 & 0 & \cdots & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right\| \oplus I_{n-t-1} \in \mathbf{G}_\Phi$$

задовольнятиме рівність

$$L_2\overline{L}K\mathbf{a} = LK\mathbf{a} = \|b \;\; 0 \;\; 0 \;\; \delta_{t+1} \;\; \delta_{t+2} \;\; \ldots \;\; \delta_k \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\|^T,$$

що і потрібно довести. □

Якщо елемент δ_{s-1} матриці $LK\mathbf{a}$ із теореми 6.5 не задовольняє умову (6.2), то, розглядаючи елементи, які стоять над δ_{s-1}, знову шукаємо такий елемент δ_l, для якого

$$\left(\frac{\varphi_l}{\varphi_{l-1}}\Big/\frac{\delta_l}{\delta_{l-1}}, \frac{\delta_{l+1}}{\delta_l}\right) = 1,$$

і повторюємо міркування теореми 6.5. Розглянувши так всі елементи матриці $\mathbf{a}$, врешті-решт залишимо їх без змін, або ж замінимо на нуль.

Підсумуємо отримані результати, попередньо ввівши ряд позначень.

Нехай $k, k-1, \dots, l$ – спадна послідовність натуральних чисел, яку позначимо через $(k, \dots, l)$. При цьому $(k, \dots, k)$ позначатиме одноелементну, а $(, \dots,)$ порожню послідовність.

Поставимо у відповідність кожному Φ-стрижню $\|\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n\|^T$
ряд послідовностей

$$(i_1, \dots, j_1), (i_2, \dots, j_2), \cdots, (i_p, \dots, j_p),$$

$$n \geqslant i_1 \geqslant j_1 > i_2 \geqslant j_2 > \cdots > i_p \geqslant j_p \geqslant 2,$$

за таким правилом.

1а) Якщо

$$\frac{\delta_s}{\delta_{s-1}} = \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, \tag{6.3}$$

$s = n, n-1, \dots, q$, а при $s = q-1$ умова (6.3) не виконується, то $(i_1, \dots, j_1) = (n, \dots, q)$.

1в) Якщо умова (6.3) не виконується вже при $s = n$, то $(i_1, \dots, j_1) = (, \dots,)$.

2) У спадній послідовності $j_1 - 2, j_1 - 3, \dots, 2$ (якщо $(i_1, \dots, j_1) = (, \dots,)$, покладаємо $j_1 = n+1$) знаходимо перший елемент t, для якого

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} \Big/ \frac{\delta_t}{\delta_{t-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} \right) = 1,$$

і покладаємо $i_2 = t$. Нехай

$$\left(\frac{\varphi_r}{\varphi_{r-1}} \Big/ \frac{\delta_r}{\delta_{r-1}}, \frac{\delta_{t+1}}{\delta_r} \right) = 1, \tag{6.4}$$

$r = t, t-1, \dots, l$, причому при $r = l-1$ умова (6.4) не виконується. Тоді $j_2 = l$.

3) Всі інші пари $(i_\mu, \dots, j_\mu)$ задають за аналогією з парою $(i_2, \dots, j_2)$, і лише тоді розглядають числові послідовності $j_{\mu-1} - 2, j_{\mu-1} - 3, \dots, 2$.

Теорема 6.6. *Нехай R – кільце Безу стабільного рангу $1,5$ і $\mathbf{a}$ – примітивний стовпець з Φ-стрижнем $\| \ \delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n \ \|^T$. Нехай*

$$(i_1, \dots, j_1), (i_2, \dots, j_2), \cdots, (i_p, \dots, j_p)$$

– набір числових послідовностей, що відповідають Φ-стрижню $\| \ \delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n \ \|^T$. Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що

$$H \| \ a_1 \ \dots a_n \ \|^T = \| \ b \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n \ \|^T,$$

де $(b, \delta_n) = 1$, а

$\lambda_i = 0$, якщо i належить якійсь з числових послідовностей,

$\lambda_i = \delta_i$ у всіх інших випадках. □

6.2. Ф-скелет матриць та його властивості

Нехай R – кільце елементарних дільників і $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – неособлива d-матриця над R. Нагадаємо, що через Φ_i позначається матриця

$$\operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big) = \Phi_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$

причому $\Phi_1 = I_n$. Нехай $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ і

$$\Phi_i P \overset{l}{\sim} \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ d^i_{21} & \sigma_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d^i_{n1} & \ldots & d^i_{n,n-1} & \sigma_{in} \end{array} \right\| = \operatorname{triang}\,(\sigma_{i1}, \ \ldots, \ \sigma_{in})$$

– ліві форми Ерміта матриць $\Phi_i P$, $i = 1, \ldots, n$.

Означення 6.2. **Ф-скелетом** матриці P називається матриця $S_\Phi(P) = \|\, \sigma_{ij} \,\|_1^n$.

Теорема 6.7. *Якщо $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то* $S_\Phi(P) = S_\Phi(HP)$.

Доведення. Згідно з лемою 3.5 $\Phi_i P \overset{l}{\sim} \Phi_i HP$, $i = 2, \ldots, n$. Тобто ліві форми Ерміта матриць $\Phi_i P$ та $\Phi_i HP$ збігаються, $i = 2, \ldots, n$. Зауваживши, що формою Ерміта матриць $\Phi_1 P = I_n P$ та $\Phi_1 HP = I_n HP$ є одинична матриця, переконуємося у правильності нашої теореми. $\square$

Наслідок 6.3. *Якщо матриці* $A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1} \Phi Q_B^{-1}$ *асоційовні справа, то* $S_\Phi(P_A) = S_\Phi(P_B)$.

Доведення. Згідно з теоремою 4.3 матриці A і B асоційовні справа тоді і тільки тоді, коли $P_B = HP_A$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Тоді на підставі теореми 6.7 $S_\Phi(P_A) = S_\Phi(P_B)$. $\square$

Дослідимо властивості Ф-скелета матриці. Позначимо

$$\Phi^k = \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\varphi, \ \ldots, \ \varphi}_{k}, \ \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{n-k}\Big), \quad \varphi \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Лема 6.1. *Якщо* $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ *і*

$$\Phi^k P \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\alpha_{k1}, \, \dots, \, \alpha_{kn}), \tag{6.5}$$

то виконуються такі умови:

1) $\varphi^{k-1} | \alpha_{k\,i_1} \dots \alpha_{k\,i_{n-1}}$ *для всіх* $1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-1} \leqslant n, \ k = 1, \dots, n-1$;
2) $\alpha_{k1} \dots \alpha_{kn} = \varphi^k e_k$, *де* $e_k \in U(R), \ k = 1, \dots, n-1$;
3) $\alpha_{ki} | \varphi, \ k = 1, \dots, n-1, \ i = 1, \dots, n$.

Доведення. Формою Сміта матриці $\Phi^k P$ є матриця

$$\operatorname{diag}\Bigl(1, \, \dots, \, 1, \, \underbrace{\varphi, \, \dots, \, \varphi}_{k}\Bigr).$$

Тому $\left\langle \Phi^k P \right\rangle_{n-1} = \varphi^{k-1}$. Оскільки матриці $\Phi^k P$, $\operatorname{triang}(\alpha_{k1}, \, \dots, \, \alpha_{kn})$ мають однакові форми Сміта, то кожний мінор $(n-1)$-го порядку матриці $\operatorname{triang}(\alpha_{k1}, \, \dots, \, \alpha_{kn})$ також ділиться на φ^{k-1}. Зокрема,

$$\varphi^{k-1} | \begin{vmatrix} \alpha_{k\,i_1} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & \alpha_{k\,i_{n-1}} \end{vmatrix} = \alpha_{k\,i_1} \dots \alpha_{k\,i_{n-1}},$$

$1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-1} \leqslant n$.

З еквівалентності (6.5) випливає, що

$$\det \Phi^k P = \alpha_{k1} \dots \alpha_{kn} \varepsilon_k,$$

де $\varepsilon_k \in U(R)$. З іншого боку,

$$\det \Phi^k P = \varphi^k \det P = \varphi^k e,$$

де $e = \det V \in U(R)$. Отже,

$$\alpha_{k1} \dots \alpha_{kn} = \varphi^k e \, \varepsilon_k^{-1} = \varphi^k e_k,$$

де $e_k = e\varepsilon_k^{-1} \in U(R)$. З цієї рівності отримуємо

$$\alpha_{ki} = \frac{\varphi^k}{\alpha_{k1} \dots \alpha_{k,i-1} \alpha_{k,i+1} \dots \alpha_{kn} e_k^{-1}}.$$

Оскільки

$$\varphi^{k-1} \, | \, \alpha_{k1} \dots \alpha_{k,i-1} \alpha_{k,i+1} \dots \alpha_{kn},$$

то

$$\alpha_{k1} \dots \alpha_{k,i-1} \alpha_{k,i+1} \dots \alpha_{kn} = \varphi^{k-1} s_i.$$

Таким чином,

$$\alpha_{ki} = \frac{\varphi^k}{\varphi^{k-1} s_i e_k^{-1}} = \frac{\varphi}{s_i e_k^{-1}}.$$

Тобто $\alpha_{ki} | \varphi,\ k = 1, \ldots, n-1,\ i = 1, \ldots, n.$ $\square$

Теорема 6.8. *Якщо* $\| \sigma_{ij} \|_1^n$ *– Ф-скелет матриці* P *і*

$$\Delta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{i-1,j}},$$

то виконуються такі умови:

1) $\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)^{i-2} | \ \Delta_{ij_1} \cdots \Delta_{ij_{n-1}}$,
для всіх $1 \leqslant j_1 < \ \cdots \ < j_{n-1} \leqslant n,\ i = 2, \ldots, n,$

2) $\Delta_{i1} \ldots \Delta_{in} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)^{i-1} e_i,\ e_i \in U(R),\ i = 2, \ldots, n,$

3) $\Delta_{ij} \ \Big| \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\ ,\ i = 2, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,$

4) $\left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}}, \frac{\sigma_{i.i-1} \cdots \sigma_{in}}{\left(\sigma_{i.i-1} \ldots \sigma_{in}, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)}\right) | \sigma_{i-1.i-1} \ldots \sigma_{i-1.n},\ i = 3, \ldots, n,$

5) $\prod\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} = \frac{\varphi_i}{\varphi_1} \ \cdots \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} e_i,\ e_i \in U(R),\ i = 2, \ldots, n,$

6) $\sigma_{11} = \cdots = \sigma_{1n} = 1.$

Доведення. Запишемо матрицю $\Phi_i,\ 1 < i \leqslant n$, у вигляді

$$\Phi_i = \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \cdots\ ,\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n-i+1}\Big) \times$$

$$\times \operatorname{diag}\Big(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_1},\ \cdots\ ,\ \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ 1,\ \ldots,\ 1\Big) = \Phi^i \Phi_{i-1}.$$

Згідно з означенням Ф-скелета існує така оборотна матриця U_{i-1}, що

$$U_{i-1} \Phi_{i-1} P = \operatorname{triang}\,(\sigma_{i-1,1},\ \ldots,\ \sigma_{i-1,n}) = D_{i-1}.$$

Отже,

$$\Phi_i P = \Phi^i\, \Phi_{i-1} P = (\Phi^i U_{i-1}^{-1})(U_{i-1} \Phi_{i-1} P) = \Phi^i\, U_{i-1}^{-1} D_{i-1}.$$

Нехай $\mathrm{triang}\,(\alpha_{i1},\ \ldots,\ \alpha_{in})$ – ліва форма Ерміта матриці $\Phi^i U_{i-1}^{-1}$. Тоді в групі $\mathrm{GL}_n(R)$ знайдеться матриця S, для якої

$$S\Phi^i U_{i-1}^{-1} = \mathrm{triang}\,(\alpha_{i1},\ \ldots,\alpha_{in}).$$

Таким чином,

$$S\Phi_i P = \mathrm{triang}\,(\alpha_{i1},\ \ldots,\alpha_{in})D_{i-1} = \mathrm{triang}\,(\alpha_{i1}\sigma_{i-1.1},\ \ldots,\alpha_{in}\sigma_{i-1.n}).$$

З іншого боку, $\Phi_i P \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}\ (\sigma_{i1},\ \ldots,\ \sigma_{in})$. Тому

$$\mathrm{triang}\ (\sigma_{i1},\ \ldots,\ \sigma_{in}) \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}\,(\alpha_{i1}\sigma_{i-1.1},\ \ldots,\alpha_{in}\sigma_{i-1.n}).$$

Звідси випливає, що σ_{ij} та $\alpha_{ij}\sigma_{i-1,j}$ є асоційовними елементами кільця R. Тоді

$$\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{i-1,j}}e_{ij} = \Delta_{ij}e_{ij},\ e_{ij} \in U(R),$$

і перші три умови теореми випливають із леми 6.1.

Позначимо через U_{i-1} матрицю, яка складається з останніх $n-i+2$ стовпців матриці P, а через P_{i-1} – підматрицю порядку $n-i+2$, яка міститься у правому нижньому куті матриці P, $3 \leqslant i \leqslant n$. Із означення Φ-скелета матриці P випливає, що $\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in} = \langle\Phi_i U_{i-1}\rangle_{n-1}$. Оскільки $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\det V_{i-1}$ є одним із таких мінорів, то

$$\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in}|\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\det P_{i-1}.$$

Отже,

$$\frac{\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in}}{\left(\sigma_{i.i-1}\ldots\sigma_{in},\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)}|\mathrm{det}P_{i-1}. \tag{6.6}$$

Оскільки

$$\Phi_{i-1} = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ \ldots,\ \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n-i+2}\Big)\,\Phi_{i-2},$$

то всі мінори максимального порядку матриці $\Phi_{i-1}U_{i-1}$, за винятком $\det P_{i-1}$, кратні $\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}}$. Використавши умову (6.6), отримаємо, що

$$\delta_{i-1} = \left(\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-2}},\ \frac{\sigma_{i,i-1}\ldots\sigma_{in}}{\left(\sigma_{i,i-1}\ldots\sigma_{in},\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}\right)}\right)$$

ділить $\det P_{i-1}$. Отже, δ_{i-1} є дільником $\sigma_{i-1,i-1}\ldots\sigma_{i-1,n}$ – н.с.д. мінорів максимального порядку матриці $\Phi_{i-1}U_{i-1}$.

Рівність 5) безпосередньо випливає з означення Φ-скелета матриці A.

Матриця $\Phi_1 V = IV = V$ оборотна, а отже, має своєю формою Ерміта одиничну матрицю I. Тому $\sigma_{11} = \ldots = \sigma_{1n} = 1$. Теорему доведено. $\square$

Розділ 7. Одностороння еквівалентність матриць

У цьому розділі для деяких класів матриць побудовано канонічну форму вигляду $P^{-1}\Phi$ стосовно односторонніх перетворень із $\mathrm{GL}_n(R)$.

