НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

Василь Петричкович

УЗАГАЛЬНЕНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ І ЇХ НАБОРІВ ТА ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ

Львів — 2015

ББК В152.2я44+В152.5я44
П 303
УДК 512.55+512.64

Василь Петричкович. Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. -Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача НАН України, 2015. -312с.

У монографії вивчаються різні типи еквівалентностей матриць, їх пар та скінченних наборів над кільцями: узагальнена еквівалентність пар та скінченних наборів матриць над кільцями головних ідеалів та адекватними кільцями, напівскалярна еквівалентність матриць і їх наборів над кільцями поліномів. Встановлено форми пар та наборів матриць щодо цих перетворень та використано під час вивчення властивостей канонічних діагональних форм, у задачах подільності та факторизації матриць. Особливу увагу зосереджено на факторизації матриць над кільцями поліномів.

Для спеціалістів з теорії кілець, лінійної алгебри.

Бібліогр. 245 назв.

Vasyl‘ Petrychkovych. Generalized equivalence of matrices and its collections and factorization of matrices over rings. -Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, 2015. -312p.

The several equivalences of matrices and their pairs and finite collections over rings are study. It is established the standard form for a pair of matrices over principal ideal rings and the adequate rings in respect to introduced concept at generalized equivalence and the form of a collection of polynomial matrices over any field in respect to semiscalar equivalence. Some applications of these forms, in particular for constructing of methods factorization of matrices are suggested. The considerable parts of the book devoted to study the factorizations of matrices over rings of polynomials.

The book is intended for specialists in the theory of rings and linear algebra, senior and post-graduate students.

Ref. 245.

Рецензенти:
В.М. Бондаренко, доктор фіз.-мат. наук, професор, провідний науковий співробітник відділу алгебри Інституту математики НАН України;
М.Я. Комарницький, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри алгебри і логіки Львівського національного університету ім. І.Франка.

ISBN 978-966-02-7619-2

Зміст

Перелік умовних позначень

R	— комутативне кільце;
$U(R)$	— група одиниць кільця R;
$\mathbf{F}$	— поле;
$\mathbf{F}[x]$	— кільце поліномів з коефіцієнтами із $\mathbf{F}$;
$\mathbf{F}_g$	— поле розкладу полінома $g(x) \in \mathbf{F}[x]$;
$\mathbb{C}$	— поле комплексних чисел;
$\mathbb{Z}$	— кільце цілих чисел;
$\mathbb{C}_n$	— лінійний простір рядків довжини n над $\mathbb{C}$;
$\mathbb{C}^n$	— лінійний простір стовпців висоти n над $\mathbb{C}$;
$a_i \mid a_j$	— елемент a_i є дільником елемента a_j (a_i ділить a_j);
$a_i \nmid a_j$	— a_i не ділить a_j;
R_δ	— повна система лишків за модулем $\delta \in R$;
R'_δ	— така максимальна підмножина множини R_δ, що для будь-яких $a, b \in R'_\delta$ і кожного $u \in U(R)$ справедливе співвідношення $ua \not\equiv b \,(\operatorname{mod} \delta)$;
R''_δ	— така максимальна підмножина множини R'_δ, що кожний елемент $a \in R''_\delta$, відмінний від 1, має нетривіальний спільний дільник з δ: $(a, \delta) \neq 1$, якщо $a \neq 1$;

$M(m,\ n,\ R)$	— множина $m \times n$-матриць над R;
$M(n,\ R)$	— кільце $n \times n$-матриць над R;
$GL(n,R)$	— повна лінійна група, тобто група оборотних матриць із $M(n,\ R)$;
$\operatorname{diag}(a_1,\ \ldots,\ a_n)$	— діагональна матриця з елементами $a_1,\ \ldots,\ a_n$ на головній діагоналі;
d-матриця	— діагональна матриця $\operatorname{diag}(a_1,\ \ldots,\ a_n)$, де $a_i \mid a_i + 1$, $i = 1,\ \ldots,\ n-1$;
$GL_\Phi(n,R)$	— підгрупа групи $GL(n,R)$ таких матриць H, що $H\Phi = \Phi F$, $F \in GL(n,R)$ і Φ — d-матриця;
${}_\Phi GL(n,R)$	— підгрупа групи $GL(n,R)$ таких матриць F, що $\Phi F = H\Phi$, $H \in GL(n,R)$;
I	— одинична матриця відповідного порядку;
I_n	— одинична матриця порядку n;
$\mathbf{0}$	— нульова матриця відповідного розміру;
$\mathbf{0}_{m,n}$	— нульова $m \times n$-матриця;
A^t	— транспонована матриця до матриці A;
$\operatorname{rang} A$	— ранг матриці A;
$\det A$	— визначник матриці A;
d_k^A	— найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці A;
$\operatorname{adj} A,\ (A_*)$	— матриця, складена з алгебраїчних доповнень і транспонована (приєднана, взаємна матриця);
$\mathbf{a} = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$	— вектор-рядок довжини n з елементами $a_1,\ \ldots,\ a_n$;

$d = (a_1, \ \dots, \ a_n)$	— найбільший спільний дільник елементів $a_1, \ \dots, \ a_n$;
$\mathrm{triang}(a_1, \ \dots, \ a_n)$	— трикутна матриця з елементами $a_1, \ \dots, \ a_n$ на головній діагоналі;
$D^A = \mathrm{diag}(\mu_1^A, \dots, \mu_n^A)$	— канонічна діагональна форма (форма Сміта) матриці A;
μ_k^A	— k-ий інваріантний множник матриці A;
$T^A = \mathrm{triang}(\mu_1^A, \dots, \mu_n^A)$	— нижня трикутна форма матриці A з інваріантними множниками μ_i^A на головній діагоналі;
$\{U\}_A$	— множина лівих перетворювальних матриць матриці A до її канонічної діагональної форми;
${}_A\{V\}$	— множина правих перетворювальних матриць матриці A до її канонічної діагональної форми;
$\mathrm{diag}\{A_1, \ \dots, \ A_k\}$	— клітково-діагональна матриця з клітками $A_i \in M(n_i, R)$, $i = 1, \dots, k$, на головній діагоналі;
$\mathrm{triang}\{A_1, \ \dots, \ A_k\}$	— верхня клітково-трикутна матриця з клітками $A_i \in M(n_i, R)$, $i = 1, \dots, k$, на головній діагоналі.

ПЕРЕДМОВА

Монографію присвячено вивченню різних типів еквівалентностей матриць і їх скінченних наборів над кільцями та факторизацій матриць.

Добре відомі класичні поняття еквівалентності матриць та їх пар. Г.Сміт [225] вперше в 1861 р. встановив, що кожна матриця з цілими елементами (матриця над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$) еквівалентна до канонічної діагональної форми, яка названа нормальною формою Сміта. Результат Г.Сміта поширювали багато авторів на різні класи кілець головних ідеалів, як комутативних, так і некомутативних [146], [169], [227], [235] та інші області [199], [201], [208], [207], [165]. Загалом задача про те, за яких умов у кільці кожна матриця еквівалентна до канонічної діагональної форми (кільце з властивістю діагональної редукції матриць або кільце еленентарних дільників [175], залишається нерозв'язаною.

Вейерштрас [236] та Кронекер [176], [12] встановили канонічні форми для регулярних та сингулярних пучків матриць, тобто задачу про еквівалентність пар матриць розв'язали лише для пар матриць над полями.

Крім вивчення еквівалентності матриць та їх скінченних наборів над кільцями в такій класичній постановці, в багатьох задачах необхідно дослідити спеціальні типи еквівалентностей матриць, тобто еквівалентності матриць, за яких матриці переходу (перетворювальні матриці) належать до деяких підгруп повної лінійної групи основного кільця.

Прикладами таких еквівалентностей є елементарна еквівалентність матриць [138], [213], [27], [28], [242], скалярна еквівалентність поліноміальних матриць [12], [80] та ін. [149], [157].

У 1977 р. П.С.Казімірський та автор [60] ввели поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць та їх скінченних наборів над кільцем поліномів $\mathbf{F}[x]$, де $\mathbf{F}$ — поле. Якщо поле $\mathbf{F}$ алгебраїчно замкнене характеристики нуль і поліноміальні матриці неособливі або повних рангів, то для скінченних наборів таких матриць стосовно напівскалярної еквівалентності вони побудували трикутну форму з інваріантними множниками на головних діагоналях.

У книзі розглянуто задачу про напівскалярну еквівалентність довільних поліноміальних матриць і їх наборів над полями, в тому числі і скінченними. Встановлено спеціальну трикутну форму для поліноміальних матриць і їх наборів щодо напівскалярної еквівалентності.

Крім того, введено поняття узагальненої еквівалентності пар та скінченних наборів матриць над кільцями. Вказано стандартну форму для пари матриць над адекватними кільцями, а також деякі форми наборів матриць відносно узагальненої еквівалентності, які в окремих випадках визначені однозначно, тобто є канонічними.

Встановлені стандартні форми матриць та їх наборів над поліноміальними та іншими кільцями використано під час вивчення мультиплікативних властивостей канонічних діагональних форм, у задачах подільності матриць та для розробки методів їх факторизації.

Значну частину книги присвячено вивченню структури матриць, зокрема, їх факторизацій над поліноміальними кільцями, тобто поліноміальних матриць або матричних поліномів. Ці терміни вживатимуться залежно від форми запису об'єкта у вигляді матриці $A(x) = \ \|a_{ij}(x)\|_1^{m,n}$ з елементами із кільця поліномів $\mathbf{F}[x]$ чи полінома $A(x) = \Pi_{i=1}^{m} A_i x^i$ з матричними коефіцієнтами $A_i \in M(m, n, \mathbf{F})$, де $\mathbf{F}$ — деяке поле.

Дослідження матричних поліномів, їх факторизацій інтенсивно розпочато з середини 20-го століття. У цьому напрямку відмітимо праці Лопатинського, Ланкастера, Лангера, Віммера, Деніса,Трауба, Вебера, Гохберга, Родмана, Маркуса, Мереуци, Малишева, Казімірського та його учнів (див. праці зі списку літератури) та ін.

Підсумовуючими у цьому напрямку є монографії: *Казімірський П. С.* "Розклад матричних многочленів на множники". – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с. та *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 409 p., які опубліковані більше тридцяти років тому — у 1981 і 1982 рр., відповідно.

Один із відомих підходів та розроблені на його основі методи факторизації матричних поліномів ґрунтуються на класичних поняттях власних та приєднаних векторів, що відповідають характеристичним кореням матричних поліномів та жорданових ланцюгів (див., наприклад, монографію [160] та ін.).

П.С.Казімірський [48], [49] запропонував оригінальний підхід до розв'язування цих задач. На основі введених нових понять значення поліноміальної матриці на системі коренів полінома та супровідної матриці він розробив метод факторизації матричних поліномів. Це дало можливість отримати розв'язок задачі про виділення регулярного множника із матричного полінома над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль.

Обидва ці підходи, як і розроблені на їх основі методи факторизації, можна застосувати до матричних поліномів, якщо основне поле — комплексних чисел або будь-яке алгебраїчно замкнене характеристики нуль. Задача факторизації матричних поліномів над іншими полями розв'язана лише в окремих випадках.

У монографії на основі встановленої стандартної форми матричних поліномів і їх наборів щодо напівскалярної еквівалентності розроблено метод їх факторизації. Це дало можливість повністю описати паралельні або (Φ, Ψ)-факторизації матричних поліномів.

Крім загальної задачі про встановлення умов існування унітальних дільників та способів їх побудови для матричних поліномів над різними полями, виникають й інші задачі, серед яких виділимо ті, що розглянуто у книзі:

— опис класів розкладних на унітальні множники матричних поліномів. Відомо, що регулярний матричний поліном розкладається на лінійні унітальні множники, якщо він має просту структуру (тобто його елементарні дільники лінійні) [44], [83], [114], кратності його характеристичних коренів не перевищують двох [61], степені елементарних дільників не перевищують двох [58], [123], [177] та інші. Тому важливо розширити ці класи, зокрема, виділити розкладні матричні поліноми, кратності характеристичних коренів та степені елементарних дільників яких є більшими від двох;

— оцінка числа дільників та факторизацій матричних поліномів. Інграгам [168] та Белл [137] виділили класи поліноміальних матричних рівнянь, які мають нескінченну кількість розв'язків, зокрема, і класи матричних поліномів, які мають нескінченну кількість лінійних унітальних дільників. П.С.Казімірський вказав класи матричних поліномів, які можуть мати лише скінченну кількість лінійних унітальних дільників [43], [49]. Тому виникає природне запитання: якщо існує скінченна кількість дільників, то в яких межах вона знаходиться та вказати матричні поліноми, які мають максимальну кількість унітальних дільників?

У монографії виділені ширші класи розкладних на унітальні множники матричних поліномів і вказані нижня та верхня межі для числа їх унітальних дільників матричних поліномів.

Особливо важливою є задача про розкладність матричного полінома на регулярні, зокрема унітальні, множники. Це зумовлено таким фактом. З узагальненої теореми Безу випливає, що якщо двочлен $B(x) = Ex - B$ є лівим дільником матричного полінома $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}$ над полем $\mathbf{F}$, то матриця $Y_0 = B$ є розв'язком матричного поліноміального рівняння $\sum_{i=0}^{m} Y^{m-i} A_i = 0$. Тому задача факторизації матричних поліномів містить задачу про розв'язність матричних поліномальних рівнянь. Крім того, добре відома важлива роль поліноміальних матриць, зокрема їх факторизацій з регулярними множниками, в теорії систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [77], [78]. Тому найбільшу увагу приділено описові таких факторизацій поліноміальних матриць та їх дільників, які регуляризуються, тобто право (ліво) еквівалентні (асоційовані) до регулярних, зокрема унітальних, матриць.

З.І.Боревич [7] сформулював задачу опису всіх факторизацій та дільників матриць з точністю до асоційовності. Зокрема, вказав (без доведення) умови існування єдиної з точністю до асоційовності факторизації неособливої матриці над кільцем головних ідеалів, яка відповідає факторизації її канонічної діагональної форми.

У монографії з використанням встановленої стандартної форми для пари матриць описано паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів та адекватними кільцями. Вказано всі, з точністю до асоційовності, такі факторизації матриць і встановлено критерії однозначності їх дільників та факторизацій.

Наведемо короткий огляд викладених у книзі результатів.

У першому розділі наведено відомі поняття та результати, які стосуються різних типів еквівалентностей матриць, їх пар та скінченних наборів, а також методи факторизації поліноміальних матриць, їх зв'язки з іншими задачами. Ці результати використовуватимуться під час викладу в наступних розділах.

Другий розділ присвячено дослідженню напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць і їх скінченних наборів. Встановлено спеціальну трикутну форму, яку названо стандартною, для поліноміальних матриць та їх наборів над довільним полем щодо напівскалярної еквівалентності. Встановлено зв'язки між напівскалярною еквівалентністю матричних поліномів і подібністю пар та наборів матриць над полем, а також показано, що задача про напівскалярну еквівалентність матричних поліномів містить задачу про подібність пар та наборів матриць над полем, тобто є дикою [21].

У третьому розділі введено поняття узагальненої еквівалентності пар та скінченних наборів матриць. Встановлено стандартну форму для пар матриць над адекватними кільцями щодо узагальненої еквівалентності. Вказано умови узагальненої еквівалентності пар матриць. Виділено класи пар матриць, для яких стандартну форму визначено однозначно. Встановлено критерій діагоналізовності пар матриць. Стандартну форму пари матриць використано під час вивчення мультиплікативних властивостей канонічних діагональних форм матриць над адекватними кільцями.

У четвертому розділі досліджено структуру поліноміальних матриць без кратних характеристичних коренів. Введено поняття абсолютно розкладних матричних поліномів. Доведено існування таких матричних поліномів із будь-якими заданими попарно різними характеристичними коренями. Вказано критерій абсолютної розкладності матричних поліномів. Доведено, що абсолютно розкладний матричний поліном є незвідний. Встановлено нижню та верхню межі для кількості лінійних унітальних дільників матричного полінома. Вказано зв'язки між числом дільників та звідністю поліноміальних матриць до кліткових виглядів, зокрема, виділено області для чисел дільників поліноміальних матриць, в яких вони звідні чи незвідні.

Із викладеного випливає, що розкладність на множники поліноміальних матриць тісно пов'язана з кратностями їх характеристичних коренів та степенями елементарних дільників.

У п'ятому розділі виділено класи поліноміальних матриць з елементарними дільниками степенів, вищих від двох, які розкладні на множники.

Шостий розділ присвячено побудові методу факторизації матричних поліномів над довільним полем. Факторизацію матричного полінома зведено до факторизації його у стандартній формі. На основі цього повністю описано паралельні або (Φ, Ψ)-факторизації матричних поліномів. Встановлено необхідні і достатні умови існування таких факторизацій та запропоновано спосіб їх побудови. Вказано критерій єдиності (Φ, Ψ)-факторизацій та унітальних дільників із заданими канонічними діагональними формами матричних поліномів.

У сьомому розділі розглянуто факторизації клітково-трикутних та клітково-діагональних поліноміальних матриць, зокрема, встановлено умови, за яких факторизації таких матриць є такого ж клітково-трикутного чи клітково-діагонального вигляду, тобто факторизації здійснено в кільці клітково-трикутних поліноміальних матриць. Тоді факторизації кліткових матриць зводимо до факторизацій їх діагональних кліток. Вказано метод побудови клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних поліноміальних матриць на основі розв'язків відповідних лінійних матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра.

В останньому восьмому розділі встановлену у третьому розділі стандартну форму пари матриць використано в задачах факторизації матриць над адекватними кільцями. На цій основі повністю описано (Φ, Ψ)-факторизації матриць над адекватними кільцями. Вказано структуру таких факторизацій. Сформульовано критерії однозначності з точністю до асоційовності (Φ, Ψ)-факторизацій матриць та їх дільників із заданими канонічними діагональними формами. Вказано на застосування стандартної форми пари матриць для встановлення стабільного рангу в кільцях матриць.

Розділ 1
ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ ТА МЕТОДИ ЇХ ФАКТОРИЗАЦІЙ

1111 У цьому розділі сформульовано відомі результати, які стосуються різних типів еквівалентностей матриць та їх пар над кільцями. Вказано на їх зв'язки з іншими задачами, зокрема, з задачею про подібність пар матриць над полем. Наведено два відомі методи та одержані з їх допомогою результати про факторизацію матричних поліномів.

1.1. Типи еквівалентностей матриць над різними областями та їх зв'язки

Нехай R — комутативне кільце з $1 \neq 0$. Матриці $A, B \in M(m,\ n,\ R)$ називають *еквівалентними*, якщо існують такі оборотні матриці $U \in GL(m,\ R)$ і $V \in GL(n,\ R)$, що
$A = UBV$.

Вперше Г.Сміт [225] в 1861 р. встановив, що кожна матриця з цілими елементами (матриця над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$) еквівалентна до матриці діагональної форми, тобто існують такі матриці $U \in \mathrm{GL}(m, R)$ і $V \in \mathrm{GL}(n, R)$, що

$$D^A = UAV = \mathrm{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \dots,\ \mu_r^A,\ 0,\ \dots,\ 0), \tag{1.1}$$

де $\mu_r^A \neq 0$ і $\mu_i^A | \mu_{i+1}^A,\ \ i = 1,\ 2,\ \dots,\ r-1$.

Матриця D^A є прямокутна $m \times n$-матриця над кільцем R, в якій всі елементи в позиціях (i, j) для $i \neq j$ дорівнюють нулю. Матрицю D^A називають *канонічною діагональною формою* або *нормальною формою Сміта* матриці A, а діагональні елементи μ_i^A — її *інваріантними множниками.*

Результат Г.Сміта поширювали багато авторів на різні класи кілець головних ідеалів як комутативних, так і не комутативних [146], [169], [227], [235], а також на інші області [199], [201], [208].

У 1943 р. О.Хелмер [165] ввів поняття адекватних кілець, які є розширенням кілець головних ідеалів, над якими кожна матриця є еквівалентною до канонічної діагональної форми.

Означення 1.1. [165]. Кільце R називають адекватним, якщо R – область цілісності, в якій кожний скінченно породжений ідеал головний і для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, причому c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із $b \in R$.

У цій же праці встановлено деякі властивості адекватних кілець, які є аналогічними до властивостей кілець головних ідеалів.

Теорема 1.1. *[165] Нехай*

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{array} \right\|$$

— матриця з елементами із адекватного кільця R,

$$1 < n = \operatorname{rang} M \le k$$

і

$$(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1k},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{nk}) = d.$$

Тоді існують такі елементи $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1} \in R$, що

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k) = d,$$

де

$$A_i = a_{1i}t_1\ +\ a_{2i}t_2\ +\ \cdots\ +\ a_{n-1,i}t_{n-1}\ +\ a_{ni},\ \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

На основі цієї теореми доведено основний результат: кожна матриця A з елементами із адекватного кільця еквівалентна до канонічної діагональної форми D^A.

Зауважимо, що на цей час є узагальнення таких кілець, наприклад, у працях [24], [67] вводять узагальнено адекватні кільця і доводять, що кожна матриця над такими кільцями еквівалентна до канонічної діагональної форми.

Кільця, над якими кожна матриця еквівалентна до канонічної діагональної форми, названі кільцями з діагональною редукцією матриць або кільцями *елементарних дільників* [175], [140]. Опис кілець, які є кільцями елементарних дільників, — це напрямок у теорії кілець, який розпочався із праці Г.Сміта, і є актуальним і сьогодні. Йому присвячені праці багатьох сучасних алгебраїстів: П.С.Казімірського [55], [50], М.Я.Комарницького [67], [68], [69], Б.В.Забавського [245], М.І.Дубровіна [23] і ін. [119], [161], [193], [244].

З іншого боку, П.М.Гудивок [16] виділив класи кілець, над якими задача про еквівалентність матриць є дикою (містить задачу про подібність пар матриць над деяким полем). Зрозуміло, що такі кільця не є кільцями елементарних дільників.

Крім вивчення еквівалентності матриць над кільцями в такій класичній постановці, в багатьох задачах виникає необхідність досліджувати спеціальні типи еквівалентностей матриць, тобто еквівалентності матриць, за яких матриці переходу (перетворювальні матриці) належать деяким підгрупам повної лінійної групи основного кільця.

Одним із прикладів такої еквівалентності є елементарна еквівалентність матриць, яку розглядали раніше [138], [213], [27], [242]. Матриці $A, B \in M(m,\ n,\ R)$ називають *елементарно еквівалентними*, якщо існують такі матриці $S \in E(m,\ R)$ і $T \in E(n,\ R)$, що $A = SBT$, де $E(m,\ R)$ і $E(n,\ R)$ — підгрупи елементарних матриць. Якщо R — евклідове кільце, то, очевидно, поняття еквівалентності і елементарної еквівалентності матриць збігаються. Задача полягає в описі кілець, над якими матриці елементарно еквівалентні до канонічної діагональної форми, тобто зведені до цієї форми за допомогою елементарних операцій над рядками та стовпцями матриць.

Іншим прикладом такої еквівалентності є поняття скалярної еквівалентності поліноміальних матриць.

Нехай $\mathbf{F}$ — довільне поле, $\mathbf{F}[x]$ — кільце поліномів над $\mathbf{F}$ і $A(x), B(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x])$.

Поліноміальні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають *еквівалентними*, якщо

$$A(x) = U(x)B(x)V(x)$$

для деяких матриць $U(x) \in GL(m, P[x])$ і $V(x) \in GL(n, P[x])$. Якщо матриці $U(x)$ і $V(x)$ не залежать від змінної x, тобто

$$A(x) = UB(x)V,$$

де $U \in GL(m, \mathbf{F})$ і $V \in GL(n, \mathbf{F})$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають *строго* [12] або *скалярно* [80] еквівалентними.

Задача про скалярну еквівалентність розв'язана лише для поліноміальних матриць першого порядку, тобто для пучків матриць $Ax + B$.

Пучок матриць $Ax+B$ називають регулярним, якщо матриці A і B квадратні і $\det(Ax+B) \not\equiv 0$. Якщо $\det(Ax+B) = 0$ у випадку, коли матриці A і B квадратні, або A і B – прямокутні матриці, то пучок $Ax+B$ називають сингулярним.