7.1. Неасоційовні матриці зі стандартними Ф-скелетами

Нехай R – кільце елементарних дільників. Наступна теорема показує, як змінюються елементи оборотної матриці при перетвореннях із групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Нехай $P = \|p_{ij}\|_1^n$. Позначимо

$$P_j = \left\| \begin{array}{cccc} p_{1j} & p_{1.j+1} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \cdots & p_{nn} \end{array} \right\|,$$

$j = 2, \ldots, n$. Нагадаємо, що через Φ_i позначається матриця

$$\Phi_i = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \frac{\varphi_i}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i+1}\Big), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Теорема 7.1. *Нехай P – оборотна матриця та $\| \sigma_{ij} \|_1^n$ – її Φ-скелет. Для того, щоб рівняння*

$$x\Phi_i P_j = \| \begin{array}{cccc} a_{ij} & p_{i.j+1} & \ldots & p_{in} \end{array} \| \tag{7.1}$$

мало розв'язок, необхідно та достатньо, щоб

$$p_{ij} \equiv a_{ij} (\mathrm{mod}\, \sigma_{ij}), \quad i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, n.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\Gamma_j^i = \mathrm{diag}(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{n-j+1}^i)$ – форма Сміта матриці $\Phi_i P_j$. Із означення Φ-скелета випливає, що

$$\Phi_i P_j \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}(\sigma_{ij}, \sigma_{i.j+1}, \ldots, \sigma_{in}).$$

Тобто $\sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in} = \langle \Phi_i P_j \rangle$. З іншого боку, також $\gamma_1^i \gamma_2^i \cdots \gamma_{n-j+1}^i = \langle \Phi_i P_j \rangle$. Отже,

$$\gamma_1^i \gamma_2^i \cdots \gamma_{n-j+1}^i = \sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}. \tag{7.2}$$

Розширеною матрицею рівняння (7.1) є матриця

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_i}{\varphi_1} p_{1j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_1} p_{1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_1} p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} p_{i-1.j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} p_{i-1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} p_{i-1.n} \\ p_{ij} & p_{i.j+1} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \dots & p_{nn} \\ a_{ij} & p_{i.j+1} & \dots & p_{in} \end{matrix} \right\|.$$

Віднімемо від останнього рядка цієї матриці її i-ий рядок:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} \frac{\varphi_i}{\varphi_1} p_{1j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_1} p_{1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_1} p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} p_{i-1.j} & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} p_{i-1.j+1} & \dots & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} p_{i-1.n} \\ p_{ij} & p_{i.j+1} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{nj} & p_{n.j+1} & \dots & p_{nn} \\ \hline a_{ij} - p_{ij} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} * & \Phi_i P_{j+1} \\ a_{ij} - p_{ij} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

З означення Ф-скелета виплаває, що для матриці $\Phi_i P_{j+1}$ знайдеться така оборотна матриця $V_{i.j+1}$, що

$$V_{i.j+1}\Phi_i P_{j+1} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \sigma_{i.j+1} & 0 & & 0 \\ * & \sigma_{i.j+1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \sigma_{in} \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$(V_{i.j+1} \oplus 1) \left\| \begin{matrix} * & \Phi_i P_{j+1} \\ a_{ij} - p_{ij} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & \sigma_{i.j+1} & 0 & & 0 \\ * & * & \sigma_{i.j+1} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & * & * & & \sigma_{in} \\ \hline a_{ij} - p_{ij} & & \mathbf{0} & & \end{array} \right\| = L_{ij}.$$

Очевидно, що розширена матриця і матриця L_{ij} є асоційовними зліва. Згідно з теоремою 2 з праці [57] с. 218, яка залишається правильною і в кільці R, рівняння (7.1) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли інваріантні множники розширеної матриці асоційовні до відповідних інваріантних множників матриці Γ^i_j. Звідси випливає, що

$$\langle L_{ij}\rangle = \gamma^i_1\gamma^i_2\cdots\gamma^i_{n-j+1}.$$

Скориставшись рівністю (7.2), отримуємо

$$\langle L_{ij}\rangle = \sigma_{ij}\sigma_{i,j+1}\cdots\sigma_{in}.$$

Отже, $\sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}$ є дільником всіх мінорів максимального порядку матриці L_{ij}. Зокрема,

$$\sigma_{ij}\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}|(a_{ij}-p_{ij})\sigma_{i.j+1}\cdots\sigma_{in}.$$

Тобто $\sigma_{ij}|(a_{ij}-p_{ij})$.

Достатність. Нехай $a_{ij}=p_{ij}+r\sigma_{ij}$. Згідно з означенням Φ-скелета

$$V_i\,\mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1},\ \ldots,\ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ 1,\ \ldots,\ 1\Big)\,P=\mathrm{triang}(\sigma_{i1},\sigma_{i2},\ldots,\sigma_{in}),$$

де $V_i\in \mathrm{GL}_n(R)$. Нехай $\left\|\begin{matrix} v^i_{j1} & v^i_{j2} & \ldots & v^i_{jn}\end{matrix}\right\|$ – j-ий рядок матриці V_i. Тоді виконуються такі рівності:

$$\left\|\begin{matrix} r & 1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} v^i_{j1} & \ldots & v^i_{j.i-1} & v^i_{ji} & v^i_{j.i+1} & \ldots & v^i_{jn}\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{matrix}\right\|\Phi_iP_j=$$

$$=\left\|\begin{matrix} r & 1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} \sigma_{ij} & 0 & \ldots & 0\\ p_{ij} & p_{i.j+1} & \ldots & p_{in}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} p_{ij}+r\sigma_{ij} & p_{i.j+1} & \ldots & p_{in}\end{matrix}\right\|.$$

Це означає, що рядок

$$\left\|\begin{matrix} r & 1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} v^i_{j1} & \ldots & v^i_{j.i-1} & v^i_{ji} & v^i_{j.i+1} & \ldots & v^i_{jn}\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix} rv^i_{j1} & \ldots & rv^i_{j.i-1} & rv^i_{ji}+1 & rv^i_{j.i+1} & \ldots & rv^i_{jn}\end{matrix}\right\|$$

і є шуканим розв'язком нашого рівняння. Теорему доведено. □

Нехай B – неособлива матриця з формою Сміта $\Phi=\mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, яку запишемо у вигляді $B=P^{-1}\Phi Q^{-1}$. І нехай у множині $\mathbf{P}_B$ її лівих перетворювальних матриць є нижня унітрикутна матриця P_0. Тоді легко переконатись, що

$$S_\Phi(P_0) = \left\| \begin{array}{lllll} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & 1 \end{array} \right\| = F(\Phi).$$

Згідно з теоремою 6.7 всі перетворювальні матриці із $\mathbf{P}_B$ мають Φ-скелет $F(\Phi)$. Тому не виникне жодної плутанини, якщо ототожнимо Φ-скелет матриці P зі Φ-скелетом матриці B. Тобто $S_\Phi(B) = S_\Phi(P)$, де $P \in \mathbf{P}_B$.

Позначимо через $\mathbf{T}(\Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{lllll} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{n,n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

де $t_{ij} \in K\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\right)$, $i > j$. Розглянемо S_n – симетричну групу степеня n, а також групу матриць перестановок. Зіставимо перестановці

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

матрицю $E(\tau) = \| \delta_{kj} \|_1^n$, де

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & j = i_k, \\ 0, & j \neq i_k, \end{cases}$$

$k = 1, \dots, n$. Як відомо, таке відображення є ізоморфізмом груп, за якого

$$E(\sigma)E(\tau) = E(\tau\sigma).$$

Говоритимемо, що матриця B має **стандартний** Φ -скелет, якщо

$$S_\Phi(B) = F(\Phi)E(\tau), \ \ \tau \in S_n.$$

Теорема 7.2. *Множина* $\mathbf{T}(\Phi)$ *складається з представників різних лівих класів суміжності групи* $\mathrm{GL}_n(R)$ *по підгрупі* $\mathbf{G}_\Phi$.

Доведення. Розглянемо матрицю $\Psi = \varphi_n I_n$. Тоді $\mathbf{V}(\Psi, \Phi) = \mathbf{T}(\Phi)$. Згідно з теоремою 5.6 ця множина складається з представників різних лівих класів суміжності групи $\mathrm{GL}_n(R)$ по підгрупі $\mathbf{G}_\Phi$. □

Із теорем 7.2 та 5.6 випливає, що множина $\mathbf{T}^{-1}(\Phi)\Phi$ складається з неасоційовних справа матриць, які мають Φ-скелет $F(\Phi)$. Щоб показати, що правильним є і обернене твердження, встановимо ряд допоміжних фактів.

Лема 7.1. *Якщо* $S_\Phi(P) = \| \sigma_{ij} \|_1^n$, *причому* $\sigma_{nk} = 1, \ 1 \leqslant k \leqslant n$, *то в групі* $\mathbf{G}_\Phi$ *існує така матриця* H, *що матриця* HP *своїм* k*-им стовпцем має стовпець* $\| 0 \ \ldots \ 0 \ 1 \|^T$.

Доведення. Нехай $P = \| p_{ij} \|_1^n$ і

$$\Phi_n \| p_{1k} \ \ldots \ p_{nk} \|^T =$$
$$= \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ \ldots, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \ 1 \right) \| p_{1k} \ \ldots \ p_{nk} \|^T \overset{l}{\sim} \| \alpha \ 0 \ \ldots \ 0 \|^T .$$

Із означення Φ-скелета випливає, що

$$\Phi_n \left\| \begin{array}{lll} p_{1.k+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n.k+1} & \ldots & p_{nn} \end{array} \right\| = \Phi_n P_{k+1} \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{n.k+1}, \ldots, \sigma_{nn}).$$

Це означає, що $\sigma_{n.k+1} \ldots \sigma_{nn} | \langle \Phi_n P_{k+1} \rangle$. Оскільки $\alpha | \left\langle \Phi_n \| p_{1k} \ \ldots \ p_{nk} \|^T \right\rangle$, то

$$\alpha \sigma_{n.k+1} \ldots \sigma_{nn} | \left\langle \Phi_n \left\| \begin{array}{llll} p_{1k} & p_{1,k+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{nk} & p_{n,k+1} & \ldots & p_{nn} \end{array} \right\| \right\rangle = \Phi_n P_k .$$

Зауваживши, що

$$\langle \Phi_n P_k \rangle = \sigma_{nk} \sigma_{n.k+1} \ldots \sigma_{nn} = \sigma_{n.k+1} \ldots \sigma_{nn},$$

отримуємо

$$\alpha \sigma_{n.k+1} \ldots \sigma_{nn} | \sigma_{n.k+1} \ldots \sigma_{nn}.$$

Тобто $\alpha \in U(R)$. Оскільки α є н.с.д. елементів стовпця $\Phi_n \| p_{1k} \ \ldots \ p_{nk} \|^T$ і вибирається з точністю до асоційовності, то $\alpha = 1$. Тоді на підставі леми 5.4 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що

$$H \| p_{1k} \ \ldots \ p_{nk} \|^T = \| \ 0 \ \ldots \ 0 \, 1 \|^T . \qquad \square$$

Лема 7.2. *Нехай* C – $((n-1) \times k)$ *матриця,* $(n-1) \geqslant k$, *причому*

$$C \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k),$$

де $\gamma_1 \gamma_2, \ldots \gamma_k \neq 0$. *Тоді, якщо*

$$\left\langle \begin{array}{cccc} & C & & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{array} \right\rangle = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k,$$

$a_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, *то*

$$\left\| \begin{array}{cccc} & C & & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{array} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k).$$

Доведення. У групі $\mathrm{GL}_{n-1}(R)$ знайдеться така матриця V, що

$$VC = \mathrm{triang}\,(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k) = \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$(V \oplus I_1\,) \left\| \begin{array}{cccc} & C & & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{array} \right\|.$$

У цій матриці є мінор максимального порядку $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}a_k$. Згідно з умовою $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k|\ \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}a_k$. Звідси випливає, що $a_k = \gamma_k a'_k$. Отже, виконується рівність

$$\left\| \begin{array}{ccccc} & & I_{n-1} & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -a'_k & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ * & & \gamma_{k-1} & 0 \\ * & & * & \gamma_k \\ b_1 & \ldots & b_{k-1} & 0 \end{array} \right\| \overset{l}{\sim} \mathrm{triang}\,(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k).$$

У цій матриці є мінор $\gamma_1\ldots\gamma_{k-2}\, b_{k-1}\gamma_k$, який ділиться на $\gamma_1\ldots\gamma_k$. Тому

$$b_{k-1} = \gamma_{k-1}b'_{k-1}$$

і

$$\left\| \begin{array}{cccccc} & & I_{n-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -b'_{k-1} & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ * & & \gamma_{k-1} & 0 \\ * & & * & \gamma_k \\ b_1 & \ldots & b_{k-1} & 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ * & & \gamma_{k-2} & 0 & 0 \\ * & & * & \gamma_{k-1} & 0 \\ * & & * & * & \gamma_k \\ c_1 & \dots & c_{k-2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Продовжуючи описаний процес, на k-му кроці знайдемо таку оборотну матрицю L, що

$$L \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \gamma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \gamma_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

І для завершення доведення залишається лише зауважити, що ця матриця еквівалентна зліва до матриці

$$\begin{Vmatrix} & C & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{Vmatrix}.$$

Лему доведено. $\square$

Позначимо через $\bar{b}_s$ стовпчик висоти $n-1$ вигляду

$$\bar{b}_s = \begin{Vmatrix} \underbrace{0 \ \dots \ 0 \ 1}_{s} & * & \dots & * \end{Vmatrix}^T,$$

$1 \leqslant s \leqslant n-1$. Розглянемо матрицю

$$B = \begin{Vmatrix} \bar{b}_{j_1} & \dots & \bar{b}_{j_k} \end{Vmatrix},$$

$1 \leqslant j_1, \dots, j_k \leqslant n-1$, де $j_l \neq j_t$ при $l \neq t$.

Лема 7.3. *Якщо*

$$\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) B \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_k}}\right),$$

причому

$$\Phi_n \begin{Vmatrix} & B & \\ a_1 & \dots & a_k \end{Vmatrix} \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_k}}\right),$$

$a_i \in R,\ i = 1, \ldots, k,$ *то в групі* $\mathbf{G}_\Phi$ *існує така матриця* H*, що*

$$H \left\| \begin{array}{ccc} & B & \\ a_1 & \ldots & a_k \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} B \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|. \tag{7.3}$$

Доведення. Нехай j_s – найменший серед індексів $j_1,\ \ldots\ ,\ j_k$. Міркуючи аналогічно, як під час доведення леми 7.2, отримуємо, що

$$a_s = \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_s}} a'_s.$$

Тоді матриця

$$H_s = \left\| \begin{array}{ccccccccc} & & & I_{n-1} & & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_s}} a'_s & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

в якій елемент $-\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_s}} a'_s$ знаходиться на позиції $(n,\ j_s)$, належатиме групі $\mathbf{G}_\Phi$ і задовольнятиме умову

$$H_s \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_s} \\ a_s \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_s} \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Із множини індексів, які залишилися, знову вибираємо найменший, а саме j_t. Тоді, якщо

$$H_s \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ a_t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ b_t \end{array} \right\|,$$

то показуємо, що

$$b_t = \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_t}} b'_t$$

і будуємо матрицю

$$H_t = \left\| \begin{array}{ccccccc} & & & I_{n-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_t}} b'_t & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|,$$

в якій елемент $-\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_t}} b'_t$ знаходиться на позиції (n, j_t). Тоді

$$H_t \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ b_t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \bar{b}_{j_t} \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Оскільки $j_t < j_s$, то j_t-ий рядок матриці

$$\left\| \begin{array}{cc} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ b_t & 0 \end{array} \right\|$$

має вигляд $\| 1 \ 0 \|$. Отже,

$$H_t H_s \begin{Vmatrix} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ a_t & a_s \end{Vmatrix} = H_t \begin{Vmatrix} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ b_t & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \bar{b}_{j_t} & \bar{b}_{j_s} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

причому $H_t H_s \in \mathbf{G}_\Phi$. Продовживши далі такі перетворення над матрицею

$$\begin{Vmatrix} & B & \\ a_1 & \ldots & a_k \end{Vmatrix},$$

на k-му кроці отримаємо матрицю H із $\mathbf{G}_\Phi$, яка задовольнятиме рівність (7.3). Лему доведено. □

Нехай $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця і $S_\Phi(P) = \|\sigma_{ij}\|_1^n$ – її Ф-скелет. Викреслимо в матрицях P та $S_\Phi(P)$ n-й рядок та r-й стовпець. Отримані матриці позначимо, відповідно, через P_{nr} та $S_\Phi(P)_{nr}$.

Лема 7.4. *Якщо*

$$\| p_{1r} \ \ldots \ p_{nr} \|^T = \| 0 \ \ldots \ 0 \ \ 1 \|^T,$$

$1 \leqslant r \leqslant n$, *і* $\sigma_{1r} = \ldots = \sigma_{nr} = 1$, *то*

$$S_{\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}(P_{nr}) = S_\Phi(P)_{nr}. \tag{7.4}$$

Доведення. Нехай $r = n$. Згідно з означенням Ф-скелета

$$\Phi_i P = \Phi_i \begin{Vmatrix} P_{nn} & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{Vmatrix} \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{i.n-1}, 1),$$

$i = 1, \ldots, n$. Зауважимо, що для будь-якої $n \times k$ матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} U & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{Vmatrix},$$

$n \geqslant k$, виконується рівність

$$\left\langle \begin{matrix} U & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Звідси випливає, що твердження правильне при $r = n$.

Розглянемо випадок, коли $1 \leqslant r < n$. Оскільки $\sigma_{ir} = 1$, то н.с.д. мінорів максимального порядку матриць

$$\Phi_i \begin{Vmatrix} 0 & p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \\ 1 & p_{n.r+1} & \ldots & p_{nn} \end{Vmatrix}, \ \Phi_i \begin{Vmatrix} p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1,n} \\ p_{n.r+1} & \ldots & p_{nn} \end{Vmatrix},$$

$i = 1, \ldots, n-1$, є однаковими і дорівнюють $\sigma_{i.r+1} \ldots \sigma_{in}$. Згідно зі щойно зробленим зауваженням, н.с.д. мінорів максимального порядку першої із цих матриць дорівнює

$$\left\langle \bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \right\rangle,$$

де

$$\bar{\Phi}_i = \operatorname{diag}\Bigl(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{n-i}\Bigr).$$

Тобто

$$\left\langle \bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \right\rangle = \sigma_{i.r+1} \ldots \sigma_{in}.$$

Тоді на підставі леми 7.2

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i.r+1}, \ldots, \sigma_{in}). \tag{7.5}$$

Очевидно, що н.с.д. мінорів максимального порядку матриць

$$\Phi_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r-1} & 0 & p_{1,r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.r-1} & 0 & p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \\ p_{n.r-1} & 1 & p_{n.r+1} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r-1} & p_{1.r+1} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-2.r-1} & p_{n-2.r+1} & \cdots & p_{n-2,n} \\ p_{n-1.r-1} & p_{n-1.r+1} & \cdots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\|$$

є однаковими і дорівнюють $\sigma_{i.r-1}\sigma_{i,r+1} \ldots \sigma_{in}$. Врахувавши тепер еквівалентність (7.5), отримаємо

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{1.r-1} & p_{1.r+1} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-2.r-1} & p_{n-2.r+1} & \cdots & p_{n-2,n} \\ p_{n-1.r-1} & p_{n-1.r+1} & \cdots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i.r-1}, \sigma_{i.r+1}, \ldots, \sigma_{in}).$$

Міркуючи далі так само, переконуємося у тому, що

$$\bar{\Phi}_i \left\| \begin{matrix} p_{11} & \ldots & p_{1.r-1} & p_{1.r+1} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1.1} & \ldots & p_{n-1.r-1} & p_{n-1.r+1} & \ldots & p_{n-1.n} \end{matrix} \right\| \overset{l}{\sim}$$

$$\stackrel{l}{\sim} \operatorname{triang}(\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{i.r-1}, \sigma_{i.r+1}, \ldots, \sigma_{in}),$$

$i = 1, \ldots, n-1$. А це і означає, що виконується рівність (7.4). □

Наступна теорема підсумовує отримані результати.

Теорема 7.3. *Множина* $\mathbf{T}^{-1}(\Phi)\Phi$ *складається з усіх неасоційовних справа матриць, які мають* Φ*-скелет* $F(\Phi)$.

Доведення. Згідно з теоремою 7.2 множина $\mathbf{T}(\Phi)$ складається з представників різних лівих класів суміжності групи $\mathrm{GL}_n(R)$ по підгрупі $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді на підставі теореми 4.3 матриці з множини $\mathbf{T}^{-1}(\Phi)\Phi$ неасоційовні справа і мають Φ-скелет $F(\Phi)$.

Нехай тепер матриця $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$ має Φ-скелет $F(\Phi) = \|\sigma_{ij}\|_1^n$. Покажемо, що $B \stackrel{r}{\sim} T^{-1}\Phi$, де $T \in \mathbf{T}(\Phi)$.

Нехай $n = 2$. Оскільки $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}(\Phi)P$ і $\sigma_{22} = 1$, то на підставі леми 7.1 серед перетворювальних матриць матриці B існує матриця вигляду

$$P' = \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ a & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $e \in U(R)$. Запишемо елемент a у вигляді

$$a = \alpha + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} t,$$

де $\alpha \in K\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)$. Тоді

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} e^{-1} & 0 \\ -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} e^{-1} t & 1 \end{matrix} \right\|}_{H} \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ a & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{matrix} \right\| = T \in \mathbf{T}(\Phi).$$

Таким чином, $HP' = T$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Згідно з теоремою 4.3 це означає, що $B \stackrel{r}{\sim} T^{-1}\Phi$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для всіх $k < n$. Як і в попередньому випадку, в множині $\mathbf{P}_B$ виберемо перетворювальну матрицю вигляду

$$P = \left\| \begin{matrix} U_{n-1} & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\|.$$

На підставі леми 7.4

$$S_{\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}(U_{n-1}) = F(\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})).$$

Згідно з припущенням індукції у групі $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ існує така матриця G_{n-1}, що

$$G_{n-1}U_{n-1} = T_{n-1} \in \mathbf{T}(\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})).$$

Отже,

$$(G_{n-1} \oplus I_1\,)P = \left\| \begin{array}{cccc} & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{array} \right\| = P_n,$$

де

$$a_{n-1} \;=\; \alpha_{n.n-1} + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} t_{n.n-1},\;\; \alpha_{n.n-1} \in K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right).$$

Очевидно, що $G_{n-1} \oplus I_1 \in \mathbf{G}_\Phi$. Тоді

$$\left\| \begin{array}{ccccc} & & I_{n-1} & & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} t_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| P_n =$$

$$= H_{n-1}P_n = \left\| \begin{array}{ccccc} & & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ b_1 & \dots & b_{n-2} & \alpha_{n.n-1} & 1 \end{array} \right\| = P_{n-1},$$

де

$$b_{n-2} = \alpha_{n.n-2} + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} t_{n.n-2},\;\; \alpha_{n.n-2} \in K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}}\right).$$

Знову ж отримаємо, що

$$\left\| \begin{array}{cccccc} & & I_{n-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}} t_{n.n-2} & 0 & 1 \end{array} \right\| P_{n-1} =$$

$$= H_{n-2}P_{n-1} = \left\| \begin{array}{cccc} & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ c_1 & \dots & \alpha_{n.n-2} & \alpha_{n.n-1} \end{array} \right\|.$$

Продовживши описаний процес, отримаємо матрицю

$$H = H_1 \dots H_{n-1}(G_{n-1} \oplus I_1\,) \in \mathbf{G}_\Phi,$$

для якої

$$HP = \left\| \begin{array}{cccc} & T_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n.n-2} & \alpha_{n.n-1} \end{array} \right\| \in \mathbf{T}(\Phi),$$

що й потрібно довести. □

Наслідок 7.1. *Для того, щоб у класі* $\mathbf{P}_B$ *існувала нижня унітрикутна матриця, необхідно та достатньо, щоб* $S_\Phi(B) = F(\Phi)$. □

Тепер перейдемо до опису неасоційовних матриць зі стандартними Ф-скелетами.

Лема 7.5. *Нехай* $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ *та* $\tau \in S_n$. *Якщо* $S_\Phi(P) = F(\Phi)E(\tau)$, *то*

$$S_\Phi(PE^{-1}(\tau)) = F(\Phi).$$

Доведення. Нехай
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Тоді i_n-ий стовпець матриці $F(\Phi)E(\tau)$ складається лише з одиниць. Через $\bar{p}_{i_n}$позначимо i_n-ий стовпець матриці P. Згідно з лемою 7.1 можна вважати, що
$$\bar{p}_{i_n} = \| \, 0 \ \dots \ 0 \ 1 \, \|^T .$$

Викреслимо в матриці P останній рядок та i_n-й стовпець. Отриману матрицю позначимо через P_{ni_n}. На підставі леми 7.4

$$S_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}(P_{ni_n}) = S_\Phi(P)_{ni_n}.$$

Залишимо нумерацію стовпців матриць P_{ni_n} та $S_\Phi(P)_{ni_n}$ такою, якою вона була в них у матрицях P та $S_\Phi(B)$, відповідно. Оскільки i_{n-1}-ий стовпець матриці $S_\Phi(P)_{ni_n}$ складається із одиниць, то для i_{n-1}-го стовпця матриці P_{ni_n}, який позначимо через $\bar{u}_{i_{n-1}}$, у групі $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ знайдеться така матриця H_{n-1}, що
$$H_{n-1}\bar{u}_{i_{n-1}} = \| \, 0 \ \dots \ 0 \ 1 \, \|^T .$$

Отже, матриця, складена з i_{n-1}-го та i_n-го стовпців матриці $(H_{n-1} \oplus I_1 \,)P$, має вигляд
$$\left\| \begin{matrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ 1 & 0 \\ * & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $H_{n-1} \oplus I_1 \ \in \mathbf{G}_\Phi$, то

$$S_\Phi((H_{n-1} \oplus I_1 \,)P) = S_\Phi(P) = F(\Phi)E(\tau).$$

Аналогічно в групі $\mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2})}$ знаходимо матрицю H_{n-2}, для якої

$$(H_{n-2} \oplus I_2)\bar{w}_{i_{n-2}} = \| \, 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ * \ * \, \|^T ,$$

де $\bar{w}_{i_{n-2}}$ – i_{n-2}-ий стовпець матриці $(H_{n-1} \oplus I_1 \,)P$. Продовживши описаний процес, знайдемо в групі $\mathbf{G}_\Phi$ матриці вигляду $H_{n-i} \oplus I_i$, $H_{n-i} \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-i})}$, $i = 1, \dots, n-2$, для яких i_s-ті стовпці матриці

$$(H_2 \oplus I_{n-2} \,) \dots (H_{n-1} \oplus I_1 \,)P$$

матимуть вигляд

$$\left\| \underbrace{0\ \dots\ 0\ 1}_{i_s} * * \right\|^T = \bar{t}_{i_s},$$

$s = 1, \dots, n$. Таким чином, матриця $T = \left\| \begin{array}{ccc} \bar{t}_{i_1} & \dots & \bar{t}_{i_n} \end{array} \right\|$ є нижньою унітрикутною матрицею і тому $S_\Phi(T) = F(\Phi)$. Зауваживши, що

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

а $E(\tau^{-1}) = E^{-1}(\tau)$, отримуємо

$$T = \underbrace{(H_2 \oplus I_{n-2}\ ) \dots (H_{n-1} \oplus I_1\ )}_{H} PE^{-1}(\tau),$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Отже,

$$F(\Phi) = S_\Phi(T) = S_\Phi(HPE^{-1}(\tau)) = S_\Phi(PE^{-1}(\tau)).$$

Лему доведено. $\square$

Зауважимо, що перестановка стовпців оборотної матриці не завжди призводить до аналогічної перестановки Φ-скелета отриманої матриці.

Приклад 7.1. Нехай $R = \mathbb{Z}$,

$$\Phi = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{array} \right\|, \quad P = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|^{-1},$$

де $\varphi \notin \{0, \ \pm 1\}$, і

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

– перестановка, якій відповідає матриця

$$E(\tau) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Тоді Φ-скелети матриць P та $PE(\tau)$ збігаються:

$$S_\Phi(P) = S_\Phi(PE(\tau)) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \varphi & 1 \end{array} \right\|. \qquad \diamondsuit$$

Одиниці, які стоять на головних діагоналях матриць із $\mathbf{T}(\Phi)$, назвемо діагональними. Розглянемо множину $\mathbf{T}(\Phi)E(\tau)$, де $\tau \in S_n$. У кожній матриці цієї множини замінимо всі елементи, які стоять праворуч від діагональних одиниць, на нулі. Отриману множину матриць позначимо через $\mathbf{T}_\tau(\Phi)$.

Теорема 7.4. *Множина $\mathbf{T}_\tau^{-1}(\Phi)\Phi$ складається зі всіх неасоційовних справа матриць, які мають Φ-скелет $F(\Phi)E(\tau)$.*

Доведення. Нехай $T \in \mathbf{T}_\tau(\Phi)$, де

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

І нехай

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\left\| \; 1 \quad \dots \quad n \; \right\| E(\tau) = \left\| \; j_1 \quad \dots \quad j_n \; \right\|.$$

Це означає, що s-им стовпцем матриці $\operatorname{triang}(\ 1, \dots\ , 1\ )E(\tau)$ буде j_s-ий стовпець матриці $\operatorname{triang}(\ 1, \dots\ , 1\ )$, $s = 1, \dots, n$. Отже, якщо $\bar{t}_s$ є s-им стовпцем матриці T, то він має вигляд

$$\bar{t}_s = \left\| \underbrace{0\ \dots\ 0\ 1}_{j_s} * \dots * \right\|^T.$$

Зі способу побудови множини $\mathbf{T}_\tau(\Phi)$ випливає, що

$$\bar{t}_n = \left\| \underbrace{0\ \dots\ 0\ 1}_{j_n} 0 \dots 0 \right\|^T.$$

Тому

$$\Phi_n \bar{t}_n \overset{l}{\sim} \left\| \; 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \; \right\|^T,$$

де матриця

$$\Phi_n = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1 \right)$$

записана у вигляді

$$\Phi_n = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_n} \right).$$

Зауваживши, що у матриці $\Phi_n \left\| \; \bar{t}_{n-1} \quad \bar{t}_n \; \right\|$ є лише один відмінний від нуля мінор $\pm \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{n-1}}} \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}$, одержимо

$$\Phi_n \left\| \; \bar{t}_{n-1} \quad \bar{t}_n \; \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{n-1}}}, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \right).$$

Продовживши аналогічні міркування, отримаємо, що

$$\Phi_n T \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}}, \ \ldots, \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}\right).$$

Тобто останні рядки матриць $S_\Phi(T)$ та $F(\Phi)E(\tau)$ збігаються і дорівнюють

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}} \ \ldots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \right\|.$$

Очевидно, що й решта рядків матриць $F(\Phi)E(\tau)$ та $S_\Phi(T)$ однакові. Тому $S_\Phi(T) = F(\Phi)E(\tau)$.