Для регулярних пучків задачу про їх скалярну еквівалентність розв'язав Вейерштрас в 1867 р. [236]. На основі розробленої теорії елементарних дільників він вказав критерій скалярної еквівалентності регулярних пучків та побудував канонічну форму. Зокрема, встановив, що пучки матриць A_1x+B_1 і A_2x+B_2, де A_1 і A_2 — неособливі матриці, скалярно еквівалентні тоді і тільки тоді коли вони еквівалентні, тобто мають ті самі інваріантні множники. Зауважимо, що для поліноміальних матриць степенів більших ніж один із їх еквівалентності не випливає скалярної еквівалентності.

У 1890 р. Кронекер [176] встановив канонічну форму для сингулярних пучків матриць. М.П.Кравчук [70], [71], [72] вказав елементарний метод зведення пари матриць над полем до канонічної форми Кронекера. Дьєдоне в праці [148] дає нове трактування форми Кронекера. У праці [238] наведено форми так званих структурованих матричних пучків.

Означення 1.2. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ із $M(m,n,P[x])$ називаємо напівскалярно еквівалентними, якщо існують такі матриці $U \in GL(m,P)$ і $V(x) \in GL(n,P[x])$, що

$$A(x) = UB(x)V(x).$$

Це поняття ввели П.С.Казімірський та автор цієї книги у 1977 р. [60]. Вони встановили, що поліноміальна матриця $A(x)$ – неособлива або повного рангу (якщо вона прямокутна) над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль напівскалярно еквівалентна до трикутної матриці $T^A(x)$ з інваріантними множниками на головній діагоналі. Цей результат вони поширили для наборів поліноміальних матриць. Пізніше у 1982 р.

L.Baratchart [128] сформулював подібний результат: для неособливої поліноміальної матриці $A(x)$ над нескінченним полем існують такі оборотна матриця $U(x)$ і неособлива скалярна (над полем) матриця V, що матриця $U(x)B(x)V$ є верхньою трикутною з інваріантними множниками на головній діагоналі. Цей же результат у 1999 р. доводять J.A. Dias da Silva і T.J. Laffey [145]. Таку еквівалентність поліноміальних матриць у цій праці називають "поліноміально-скалярною" (PS – equivalent (polynomial – scalar)).

У монографії встановлено форми для поліноміальних матриць особливих і неповних рангів і їх наборів над довільним полем відносно напівскалярних еквівалентних перетворень. Якщо $\mathbf{F}$ — скінченне поле, вказано умови, за яких поліноміальна матриця напівскалярно еквівалентна до такої форми.

Задача про напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць містить добре відому задачу про подібність пар матриць над полем, яка розв'язана повністю лише в певних випадках і пов'язана з іншими задачами [13], [20], [21], [150], [151], [155], [115], [220], [135]. У праці [228] вивчають так звані леонардові пари матриць, тобто пари матриць над полем, які подібні до пари діагональної та тридіагональної матриць, та наведено приклади їх застосування. Тому результати про напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць можна використати до цих задач.

Набори матриць

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k)\ \text{ і }\ (B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k)$$

називають *еквівалентними*, якщо

$$A_i = UB_iV, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

для деяких оборотних матриць U і V над R.

Задачу про еквівалентність наборів матриць розв'язали лише для пар матриць $(k = 2)$, коли $R = \mathbf{F}$ — поле, Вейерштрас

[236] та Кронекер [176], [12]. П.М.Гудивок [16] довів, що задача еквівалентності пар матриць над певними кільцями є дикою і тому її розв'язання є надзвичайно складним. Проте для розв'язку багатьох задач, зокрема про факторизацію матриць, мультиплікативність їх канонічних діагональних форм, в теорії зображень груп та скінченновимірних алгебр тощо необхідно вивчати еквівалентність пар та скінченних наборів матриць лише зі спільною односторонньою перетворювальною матрицею.

В.Длаб і М.Рінгель [149], у зв'язку із зображенням скінченновимірних алгебр [22], розглянули таку еквівалентність пар комплексних матриць (A_1, A_2): (QA_1P_1, QA_2P_2), де Q — комплексна, P_1, P_2 — дійсні оборотні матриці, і встановили для них канонічну форму відносно таких перетворень.

В.В.Сергейчук і Т.Н.Гайдук [157] запропонували канонічну форму (A_{gen}, B_{gen}) для пари матриць (A, B) над полем відносно спільних рядкових і різних стовпцевих перетворень:

$$A_{gen} = \left\| \begin{matrix} I_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \; B_{gen} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$r + s = r_A, \; r + t = r_B, \; r + s + t = r_M$$

і

$$r_M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\|.$$

П.С.Казімірський і Б.В.Забавський [25] довели, що пару матриць над адекватним кільцем, одна з яких неособлива, спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями можна звести до трикутного вигляду з інваріантними множниками на головних діагоналях.

Тому природньо ввести таке поняття.

Означення 1.3. Набори матриць

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k),\quad (B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k)$$

над кільцем R називаємо узагальнено еквівалентними, якщо

$$A_i = UB_iV_i,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

для деяких оборотних матриць U і V_i над кільцем R.

Зрозуміло, що коли $V_1 = V_2 = \cdots = V_k$, то одержуємо класичну еквівалентність наборів матриць.

Задача про узагальнену еквівалентність, як і задача про еквівалентність пар матриць над кільцями, є дикою. Тому її повне розв'язання можливе лише для окремих класів пар матриць. Але важливо встановити прості форми пар та скінченних наборів матриць стосовно узагальненої еквівалентності. У розділі 3 монографії встановлено так звану стандартну форму для пари матриць над адекватними кільцями, а також деякі форми наборів матриць відносно узагальненої еквівалентності, які в окремих випадках визначені однозначно, тобто є канонічними. Наведено деякі застосування цих форм, зокрема, в задачах факторизації матриць.

1.2. Факторизація поліноміальних матриць та розв'язування матричних рівнянь

Нехай $\mathbf{F}$ — поле і

$$A_0Y^m + A_1Y^{m-1} + \ \cdots\ + A_{m-1}Y + A_m = 0, \qquad (1.2)$$

$$Y^mA_0 + Y^{m-1}A_1 + \ \cdots\ + YA_{m-1} + A_m = 0 \qquad (1.3)$$

— поліноміальні матричні односторонні рівняння, де $A_i \in M(n, \mathbf{F})$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Матрицю

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m \tag{1.4}$$

називають характеристичною матрицею рівнянь (1.2) і (1.3), поліном $\Delta(x) = \det A(x)$ — характеристичним, а його корені — характеристичними коренями матриці $A(x)$ і матричних рівнянь (1.2) і (1.3) [49].

Не маючи загального підходу і методів розв'язування рівнянь вигляду (1.2), кожне рівняння ров'язували у конкретному випадку. Зокрема, найпростіші матричні рівняння розв'язували ще у другій половині XIX століття. Келі [143] вперше вказав розв'язки матричного двочленного рівняння $X^2 = A$ для матриць A другого і третього порядків. Ідеї Келі розвинув Сильвестр [223], [224], який, зокрема, розглянув двочленні матричні рівняння $X^m = I$ та $X^m = 0$, де I — одинична матриця. Фробеніус [156] знайшов всі розв'язки рівняння $X^2 = A$, коли A – неособлива матриця. Далі інші автори розглядали загальне двочленне рівняння $X^m = A$ і вказали розв'язки з певними властивостями [12], [147], [194]. П. С. Казімірський з учнями [49], [62], [63] встановив критерій існування ров'язків рівняння $X^m = A$ в термінах степенів елементарних дільників матриці A.

Рот розглянув окремі типи цих матричних рівнянь, зокрема, скалярне вигляду

$$p_0Y^m + p_1Y^{m-1} + \cdots + p_{m-1}Y + p_mI = 0$$

з коефіцієнтами p_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, із поля [215], одностороннє [216], [217] та різносторонні [218], [219]. Деякі із цих типів матричних рівнянь досліджував також Інграгам [167], [168].

Тройєнфельс [233], [5] виявив, що для існування хоч би одного розв'язку матричного квадратного рівняння

$$Y^2 - 2AY + B = 0,$$

достатньо, щоб характеристичні корені матриці

$$R = \left\| \begin{array}{cc} A & I \\ A^2 - B & A \end{array} \right\|$$

були різні. М.Петков [85] цей результат поширив для матричного рівняння вигляду

$$Y^2 - CY - D = 0.$$

Для знаходження та повного опису розв'язків рівняння (1.2) їх необхідно класифікувати. Сильвестр встановив для квадратного матричного рівняння

$$A_o Y^2 + A_1 Y + A_2 = 0,$$

що кожний характеристичний корінь його розв'язку B є характеристичним коренем його характеристичної матриці

$$A(x) = A_o x^2 + A_1 x + A_2.$$

A. Buchheim довів цей факт для матричного рівняння (1.2) в загальному випадку. Звідси одержуємо, що характеристичний поліном $\det(Ix - B)$ розв'язку B рівняння (1.2) є дільником характеристичного полінома $\det A(x)$ його характеристичної матриці $A(x)$ (1.4). Отже, всі розв'язки рівняння (1.2) розбиваються на класи із тим самим характеристичним поліномом, який є дільником характеристичного полінома характеристичної матриці цього рівняння. Такий підхід застосував П.С.Казімірський, розглядаючи рівняння (1.3) [38], [39].

Узагальненням цього факту стала теорема Безу для матричних поліномів, із якої випливає, що матриця B є розв'язком рівняння (1.3) тоді і тільки тоді, коли матриця $B(x) = Ix - B$ є лівим дільником характеристичної матриці $A(x)$ рівняння (1.3) [168]. У цій же праці стверджується, що інваріантні множники дільника $B(x)$ матриці $A(x)$ є дільниками відповідних інваріантних множників матриці $A(x)$. На основі цього факту всі розв'язки рівняння (1.3) можна розбити на класи подібних між собою розв'язків.

Опис подібних розв'язків матричних поліноміальних рівнянь (1.2) і (1.3) у деяких випадках описані у працях [137], [19].

Таким чином, задача про знаходження розв'язків матричних поліноміальних рівнянь (1.2) і (1.3) є складовою задачі про описання унітальних дільників поліноміальних матриць (1.4).

Добре відоме алгебраїчне рівняння Ріккаті

$$XAX + BX + XC + D = 0 \tag{1.5}$$

та його застосування в багатьох прикладних задачах [1], [2], [189]. Крім теоретичних методів [218], [214], [189], існує багато числових методів розв'язування таких [1], [2] та інших матричних рівнянь [37], [116], [120].

Припустимо, що матриця A – неособлива. Введемо таку заміну:

$$X = A^{-1}(Z - C).$$

Тоді, після відповідних перетворень, із рівняння (1.5) одержимо одностороннє квадратне матричне рівняння

$$Z^2 + MZ + N = 0,$$

де

$$M = ABA^{-1} - C, \; N = -ABA^{-1}C + AD.$$

Тому методи факторизації матричних поліномів можна застосувати підчас розв'язування також матричних різносторонніх рівнянь.

1.3. Власні і приєднані вектори, жорданові ланцюги, лінеаризації поліноміальних матриць та їх факторизація

Один із методів факторизації поліноміальних матриць ґрунтується на класичних поняттях власних і приєднаних векторів, жорданових ланцюгів.

Нехай

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

– неособлива поліноміальних матриця, де $A_i \in M(n, \mathbb{C})$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$.

Ненульовий вектор-рядок

$$\mathbf{u} = \| \ u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \ \|, \ \ u_i \in \mathbb{C}, \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

називають *лівим характеристичним вектором* матриці $A(x)$, що відповідає її характеристичному кореню α, якщо $\mathbf{u}A(\alpha) = 0$.

Ненульовий вектор–стовпець

$$\mathbf{v} = \| \ v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \ \|^t, \ \ v_i \in \mathbb{C}, \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

де t – символ транспонування, називають *правим характеристичним вектором* матриці $A(x)$, що відповідає її характеристичному кореню α, якщо $A(\alpha)\mathbf{v} = 0$.

П.Ланкастер у працях [187], [188] у термінах характеристичних векторів дає умови розкладності поліноміальних матриць другого, третього та четвертого порядків на лінійні множники простої структури, які не мають спільних характеристичних коренів.

Теорема 1.2. *[187], [188]. Нехай $A(x)$ – регулярна поліноміальна матриця 2-го степеня. Припустимо, що $2n$ її характеристичних коренів можна розбити на дві множини, що не перетинаються,*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n \ \ i\ \ \alpha_{n+1},\ \alpha_{n+2},\ \ldots,\ \alpha_{2n},$$

і що існують n лівих лінійно незалежних характеристичних векторів $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n$, що відповідають характеристичним кореням $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ і n правих лінійно незалежних характеристичних векторів $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$, що відповідають характеристичним кореням $\alpha_{n+1},\ \alpha_{n+2},\ \ldots,\ \alpha_{2n}$. Запишемо такі матриці:

$$U = \left\| \begin{matrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{matrix} \right\|,\ V = \left\| \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{matrix} \right\|$$

і

$$\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n),\quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}(\alpha_{n+1},\ \alpha_{n+2},\ \ldots,\ \alpha_{2n}).$$

Тоді для матриці $A(x)$ існує розклад вигляду

$$A(x) = (Ex - (U\Lambda_1 U^{-1})^t)A_0(Ex - V\Lambda_2 V^{-1}).$$

Подібні результати формулюються і для поліноміальних матриць третього та четвертого степенів.

П.С.Казімірський узагальнив ці результати П.Ланкастера для довільних неособливих поліноміальних матриць (необов'язково регулярних) і без обмеження на спектри множників.

Теорема 1.3. *[44]. Для того, щоб для неособливої поліноміальної матриці* $A(x)$ *існував розклад вигляду*

$$A(x) = (Ix - B)D(x),$$

де B *– числова матриця простої структури, необхідно і достатньо, щоб для матриці* $A(x)$ *існувало* n *лівих лінійно незалежних її характеристичних векторів.*

Крім того, він довів, що регулярна поліноміальна матриця простої структури розкладна у добуток множників простої структури [49].

Для формулювання умов виділення із поліноміальної матриці довільних множників використовують поняття жорданових ланцюгів для поліноміальної матриці.

Кажуть, що вектори

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_1 \neq 0,$$

утворюють *лівий жордановий ланцюг* матриці $A(x)$, що відповідає характеристичному кореню α, якщо вони задовольняють умови

$$\mathbf{u}_j A(\alpha) + \frac{1}{1!}\mathbf{u}_{j-1} A^{(1)}(\alpha) + \ \cdots\ + \frac{1}{m!}\mathbf{u}_{j-m} A^{(m)}(\alpha) = 0,$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{-1} = \cdots\ = \mathbf{u}_m = 0,$$

де $A^{(l)}(x)$ – похідна l -го порядку матриці $A(x)$.

Число k називають довжиною жорданового ланцюга.

У ланцюгу вектор $\mathbf{u}_1$ – це характеристичний вектор матриці $A(x)$, а вектори

$$\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k$$

називають *приєднаними векторами* до характеристичного вектора $\mathbf{u}_1$.

Довжина жорданового ланцюга, що відповідає характеристичному кореню α, дорівнює степеню елементарного дільника $(x-\alpha)^k$ матриці $A(x)$.

Аналогічно визначають правий жордановий ланцюг, що відповідає характеристичному кореню α.

Канонічною системою власних і приєднаних векторів матриці $A(x)$, що відповідають її характеристичному кореню α, називають систему

$$\mathbf{u}_{k1},\ \mathbf{u}_{k2},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{k,p_k},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ l,$$

де вектори $\mathbf{u}_{11},\ \mathbf{u}_{21},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{l1}$ утворюють базу в $\ker A(\alpha)$. Об'єднання канонічних систем, що відповідають всім характеристичним кореням матриці $A(x)$, називають *канонічною системою власних і приєднаних векторів* матриці $A(x)$ [160], [190].

Ці поняття вперше ввів для нелінійних операторних пучків В.М.Келдиш і застосував їх у спектральній теорії операторних пучків [65], [66]. На основі власних і приєднаних векторів, жорданових ланцюгів відповідних поліноміальних матриць Ланкастер, Лангер, Віммер, Гохберг, Родман [160], [184], [185], [186] та ін. описують розв'язки диференціальних рівнянь та їх систем.

Відмітимо одну властивість канонічної системи власних і приєднаних векторів матриці $A(x)$, встановлену І.Н.Крупником [75].

Лема 1.1. *[75]. Нехай $A(x)$ — унітальна поліноміальна матриця і вибрана деяка її канонічна система власних і приєднаних векторів. Тоді існує унітальна матриця $B(x)$ (тих самих степеня і порядку), яка має ту саму канонічну систему,* *але кожному її характеристичному кореню відповідає єдиний елементарний дільник.*

М.Г.Крейн і Г.Лангер [73], [74] запропонували метод вивчення спектральних властивостей квадратичних спочатку матричного, а потім операторного пучків

$$A(x) = x^2 I + xB + C$$

через аналіз коренів відповідних матричного і операторного квадратичних рівнянь

$$Z^2 + BZ + C = 0.$$

Це призводить до задачі про факторизацію квадратичного пучка $A(x)$. В подальшому цей метод використовували в теорії пучків довільних степенів багато авторів [81], [82].

Г.Лангер [191] вказав критерій існування розв'язку матричного поліноміального рівняння (а отже і існування лінійного унітального дільника відповідної поліноміальної матриці) в термінах жорданових ланцюгів поліноміальної матриці.

Теорема 1.4. *[191]. Нехай $A(x)$ — регулярна поліноміальна матриця* $(\det A_0 \neq 0)$. *Тоді існує матриця $Y \in M(n, \mathbb{C})$, яка задовольняє рівняння*

$$A_0 Y^m + A_1 Y^{m-1} + \cdots + A_{m-1} Y + A_m = 0,$$

якщо існує база простору $\mathbb{C}^n$, що складається із жорданових ланцюгів матриці $A(x)$.

Цю теорему Г.Лангера також доводять іншим способом П.Ланкастер та Г.Віммер [184].

П.С.Казімірський і В.Р.Зеліско [52], [54] поширили цей результат про виділення лінійного унітального множника із довільної поліноміальної матриці (нерегулярної). Вони також вказали спосіб обчислення жорданових ланцюгів матриці $A(x)$.

Підчас вивчення властивостей поліноміальної матриці, зокрема її характеристичних коренів, характеристичних і приєднаних векторів, її факторизацій, використовують метод лінеаризації [237], [178].

Нехай

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}, \ A_i \in M(n, \mathbb{C}), \ i = 0, \ 1, \ \ldots, m$$

— регулярна поліноміальна матриця. Матрицю $L \in M(mn, \mathbb{C})$ називають *лінеаризатором* поліноміальної матриці (матричного полінома) $A(x)$, якщо матриця $Ix - L$ еквівалентна до матриці

$$B(x) = \left\| \begin{array}{cc} A(x) & 0 \\ 0 & I \end{array} \right\|, \quad B(x) \in M(mn, \mathbb{C}[x]),$$

тобто

$$Ix - L = U(x)B(x)V(x), \quad U(x), V(x) \in GL(mn, \mathbb{C}[x]).$$

Одним із прикладів лінеаризатора є супровідна матриця матричного полінома $A(x)$:

$$L = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0^{-1}A_m & -A_0^{-1}A_{m-1} & -A_0^{-1}A_{m-2} & \cdots & -A_0^{-1}A_1 \end{array} \right\|.$$

Матриці $Ex - L$ і $A(x)$ мають ті самі характеристичні корені. Так само власним і приєднаним векторам матриці $A(x)$

відповідають власні і приєднані вектори матриці $Ix - L$ [182], [144], [159], [160].

У працях [192], [159], [160] та ін. встановлено зв'язки між розкладністю поліноміальної матриці $A(x)$ на множники і інваріантними підпросторами оператора L у $\mathbb{C}^{mn}$.

А.І.Малишев у праці [79] для нерегулярної поліноміальної матриці $A(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$ вводить поняття нескінченних власних чисел, нескінченних елементарних дільників та жорданових ланцюгів, що відповідають нескінченним власним числам матриці $A(x)$. У цих термінах він формулює умови розкладності матричного полінома на множники.

Добре відома теорема Рота, яка встановлює зв'язок між розв'язністю лінійних матричних рівнянь типу Сильвестра і еквівалентністю та подібністю блочно-трикутної та блочно-діагональної матриць, складених із коефіцієнтів цих рівнянь, яка знаходить різноманітні застосування.

Теорема 1.5. *[219]. Нехай*

$$AX - YB = C, \tag{1.6}$$

$$AX - XB = C \tag{1.7}$$

— матричні рівняння, де $A, B, C,$ *— відомі* X, Y *— невідомі матриці відповідних розмірів над полем* $\mathbf{F}$ *і*

$$M = \begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}.$$

Тоді:

1) *Рівняння (1.6) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці* M *і* N *еквівалентні;*

2) *Рівняння (1.7) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці* M *і* N *подібні.*

Крім того, автор зауважує, що терема 1.5 справедлива і для матричних рівнянь (1.6) і (1.7), матриці-коефіцієнти яких є матриці над кільцем поліномів $\mathbf{F}[x]$.

Чимало авторів теорему Рота поширювали на матричні рівняння (1.6) і (1.7), коефіцієнти яких є матриці над різними областями. У працях [153], [170] теорему Рота довели для матриць над кільцями головних ідеалів, у [162], [163] — над комутативними кільцями, у [164], [166] — над іншими кільцями. Також описано розв'язки поліноміальних матричних рівнянь Сильвестра вигляду (1.7) з певними властивостями [152], [172]. В роботах [129], [154] вказуються умови існування та єдиності так званих "мінімальних" розв'язків цього рівняння, тобто розв'язків $X(x), Y(x)$ таких, що

$$\deg X < \deg B, \ \deg Y < \deg A,$$

а в [173], [174] — заданих степенів, зокрема нульового степеня.

Один із способів розв'язування таких матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра грунтується на розв'язуванні поліноміальних діофантових рівнянь [179], [180], [181].

У монографії вивчено зв'язки між розв'язками матричних поліноміальних рівнянь (1.6) та факторизаціями клітковотрикутних поліноміальних матриць.

1.4. Матриця значень, супровідна матриця матричних поліномів та їх факторизація

У підрозділі 1.2 відзначено, що задача факторизації матриць містить задачу про розв'язність матричних поліноміальних рівнянь.

Крім того, задачу про розкладність матричного полінома на регулярні множники сформулював Я.Б.Лопатинський у 50-х роках минулого століття [77] і досліджував її [78], розв'язуючи систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Він одержав і перший результат у цьому напрямі.

Теорема 1.6. *[77]. Нехай*

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} A_{s-j}\lambda^j \ (s \geq 2),$$

A_j $(j = 0, \ 1, \ \ldots, \ s)$ *— комплексні квадратні матриці порядку* p, $\det A_0 \neq 0$. *Нехай, далі, із* ps *коренів (з урахуванням їх кратностей) рівняння* $\det A(\lambda) = 0$ *можна виділити* pk *коренів (* k *— натуральне число, менше, ніж* s*), відмінних від решти коренів цього рівняння. Для існування за цих припущень матриці*

$$B(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}\lambda^j, \ \det B_0 \neq 0,$$

корені детермінанта якої збігалися б з виділеними pk *коренями і яка би ділила матрицю* $A(\lambda)$ *зліва, необхідно і достатньо виконання умови: ранг матриці*

$$Res_+ \left\{ \begin{pmatrix} I \\ \lambda I \\ \vdots \\ \lambda^{s-1} I \end{pmatrix} A^{-1}(\lambda)(I, \ \lambda I, \ \ldots, \ \lambda^{k-1} I) \right\}$$

дорівнює pk.

Тут Res_+ *— сума лишків відносно виділених* pk *коренів,* I *— одинична матриця.*

Автор до цього результату робить таке зауваження: "доведення цієї алгебраїчної теореми грунтується на теорії систем диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами".

П.С.Казімірський розвинув ідею Я.Б.Лопатинського. Він ввів поняття значення поліноміальної матриці на системі коренів полінома, супровідної матриці, на основі яких розробив алгебраїчні методи розкладності матричних поліномів на множники.

Означення 1.3. Нехай $G(x)$ — поліноміальна $m \times n$ - матриця над кільцем $\mathbf{F}[x]$,

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r}$$

— поліном із кільця $\mathbf{F}[x]$, записаний у канонічному вигляді.

Значенням поліноміальної матриці $G(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$ названа числова матриця вигляду

$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_r \end{array} \right\|, \quad H_i = \left\| \begin{array}{c} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_r-1)}(\alpha_i) \end{array} \right\|,$$

$i = 1,\ 2,\ \dots,\ r$, де $G^{(i)}(x)$ — похідна i-го порядку матриці $G(x)$.