Навпаки, нехай матриця $B = P^{-1}\Phi Q^{-1}$ має Φ-скелет $F(\Phi)E(\tau)$. Тобто

$$S_\Phi(B) = S_\Phi(P) = F(\Phi)E(\tau).$$

Тоді на підставі леми 7.5 маємо

$$S_\Phi(PE^{-1}(\tau)) = F(\Phi).$$

З теореми 7.3 випливає, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує матриця H_n, для якої

$$H_n PE^{-1}(\tau) = \operatorname{triang}(1, \ldots, 1).$$

Отже,

$$H_n P = \operatorname{triang}(1, \ldots, 1)E(\tau).$$

Тоді згідно з теоремою 6.7

$$F(\Phi)E(\tau) = S_\Phi(P) = S_\Phi(H_n P) = S_\Phi(\operatorname{triang}(1, \ldots, 1)E(\tau)). \tag{7.6}$$

Занумеруємо стовпці матриці $H_n P$ так: s-им стовпцем вважатимемо стовпець вигляду

$$\bar{a}_s = \left\| \underbrace{0 \ \ldots \ 0 \ 1}_{s} * \ldots * a_s \right\|^T, \ s = 1, \ldots, n.$$

Тоді

$$H_n P = \left\| \ \bar{a}_{j_1} \quad \ldots \quad \bar{a}_{j_n} \ \right\|.$$

Із рівності (7.6) випливає, що останнім рядком матриці $S_\Phi(H_n P)$ буде

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_1}} \ \ldots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}} \right\|.$$

Нехай $j_l = n$. Тоді матриця $H_n P$ має вигляд

$$H_n P = \left\| \begin{array}{ccccccc} & C & & \mathbf{0} & & B & \\ a_1 & \ldots & a_{l-1} & 1 & a_{l+1} & \ldots & a_n \end{array} \right\|.$$

Згідно з означенням Φ-скелета

$$\Phi_n \left\| \ \bar{a}_{j_l} \quad \bar{a}_{j_{l+1}} \quad \dots \quad \bar{a}_{j_n} \ \right\| \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(1, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{l+1}}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}\right).$$

Взявши до уваги структуру матриці H_nP, отримаємо

$$\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) B \overset{l}{\sim} \operatorname{triang}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{j_{l+1}}}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{j_n}}\right).$$

Нехай $j_k = n-1$. Якщо елемент a_k стоїть праворуч від діагональної одиниці, то, як випливає із леми 7.3, у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_{n-1}, що в матриці $H_{n-1}H_nP$ на місці елемента a_k стоятиме нуль. Якщо ж елемент a_k стоїть ліворуч, то, скориставшись методами, які використовувались під час доведення теореми 7.3, побудуємо таку матрицю H_{n-1}, що в матриці $H_{n-1}H_nP$ на місці елемента a_k стоятиме елемент α із множини $K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right)$. Продовжуючи розмірковувати аналогічно, знайдемо в групі $\mathbf{G}_\Phi$ таку матрицю L_n, що в матриці L_nP праворуч від діагональної одиниці стоятимуть нулі, а ліворуч – елементи із $K\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Викреслимо в матриці L_nP останній рядок та перший стовпець. Отриману матрицю позначимо через $(L_nP)_{nl}$. Скориставшись лемою 7.4 і міркуючи так само як і вище, знайдемо в групі $\mathbf{G}_{diag\,(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ таку матрицю L_{n-1}, що в останньому рядку матриці $L_{n-1}(L_nP)_{nl}$ праворуч від діагональної одиниці стоятимуть нулі, а ліворуч – елементи з $K\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Тоді в матриці $(L_{n-1} \oplus I_1\ )L_nP$, де $(L_{n-1} \oplus I_1\ )L_n \in \mathbf{G}_\Phi$, елементи двох останніх рядків задовольнятимуть вимоги теореми. Продовжуючи описаний процес, побудуємо таку матрицю $H \in \mathbf{G}_\Phi$, що $HP = T \in \mathbf{T}_\tau(\Phi)$. Тобто $B \overset{r}{\sim} T^{-1}\Phi$. Теорему доведено. □

Позначимо через S_n^Φ перестановки порядку n, за допомогою яких отримуємо різні матриці $F(\Phi)E(\tau)$, і позначимо

$$\operatorname{Stand}(\Phi) = \bigcup_{\tau \in S_n^\Phi} T_\tau(\Phi).$$

Теорема 7.5. *Множина* $\operatorname{Stand}(\Phi)^{-1}\Phi$ *складається з усіх неасоційовних справа матриць, які мають стандартні* Φ*-скелети.* □

Приклад 7.2. Нехай $R = \mathbb{Z}$, $\Phi = \operatorname{diag}(1,3,6\ )$. Оскільки $S_n^\Phi = S_n$, то

$$\operatorname{Stand}(\Phi) = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & b & 1 \end{matrix} \right\|, \right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

де $a \in \{0,1,2\}$, $b \in \{0,1,\dots,5\}$, $c \in \{0,1\}$, і $\mathrm{Stand}\,(\Phi)^{-1}\Phi$ є множиною всіх неасоційованих справа матриць зі стандартними Ф-скелетами.

Зауважимо, що множина $\mathrm{Stand}\,(\Phi)$ не вичерпує всіх представників лівих класів суміжності групи $\mathrm{GL}_n(R)$ по підгрупі $\mathbf{G}_\Phi$. Дійсно, залишились неохопленими матриці зі Ф-скелетами

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \right\|.$$

Прикладами матриць з такими Ф-скелетами є, зокрема,

$$\left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right\| \right\}^{-1} \Phi. \qquad \diamondsuit$$

Позначимо через $W(\Phi)$ множину всіх представників лівих класів суміжності групи $\mathrm{GL}_n(R)$ по підгрупі $\mathbf{G}_\Phi$.

Приклад 7.3. Нехай $R = \mathbb{Q}[x]$, $\Phi = \mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ x^2+1\ )$. Тоді

$$F(\Phi) = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2+1 & x^2+1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Отже,

$$S_n^\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тобто, крім $F(\Phi)$, є ще два стандартні Ф-скелети:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2+1 & 1 & x^2+1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & x^2+1 \end{array} \right\|.$$

Оскільки поліном x^2+1 нерозкладний у кільці $\mathbb{Q}[x]$, то всі можливі Ф-скелети матриць з формою Сміта Ф вичерпуються виписаними Ф-скелетами. Це означає, що

$$W(\Phi) = \mathrm{Stand}\,(\Phi) =$$
$$= \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b(x) & c(x) & 1 \end{array} \right\|, \ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(x) & 1 & 0 \end{array} \right\|, \ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

де $b(x),\ c(x) \in \{\, mx+n | m, n \in \ \mathbb{Q}\,\}$. Таким чином, Stand $(\Phi)^{-1}\Phi$ є множиною всіх неасоційовних справа матриць з формою Сміта Φ. $\diamondsuit$

Встановлену в цьому прикладі закономірність можна без жодних застережень перенести і на ширший клас матриць.

Наслідок 7.2. *Множина Stand* $(\Phi)^{-1}\Phi$, *де*

$$\Phi = \operatorname{diag}\Big(1, \ldots, 1, \underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{i}\Big),$$

φ *– нерозкладний елемент кільця* R, $1 \leqslant i < n$, *є множиною всіх неасоційованих справа матриць з формою Сміта* Φ. $\square$

7.2. Нормальна форма матриць з одним інваріантним множником стосовно односторонніх перетворень

Нехай R – кільце Безу стабільного рангу 1,5 і $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця над R. Розглянемо діагональну матрицю з одним відмінним від одиниці інваріантним множником:

$$\Phi = \operatorname{diag}\,(1, \ldots,\ 1, \varphi),\ \ \varphi \neq 0,\ \ \varphi \notin U(R).$$

У цьому випадку група $\mathbf{G}_\Phi$ складається з оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{cccc} h_{11} & \ldots & h_{1.n-1} & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1.1} & \ldots & h_{n-1.n-1} & h_{n-1.n} \\ \varphi h_{n1} & \ldots & \varphi h_{n.n-1} & h_{nn} \end{array} \right\|.$$

Це означає, що

$$\Phi_1 = \cdots = \Phi_{n-1} = I,\ \ \Phi_n = \operatorname{diag}\,(\varphi,\ \ldots,\ \varphi,\ 1).$$

Для матриці $\Phi_n P$ існує така оборотна матриця V, що

$$V\Phi_n P = \left\| \begin{array}{ccccc} \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & \gamma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_{n-1.1} & c_{n-1.2} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\| \tag{7.7}$$

– форма Ерміта матриці $\Phi_n P$. Таким чином, Φ-скелетом матриці P є матриця

$$V\Phi_n P = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{array} \right\| = S_\Phi(P).$$

Лема 7.6. *Виконуються умови*

$$\gamma_i = \frac{\varphi\nu_i}{\nu_{i+1}},$$

де

$$\nu_i = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, p_{nn}, \varphi),\ i = 1, \dots, n,\ \nu_{n+1} = \varphi.$$

Доведення. Розглянемо матрицю

$$P_i = \left\| \begin{array}{ccccc} p_{1i} & p_{1.i+1} & \dots & p_{1.n-1} & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.i} & p_{n-1.i+1} & \dots & p_{n-1.n-1} & p_{n-1.n} \\ p_{ni} & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

На підставі твердження 3.8 матриця $\Phi_n P_i$, $i = 1, \dots, n-1$, має форму Сміта

$$\Phi_n P_i \sim \left\| \begin{array}{cccc} \nu_i & 0 & & 0 \\ 0 & \varphi & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \varphi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \nu_i \oplus \varphi I_{n-i} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $\nu_i = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{nn}, \varphi)$. Отже,

$$\langle \Phi_n P_i \rangle = \det(\nu_i \oplus \varphi I_{n-i}) = \nu_i \varphi^{n-i}.$$

З іншого боку, з рівності (7.7) випливає, що

$$\Phi_n P_i \overset{l}{\sim} \left\| \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{i+1.i-1} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ c_{ni} & c_{n.i+1} & \dots & c_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Тобто

$$\langle \Phi_n P_i \rangle = \det \left\| \begin{array}{ccccc} \gamma_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ c_{ni} & c_{n.i+1} & \dots & c_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\| = \gamma_i\gamma_{i+1}\cdots\gamma_n.$$

Таким чином, $\gamma_i\gamma_{i+1}\cdots\gamma_n = \nu_i\varphi^{n-i}$. Аналогічно показуємо, що

$$\gamma_{i+1}\gamma_{i+2}\cdots\gamma_n = \nu_{i+1}\varphi^{n-i-1}.$$

Тоді

$$\frac{\gamma_i\gamma_{i+1}\cdots\gamma_n}{\gamma_{i+1}\gamma_{i+2}\cdots\gamma_n} = \gamma_i = \frac{\nu_i\varphi^{n-i}}{\nu_{i+1}\varphi^{n-i-1}} = \frac{\varphi\nu_i}{\nu_{i+1}}.$$

Лему доведено. □

З рівності (7.7) випливає, що

$$\gamma_n = (\varphi p_{1n}, \dots, \varphi p_{n-1.n}, p_{nn}) = (\varphi(p_{1n}, \dots, p_{n-1.n}), p_{nn}).$$

Оскільки $(p_{1n}, \dots, p_{n-1.n}, p_{nn}) = 1$, то $\gamma_n = (\varphi, p_{nn})$. Це означає, що Ф-стрижнем стовпця $\|p_{1n} \;\; p_{2n} \;\; \dots \;\; p_{nn}\|^T$ буде $\|1 \;\; \dots \;\; 1 \;\; \gamma_n\|^T$. Згідно з теоремою 6.3 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що

$$H\|p_{1n} \;\; p_{2n} \;\; \dots \;\; p_{nn}\|^T) = \|p'_{1n} \;\; \dots \;\; p'_{n-1.n} \;\; \gamma_n\|^T.$$

Розглянемо матрицю HP. На підставі теореми 6.7 $S_\Phi(P) = S_\Phi(HP)$. Отже, надалі можна вважати, що елемент p_{nn} матриці P дорівнює γ_n.

Наступне твердження показує, як змінюються елементи матриці P під дією матриць із групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Теорема 7.6. *Нехай $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця над R, причому $p_{nn} = \gamma_n | \varphi$, і*

$$S_\Phi(P) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Якщо $p_{ni} \neq 0$, то матричне рівняння

$$x\Phi_n P_i = \left\| \; a_i \quad p_{n.i+1} \quad \dots \quad p_{n.n-1} \quad \gamma_n \; \right\|, \tag{7.8}$$

де

$$P_i = \left\| \begin{array}{ccccc} p_{1i} & p_{1.i+1} & \dots & p_{1.n-1} & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1.i} & p_{n-1.i+1} & \dots & p_{n-1.n-1} & p_{n-1.n} \\ p_{ni} & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|,$$

$1 \leqslant i \leqslant n-1$ *, розв'язне, причому в групі* $\mathbf{G}_\Phi$ *існує матриця вигляду*

$$\left\| \begin{array}{ccc} & * & \\ \varphi \overline{x}_1 & \dots & \varphi \overline{x}_{n-1} \quad \overline{x}_n \end{array} \right\|, \tag{7.9}$$

де $\| \, \overline{x}_1 \ \dots \ \overline{x}_{n-1} \ \ \overline{x}_n \, \|$ *– розв'язок рівняння* (7.8)*, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови*

1) $a_i \equiv p_{ni} (\mod \gamma_i)$,

2) $(a_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n)$.

Або ж умови, рівносильні їм:

3) $(a_i, \ \varphi) = (p_{ni}, \ \varphi)$,

4) $a'_i \equiv p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi}{[(p_{ni}, \ \varphi), \ (p_{n.i+1}, \ \dots, \ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})]} \right)$,

де a'_i *та* p'_{ni} *– частки від ділення* a_i, p_{ni} *на* $(p_{ni}, \ \varphi)$,

$$[(p_{ni}, \ \varphi), \ (p_{n.i+1}, \ \dots, \ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})] = \frac{(p_{ni}, \ \varphi)(p_{n.i+1}, \ \dots, \ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})}{((p_{ni}, \ \varphi), \ (p_{n.i+1}, \ \dots, \ p_{n.n-1}, \gamma_{nn}))}.$$

Доведення. Необхіднсть. Згідно з теоремою 7.1 умова 1) є необхідною та достатньою розв'язності рівняння (7.8).