Цю матрицю вперше ввів П.С. Казімірський у 1964 р. [38], [39] і називалась "матрицею, що відповідає n виділеним кореням

$$\alpha_1^{(k_1)},\ \alpha_2^{(k_2)},\ \dots,\ \alpha_r^{(k_r)}$$

(з урахуванням кратностей) полінома $\det G(x)$". Останній термін почали активно вживати дещо пізніше, починаючи з праць [45], [46].

Перші результати П.С. Казімірського в цьому напрямі стосувалися встановлення умов існування лінійних регулярних дільників (можемо вважати їх унітальними) матричних поліномів.

Нехай

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

– матричний поліном над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{F}$ характеристики нуль, тобто $A_i \in \mathbf{F}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. На основі результатів праць [38], [39], [42] можемо сформулювати такий результат.

Теорема 1.7. *Нехай* $\varphi(x)$, $\deg\varphi = n$ *— унітальний дільник характеристичного полінома* $\Delta(x) = \det A(x) \neq 0$ *матричного полінома* $A(x)$, *тобто*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x),\ (\varphi(x), \psi(x)) = \delta(x),$$

$d^A_{n-1}(x)$ *— найбільший спільний дільник мінорів* $(n-1)$*–го порядку матриці* $A(x)$. *Якщо*

$$(\delta(x), d^A_{n-1}(x)) = 1,$$

то матричний поліном $A(x)$ *має лівий лінійний унітальний дільник* $B(x)$ *з характеристичним поліномом*

$$\det B(x) = \varphi(x)$$

тоді і тільки тоді, коли ранг матриці значень взаємної матриці $A_*(x)$ *на системі коренів полінома* $\varphi(x)$ *дорівнює* n*:*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n.$$

Для опису нелінійних дільників П.С. Казімірський ввів поняття супровідної матриці [40].

Означення 1.4. Нехай $\varphi(x)$, $\deg\varphi = nr$ — дільник характеристичного полінома $\Delta(x) = \det A(x) \neq 0$ матричного полінома $A(x)$, тобто $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$. Матриця

$$A_{r-1}(x) = A_*(x) \left\| \begin{matrix} I & Ix & \cdots & Ix^{r-1} \end{matrix} \right\|$$

названа супровідною матрицею матричного полінома $A(x)$.

Теорема 1.8. *[40], [43]. Нехай* $\varphi(x)$, $\deg\varphi = nr$ *— дільник характеристичного полінома* $\Delta(x) = \det A(x) \neq 0$, *тобто*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x), \ (\varphi(x), \psi(x)) = \delta(x).$$

Якщо

$$(\delta(x), d_{n-1}^{A}(x)) = 1, \tag{1.8}$$

то для того, щоб існував лівий унітальний дільник $B(x)$ *матричного полінома* $A(x)$ *степеня* r *з характеристичним поліномом* $\det B(x) = \varphi(x)$, *необхідно та достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr.$$

З цієї теореми, як наслідок, випливає важлива в теорії розкладності матричних поліномів на множники теорема про регуляризацію матричних поліномів.

Зрозуміло, якщо матричний поліном $A(x)$ порядку n і степеня s — регулярний, то $\deg\ \det A(x) = ns$. Тому необхідною умовою регуляризації матричного полінома $A(x)$ є кратність степеня його характеристичного полінома $\det A(x)$ його порядку n.

Теорема 1.9. *Нехай* $A(x)$ *— матричний поліном порядку* n *і* $\deg\det A(x) = ns$. *Для того, щоб матричний поліном* $A(x)$ *регуляризувався справа, тобто щоб існувала така матриця*

$R(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, що $A(x)R(x)$ — регулярний матричний поліном, зокрема унітальний, необхідно та достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\Delta) = ns,$$

де $\Delta(x) = \det A(x)$.

У праці [43] вказано такий спосіб знаходження коефіцієнтів унітального дільника матричного полінома, якщо він існує.

Нехай
$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr.$$

Тоді існує унітальний дільник

$$B(x) = Ix^r - B_1 x^{r-1} - \cdots - B_r$$

з характеристичним поліномом $\det B(x) = \varphi(x)$ матричного полінома $A(x)$. Коефіцієнти дільника $B(x)$ знаходять як розв'язки

$$Y_1 = B_1, \ \ldots, \ Y_{r-1} = B_{r-1}, \ Y_r = B_r$$

лінійного матричного рівняння

$$M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) \begin{Vmatrix} Y_r \\ Y_{r-1} \\ \vdots \\ Y_1 \end{Vmatrix} = M_{A_*(x)x^r}(\varphi).$$

Для кожного фіксованого дільника $\varphi(x)$ характеристичного полінома $\Delta(x) = \det A(x)$ з умовою (1.8) розв'язок цього рівняння єдиний, а отже, й унітальний дільник $B(x)$ матричного полінома $A(x)$ із заданим характеристичним поліномом $\det B(x) = \varphi(x)$ — єдиний.

Пізніше у працях [14], [15] встановлено, що умова (1.8) є і необхідною для єдиності унітального дільника $B(x)$ матричного полінома $A(x)$ із заданим характеристичним поліномом $\det B(x) = \varphi(x)$.

Таким чином, задача про виділення унітальних множників із матричного полінома над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль розв'язано у випадку, коли унітальні дільники своїми характеристичними поліномами визначені однозначно.

У 1978 р. П.С. Казімірський розв'язав проблему виділення регулярного множника із матричного полінома над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль у загальному випадку, тобто встановив критерій існування таких множників з наперед заданими канонічними формами, а також вказав метод їх безпосереднього знаходження [47], [48].

Нехай

$$D^A(x) = P(x)A(x)Q(x) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x))$$

— канонічна діагональна форма матриці $A(x)$, де $P(x), Q(x) \in GL(n, P[x])$. Нехай, далі, d-матриця

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right),$$

тобто така, що $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, і

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = nr$$

є дільником канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриці $A(x)$:

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x).$$

Означення 1.5. [48]. Матрицю $W(\Phi)$ називають визначальною, породженою матрицею $\Phi(x)$, де

$$W(\Phi) = \left\| \begin{array}{ccccc} \dfrac{\varphi}{(\varphi_1, \varepsilon_1)} & & & & 0 \\ \dfrac{\varphi k_{21}}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_2, \varepsilon_2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\varphi k_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \dfrac{\varphi k_{n2}}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} & \dots & \dfrac{\varphi k_{n,n-1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_n, \varepsilon_n)} \end{array} \right\|,$$

де $(\varphi_i, \varepsilon_j)$ — найбільший спільний дільник поліномів φ_i та ε_j, $i, j = 1, \dots, n,\ i \geqslant j$; якщо $\dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} = 1$, то $k_{ij} = 0$, якщо ж $\dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} \neq 1$, то

$$k_{ij} = k_{ij0} + k_{ij1}x + \dots + k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}},$$

де

$$h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1,\ i = 2, \dots, n,\ i > j,\ j = 1, \dots, n-1,$$

k_{ijs} — попарно різні змінні, приєднані до основного поля $\mathbf{F}$, $s = 1, 2, \dots, h_{ij}$; $\varphi = \det \Phi(x)$.

Теорема 1.10. *[48]. Для того, щоб матричний поліном $A(x)$ зображався у вигляді добутку*

$$A(x) = B(x)C(x),$$

де $B(x)$ — унітальний матричний поліном степеня r з канонічною діагональною формою $D^B(x) = \Phi(x)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P(x)\|I,\ Ix,\ \dots,\ Ix^{r-1}\|}(\varphi) = nr$$

для довільної фіксованої перетворювальної матриці $P(x)$ *матриці* $A(x)$ *до її канонічної діагональної форми.*

Задача про розкладність на множники матричного полінома $A(x)$ над довільним полем $\mathbf{F}$ у загальній постановці полягає в тому, щоб вказати умови його зображення у вигляді добутку

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x)$$

унітальних множників $B_i(x)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q$, які вже нерозкладні, зокрема у добуток лінійних унітальних множників та вказати метод побудови таких розкладів. Цю задачу в такій постановці розв'язали лише в окремих випадках.

П.С.Казімірський вказав умови розкладності матричних поліномів над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль на лінійні унітальні множники спочатку за умови, що їх характеристичні поліноми попарно взаємно прості [41], [39], а потім — коли вони "майже" попарно взаємно прості [45], [49].

Теорема 1.11. *[49]. Нехай* $\mathbf{F}$ *— алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль,*

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

– унітальний матричний поліном над полем $\mathbf{F}$*. Нехай далі характеристичний поліном* $\Delta(x) = \det A(x)$ *матричного полінома* $A(x)$ *розкладний на множники*

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_s(x),$$

кожний з яких має степінь n*, причому*

$$((\varphi_i(x), \varphi_j(x)), d^A_{n-1}(x))) = 1, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s,\ i \neq j.$$

Тоді для існування розкладу

$$A(x) = (Ix - B_1)(Ix - B_2)\ \cdots\ (Ix - B_s),$$

для якого

$$\det(Ix - B_i) = \varphi_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $r = 0,\ 1,\ \ldots,\ s-2$, *виконувалась рівність*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1\ \cdots\ \varphi_{r+1}) = n(r+1).$$

У праці [112] цей результат поширили на випадок, коли $\mathbf{F}$ — довільне поле. У праці [30] вказують умови розкладності на лінійні унітальні множники матричного полінома $A(x)$ над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль тоді, коли канонічна діагональна форма матричного полінома $A(x)$ дорівнює добутку канонічних діагональних форм множників $B_i(x)$.

Із викладеного зрозуміло, що розроблений П.С.Казімірським метод застосовний до факторизації матричних поліномів лише у випадку, коли основне поле алгебраїчно замкнене характеристики нуль.

У монографії запропоновано метод факторизації матричних поліномів над довільним полем і описано певні класи таких факторизацій, в тому числі розклади матричних поліномів на довільне число унітальних множників, паралельно фіксованому розкладу їх канонічних діагональних форм. Так охоплено ширші від відомих типи розкладів матричних поліномів.

Розділ 2
НАПІВСКАЛЯРНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

У цьому розділі побудовано стандартну форму поліноміальних матриць та їх скінченних наборів над довільним полем відносно напівскалярної еквівалентності. Вказано зв'язки між скалярною та напівскалярною еквівалентностями матричних поліномів та їх подібністю. У результаті одержано зв'язки між напівскалярною еквівалентністю матричних поліномів та подібністю наборів матриць над полем.

2.1. Найбільші спільні дільники наборів поліномів та їх лінійних комбінацій

Нехай $\mathbf{F}$ — довільне поле, $\mathbf{F}[x]$ — кільце поліномів над $\mathbf{F}$. Через $\mathbf{F}_g$ позначатимемо поле розкладу полінома $g(x) \in \mathbf{F}[x]$), $(f(x), g(x))$ – найбільший спільний дільник поліномів $f(x)$ і $g(x)$. Сформулюємо деякі властивості, що стосуються зв'язків найбільших спільних дільників скінченних наборів поліномів із кільця $\mathbf{F}[x]$ та їх лінійних комбінацій, які використаємо в наступних підрозділах.

Лема 2.1. *Нехай*

$$f_1(x), f_2(x), g(x) \in \mathbf{F}[x], \quad g(x) \not\equiv 0, \ (f_1(x), f_2(x), g(x)) = \delta(x).$$

Нехай $\mathbf{F}_g$ *– поле розкладу полінома* $g(x)$*, тобто*

$$g(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - \alpha_j)^{k_j}, \ \alpha_j \in \mathbf{F}.$$

Якщо $r < |\mathbf{F}|$*, де* $|\mathbf{F}|$ *– потужність поля* $\mathbf{F}$*, то*

$$(f_1(x) + u f_2(x), g(x)) = \delta(x)$$

за всіх значень u *з* $\mathbf{F}$*, за винятком не більш ніж* t *значень* $u = u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u = u_t, \ t \leqslant r$*.*

Доведення. Нехай

$$\delta(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{l_i}, \ 0 \leq l_i \leq k_i.$$

Якщо для деякого α_j маємо, що $k_j = l_j, \ 1 \leqslant j \leqslant r$, то

$$(f_1(x) + u f_2(x), g(x)) = (x - \alpha_j)^{l_j} \tilde{\delta}(x), \ \tilde{\delta}(\alpha_j) \neq 0,$$

за всіх $u \in \mathbf{F}_g$. Якщо ж $l_j < k_j$, то

$$(f_1(x) + u f_2(x), g(x)) = (x - \alpha_j)^{l_j} \tilde{\delta}, \ \tilde{\delta}(\alpha_j) \neq 0$$

за всіх $u \in \mathbf{F}_g$, за винятком не більше одного u. Оскільки $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}_g$, то звідси легко отримуємо твердження леми.

Наслідок 2.1. *Нехай*

$$f_1(x), f_2(x), g(x) \in \mathbf{F}[x], \quad g(x) \not\equiv 0, \ (f_1(x), f_2(x), g(x)) = \delta(x).$$

Якщо $\deg g < |\mathbf{F}|$, *то існує такий елемент* $u \in \mathbf{F}$, *що*

$$(f_1(x) + u f_2(x), g(x)) = \delta(x).$$

Лема 2.2. *Нехай задано* n *наборів*

$$f_{i1}(x), \ f_{i2}(x), \ \ldots, \ f_{im}(x), \ g_i(x); \quad g_i(x) \not\equiv 0, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n,$$

поліномів з $\mathbf{F}[x]$, *причому*

$$(f_{i1}(x), \ f_{i2}(x), \ \ldots, \ f_{im}(x), \ g_i(x)) = \delta_i(x);$$

$\mathbf{F}_{g_i}$ *– поле розкладу поліномів* $g_i(x)$, *тобто*

$$g_i(x) = \prod_{j=1}^{r_i} (x - \alpha_{ij})^{k_{ij}}, \ \alpha_{ij} \in \mathbf{F}_{g_i}, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

Нехай далі $\mathcal{S}$ *– підмножина поля* $\mathbf{F}$, *тобто* $\mathcal{S} \subset \mathbf{F}$. *Якщо*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i < |\mathcal{S}|,$$

то існують такі елементи

$$u_2, \ u_3, \ \ldots, \ u_m \in \mathcal{S},$$

що

$$(f_{i1}(x) + \sum_{j=2}^{m} u_j f_{ij}(x), g_i(x)) = \delta_i(x)$$

для всіх $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$.

Доводимо лему індукцією за m. Якщо $m = 2$ доведення випливає з леми 2.1. Припустимо справедливість леми для $m-1$ і доведемо для довільного m.

Нехай

$$g_i(x) = [p_{i1}(x)]^{k_{i1}}[p_{i2}(x)]^{k_{i2}} \dots [p_{ir_i(x)}]^{k_{ir_i}}, \tag{2.1}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, де

$$p_{ij}(x),\ j = 1, 2, \dots, r_i$$

— незвідні над $\mathbf{F}$ поліноми. Тоді

$$\delta_i(x) = [p_{i1}(x)]^{l_{i1}}[p_{i2}(x)]^{l_{i2}} \dots [p_{ir_i}(x)]^{l_{ir_i}},$$

$$0 \leqslant l_{ij} \leqslant k_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, r_i.$$

Припустимо, що

$$l_{ij} < k_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, r_i.$$

Тоді для кожного полінома

$$[p_{ij}(x)]^{l_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, r_i$$

існує такий поліном $f_{iq}(x)$, $1 \leqslant q \leqslant m$, що

$$f_{iq}(x) = [p_{ij}(x)]^{l_{ij}}\tilde{f}_{iq}(x),$$

причому $p_{ij}(x) \not| \tilde{f}_{iq}(x)$ (не ділить), $i = 1, 2, \dots, n$. Тому поліноми

$$g_i(x),\ \delta_i(x),\ i = 1, 2, \dots, n$$

можна подати у вигляді

$$g_i(x) = g_{i1}(x) \cdots g_{im}(x), \quad \delta_i(x) = \delta_{i1}(x) \cdots \delta_{im}(x), \tag{2.2}$$

де

$$(g_{is}(x), g_{it}(x)), (\delta_{is}(x), \delta_{it}(x)) = 1, \quad (f_{is}(x), g_{is}(x)) = \delta_{is}(x),$$

$s, t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ s \neq t$.

Нехай

$$(f_{i1}(x),\ f_{i2}(x),\ \ldots,\ f_{i,m-1}(x),\ g_i(x)) = \Delta_i(x),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Позначивши

$$\delta_{i1}(x)\ \cdots\ \delta_{i,m-1}(x) = \delta_i^{(m-1)}(x),$$

матимемо, що

$$\Delta_i(x) = \delta_i^{(m-1)}(x)\tilde{\Delta}_i(x),$$

де

$$(\tilde{\Delta}_i(x), \delta_i^{(m-1)}(x)) = 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

За припущенням індукції існують такі

$$u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_{m-1} \in \mathcal{S},$$

що

$$\Big(f_{i1}(x) + \sum_{j=2}^{m-1} u_j f_{ij}(x), g_i(x)\Big) = \Delta_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тоді, враховуючи (2.2) маємо

$$\Big(f_{i1}(x) + \sum_{j=2}^{m-1} u_j f_{ij}(x), f_{im}(x), g_i(x)\Big) = \delta_i(x).$$

Отже, існує такий елемент $u_m \in \mathcal{S}$, що

$$\Big(f_{i1}(x)+\sum_{j=2}^{m}u_jf_{ij}(x), g_i(x)\Big)=\delta_i(x), \quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Нехай тепер

$$g_s(x)=[p_{st}(x)]^{l_{st}}\tilde{g}_s(x)$$

і

$$\delta_s(x)=[p_{sl}(x)]^{l_{st}}\tilde{\delta}_s(x),$$

$$p_{st}(x)\nmid\tilde{g}_s(x),\ p_{sl}(x)\nmid\tilde{\delta}_s(x),\ 1\leqslant s\leqslant n,\ 1\leqslant t\leqslant r_s.$$

Тоді

$$\Big(f_{s1}(x)+\sum_{j=2}^{m}u_jf_{sj}(x), g_s(x)\Big)=[p_{st}(x)]^{l_{st}}\tilde{\delta}_s(x)$$

за будь-яких

$$u_2,\ u_3,\ \dots,\ u_m\in\mathcal{S}.$$

Тому, якщо у виразі (2.1) деякі $k_{ij}=l_{ij}$, то проводимо попередні міркування, беручи до уваги лише ті незвідні множники $p_{ij}(x)$ у розкладах (2.1) поліномів $g_i(x)$, для яких $k_{ij}>l_{ij}$.

Лема доведена.

Наслідок 2.2. *Нехай задано n наборів*

$$f_{i1}(x),\ f_{i2}(x),\ \dots,\ f_{im}(x),\ g_i(x);\quad g_i(x)\not\equiv 0,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

таких поліномів з $\mathbf{F}[x]$, *що*

$$(f_{i1}(x),\ f_{i2}(x),\ \dots,\ f_{im}(x),\ g_i(x))=\delta_i(x),$$

$i=1,\ 2,\ \dots,\ n.$

Нехай далі $\mathcal{S}\subset\mathbf{F}$. Якщо

$$\sum_{i=1}^{n}\deg g_i<|\mathcal{S}|,$$

то існують такі елементи

$$u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_m \in S,$$

що

$$(f_{i1}(x) + \sum_{j=2}^{m} u_j f_{ij}(x), g_i(x)) = \delta_i(x)$$

для всіх $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Наслідок 2.3. *Нехай* $\mathbf{F}$ *— нескінченне поле,*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x) \in \mathbf{F}[x]$$

i

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x)) = \delta(x).$$

Тоді існують такі елементи

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m \in \mathbf{F},$$

що

$$\sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) = \delta(x)h(x),\ (\delta(x), h(x)) = 1.$$

Лема 2.3. *Нехай*

$$A(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x]), \quad \operatorname{rang} A(x) = r > 1$$

i

$$d_r^A(x) = \prod_{j=1}^{q}(x - \alpha_j)^{k_j},\ \alpha_j \in \mathbf{F}_{d_r^A},$$

де $\mathbf{F}_{d_r^A}$ *– поле розкладу полінома* $d_r^A(x)$*. Якщо* $q < |\mathbf{F}|$*, то існує такий рядок*

$$\mathbf{u} = \left\| \begin{matrix} 1 & u_2 & \cdots & u_m \end{matrix} \right\|,$$

де $u_j \in \mathbf{F}$, $j = 2,\ 3,\ \ldots,\ m$*, що*

$$\mathbf{u}A(x) = \left\| \begin{matrix} b_1(x) & b_2(x) & \ldots & b_n(x) \end{matrix} \right\|,$$

де

$$(b_1(x),\ b_2(x),\ \ldots,\ b_n(x)) = d_1^A(x).$$

Доведення. Для матриці $A(x)$ існує така матриця $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, що

$$A(x)V(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1r}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2r}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mr}(x) & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| = A_1(x).$$

Усі перші r стовпці матриці $A_1(x)$ є ненульовими. Зрозуміло, що достатньо довести лему для матриці $A_1(x)$.

Очевидно, що $d_r^{A_1}(x) = d_r^A(x)$ і $d_1^{A_1}(x) = d_1^A(x)$.

Через $\delta_j^{A_1}(x)$ позначатимемо найбільший спільний дільник елементів j-го стовпця матриці $A_1(x)$, тобто

$$\delta_j^{A_1}(x) = (a_{1j}(x),\ a_{2j}(x),\ \ldots,\ a_{mj}(x)),\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Поліноми $d_1^{A_1}(x)$ і $d_r^{A_1}(x)$ зобразимо у виглядах

$$d_1^{A_1}(x) = d_{11}(x)d_{12}(x)\cdots d_{1r}(x),$$

$$d_r^{A_1}(x) = d_{r1}(x)d_{r2}(x)\cdots d_{rr}(x),$$

де

$$(d_{1s}(x), d_{1t}(x)) = 1,\ (d_{rs}(x), d_{rt}(x)) = 1,\ \ s, t = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ \ s \neq t$$

і

$$(\delta_j^{A_1}(x), d_{rj}(x)) = d_{ij}(x), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Тепер на основі леми 2.2 для наборів поліномів

$$a_{1j}(x),\ a_{2j}(x),\ \ldots,\ a_{mj}(x),\ d_{rj}(x), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

існують такі елементи $u_i \in \mathbf{F}$, $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m$, що

$$\|1\ u_2\ \cdots\ u_m\| A_1(x) = \|c_1(x)\ \cdots\ c_r(x)\ \ 0 \cdots\ 0\|,$$

де

$$(c_1(x),\ \ldots,\ c_r(x)) = d_1^A(x).$$

Лема доведена.

Лема 2.4. *Нехай*

$$A_i(x) \in M(m, n_i, \mathbf{F}[x]), \quad \operatorname{rang} A_i(x) = r_i > 1, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

і

$$d_{r_i}^{A_i}(x) = \prod_{j=1}^{q_i} (x - \alpha_{ij})^{k_{ij}},\ \ \alpha_{ij} \in \mathbf{F}_{d_{r_i}^{A_i}},$$

де $\mathbf{F}_{d_{r_i}^{A_i}}$ *– поле розкладу поліномів* $d_{r_i}^{A_i}(x)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. *Якщо*

$$\sum_{i=1}^{k} q_i < |\mathbf{F}|,$$

то існує такий рядок

$$\mathbf{u} = \left\|\ 1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots \quad u_m\ \right\|,\ u_j \in \mathbf{F},\ j = 2,\ 3,\ \ldots,\ m,$$

що

$$\mathbf{u}A_i(x) = \left\| \begin{matrix} b_1^{(i)}(x) & b_2^{(i)}(x) & \dots & b_{n_i}^{(i)}(x) \end{matrix} \right\|,$$

де

$$(b_1^{(i)}(x),\ b_2^{(i)}(x),\ \dots,\ b_{n_i}^{(i)}(x)) = d_1^{A_i}(x),\ i = 1, 2, \dots, k.$$

Доведення виконуємо аналогічно, як і попередньої леми, з використанням індукції.

2.2. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та їх наборів

Нехай $\mathbf{F}$ — довільне поле, $\mathbf{F}[x]$ — кільце поліномів над $\mathbf{F}$, $M(m, n, \mathbf{F}[x])$ — множина $m{\times}n$-матриць над $\mathbf{F}[x]$, $A(x), B(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x])$, $d_r^A(x)$ — найбільший спільний дільник мінорів r-го порядку матриці $A(x)$.

Матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають *еквівалентними,* якщо

$$A(x) = U(x)B(x)V(x)$$

для деяких оборотних матриць $U(x) \in GL(m, \mathbf{F}[x])$ і $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$. Якщо матриці $U(x)$ і $V(x)$ не залежать від змінної x, тобто

$$A(x) = UB(x)V,$$

де $U \in GL(m, \mathbf{F})$ і $V \in GL(n, \mathbf{F})$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають *скалярно* [80] або *строго* [12] еквівалентними.