Якщо в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує матриця H_i вигляду (7.9), то

$$H_i P = \left\| \begin{array}{cccccccc} & & & & * & & & \\ b_{n1} & \dots & b_{n.i-1} & a_{ni} & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Згідно з теоремою 6.1 $(a_i, \varphi) = (p_{ni}, \varphi)$. Оскільки $\gamma_n | \varphi$, то

$$(a_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (a_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, (\gamma_n, \varphi)) =$$

$$= ((a_i, \varphi), p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = ((p_{ni}, \varphi), p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) =$$

$$= (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Достатність. Розглянемо останній рядок матриці P :

$$\| \, p_{n1} \quad p_{n2} \quad \dots \quad p_{n.n-1} \quad \gamma_n \, \|.$$

Позначимо

$$(p_{nj}, p_{n.j+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = \nu_j, \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Нехай $p_{n.k_1}, p_{n.k_2}, \ldots, p_{n.k_p}$ – відмінні від нуля елементи останнього рядка матриці P, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq n-1$. І нехай $i = k_s$, $k_1 \leq k_s \leq k_p$, $i \neq 1$. З умов 1) та 2) випливає, що $a_i = p_{ni} + \gamma_i r$ і $(a_i, \nu_{i+1}) = \nu_i$. Отже, $(p_{ni} + \gamma_i r, \nu_{i+1}) = \nu_i$. Тобто

$$\left(\frac{p_{ni}}{\nu_i} + \frac{\gamma_i}{\nu_i} r, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = 1.$$

Згідно з лемою 7.6 $\gamma_i = \frac{\varphi \nu_i}{\nu_{i+1}}$. Тому

$$\left(\frac{p_{ni}}{\nu_i} + \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} r, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = 1. \tag{7.10}$$

З означення Φ-скелета матриці P випливає, що існує така оборотна матриця V, що

$$V\Phi_n P = \left\|\begin{array}{ccccccccc}
\gamma_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
c_{21} & \gamma_2 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\ldots & & \ddots & & & & & & \\
c_{i-1.1} & c_{i-1.2} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\
c_{i+1.1} & c_{i+1.2} & \ldots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ddots & & \\
c_{n-1.1} & c_{n-1.2} & \ldots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\
p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{n.i-1} & p_{ni} & p_{n.i+1} & \ldots & p_{n.n-1} & \gamma_n
\end{array}\right\|.$$

Матриця $\Phi_n P$ має форму Сміта $\operatorname{diag}(1, \varphi, \ldots, \varphi)$. Оскільки добуток перших двох інваріантних множників матриці $\Phi_n P$ дорівнює н.с.д. її мінорів другого порядку, то φ є дільником всіх мінорів другого порядку матриці $\Phi_n P$. Матриця $V\Phi_n P$ еквівалентна до матриці $\Phi_n P$, а тому всі мінори другого порядку матриці $V\Phi_n P$ також діляться на φ. Зокрема,

$$\varphi \left| \begin{vmatrix} c_{ij} & \gamma_i \\ p_{nj} & p_{ni} \end{vmatrix} \right., \ \ j = k_1, \ldots, k_{s-1},$$

що рівносильно

$$\frac{\varphi}{\nu_i} \left| \begin{vmatrix} c_{ij} & \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \\ p_{nj} & \frac{p_{ni}}{\nu_i} \end{vmatrix} \right..$$

Тоді тим більше

$$\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \Big| \begin{vmatrix} c_{ij} & \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \\ p_{nj} & \frac{p_{ni}}{\nu_i} \end{vmatrix}.$$

Зваживши на рівність (7.10), на підставі твердження 1.9 отримуємо

$$\left(p_{ni} + rc_{ij}, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = \left(p_{ni}, c_{ij}, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right), \quad j = k_1, \dots, k_{s-1}. \tag{7.11}$$

Розглянемо матрицю

$$\left(I_{i-1} \oplus \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ r & 0 & & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right) V\Phi_n P =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i+1.1} & \dots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ c_{n-1.1} & \dots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ p_{n1} + rc_{i1} & \dots & p_{n.i-1} + rc_{i.i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{Vmatrix} =$$

$$= V_{i-1}\Phi_n P.$$

Нехай

$$(p_{n.k_1} + rc_{i.k_1}, \dots, p_{n.k_{s-1}} + rc_{i.k_{s-1}}, p_{ni} + r\gamma_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = \delta_i.$$

Згідно з умовою 2)

$$(p_{ni} + r\gamma_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (p_{ni}, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Окрім того, зваживши на рівність (7.11), отримуємо

$$\left(\delta_i, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) =$$

$$= \Big(\left(p_{n.k_1} + rc_{i.k_1}, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right), \dots, \left(p_{n.k_{s-1}} + rc_{i.k_{s-1}}, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right),$$

$$(p_{ni} + r\gamma_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n)\Big) =$$

$$= \left(p_{n.k_1}, c_{i.k_1}, \ldots, p_{n.k_{s-1}}, c_{i.k_{s-1}}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) =$$

$$= \left((p_{n.k_1}, \ldots, p_{n.k_{s-1}}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n), (c_{i.k_1}, \ldots, c_{i.k_{s-1}}), \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right).$$

Оскільки $\left\| \begin{matrix} p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|$ – останній рядок оборотної матриці P , то

$$1 = (p_{n1}, \ldots, p_{n.i-1}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n) =$$

$$= (p_{n.k_1}, \ldots, p_{n.k_{s-1}}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Отже,

$$\left(\delta_i, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = 1.$$

Із того, що

$$(p_{n.i+1}, p_{n.i+2}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = \nu_{i+1}$$

випливає, що існує така оборотна матриця Q, що

$$\left\| \begin{matrix} p_{n.i+1} & p_{n.i+2} & \ldots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| Q = \left\| \begin{matrix} \nu_{i+1} & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$V\Phi_n P \left\| \begin{matrix} I_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & \gamma_2 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \ldots & & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & c_{i-1.2} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i+1.1} & c_{i+1.2} & \ldots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & * & * & * & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1.1} & c_{n-1.2} & \ldots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & * & * & * & * \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{n.i-1} & p_{ni} & \nu_{i+1} & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки ця матриця має форму Сміта $\operatorname{diag}(1, \varphi, \ldots, \varphi)$ і

$$\left\| \begin{matrix} c_{ij} & 0 \\ u_{nj} & \nu_{i+1} \end{matrix} \right\|$$

– її підматриці другого порядку, $j = 1, \ldots, i-1$, то

$$\varphi \left| \begin{matrix} c_{ij} & 0 \\ u_{nj} & \nu_{i+1} \end{matrix} \right| = c_{ij}\nu_{i+1}.$$

Отже, $\frac{\varphi}{\nu_{i+1}} | c_{ij}$. Тобто $c_{ij} = \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} c'_{ij}$, $j = 1, \ldots, i-1$. Зваживши на те, що $\gamma_i = \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \nu_i$, отримуємо

$$\left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_{i+1}}\right) = \big(p_{n1} + r\frac{\varphi}{\nu_{i+1}} c'_{i1}, \ldots, p_{n.i-1} + r\frac{\varphi}{\nu_{i+1}} c'_{i.i-1},$$

$$p_{ni} + r\frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \nu_i, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n, \frac{\varphi}{\nu_{i+1}}\big) =$$

$$= \left((p_{n1}, \ldots, p_{n.i-1}, p_{ni}, p_{n.i+1}, \ldots, p_{n.n-1}, \gamma_n), \frac{\varphi}{\nu_{i+1}}\right) = 1.$$

Оскільки також

$$\left(\delta_i, \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = 1,$$

то

$$\left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_{i+1}} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right) = \left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_i}\right) = 1.$$

Запишемо матрицю $V\Phi_n P$ у блочному вигляді:

$$V\Phi_n P = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \gamma_1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ c_{i-1.1} & \ldots & \gamma_{i-1} & 0 & & 0 \\ \hline c_{i1} & \ldots & c_{i.i-1} & \gamma_i & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ddots & \\ p_{n1} & \ldots & p_{n.i-1} & p_{ni} & \ldots & \gamma_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\|.$$

Оскільки

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ B_{22} \end{array} \right\| \overset{l}{\sim} \Phi_n P_i,$$

то форми Сміта матриць

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ B_{22} \end{array} \right\|, \quad \Phi_n P_i$$

збігаються. Згідно з твердженням 3.8

$$\Phi_n P_i \sim \left\| \begin{array}{c} \nu_i \oplus \varphi I_{n-i} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Отже,

$$B_{22} \sim \operatorname{diag}(\nu_i, \underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{n-i}).$$

Тоді на підставі теореми 3.2

$$B_{11} \sim \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\nu_i}, \varphi, \ldots, \varphi\right).$$

Це означає, що

$$\langle B_{11}\rangle_1 = \frac{\varphi}{\nu_i}.$$

Зваживши на те, що

$$\left(\delta_i, \frac{\varphi}{\nu_i}\right) = \left((p_{n1} + rc_{i1}, \dots, p_{ni} + r\gamma_i, p_{n.i+1}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n), \frac{\varphi}{\nu_i}\right) = 1,$$

приходимо до висновку, що н.с.д. елементів матриці

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{n1} + rc_{i1} & \dots & p_{n.i-1} + rc_{i.i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| = T_i$$

дорівнює одиниці. Ця матриця має максимальний ранг, тому на підставі теореми 2.19 існують такі $s_1, s_2, \dots, s_{i-1}$, що

$$\left\| \begin{matrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{i-1} & 1 \end{matrix} \right\| T_i =$$

$$= \left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тобто рядок

$$\left\| \begin{matrix} l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|$$

є примітивним. Звідси випливає, що останній рядок матриці

$$\left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_1 & \dots & s_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| V_{i-1}\Phi_n P =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ c_{i-1.1} & & \gamma_{i-1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & \gamma_i & 0 & & 0 & 0 \\ c_{i+1.1} & \dots & c_{i+1.i-1} & c_{i+1.i} & \gamma_{i+1} & & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ c_{n-1.1} & \dots & c_{n-1.i-1} & c_{n-1.i} & c_{n-1.i+1} & & \gamma_{n-1} & 0 \\ l_1 & \dots & l_{i-1} & p_{ni} + r\gamma_i & p_{n.i+1} & \dots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\| \qquad (7.12)$$

є примітивним. Позначимо через $\| \, t_1 \;\; t_2 \;\; \dots \;\; t_n \, \|$ останній рядок матриці

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_1 & \dots & s_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\| V_{i-1}.$$

Із рівності (7.12) випливає, що

$$\| \, t_1 \;\; t_2 \;\; \dots \;\; t_n \, \| \Phi_n P_i = \| \, p_{ni} + r\gamma_i \;\; p_{n.i+1} \;\; \dots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \, \| .$$

Тобто $\| \, t_1 \;\; t_2 \;\; \dots \;\; t_n \, \|$ є розв'язком рівняння (7.8). Окрім того, оскільки

$$\| \, t_1 \;\; t_2 \;\; \dots \;\; t_n \, \| \Phi_n P =$$

$$= \| \, l_1 \;\; \dots \;\; l_{i-1} \;\; p_{ni} + r\gamma_i \;\; p_{n.i+1} \;\; \dots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \, \| ,$$

то

$$\| \, t_1 \;\; t_2 \;\; \dots \;\; t_n \, \| \Phi_n =$$

$$= \| \, l_1 \;\; \dots \;\; l_{i-1} \;\; p_{ni} + r\gamma_i \;\; p_{n.i+1} \;\; \dots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \, \| P^{-1}.$$

Рядок

$$\| \, l_1 \;\; \dots \;\; l_{i-1} \;\; p_{ni} + r\gamma_i \;\; p_{n.i+1} \;\; \dots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \, \| P^{-1}$$

примітивний. Тому $\| \, t_1 \;\; t_2 \;\; \dots \;\; t_n \, \| \Phi_n$ також буде примітивним рядком. Тоді з теореми 1.1 випливає, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує матриця вигляду

$$\left\| \begin{array}{cccc} & & * & \\ \varphi t_1 & \dots & \varphi t_{n-1} & t_n \end{array} \right\| .$$

Тобто, якщо $i > 1$, то теорема доведена.

Нехай $i = 1$. Покажемо, що рівняння

$$x \Phi_n P = \| \, p_{n1} + r\gamma_1 \;\; p_{n2} \;\; \dots \;\; p_{n.n-1} \;\; \gamma_n \, \| , \tag{7.13}$$

де

$$(p_{n1} + r\gamma_1, p_{n2}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = (p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{n.n-1}, \gamma_n) = 1 \tag{7.14}$$

має потрібний нам розв'язок.

Умова (7.14) згідно з теоремою 7.1 забезпечує нам розв'язність рівняння (7.13). Тобто існує такий рядок $\left\| \overline{x}_1 \quad \ldots \quad \overline{x}_n \right\|$, що

$$\left\| \overline{x}_1 \quad \ldots \quad \overline{x}_n \right\| \Phi_n P = \left\| p_{n1} + r\gamma_1 \quad p_{n2} \quad \ldots \quad p_{n.n-1} \quad \gamma_n \right\|.$$

Звідси випливає, що

$$\left\| \overline{x}_1 \quad \ldots \quad \overline{x}_n \right\| \Phi_n = \left\| p_{n1} + r\gamma_1 \quad p_{n2} \quad \ldots \quad p_{n.n-1} \quad \gamma_n \right\| P^{-1}.$$

Оскільки права частина цієї рівності – примітивний рядок, то рядок $\left\| \overline{x}_1 \quad \ldots \quad \overline{x}_n \right\| \Phi_n$ також буде примітивним. А тому, як і вище, в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує матриця потрібної нам структури.

Покажемо тепер, що умови 1), 2) рівносильні умовам 3), 4). Нехай виконуються умови 1) та 2). Згідно зі щойно доведеним, у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що

$$HP = \left\| \begin{array}{cccccccc} & & & & * & & & \\ * & \ldots & * & a_i & p_{n.i+1} & \ldots & p_{n.n-1} & \gamma_n \end{array} \right\|.$$

Тоді згідно з теоремою 6.1

$$(a_i,\ \varphi) = (p_{ni},\ \varphi), i = 1, \ldots, n-1.$$

Нехай

$$a_i = (p_{ni},\ \varphi)a'_i, \qquad p_{ni} = (p_{ni},\ \varphi)p'_{ni}.$$

Запишемо умову 1) у вигляді

$$(p_{ni},\ \varphi)a' \equiv (p_{ni},\ \varphi)p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi(p_{ni},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)}{(p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)} \right).$$

Отже,

$$a' \equiv p'_{ni} \left(\mod \frac{\varphi(p_{ni},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)}{(p_{ni},\ \varphi)(p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)} \right).$$

Оскільки $\gamma_n | \varphi$, то

$$((p_{ni},\ \varphi), (p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)) =$$
$$= (p_{ni}, p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, (\gamma_n, \varphi)) =$$
$$= (p_{ni}, p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Зауваживши, що

$$\frac{(p_{ni},\ \varphi)(p_{n.i+1},\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)}{((p_{ni}, \varphi), (p_{n.i+1}\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n))} = [(p_{ni}, \varphi), (p_{n.i+1}\ \ldots,\ p_{n.n-1}, \gamma_n)],$$

отримуємо

$$a_i' \equiv p_{ni}' \left(\mod \frac{\varphi}{[(p_{ni},\ \varphi),\ (p_{n.i+1},\ \dots,\ p_{n.n-1}, \gamma_{nn})]} \right).$$

Легко переконатись, що правильними будуть й обернені міркування. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 7.3. *Якщо $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця, то в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що*

$$HP = \left\| \begin{matrix} & & * & \\ s_{n1} & \dots & s_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|,$$

де $\gamma_n|\varphi$ і $s_{ni} \in K(\varphi)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Доведення. Оскільки $\Phi = \text{diag}\,(1, \dots,\ 1, \varphi)$, то

$$S_\Phi(P) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{matrix} \right\|,$$

причому

$$R_\Phi(P) = (\|p_{1n} \dots p_{nn}\|^T) = \|1 \dots 1 \gamma_n\|^T.$$

Тоді на підставі теореми 6.3 в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_n, що

$$H_nP = \left\| \begin{matrix} & & * & \\ v_{n1} & \dots & v_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

При цьому згідно з теоремою 6.1 $(v_{ni}, \varphi) = (p_{ni}, \varphi)$, $i = 1, \dots, n-1$. Якщо $v_{n.n-1} = 0$, то переходимо до елемента $v_{n.n-2}$. Нехай $v_{n.n-1} \neq 0$ і

$$s_{n.n-1} \equiv v_{n.n-1} \,(\mod \varphi)\,,$$

де $s_{n.n-1} \in K(\varphi)$. Отже,

$$s_{n.n-1} = v_{n.n-1} + r\varphi = v_{n.n-1} + \left(r\frac{\varphi}{\gamma_{n-1}} \right) \gamma_{n-1}.$$

Тобто

$$s_{n.n-1} \equiv v_{n.n-1} \,(\mod \gamma_{n-1})\,.$$

Окрім того, оскільки $\gamma_n|\varphi$, то

$$(s_{n.n-1}, \gamma_n) = (v_{n.n-1} + r\varphi, \gamma_n) = (v_{n.n-1}, \gamma_n).$$

Тоді згідно з теоремою 7.6 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_{n-1}, що

$$H_nU = \left\| \begin{matrix} & & * & & \\ v'_{n1} & \dots & v'_{n.n-1} & s_{n.n-1} & \gamma_n \end{matrix} \right\|.$$

За аналогічною схемою послідовно замінюємо елементи, які знаходяться на позиціях $(n, n-2), (n, n-3), \dots, (n1)$, їх представниками з множини $K(\varphi)$. Доведення завершено. □

Лема 7.7. *Якщо оборотні $n \times n$ матриці U та V мають однаковий останній рядок, то в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $HV = U$.*

Доведення . Оскільки

$$U = \left\| \begin{matrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1.1} & \dots & u_{n-1.n} \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\|, V = \left\| \begin{matrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1.1} & \dots & v_{n-1.n} \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

то

$$UV^{-1} = \left\| \begin{matrix} * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = H.$$

Очевидно, що $H \in \mathbf{G}_\Phi$. □

Введемо такі позначення:

$D(\varphi)$ – множина всіх неасоційовних дільників φ, за винятком самого φ;

$M_\varphi(\mu) = \{\, a \in K(\varphi) | (a,\ \varphi) = \mu \,\}$;

$M'_\varphi(\mu)$ – частка від ділення $M_\varphi(\mu)$ на μ;

$M'_\varphi(\mu,\ \gamma)$ – множина представників суміжних класів $M'_\varphi(\mu)$ за модулем $\frac{\varphi}{[\mu,\ \gamma]}$, $\gamma \in D(\varphi)$. При цьому, якщо $a \in M'_\varphi(\mu)$, то представником класу, який містить елемент a, буде той елемент

$$a_1 = a + r\frac{\varphi}{[\mu,\ \gamma]}$$

із $K(\varphi)$, що

$$\left(a_1, \frac{\varphi}{\mu}\right) = 1.$$

Нехай $P = \|p_{ij}\|_1^n$ – оборотна матриця і p_{nk} – перший справа елемент її останнього рядка, який не ділиться на φ, $2 \leqslant k \leqslant n$. Позначимо

$$\mu_i = (p_{ni}, \varphi), i = 1, \dots, n.$$

Тобто останній рядок матриці P має вигляд

$$\| \, \mu_1 v_1 \ \ \dots \ \ \mu_k v_k \ \ \varphi v_{k+1} \ \ \dots \ \ \varphi v_n \, \| \, .$$

Теорема 7.7. *У групі* $\mathbf{G}_\Phi$ *існує така матриця* H, *що*

$$HP = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ L_k & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де

$$L_k = \left\| \begin{array}{cccccc} f_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_k \\ f_{k-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 s_1 & \mu_2 s_2 & \mu_3 s_3 & \cdots & \mu_{k-1} s_{k-1} & \mu_k \end{array} \right\|, \tag{7.15}$$

при цьому, якщо $\mu_i = \varphi$, *то* $s_i = 0$, *якщо* $\mu_i \in D(\varphi)$, *то* $s_i \in M'_\varphi(\mu_i, \ (\mu_{i+1}, \ \dots, \ \mu_k))$, $i = 1, \dots, k-1$, $f_j \in R$, $j = 1, \dots, k$, $\bar{I}_{n-k}$ – *матриця порядку* $n-k$ *вигляду*

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{array} \right\|.$$

При цьому в класі $\mathbf{G}_\Phi P$ *матриця* HP *є єдиною з точністю доповнення її останнього рядка до оборотної матриці.*

Доведення. Якщо $k < n$, то $\mu_n = \varphi$. Згідно з теоремою 6.3 в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_n, що

$$H_n P = \left\| \begin{array}{cccc} p'_{11} & \cdots & p'_{1.n-1} & p'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{n-1.1} & \cdots & p'_{n-1.n-1} & p'_{n-1.n} \\ p'_{n1} & \cdots & p'_{n.n-1} & \varphi_n \end{array} \right\|.$$

Нехай

$$(p'_{1n}, \dots, p'_{n-1.n}) = \delta_n.$$

Тоді існує така оборотна матриця S_n, що

$$S_n \left\| \begin{array}{c} p'_{1n} \\ p'_{2n} \\ \cdots \\ p'_{n-1.n} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \delta_n \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Оскільки

$$1 = (p'_{1n}, p'_{2n}, \ldots, p'_{n-1.n}, \varphi) = (\delta_n, \varphi),$$

то знайдуться такі елементи u_n, v_n, що

$$\delta_n u_n + \varphi v_n = 1.$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{ccccc} u_n & 0 & \ldots & 0 & v_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & \ldots & 0 & \delta_n \end{array} \right\| (S_n \oplus 1) H_n P =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} u_n & 0 & \ldots & 0 & v_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & \ldots & 0 & \delta_n \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} * & \ldots & * & \delta_n \\ * & \ldots & * & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & \ldots & * & 0 \\ * & \ldots & * & \varphi \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} * & \ldots & * & v_{1.n-1} & 1 \\ * & \ldots & * & v_{2.n-1} & 0 \\ * & \ldots & * & v_{n-1.n-1} & 0 \\ * & \ldots & * & v_{n.n-1} & 0 \end{array} \right\| = P_n.$$

Якщо $n-1 > k$, то, зваживши на те, що матриці

$$\left\| \begin{array}{ccccc} u_n & 0 & \ldots & 0 & v_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & \ldots & 0 & \delta_n \end{array} \right\|, \ (S_n \oplus 1)$$

належать групі $\mathbf{G}_\Phi$ згідно з теоремою 6.1, отримуємо, що $(v_{n.n-1}, \varphi) = \varphi$. Тобто $v_{n.n-1} = \varphi t_{n-1}$. Нехай $(v_{2.n-1}, \ldots, v_{n-1.n-1}) = \delta_{n-1}$. Отже, існує така оборотна матриця S_{n-1}, що

$$S_{n-1} \left\| \begin{array}{c} v_{2.n-1} \\ v_{3.n-1} \\ \ldots \\ v_{n-1.n-1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \delta_{n-1} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$(1 \oplus S_{n-1} \oplus 1)P_n = \left\| \begin{array}{ccccc} * & \dots & * & v_{1.n-1} & 1 \\ * & \dots & * & \delta_{n-1} & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ * & \dots & * & \varphi t_{n-1} & 0 \end{array} \right\|.$$

Матриця, складена з останніх двох стовпців цієї матриці, є примітивною. Тому $(\delta_{n-1}, \varphi t_{n-1}) = 1$. Отже, існують такі елементи u_{n-1}, v_{n-1}, що

$$\delta_{n-1}u_{n-1} + \varphi t_{n-1}v_{n-1} = 1.$$

Тоді

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{n-1} & 0 & \dots & 0 & v_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -\varphi t_{n-1} & 0 & \dots & 0 & \delta_{n-1} \end{array} \right\| (1 \oplus S_{n-1} \oplus 1)P_n =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} * & \dots & * & v_{1.n-1} & 1 \\ * & \dots & * & 1 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Домноживши цю матрицю зліва на

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & -v_{1.n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\|,$$

отримуємо матрицю, у якій останні два стовпці мають вигляд

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{I}_2 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Зауважимо, що всі матриці, на які домножували матрицю P_n, вибирали з групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Продовжуючи описаний процес, знайдемо таку матрицю H'_k із $\mathbf{G}_\Phi$, для якої

$$H'_kP = \left\| \begin{array}{cc|c} & * & \\ & \vdots & \bar{I}_{n-k} \\ & * & \\ \cline{3-3} * & d & \\ & 0 & \\ & \vdots & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & \mu_k v'_k & \end{array} \right\|.$$

Із оборотності цієї матриці випливає, що $(\mu_k v'_k,\ d) = 1$. Оскільки $(\mu_k v'_k,\ \varphi) = \mu_k$, то

$$(\mu_k v'_k,\ \varphi d) = \mu_k.$$

Тому в R існують такі елементи a, b, що $\mu_k v'_k a + \varphi db = \mu_k$, причому на підставі теореми 1.9 елемент a можна вибрати так, що $(a,\ \varphi) = 1$. А оскільки $(a,\ b) = 1$, то й $(a,\ \varphi b) = 1$. Тому $af + \varphi bg = 1$ для деяких $f,\ g \in R$. Тоді

$$\left(I_{n-k} \oplus \left\| \begin{array}{ccccc} f & 0 & \cdots & 0 & -g \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \varphi b & 0 & \cdots & 0 & a \end{array} \right\| \right) H'_kP =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} * & \dots & * & * & \bar{I}_{n-k} \\ \hline * & \dots & * & * & \\ c_{k1} & \dots & c_{k.k-1} & \mu_k & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_k & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{array} \right\| = P_k.$$

Оскільки матриця P_k – оборотна, то оборотною буде і матриця C_k. Отже, над матрицею P_k можемо зробити таке перетворення:

$$\underbrace{\left\| \begin{array}{cc} I_{n-k} & -B_kC_k^{-1} \\ \mathbf{0} & I_k \end{array} \right\|}_{U} \left\| \begin{array}{cc} B_k & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $U \in \mathbf{G}_\Phi$.

Нехай $F = \operatorname{diag}\,(1, \dots,\ 1, \varphi)$ – матриця порядку k. Покажемо, що матрицю C_k перетвореннями із групи $\mathbf{G}_F$ можна звести до вигляду (7.15).

Згідно з наслідком 7.3 можемо вважати, що $c_{ki} \in K(\varphi)$, $i = 1, \dots, k-1$. Тому, якщо $\varphi | c_{k.k-1}$, то $c_{k.k-1} = 0$. Якщо ж $\varphi \nmid c_{k.k-1}$, то нехай

$$c_{k.k-1} = \mu_{k-1} c'_{k-1} \in K_\varphi,$$

де $\mu_{k-1} \in D(\varphi)$. Звідси випливає, що $c'_{k-1} \in M'_{\varphi}(\mu_{k-1})$. Виберемо в множині $M'_{\varphi}(\mu_{k-1},\ \mu_k)$ такий елемент s_{k-1}, що

$$c'_{k-1} \equiv s_{k-1} \left(\mod \frac{\varphi}{[\mu_{k-1},\ \mu_k]} \right).$$

На підставі теореми 7.6 і наслідку 7.3 в групі $\mathbf{G}_F$ існує така матриця H_{k-1}, для якої

$$H_{k-1}C_k = \left\| \begin{matrix} & & & * & & \\ * & \dots & * & d_{k-2} & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k \end{matrix} \right\|,$$

де $d_{k-2} \in K(\varphi)$.

За описаною схемою, перетвореннями з $\mathbf{G}_F$, зведемо матрицю C_k до вигляду

$$C = \left\| \begin{matrix} & * & \\ \mu_1 s_1 & \dots & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k \end{matrix} \right\|,$$

де

$$s_i \in M'_{\varphi}(\mu_i, (\mu_{i+1}, \dots, \mu_k)), i = 1, \dots, k-1.$$

Оскільки останній рядок цієї матриці є примітивним, то як випливає з теореми 1.2, його можна доповнити до оборотної матриці вигляду

$$L_k = \left\| \begin{matrix} f_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_k \\ f_{k-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 s_1 & \mu_2 s_2 & \mu_3 s_3 & \cdots & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k \end{matrix} \right\|.$$

При цьому, на підставі леми 7.7 у групі $\mathbf{G}_F$ існує така матриця D, що $DC = L_k$. Таким чином, у групі $\mathbf{G}_F$ знайдеться матриця K, що $KC_k = L_k$. Тоді

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} I_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{matrix} \right\|}_{V} \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ C_k & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-k} \\ L_k & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

де $V \in \mathbf{G}_\Phi$.

Нехай $U \in \mathbf{G}_\Phi P$ і має вигляд

$$U = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \bar{I}_{n-l} \\ N_l & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$N_l = \left\| \begin{matrix} f'_{l-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f'_l \\ f'_{l-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f'_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu'_1 s'_1 & \mu'_2 s'_2 & \mu'_3 s'_3 & \cdots & \mu'_{l-1}s'_{l-1} & \mu'_l \end{matrix} \right\|,$$

де μ_i' та s_i' задано за тими ж правилами, що й μ_i та s_i. Оскільки матриці HP та U є представниками суміжного класу $\mathbf{G}_\Phi P$, то у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця T, що $TU = HP$. Тому Φ-стрижні відповідних стовпців матриць U та HP збігаються. Звідси випливає, що

$$\mu_i = \mu_i', \;\; i = 1, \ldots, k, \;\; \mu_{k+1} = \ldots = \mu_n = \varphi.$$

Таким чином, $l = k$. Із рівності $TU = HP$ випливає рівність

$$T\begin{Vmatrix} & & * & & \\ \mu_{k-1}s_{k-1}' & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} & & * & & \\ \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Зі способу вибору елементів s_{k-1}', s_{k-1} та з теореми 7.6 отримуємо, що $s_{k-1}' = s_{k-1}$. Знову ж таки, розглядаючи рівність

$$T\begin{Vmatrix} & & & * & & \\ \mu_{k-2}s_{k-2}' & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} =$$
$$= \begin{Vmatrix} & & * & & & \\ \mu_{k-2}s_{k-2} & \mu_{k-1}s_{k-1} & \mu_k & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

отримуємо, що $s_{k-2}' = s_{k-2}$. За аналогією $s_i' = s_i$, $i = 1, \ldots, k$. Використавши лему 7.7, завершуємо доведення. $\square$

Зафіксуємо елемент $\gamma \in D(\varphi)$. Введемо такі позначення:

$K_\varphi(\gamma) = \bigcup\limits_{\mu \in D(\varphi)} \mu M_\varphi'(\mu,\, \gamma) \bigcup \{0\}$,

$\bar{K}_\varphi(\gamma) = \{\, a \in K_\varphi(\gamma) | (a,\, \gamma) = 1\,\}$,

$N_k(\gamma)$ – множина всіх рядків вигляду

$$\|a_1\; a_2\; \ldots a_{n-k-1}\; \gamma\; \underbrace{0\; \ldots 0}_{k}\|,$$

де

$$a_1 \in \bar{K}_\varphi(a_2,\; \ldots,\; a_{n-k-1},\; \gamma),$$

$$a_i \in K_\varphi(a_{i+1},\; \ldots\;,\; a_{n-k-1},\; \gamma), \;\; i = 2, \ldots, n-k-1, \; 0 \leqslant k \leqslant n-2,$$

$$N(\varphi) = \bigcup_{\gamma \in D(\varphi)} \bigcup_{k=0}^{n-2} N_k(\gamma) \bigcup \{\; \|\; 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \;\|\; \}.$$

Доповнимо кожний рядок із $N(\varphi)$ до оборотної матриці, причому так, щоб ці рядки в отриманих матрицях були останніми. Одержану множину матриць позначимо через $N_n(\varphi)$.

Теорема 7.8. *Множина $N_n(\varphi)$ складається з представників всіх лівих суміжних класів фактор-множини групи $\mathrm{GL}_n(R)$ по підгрупі $\mathbf{G}_\Phi$.*

Доведення випливає із теорем 7.6 та 7.7. Більш жорсткі обмеження, які накладаються на вибір елемента a_1, зумовлені вимогою, що рядок

$$\| \; a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{n-k-1} \quad \gamma \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \; \|$$

має бути примітивним. □

Теорема 7.9. *Множина $N_n^{-1}(\varphi)\Phi$ складається з усіх неасоційовних справа матриць з формою Сміта Φ.*

Доведення. Згідно з теоремою 4.3 матриці A і B, які мають форму Сміта $\Phi = \mathrm{diag}\,(1, \ \ldots \ , \ 1, \ \varphi)$, асоційовні справа тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Оскільки множина $\mathbf{P}_A$ є лівим класом суміжності групи $\mathrm{GL}_n(R)$ по підгрупі G_Φ, то, враховуючи теорему 7.8, переконуємось у правильності сформульованого твердження. □

Приклад 7.4. Нехай $\varphi = 30$. Тоді

$$D(\varphi) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}, K(30) = \{0, 1, \ldots, 29\}.$$

Побудуємо множину $K_{30}(3)$. Для цього знайдемо всі множини $M_{30}(\mu)$, $M'_{30}(\mu)$, де $\mu \in D(\varphi)$:

$M_{30}(1) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,
$M'_{30}(1) = M_{30}(1)$.