Означення 2.1. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ із $M(m, n, \mathbf{F}[x])$ називаємо напівскалярно еквівалентними, якщо існують такі скалярна (з елементами із поля $\mathbf{F}$) $U \in GL(m, \mathbf{F})$ і поліноміальна $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$ оборотні матриці, що

$$A(x) = UB(x)V(x).$$

У цьому підрозділі встановлюємо трикутну форму з інваріантними множниками на головній діагоналі (так звану стандартну форму) для довільних поліноміальних матриць та їх скінченних наборів над довільним полем щодо напівскалярної еквівалентності.

Теорема 2.1. *Нехай*

$$A(x) \in M(m, n, \boldsymbol{F}[x]), \quad m \leq n, \quad \operatorname{rang} A(x) = r,$$

тобто $d_r^A(x) \neq 0$. *Нехай далі,* $\mathbf{F}_{d_r^A}$ *– поле розкладу полінома* $d_r^A(x)$, *тобто*

$$d_r^A(x) = \prod_{j=1}^{s} (x - \alpha_j)^{t_j}, \ \alpha_j \in \mathbf{F}_{d_r^A}.$$

Якщо

$$s < |\mathbf{F}|,$$

де $|\mathbf{F}|$ *– потужність поля* $\mathbf{F}$, *то матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна до трикутної матриці* $T^A(x)$, *тобто існують такі верхня унітрикутна* $U \in GL(m, \mathbf{F})$ *і оборотна* $V(x) \in GL(n), \mathbf{F}[x])$ *матриці, що*

$$T^A(x) = UA(x)V(x),$$

де матриця $T^A(x)$ *має один з таких виглядів:*

1) якщо $\operatorname{rang} A(x) = m$, *то*

$$T^A(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} \mu_1^A(x) & 0 & \cdots & 0 & \\ t_{21}(x)\mu_1^A(x) & \mu_2^A(x) & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{m1}(x)\mu_1^A(x) & t_{m2}(x)\mu_2^A(x) & \cdots & \mu_m^A(x) & \end{array} \right\|, \quad (2.3)$$

де

$$\deg t_{ij} < \deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A, \quad \text{якщо} \quad t_{ij}(x) \not\equiv 0, \tag{2.4}$$

$\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A > 0$ *і*

$$t_{ij}(x) \equiv 0, \quad \text{якщо} \quad \deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A = 0, \tag{2.5}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, m, \ i > j;$

2) якщо $\operatorname{rang} A(x) = r$ *і* $r < m$, *то*

$$T^A(x) =$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} \mu_1^A(x) & \cdots & 0 & 0 & \\ t_{21}(x)\mu_1^A(x) & \cdots & 0 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{r-1,1}(x)\mu_1^A(x) & \cdots & \mu_{r-1}^A(x) & 0 & \mathbf{0} \\ t_{r1}(x)\mu_1^A(x) & \cdots & t_{r,r-1}(x)\mu_{r-1}^A(x) & t_{rr}(x)\mu_r^A(x) & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{m1}(x)\mu_1^A(x) & \cdots & t_{m,r-1}(x)\mu_{r-1}^A(x) & t_{mr}(x)\mu_r^A(x) & \end{array} \right\|, \tag{2.6}$$

де

$$(t_{rr}(x), \ t_{r+1,r}(x), \ \ldots, \ t_{mr}(x)) = 1$$

і

$\deg t_{ij} < \deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A$, *якщо* $t_{ij}(x) \not\equiv 0$, $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A > 0$,

$t_{ij}(x) \equiv 0$, *якщо* $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, r-1, \ i > j$.

Доведення. Нехай

$$A(x) = \left\| \ a_{ij}(x) \ \right\|_1^{m,n}, \ a_{ij}(x) \in \mathbf{F}[x]).$$

На основі леми 2.3 для матриці $A(x)$ існує такий рядок

$$\mathbf{u} = \left\| \begin{matrix} 1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_m \end{matrix} \right\|,$$

де $u_j \in \mathbf{F}$, $j = 2,\ 3,\ \ldots,\ m$, що

$$\mathbf{u}A_i(x) = \left\| \begin{matrix} b_1(x) & b_2(x) & \ldots & b_n(x) \end{matrix} \right\|,$$

причому

$$(b_1(x),\ b_2(x),\ \ldots,\ b_n(x)) = d_1^A(x) = \mu_1^A(x)$$

для всіх $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Складемо матрицю

$$U_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & u_2 & \cdots & u_m \\ \mathbf{0} & & I_{m-1} & \end{matrix} \right\|,$$

де I_{m-1} – одинична матриця порядку m. Тоді

$$U_1 A(x) = \left\| \begin{matrix} b_1(x) & b_2(x) & \ldots & b_n(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mn}(x) \end{matrix} \right\| = A_1(x).$$

Тепер елементарними операціями над стовпцями матриці $A_1(x)$ зведемо її до такого вигдяду, тобто для деякої оборотної матриці $V_1(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$

$$A_1(x)V_1(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \mu_1^A(x) & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}(x)\mu_1^A(x) & & & \\ \cdots & & A_{m-1,n-1}(x) & \\ t_{m1}(x)\mu_1^A(x) & & & \end{matrix} \right\| = A_2(x), \qquad (2.7)$$

де

$$A_{m-1,n-1}(x) \in M(m-1, n-1, \mathbf{F}[x]).$$

1). Припустимо, що $\operatorname{rang} A(x) = m$. Тоді, виконуючи аналогічні міркування над матрицею $A_{m-1,n-1}(x)$, зведемо матрицю $A(x)$ до вигляду (2.3).

Якщо в матриці (2.3) не виконуються умови (2.4) та (2.5), наприклад

$$t_{21}(x) \not\equiv 0 \quad \text{і} \quad \deg t_{21} \geq \deg \mu_2^A - \deg \mu_1^A,$$

то $t_{21}(x)\mu_1^A(x)$ зобразимо у вигляді

$$t_{21}(x)\mu_1^A(x) = \mu_2^A(x)q(x) + r(x), \tag{2.8}$$

де $\deg r < \deg \mu_2^A$. Зрозуміло, що у рівності (2.8) $r(x)$ ділиться на $\mu_1^A(x)$. Поділимо обидві частини рівності (2.8) на $\mu_1^A(x)$:

$$t_{21}(x) = \frac{\mu_2^A(x)}{\mu_1^A(x)} q(x) + r_1(x),$$

де

$$\deg r_1 < \deg \mu_2^A - \deg \mu_1^A.$$

Тепер у матриці (2.3), помноживши другий стовпець на $-q(x)$ і додавши його до першого її стовпця, на місці $t_{21}(x)$ одержимо $r_1(x)$, тобто $t_{21}(x)$ з умовою

$$\deg t_{21} < \deg \mu_2^A - \deg \mu_1^A.$$

Так поступаючи з рештою елементів $t_{ij}(x)$ матриці (2.3) одержимо матрицю (2.3) з умовами (2.4) та (2.5).

2). Тепер припустимо, що

$$\operatorname{rang} A(x) = r < m.$$

Тоді продовжуємо здійснювати напівскалярні еквівалентні перетворення над підматрицею $A_{m-1,n-1}(x)$ матриці (2.7), поки не одержимо матрицю

$$A_r(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|c} \mu_1^A(x) & \dots & 0 & \\ t_{21}(x)\mu_1^A(x) & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \\ t_{r-1,1}(x)\mu_1^A(x) & \dots & \mu_{r-1}^A(x) & \\ \hline t_{r1}(x)\mu_1^A(x) & \dots & t_{r,r-1}(x)\mu_{r-1}^A(x) & \\ \dots & \dots & \dots & A_{m-r,n-r}(x) \\ t_{m1}(x)\mu_1^A(x) & \dots & t_{m,r-1}(x)\mu_{r-1}^A(x) & \end{array} \right\|,$$

де

$$A_{m-r,n-r}(x) \in M(m-r, n-r, \mathbf{F}[x]) \quad i \quad \operatorname{rang} A_{m-r,n-r}(x) = 1.$$

Тоді існує така матриця $W(x) \in GL(m-r, \mathbf{F}[x])$, що

$$A_{m-r,n-r}(x)W(x) = \left\| \begin{array}{cccc} a_{r,r}(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{r+1,r}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mr}(x) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Не важко переконатися, що елементи $a_{ir}(x)$ мають вигляд

$$a_{ir}(x) = t_{ir}(x)\mu_r^A(x), \quad i = r,\ r+1,\ \dots,\ m,$$

де

$$(t_{rr}(x),\ t_{r+1,r}(x),\ \dots,\ t_{mr}(x)) = 1.$$

Тоді матриця

$$A_r(x)\big(I_{n-(m-r)} \oplus W(x)\big) = T^A(x)$$

є вигляду (2.6).

Теорема доведена.

Означення 2.2. Трикутну матрицю $T^A(x)$ вигляду (2.3) або (2.6) називатимемо стандартною формою матриці $A(x)$ відносно напівскалярної еквівалентності.

Наслідок 2.4. *Нехай* $A(x) \in M(m,n,\boldsymbol{F}[x])$, $m \le n$ *і*

$$\operatorname{rang} A(x) = r,$$

тобто $d_r^A(x) \neq 0$. *Якщо*

$$\deg d_r^A < |\mathbf{F}|,$$

то матриця $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна до стандартної форми* $T_A(x)$ *вигляду (2.3) або (2.6).*

Наслідок 2.5. *Якщо поле* $\boldsymbol{F}$ *нескінченне, то кожна матриця* $A(x) \in M(m,n,\boldsymbol{F}[x])$ *напівскалярно еквівалентна до стандартної форми* $T_A(x)$ *вигляду (2.3) або (2.6).*

Зауважимо, що коли $\mathbf{F}$ – скінченне поле, то поліноміальна матриця $A(x)$ може не зводитися напівскалярними еквівалентними перетвореннями до стандартної форми $T^A(x)$.

Приклад 2.1. Нехай $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_2$ і $A(x) \in M(2,\mathbb{Z}_2[x])$, де

$$A(x) = \left\| \begin{array}{cc} x & 0 \\ x^2+x+1 & (x^2+x+1)(x^2+1) \end{array} \right\|.$$

Канонічною діагональною формою цієї матриці є:

$$D^A = \operatorname{diag}(1,\ x(x^2+1)(x^2+x+1)).$$

Не важко переконатися, що для матриці $A(x)$ не існують такі матриці $U \in GL(2,\mathbb{Z}_2)$ і $V(x) \in GL(2,\mathbb{Z}_2[x])$, що

$$UA(x)V(x) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & x(x^2+1)(x^2+x+1) \end{array} \right\| = T^A(x)$$

є матрицею вигляду (2.3).

Ще зауважимо, що коли матриця $A(x)$ неповного рангу, то вона може не зводитися напівскалярними еквівалентними перетвореннями до трикутної форми $T^A(x)$ вигляду (2.3).

Приклад 2.2. Нехай

$$A(x) = \left\| \begin{array}{cc} x & 0 \\ x^2+1 & 0 \end{array} \right\|$$

— 2×2-матриця над кільцем $\mathbb{C}[x]$).

Матриця $A(x)$ жодними напівскалярними еквівалентними перетвореннями не зводиться до стандартної форми $T^A(x)$ з головною діагоналлю $D^A = \operatorname{diag}(1,\ 0)$:

$$T^A(x) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & 0 \end{array} \right\|,$$

де * означає деякий елемент із $\mathbb{C}[x]$.

Наслідок 2.6. *Нехай* $A(x) \in M(m,n,\mathbf{F}[x])$, $m \le n$ *і канонічною формою матриці* $A(x)$ *є*

$$D^A(x) = \operatorname{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ \mu_m^A(x)).$$

Тоді стандартною формою матриці $A(x)$ *відносно напівскалярної еквівалентності є матриця*

$$T^A(x) = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1(x) & t_2(x) & \ldots & t_{m-1}(x) & \mu_m^A(x) & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\|,$$

де $\deg t_j < \deg \mu_m^A, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$

Із теореми 2.1 одержуємо також твердження, яке описує будову перетворювальних матриць, що зводять матрицю до її канонічної діагональної форми.