$M_{30}(2) = \{2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28\}$,
$M'_{30}(2) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$.

$M_{30}(5) = \{5, 25\}$,
$M'_{30}(5) = \{1, 5\}$.

$M_{30}(6) = \{6, 12, 18, 24\}$,
$M'_{30}(6) = \{1, 2, 3, 4\}$.

$M_{30}(10) = \{10, 20\}$,
$M_{30}(10) = \{1, 2\}$.

$M_{30}(15) = \{15\}$,
$M_{30}(15) = \{1\}$.

Тепер знайдемо множини $M'_{30}(\mu, 3)$, де $\mu \in D(\varphi)$. Щоб побудувати множину $M'_{30}(1, 3)$, потрібно множину $M'_{30}(1)$ розбити на класи за модулем

$$\frac{30}{[1, 3]} = 10$$

і представниками вибрати ті елементи, які взаємно прості з

$$\frac{\varphi}{\mu} = \frac{30}{1} = 30.$$

Оскільки

$$M_{30}(1) = \{\ \{1, 11\}, \{7, 17\}, \{13, 23\}, \{19, 29\}\ \},$$

то

$$M'_{30}(1, 3) = \{1, 7, 13, 19\}.$$

Зауважимо, що не дивлячись на те, що

$$13 \equiv 3(\mathrm{mod} 10),$$

елемент 3 не може бути представиком класу $\{13, 23\}$ за модулем 10, бо

$$(3, 30) \neq 1.$$

Також

$$M'_{30}(2, 3) = \{1, 2, 4, 8\},\ \ M'_{30}(3, 3) = \{1, 3, 7, 9\},$$
$$M'_{30}(5, 3) = \{1\},\ \ M'_{30}(6, 3) = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$M'_{30}(10, 3) = \{1\},\ \ M'_{30}(15, 3) = \{1\}.$$

Отже,

$$K_{30}(3) = \{0,\ \{1, 7, 13, 19\},\ 2\{1, 2, 4, 8\},$$

$$3\{1, 3, 7, 9\}, 5,\ \ 6\{1, 2, 3, 4\}, 10, 15\}. \qquad \diamondsuit$$

Застосуємо отримані результати для опису лівих дільників матриць. Нехай A – довільна $n \times n$-матриця з формою Сміта

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1,\ \ldots\ , \varepsilon_t, 0,\ \ldots\ ,\ 0),\ \varepsilon_t \neq 0,\ t \leq n.$$

І нехай $\Phi = \mathrm{diag}\,(1,\ \ldots\ , 1, \varphi)|\mathrm{E}$. Позначимо через $W(\mathrm{E},\ \Phi)$ підмножину множини $N_{n\times n}(\varphi)$, яка складається із матриць, останній рядок яких має вигляд

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_1)} l_1 & \ldots & \frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_t)} l_t & l_{t+1} & \ldots & l_n \end{matrix} \right\|.$$

Зауважимо, що коли матриця

$$S = \left\| \begin{matrix} & & * & & & \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_1)} l_1 & \ldots & \frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_t)} l_t & l_{t+1} & \ldots & l_n \end{matrix} \right\|$$

є представником суміжного класу $\mathbf{G}_\Phi S$, то, як випливає з теореми 6.1, всі матриці цього класу мають вигляд

$$\left\| \begin{matrix} & & * & & & \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_1)} v_1 & \ldots & \frac{\varphi}{(\varphi,\, \varepsilon_t)} v_t & v_{t+1} & \ldots & v_n \end{matrix} \right\|.$$

Теорема 7.10. *Якщо φ – нерозкладний елемент кільця R, то множина $\boldsymbol{W}(\mathrm{E},\ \Phi)$ складається з матриць*

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 \ \dots \ 0 \ \ a_s \ \ \dots \ \ a_{n-1} & I_1 \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 \ \dots \ 0 \ \ a_s \ \ \dots \ \ a_{n-2} & I_2 \end{array} \right\|, \ \dots\ ,$$

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 \ \dots \ 0 \ \ a_s & I_{n-s} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c|c} I_{s-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-s+1} \end{array} \right\|,$$

де s – номер першого інваріантного множника матриці A, який ділиться на φ, $a_i \in K(\varphi)$, $i = s, s+1, \dots, n-1$. При цьому множина $(\boldsymbol{W}(\mathrm{E},\ \Phi)P)^{-1}\Phi$ є множиною всіх нерозкладних дільників матриці $A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1}$ з формою Сміта Φ.

Доведення. Оскільки

$$\frac{\varphi}{(\varphi,\ \varepsilon_i)} = \varphi,\ i = 1, \dots, s-1,$$

то в множину $W(\mathrm{E}, \Phi)$ потраплять ті матриці з множини $N_n(\varphi)$, останній рядок яких має вигляд

$$\|\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad l_s \quad l_{s+1} \quad \dots \quad l_n\ \|.$$

Із нерозкладності елемента φ, випливає, що $D(\varphi) = \{\,1\,\}$. Отже,

$$N(\varphi) = \bigcup_{k=0}^{n-1} N_k(1),$$

де $N_k(1)$ складається з усіх рядків вигляду

$$\|a_1\ a_2 \dots a_{n-k-1}\ 1\ \underbrace{0 \dots 0}_{k}\|,$$

де $a_i \in K(\varphi)$, $\ i = 1, \dots n-k-1$.

Вибравши з множини $N(\varphi)$ рядки з потрібною структурою і доповнивши їх відповідним чином до оборотних матриць, отримаємо множину $W(\mathrm{E},\ \Phi)$.

І для завершення доведення достатньо зауважити, що всі нерозкладні матриці мають форму Сміта вигляду $\mathrm{diag}\ (1,\ \dots,\ 1,\ \varphi)$, де φ – нерозкладний елемент кільця R та використати теорему 4.4. $\square$

7.3. Застосування отриманих результатів до розв'язання матричних односторонніх рівнянь

На прикладі 5.6 (стор. 205) продемонстровано, що в деяких випадках для пошуку всіх розв'язків рівняння достатньо використати лише визначальну матрицю. Це буде тоді, коли потенційні форми Сміта унітальних дільників або задовольняють вимоги теореми 5.9, або ж дільників з такими формами не існує. Якщо це не так, то визначальна матриця генеруватиме лише частину шуканих розв'язків. У цьому випадку для розширення множини розв'язків використаємо поняття стандартного Ф-скелету. Продемонструємо це на конкретних прикладах, розв'язавши над F – алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль два рівняння: $X^2 = \mathbf{0}$ і $X^2 = X$, де X – матриці третього порядку . Тобто опишемо всі нільпотентні та ідемпотентні матриці третього порядку. Скептики скажуть, що розв'язки таких рівнянь давно відомі. І будуть, звичайно, правими. Дійсно, нільпотентними матрицями 3-го порядку є всі матриці вигляду

$$\mathbf{0}, \ \ T^{-1} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} T,$$

а ідемпотентними –

$$\mathbf{0}, \ \ I, \ \ T^{-1} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} T, T^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} T,$$

де T – неособлива матриця. Проте такий запис має серйозні вади. По-перше, серед таких розв'язків є такі, що повторюються. По-друге, і це набагато серйозніше, опис коренів у такому вигляді зводиться до опису всіх оборотних матриць третього порядку, а це вже інша ще не розв'язана задача.

Приклад 7.5. Знайдемо всі розв'язки рівняння

$$X^2 = \mathbf{0}, \tag{7.16}$$

де X – матриця третього порядку.

Матричному рівнянню (7.16) відповідає поліноміальна матриця $A(x) = Ix^2$, яка збігається зі своєю формою Сміта $\mathrm{E}(x) = Ix^2$. Очевидно, що $P_A = I$. Наше завдання полягає в тому щоб знайти всі ліві неасоційовні справа дільники матричного полінома Ix^2, степінь визначника яких дорівнює 3, та вибрати серед них унітальні.

Потенційними формами Сміта цих дільників є матриці

$$\Phi_1 = Ix, \;\; \Phi_2 = \mathrm{diag}(1,\; x,\; x^2).$$

Згідно з теоремою 5.1 матриці Φ_1 відповідає єдиний дільник $Ix = Ix - \mathbf{0}$. Тобто розв'язком рівняння (7.16) буде матриця $X_1 = \mathbf{0}$.

На підставі теореми 5.3 всі матриці з формою Сміта Φ_2 є дільниками матричного полінома $A(x)$. Тому потрібно описати всі неасоційовні справа матриці з формою Сміта Φ_2. Класифікуємо їх за допомогою їхніх Φ-скелетів. Стандартними Φ_2-скелетами будуть:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x^2 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x^2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x^2 & x \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x^2 \end{matrix} \right\|.$$

Множиною оборотних матриць зі стандартними Φ_2-скелетами буде:

$$Stand(\Phi_2) =$$

$$= \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx+c & d & 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ bx+c & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & bx+c & 1 \end{matrix} \right\| \right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

де $a, b, c, d \in F$. Отже, множиною всіх матриць зі стандартними Φ_2-скелетами буде $Stand^{-1}(\Phi_2)\Phi_2$. Виберемо з цієї множини всі матриці, які регуляризуються справа. Матриці Φ_2 відповідає матриця

$$J(\Phi_2) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$M_{\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx+c & d & 1 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = \left\| \begin{matrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = T_2.$$

Отже,

$$X = T_2^{-1} J(\Phi_2) T_2 = b^{-1} \left\| \begin{matrix} c & d & 1 \\ -ac & -ad & -a \\ (da-c)c & (da-c)d & da-c \end{matrix} \right\|.$$

Таким чином, множина

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} c & d & 1 \\ -ac & -ad & -a \\ (da-c)c & (da-c)d & da-c \end{matrix} \right\| \right\},$$

де $a, c, d \in F$, $b \in F \backslash \{0\}$, є множиною нільпотентних матриць, що породжені визначальною матрицею $V(\mathrm{E}, \Phi_2)$.

Аналогічно отримуємо такі множини розв'язків:

$$\mathbf{X}_2 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} -c & -1 & 0 \\ c^2 & c & 0 \\ ac & a & 0 \end{matrix} \right\| \right\}, \quad \mathbf{X}_3 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -c & -1 \\ cd & c^2 & c \end{matrix} \right\| \right\}.$$

Оскільки

$$\det M_{\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = \det M_{\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = $$
$$= \det M_{\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\|}(\Phi_2) = 0,$$

то матриці з множини

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right\}^{-1} \Phi_2$$

не регуляризуються справа і розв'язків не дають.

Матриці з Ф-скелетами

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x & x \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & x & x \end{matrix} \right\|$$

відповідно дають такі множини розв'язків

$$\mathbf{X}_4 = \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

$m \in F \backslash \{0\},\ n \in F,$

$$\mathbf{X}_5 = \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

$m,\ n \in F$, причому $m,\ n$ одночасно не дорівнюють нулю. ◇

Приклад 7.6. Знайдемо всі розв'язки рівняння

$$X^2 = X, \tag{7.17}$$

де X – матриця порядку 3.

Матричному рівнянню $X^2 - X = \mathbf{0}$ відповідає многочленна матриця $A(x) = Ix^2 - Ix$, яка збігається зі своєю формою Сміта $\mathrm{E}(x) = I(x^2 - x)$. Отже, $P_A = I$. Наше завдання полягає в тому, щоб знайти всі дільники матричного многочлена $I(x^2 - x)$, степінь визначника яких дорівнює 3. Потенційними формами Сміта цих дільників є

$$\Phi_1 = Ix, \quad \Phi_2 = I(x-1),$$

$$\Phi_3 = \mathrm{diag}(1,\ x,\ x(x-1)), \quad \Phi_4 = \mathrm{diag}(1,\ x-1,\ x(x-1)).$$

Матрицям Φ_1 та Φ_2 відповідають єдині розв'язки

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{X}_2 = I.$$

Розв'язки з формами Сміта характеристичних матриць Φ_3 класифікуємо їхніми Φ-скелетами :

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x(x-1) & x-1 & 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_3 = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{matrix} b+c & d & 1 \\ -(b+c)a & -da & -a \\ (b+c)(da-c) & d(da-c) & da-c \end{matrix} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x(x-1) & 1 & x-1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_4 = \left\{ -b^{-1} \left\| \begin{matrix} -(b+c) & -1 & 0 \\ (b+c)c & c & 0 \\ (b+c)a & a & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x-1 & x(x-1) & 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_5 = \left\{ -b^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -b-c & -1 \\ dc & (b+c)c & c \end{matrix} \right\| \right\},$$

де $a, c, d \in F, \ \ b \in F \backslash \{0\}$,

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{matrix} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_6 = \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n & 1 \end{matrix} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x-1 & x & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_7 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ nm & n & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_8 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

де $m, \ \ n \in F$.

На завершення схематично випишемо розв'язки рівняння (7.17), характеристичні матриці яких мають форму Сміта Φ_4:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x(x-1) & x & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_9 = \left\{ -b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} -b-c & -d & -1 \\ ac & ad-b & a \\ (c+b-da)c & (c+b-da)d & c-da \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x(x-1) & 1 & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{10} = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} b+c & 1 & 0 \\ -c(b+c) & -c & 0 \\ -ac & -a & b \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x & x(x-1) & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{11} = \left\{ b^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ d & b+c & 1 \\ -(b+c)d & -(b+c)c & -c \end{array} \right\| \right\},$$

де $a, c, d \in F, \ \ b \in F \backslash \{0\}$,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x-1 & x & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{12} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x & x-1 & x \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{13} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ -nm & n & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \\ x & x & x-1 \end{array} \right\| \Rightarrow \mathbf{X}_{14} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \end{array} \right\| \right\},$$

де $m, n \in F$. $\diamondsuit$

Перелік умовних позначень

R	— комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів без дільників нуля (комутативна область Безу);
$U(R)$	— група одиниць кільця R;
F	— поле;
$F[x]$	— кільце многочленів з коефіцієнтами з поля F;
$\mathbb{C}$	— поле комплексних чисел;
$\mathbb{C}^n$	— лінійний простір стовпців висоти n над $\mathbb{C}$;
$M_n(R)$	— кільце $n \times n$ матриць над R;
$\mathrm{GL}_n(R)$	— повна лінійна група кільця R;
$\mathbf{G}_\Phi$	— підгрупа групи $\mathrm{GL}_n(R)$ матриць H таких, що $H\Phi = \Phi F$, де $F \in \mathrm{GL}_n(R)$, Φ – d-матриця;
$\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$	— множина оборотних матриць H таких, що $H\mathrm{E} = \Phi S$, де $S \in M_n(R)$ і E, Φ – d-матриці;
$\mathbf{W}(\mathrm{E}, \Phi)$	— множина представників лівих суміжних класів множини $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ за групою $\mathbf{G}_\Phi$;
$a_i \mid a_j$	— елемент a_i є дільником елемента a_j (a_i ділить a_j);
$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— найбільший спільний дільник елементів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$;
$[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$	— найменше спільне кратне елементів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$;
A^T	— транспонована матриця до матриці A;
$\det A,\ \ \lvert A \rvert$	— визначник матриці A;

$\langle A\rangle$	— найбільший спільний дільник мінорів максимального порядку матриці A;
$\langle A\rangle_i$	— найбільший спільний дільник мінорів i -го порядку матриці A;
I	— одинична матриця;
I_n	— одинична матриця порядку n;
$\mathbf{0}$	—нульова матриця;
$\mathbf{0}_{m\times n}$	—нульова матриця відповідного порядку;
$\mathrm{diag}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— діагональна матриця з елементами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ на головній діагоналі (може бути прямокутною);
d-матриця	— діагональна матриця, в якій кожний попередній діагональний елемент ділить наступний;
$\mathrm{triang}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— нижня трикутна матриця з елементами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ на головній діагоналі (квадратна);
$A\oplus B$	— пряма сума матриць A та B, тобто матриця $\left\| \begin{smallmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{smallmatrix} \right\|$;
A^*	— матриця отримана заміною кожного елемента a_{ij} матриці A н.с.д. мінорів максимального порядку матриці, отриманої викресленням i рядка та j стовпця;
$\mathbf{P}_A$	— множина лівих перетворювальних матриць матриці A до її форми Сміта;
$K(f)$	— повна система лишків за модулем $f\in R$, тобто множина представників суміжних класів фактор-кільця R/Rf.

Список літератури

[1] Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* // Trans. Amer. Maht. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.

[2] Smith H.J.S. *On systems of linear indeterminate equations and congruences* // Philos. Trans. Roy. Soc., London. – 1861. – 151, №2. – P. 293–326.

[3] Dickson L.E. *Algebras and Their Arithmetics* // University of Chicago Press, Chicago, 1923.

[4] Wedderburn J.H.M. *On matrices whose coefficients are functions of single variable* // Trans. Amer. Math. Soc., – 1915. – **16**, №2. – P. 328–332.

[5] Wedderburn J.H.M. *Non-commutative domains of integrity* // J.Reine Andrew Math., – 1932. – **167**, №1. – P. 129–141.

[6] Van der Waerden B.L. *Moderne Algebra*, – Berlin, New-York, Springer. – 1930.

[7] Jacobson N. *Pseudo-linear transformations* // Ann. of Math., – 1937. – **38**. – P. 484–507.

[8] Helmer O. *The elementary divisor for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc., – 1943. – **49**, №2. – P. 225–236.

[9] Bass H. *K-theory and stable algebra* // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5–60.

[10] Gillman L., Henriksen M. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal* // Trans. Amer. Math. Soc., – 1956. – **82**. – P. 366–394.

[11] Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings* // Michigan Math. J. – 1955/56. – **3**. – P. 159–163.

[12] Lafon J.P. *Modules de presentation finite et de type fini sur un anneau-arithmetique* // Sump. mubh. Ist. naz. alta.-mat. Conv. nov. 1971-maggio, – 1972. – **11**. – P. 121–141.

[13] Amitsur S.A. *Remarks of principal ideal rings* // Osaka Math.Journ. – 1963. – **15**. – P. 59–69.

[14] Кон П. *Свободные кольца и их связи.* - М.: Мир.– 1976.

[15] Larsen M., Lewis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.

[16] McGowern W. *Bezout rings with almost stable range 1* // J. Pure Appl. Algebra. – 2008. – **212**. – P. 340–348.

[17] Забавський Б.В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше* 2 // Укр. Мат. Журн. – 2003. – **55**, №4. – С. 550–554.

[18] Zabavsky B.V. *Diagonazibility theorem for matrices over rings with finite stable range* // Algebra Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 151–165.

[19] Zabavsky B. *Diagonal reduction of matrices over rings* // Mathematical Studies, Monograph Series, V. XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, 251 p.

[20] Chen H. *Rings with many idempotents* // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1999. – **22,** № 3, – P. 547–558.

[21] *Yu H.P. Stable range one for exchange rings* // J. Pure Appl. Algebra. – 1995. – **98**, № 1. – P. 105–109.

[22] McGovern W. *Bezout rings with almost stable range* 1 // J. Pure. Appl. Algebra. – 2008. – **212**, № 2. – P. 340–348.

[23] Goodearl K., Menal P. *Stable range one for rings with many units* // J. Pure. Appl. Algeb. – 1998. – **54.** – P. 261–287.

[24] Cayley A. *A memoire on the theory of matrices* // London Phil. Trans. – 1858. – **148**. – P. 17–37.

[25] Sylvester M. *Sur les racines des matrices unitares* // Comptes Rendus. – 1882. – **94**. – P. 396–399.

[26] Sylvester M. *Sur la solutio on explicite de eguation quadratigue de Hamilton en quaternions ou en matrizen du second ordre* // Comptes Rendus. – 1884. – **99**. – P. 621–631.

[27] Frobenius F.G.L. *Uber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* // Sitz.-Berl. Acad. Wiss. Phys.-Math. Klasse, Berlin. – 1896. – S. 7–16.

[28] Ingraham M.N. *Rational method in matrix equation* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.

[29] Ingraham M.N. *On the rational solution of the matrix equation* $P(X) = A$ // Journal of Mathematics and Physics. – 1934. – **13**. – P. 46–50.

[30] Roth W.E. *A solution of the matrix equation* $P(X) = A$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**. – P. 579–596.

[31] Roth W.E. *On the unilateral equation in matrices* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1930. – **32**. – P. 61–80.

[32] Roth W.E. *On the equation* $P(A, X) = 0$ *in matrices* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – **35**. – P. 689–708.

[33] Lancaster P. *Jordan chains for lambda-matrices, II* // Equations Math. – 1970. – **5**. – P. 290–293.

[34] Lancaster P. *A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. I. Ordinary differential equations with constant coefficients* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**. – P. 189–211.

[35] Lancaster P. *A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. II. Ordinary differential equations with constant coefficients* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**. – P. 213–222.

[36] Langer H. *Factorization of operator pencils* // Acta Sci. Math. – 1976. – **38**. – P. 83–96.

[37] Lancaster P., Wimmer H.K. *Zur Theorie der λ-Matrizen* // Math. Nachrichten, 1975. – **68**. – P. 325 – 330.

[38] Dennis J.S., Traub J.F., Weber R.P. *The algebraic theory of matrix polynomials* // SIAM Journ. Numer. Annal. – 1976. – **13**, No 6. – 831–845.

[39] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Matrix polynomials.* – New York: Academic Press. – 1982. – 409 p.

[40] Маркус А.С., Мереуца И.В. *О некоторых свойствах простых λ-матриц* // Мат. исследования. – 1975. – **10**, № 3. – С. 207–214.

[41] Малышев А.Н. *Факторизация матричных полиномов* // Сиб. мат. журн. – 1982. – **23** , № 3. – С. 136 – 146.

[42] Беллман Р. *Введение в теорию матриц:* Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

[43] Ланкастер П. *Теория матриц:* Пер. с англ.– М.: Наука, 1978. – 280 с.

[44] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*– Кишинев: Штиинца, – 1986. – 260 с.

[45] Barnett S. *Matrices in control theory with applications to linear programming.* – London: Van Nostrand Reingold Company, 1971. – 222 p.

[46] Bell J.H. *Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrices equation* // Amer. J. Math. – 1949. – **71**. – P. 249–257.

[47] Bell J.H. *Families of solutions of the unilateral matrix equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – **1**. – P. 151–159.

[48] Krupnik I. *Decomposition of a monic matrix polynomial into a product of linear factors* // Linear Algebra Appl. – 1992. – **167**. – P. 239–242.

[49] Lancaster P., Rodman L. *Algebraic Riccati Equations.* – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 492 p.

[50] Lancaster P., Tismenetsky M. *The theory of matrices with Applications.* 2d ed. – New York: Academic Press, 1985. – 570 p.

[51] Langer H. *Factorization of operator pencils* // Acta Sci. Math. – 1976. – **38**. – S. 83–96.

[52] MacDuffee C.C. *The theory of matrices.* – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1933. – 110 p.

[53] Newman M., Thompson R.S. *Matrices over rings of algebraic integers* // Linear Algebra Appl. – 1991. – **145**. – P. 1–20.

[54] Казімірський П.С. *До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники* // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 446–448.

[55] Казімірський П.С. *Розв'язання проблеми виділення регулярного множника з матричного многочлена* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1075–1078.

[56] Казимирский П.С. *Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена* // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.

[57] Казімірський П.С. *Розклад матричних многочленів на множники.* – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.

[58] Лопатинский Я.Б. *Разложение полиномиальной матрицы на множители* // Научные записки Львовского политехнического института. Серия физико-математическая. – 1957. – **38**, № 2. – С. 3–7.

[59] Бабиков Г.В. *О факторизации матриц над телами и кольцами* // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 1. – С. 31–38.

[60] Бабиков Г.В. *О разложении матриц над некоторыми универсальными алгебрами* // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 5. – С. 1033–1035.

[61] Narang Asha, Nanda V.C. *Factorization of matrices over Dedekind domains* // Journal of the Indian Math. Soc. – 1979. – **43**. – P. 31–33.

[62] Боревич З.И. *О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов* // Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума по теории колец, алгебр и модулей. – Тарту: Тартуский университет. – 1976. – С. 19.

[63] Зелиско В.Р. *О строении одного класса обратимых матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – № 12. – С. 14–21.

[64] Зеліско В.Р., Кучма М.І. *Спільні дільники та спільні факторизації матричних многочленів* // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 111–118.

[65] Петричкович В.М. *Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.

[66] Петричкович В.М. *Паралельні факторизації многочленних матриць* // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.

[67] Петричкович В. М. *Про подільність та факторизацію матриць* // Математичні студії. – 2004. – **22,** № 2. – С. 115–120.

[68] Петричкович В.М. *Про кратності характеристичних коренів, степені елементарних дільників та факторизацію многочленних матриць* // Мат. методи та фіз-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 7–17.

[69] Petrychkovych V. *Generalized eguivalence of pairs of matrices* // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, № 2. – P. 179–188.

[70] Петричкович В.М. *Про діагоналізовність наборів матриць та єдиність їх факторизацій* // Вісник державного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1999. – № 364. – С. 177–180.

[71] Петричкович В. *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями* -Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.

[72] Hermite C. // Journal de Mathematiques. – 1849. – **14**, № 1. – P. 21–30.

[73] Thompson R.C. *The Smith form, the inversion rule for* 2×2 *matrices, and the uniqueness of the invariant factors for finitely generated modules* // Linear Algebra Appl. – 1982. – **44**. – P. 197–201.

[74] Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T. *Products of three triangular matrices* // Linear Algebra Appl. – 1999. – **292**. – P. 61–71.

[75] Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T. *Products of three triangular matrices over commutative rings* // Linear Algebra Appl. – 2002. – **348**. – P. 1–6.

[76] Chen H. *Rings related to stable range conditions* Vol. 11. World scientific, 2011.

[77] Васерштейн Л.Н. *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств* // Функ. анализ и его приложения. – 1971. – **5**. – Вып. 2. – С. 17–27.

[78] Newman M. *On the Smith normal form* // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1971. – **75B**. – P. 81–84.

[79] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[80] Roth W.E. *The equations* $AX - YB = C$ *and* $AX - XB = C$ *in matrices* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – № 3. – P. 392–396.

[81] Feinberg R.B. *Equivalence of partitioned matrices* // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1976. – **B 80**, № 1. – P. 89–97.

[82] Gustafson W.H. *Roth's theorem over commutative rings* // Linear Algebra Appl. – 1979. – 23. – P. 245–251.

[83] Hartwig R., Patricio P. *On Roth's pseudo equivalence over rings* // *Electronic Journal of Linear Algebra* – 2007. – 16. – P. 111–124.

[84] Newman M. *Integral matrices.* – NY: Academic Press. – 1972. – 224 p.

[85] Gerstein L. *A local approach to matrix equivalence* // Linear Algebra Appl. – 1977. – 16. – P. 221–232.

[86] Щедрик В.П. *Нахождение делителей с одним инвариантным множителем для матриц над кольцом главных идеалов* // Доклады Академии Наук Украины. – 1991, №12. – С. 12–14.

[87] Щедрик В.П. *Про один клас дільників матриць* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 3. – С. 12–18.

[88] Щедрик В. П. *Про перетворюючі матриці* // Доп. НАН України. – 1997, №10. – С. 58–60.

[89] Щедрик В.П. *Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Математичні студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 115–120.

[90] Щедрик В.П. *Про зведення оборотних матриць деякими перетвореннями до простішого вигляду* // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – № 346. - С. 172–176.

[91] Щедрик В.П. *Про перетворювальні матриці та дільники матриць над деяким областями Безу* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 36–44.

[92] Щедрик В.П. *Ф-скелет матриць і його властивості* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, – 2000. – **43**, № 2. – С. 45–51.

[93] Щедрик В.П. *Про дільники матриць та інваріанти перетворювальних матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 23–32.

[94] Щедрик В.П. *Неасоційовані матриці зі стандартним Ф-скелетом* // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 32–44.

[95] Щедрик В.П. *Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 1. – С. 23–28.

[96] Щедрик В.П. *Одностороння еквівалентність та група матриць, які квазікомутують із заданою діагональною матрицею* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2003. – Вип. 1. – С. 35–45.

[97] Shchedryk V.P. *On decomposition of complete linear group into some its subgroups* // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – P. 184–190.

[98] Mel'nyk O.M., Shchedryk V.P. *Some properties of minors of invertible matrices* // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – P. 129–134.

[99] Щедрик В.П. *Асоційовані матриці та деякі їх властивості* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 103–107.

[100] Shchedryk V.P. *Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B–domain* // Algebra Discrete Math. – 2005. – №2. – P. 46–57.

[101] Зеліско В.Р., Щедрик В.П. *Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування* // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2005. – **48**, №4. – С. 20–29.

[102] Щедрик В.П. *Деякий клас дільників особливих матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 22–27.

[103] Щедрик В.П. *Про мультиплікативність канонічної діагональної форми матриць* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2007. – Вип. 5. – С. 77–85.

[104] Щедрик В.П. *Деякі інваріанти перетворювальних матриць* // Мат. студії. – 2008. – **29**. – С. 121–126.

[105] Романів А.М., Щедрик В.П. *Про неасоційовні та унітальні дільники многочленних матриць* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 72–79.

[106] Shchedryk V.P. *Factorization of matrices over elementary divisor domain* // Algebra Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79–99.

[107] Щедрик В. П. *Про інваріантні множники блочно-трикутних матриць та її діагональних блоків* // Доп. НАН України. – 2010, №6. – С. 34-36.

[108] Щедрик В.П. *Перетворювальні матриці та породжені ними дільники* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, №4. – С. 64–72.

[109] Щедрик В.П. *О взаимосвязи инвариантных множителей блочно-треугольной матрицы и ее диагональных блоков* // Мат. заметки. – 2011. – **90**, №4. – С. 599–612.

[110] Shchedryk V. *On the one-side equivalence of matrices with given canonical diagonal form* // Algebra Discrete Math. – 2011. – **12**, №2. – P. 102–111.

[111] Щедрик В.П. *Комутативні області елементарних дільників та деякі властивості їх елементів* // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, №1. – С. 126–139.

[112] Романів А.М., Щедрик В.П. *Найменше спільне праве кратне матриць з одним відмінним від одиниці інваріантним множником* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2013. – **56**, № 4. – С. 67–74.

[113] Романів А.М., Щедрик В.П. *Найбільший спільний дільник матриць, одна з яких має один відмінний від одиниці інваріантний множник* // Укр. мат. журн. - 2014. – **66**, № 3. – С. 425–430.

[114] Щедрик В.П. *Кільця Безу стабільного рангу* 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 849–860.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача

Володимир Пантелеймонович Щедрик

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Монографія

Рекомендовано до друку вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

Редактор *Д.С. Бриняк*
Комп'ютерна верстка *О.М. Романів*

Підп. до друку 10.01.2017.

Формат $70 \times 100\frac{1}{16}$
Папір офсетний. Гарнітура LaTeX
Умовн. друк. арк. 24,51. Тираж 300 прим. Зам. № 01/17

Видрукувано у Дослідно-видавничому центрі
Наукового товариства ім. Шевченка

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
об'єктів видавничої справи ДК № 884 від 04.04. 2002 р.