Лема 2.5. *Нехай* $A(x)$ *– неособлива поліноміальна матриця із* $M(m, \mathbf{F}[x])$. *Тоді у множині* $\{U(x)\}_A$ *лівих перетворювальних матриць матриці* $A(x)$ *до її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$ *існують матриці:*

1) $U_1(x) \in \{U(x)\}_A$ *така, що* $U_1(x) = Q(x)S$, *де* $Q(x)$ *— нижня унітрикутна матриця із* $GL(m, \mathbf{F}[x])$, S *— верхня унітрикутна матриця із* $GL(m, \mathbf{F})$*;*

2) $U_2(x) \in \{U(x)\}_A$ *така, що*

$$\deg U_2 \leqslant \begin{cases} \deg \mu_m^A - \deg A, & \text{якщо } A(x) - \text{ регулярна матриця,} \\ \deg \mu_m^A - \deg \mu_1^A & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. На основі теореми 2.1 існують такі верхня унітрикутна $U \in GL(m, \mathbf{F})$ і оборотна $V(x) \in GL(n), \mathbf{F}[x])$ матриці, що

$$UA(x)V(x) = T^A(x) = T(x)D^A(x), \tag{2.9}$$

де $\deg T^A = \deg \mu_m^A$, $T(x)$ —нижня унітрикутна матриця і

$$\deg T < \deg \mu_m^A - \deg \mu_1^A.$$

Із рівності (2.9) бачимо, що лівою перетворювальною матрицею матриці $A(x)$ до її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ є матриця

$$U(x) = T^{-1}(x)U$$

і це доводить пункт 1).

Тепер, якщо $A(x)$ – регулярна матриця, то із співвідношення (2.9) одержуємо:

$$\deg V = \deg T^A - \deg A = \deg \mu_m^A - \deg A. \tag{2.10}$$

Перейшовши в рівності (2.9) до транспонованих матриць, отримаємо аналогічно, що існує ліва перетворювальна матриця $U(x)$ матриці $A(x)$ до її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ степеня (2.10).

Матриця $T(x)$ із співвідношення

$$U(x) = T^{-1}(x)U$$

є унітрикутною з елементами t_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j < i$, з умовами (2.4) та (2.5). Не важко показати, що

$$\deg U(x) < \deg \mu_m^A - \deg \mu_1^A,$$

а отже,

$$\deg T^{-1} < \deg \mu_m^A - \deg \mu_1^A.$$

Лема доведена.

Теорема 2.2. *Нехай задано набір поліноміальних матриць*

$$A_1(x),\ A_2(x),\ \ldots,\ A_k(x), \tag{2.11}$$

де

$$A_i(x) \in M(m, n_i, \mathbf{F}[x]), \quad m \leqslant n_i, \ \operatorname{rang} A_i(x) = r_i,$$

$i = 1, \ 2, \ \ldots, \ k$. *Без обмеження загальності вважатимемо, що* $r_1 \geq r_2 \geq \ \cdots \geq r_k$. *Нехай* $\mathbf{F}_{d_{r_i}^{A_i}}$ *– поле розкладу поліномів* $d_{r_i}^{A_i}(x)$, *тобто*

$$d_{r_i}^{A_i}(x) = \prod_{j=1}^{s_i} (x - \alpha_{ij})^{t_{ij}}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbf{F}_{d_{r_i}^{A_i}}, \ \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ k.$$

Якщо

$$\sum_{i=1}^{k} s_i < |F|, \tag{2.12}$$

то набір поліноміальних матриць (2.11) напівскалярно еквівалентний до набору

$$T^{A_1}(x), \ T^{A_2}(x), \ \ldots, \ T^{A_k}(x), \tag{2.13}$$

матриць стандартної форми, тобто існують такі верхня унітрикутна $U \in GL(m, \mathbf{F})$ *і оборотня* $V_i(x) \in GL(n_i, \mathbf{F}[x])$, $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ k$, *матриці, що*

$$T^{A_i}(x) = UA_i(x)V_i(x), \quad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ k$$

— матриці вигляду (2.3) або (2.6).

Доведення. На основі леми 2.4 для набору матриць (2.11) існує рядок

$$\mathbf{u} = \left\| \ 1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots \quad u_m \ \right\|,$$

де $u_j \in \mathbf{F}$, $j = 2, \ 3, \ \ldots, \ m$ такий, що

$$\mathbf{u}A_i(x) = \left\| \ b_1^{(i)}(x) \quad b_2^{(i)}(x) \quad \ldots \quad b_{n_i}^{(i)}(x) \ \right\|,$$

причому

$$(b_1^{(i)}(x),\ b_2^{(i)}(x),\ \ldots,\ b_{n_i}^{(i)}(x)) = d_1^{A_i}(x) = \mu_1^{A_i}(x)$$

для всіх $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Тоді для матриці

$$U_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & u_2 & \cdots & u_m \\ 0 & & I_{m-1} & \end{array} \right\|,$$

де I_{m-1} — одинична матриця із $M(m-1, \mathbf{F})$, і деяких матриць $V_i(x) \in GL(n_i, \mathbf{F}[x])$ матимемо:

$$U_1 A_i(x) V_i(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} \mu_1^{A_i}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & & & \\ \cdots & & A_{m-1,n_i-1}^{(i)}(x) & \\ t_{m1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & & & \end{array} \right\| = A_i^{(1)}(x),$$

де

$$A_{m-1,n_i-1}^{(i)}(x) \in M(m-1, n_i-1, \mathbf{F}[x]), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Тепер, як і під час доведення теореми 2.1, міркуємо аналогічно над набором матриць

$$A_{m-1,n_i-1}^{(i)}(x) \in M(m-1, n_i-1, \mathbf{F}[x]), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

поки не зведемо набір матриць (2.11) напівскалярними еквівалентними перетвореннями до набору (2.13) матриць у стандартній формі вигляду (2.3) або (2.6).

Теорема доведена.

Наслідок 2.7. *Нехай* $\mathbf{F}$ – *нескінченне поле,*

$A_i(x) \in M(m, n_i, \mathbf{F}[x]), \quad m \leq n_i, \quad \operatorname{rang} A_i(x) = r_i, \quad i = 1, \ldots, k.$

Тоді набір матриць

$$(A_1(x),\ A_2(x),\ \ldots,\ A_k(x))$$

напівскалярно еквівалентний до набору

$$(T^{A_1}(x),\ T^{A_2}(x),\ \ldots,\ T^{A_k}(x))$$

матриць у стандартній формі вигляду (2.3) або (2.6).

Нехай $A(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x])$, $m \leqslant n$, і матриця $B(x) \in M(m, \mathbf{F}[x])$ — лівий дільник матриці $A(x)$, тобто

$$A(x) = B(x)(x),\ C(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x]). \tag{2.14}$$

Тоді на основі теореми 2.2 пара матриць $A(x), B(x)$ напівскалярно еквівалентна до стандартної пари матриць $T^A(x), T^B(x)$ вигляду (2.3) або (2.6). Тоді із рівності (2.14) одержуємо:

$$T^A(x) = T^B(x)\widetilde{C}(x),$$

де $\widetilde{C}(x)$ — нижня трикутна матриця. Звідси отримаємо такий наслідок.

Наслідок 2.8. *Нехай* $B(x) \in M(m, \mathbf{F}[x])$ — *лівий дільник матриці* $A(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x])$. *Тоді канонічна діагональна форма* $D^B(x)$ *дільника* $B(x)$ *є дільником канонічної діагональної форми* $D^A(x)$ *матриці* $A(x)$, *тобто*

$$D^A(x) = D^B(x)\Psi(x),$$

де $\Psi(x)$— *деяка діагональна матриця.*

Аналогічне твердження формулюємо для правого дільника $C(x)$ матриці $A(x)$.

2.3. Напівскалярна еквівалентність та подібність матричних поліномів

Важливо встановити зв'язки між різними типами еквівалентностей матричних поліномів. Відомо, що скалярна еквівалентність і еквівалентність матричних поліномів рівносильні лише для регулярних матричних поліномів першого степеня, тобто регулярні матричні поліноми першого степеня скалярно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні. У цьому підрозділі встановлюємо зв'язки між скалярною та напівскалярною еквівалентностями матричних поліномів та їх подібністю. Як наслідок одержуємо зв'язки між напівскалярною еквівалентністю матричних поліномів та подібністю наборів матриць над полем.

Нехай $\mathbf{F}$ — поле,

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_s, \tag{2.15}$$

$$B(x) = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \cdots + B_s, \tag{2.16}$$

$A_i, B_i \in GL(n, \mathbf{F})$, $i = 0, 1, \ldots, s$ — регулярні матричні поліноми, тобто $\det A_0 \neq 0$, $\det B_0 \neq 0$.

Очевидно, що коли регулярні матричні поліноми $A(x)$ і $B(x)$ напівскалярно еквівалентні

$$A(x) = UB(x)V(x), \tag{2.17}$$

де $U \in GL(n, \mathbf{F})$, $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, то вони і скалярно еквівалентні:

$$A(x) = SB(x)T, \quad S, T \in GL(n, \mathbf{F}).$$

Дійсно, оскільки матричні поліноми $A(x)$ і $B(x)$ регулярні і одного степеня, то із співвідношення (2.17) випливає, що матриця $V(x)$ — числова (незалежна від x) неособлива матриця.

Тому, досліджуючи скалярну еквівалентність матричних поліномів, можна використовувати стандартні форми матричних поліномів стосовно їх напівскалярної еквівалентності.

Теорема 2.3. *Регулярні матричні поліноми $A(x)$ і $B(x)$ скалярно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх стандартні форми $T^A(x)$ і $T^B(x)$ напівскалярно еквівалентні.*

Доведення. Нехай стандартні форми

$$T^A(x) = U_1 A(x) V_1(x), \quad U_1 \in GL(n, \mathbf{F}), \ V_1(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$$

і

$$T^B(x) = U_2 B(x) V_2(x), \quad U_2 \in GL(n, \mathbf{F}), \ V_2(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$$

матричних поліномів $A(x)$ і $B(x)$ напівскалярно еквівалентні:

$$T^A(x) = U T^B(x) V(x), \tag{2.18}$$

де

$$U \in GL(n, \mathbf{F}), \ V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x]).$$

Тоді зі співвідношення (2.18) матимемо

$$U_1 A(x) V_1(x) = U U_2 B(x) V_2(x)(x) V(x)$$

або

$$A(x) = U_1^{-1} U U_2 B(x) V_2(x)(x) V(x) V_1^{-1}(x).$$

Оскільки матричні поліноми $A(x)$ і $B(x)$ регулярні, то із останнього співвідношення випливає, що

$$V_2(x)(x) V(x) V_1^{-1}(x) = T$$

— числова неособлива матриця. Таким чином

$$A(x) = S B(x) T, \quad S = U_1^{-1} U U_2,$$

тобто матричні поліноми $A(x)$ і $B(x)$ — скалярно еквівалентні.

Доведення того, що із скалярної еквівалентності матричних поліномів $A(x)$ і $B(x)$ випливає напівскалярна еквівалентність їх стандартних форм $T^A(x)$ і $T^B(x)$ виконуємо аналогічно.

Наслідок 2.9. *Унітальні матричні поліноми*

$$A(x) = Ix^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_s \tag{2.19}$$

і

$$B(x) = Ix^s + B_1x^{s-1} + \cdots + B_s \tag{2.20}$$

подібні

$$A(x) = SB(x)S^{-1}, \quad S \in GL(n, \mathbf{F})$$

тоді і тільки тоді, коли вони напівскалярно еквівалентні, тобто їх стандартні форми $T^A(x)$ *і* $T^B(x)$ *напівскалярно еквівалентні.*

Наслідок 2.10. *Набори матриць*

$$(A_1, \ \ldots, \ A_s), \ (B_1, \ \ldots, \ B_s)$$

подібні

$$A_i = SB_iS^{-1}, \quad S \in GL(n, \mathbf{F}), \quad i = 1, \ldots, s,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні їм матричні поліноми (2.19) і (2.20) напівскалярно еквівалентні, тобто їх стандартні форми $T^A(x)$ *і* $T^B(x)$ *напівскалярно еквівалентні.*

Таким чином, стандартні форми матричних поліномів щодо напівскалярної еквівалентності використовують під час розв'язування відомої проблеми про подібність пар, в тому числі і подібність скінченних наборів матриць над полями.

Зокрема, трикутна форма щодо напівскалярної еквівалентності для певних класів поліноміальних матриць (з різними характеристичними коренями, з одним елементарним дільником, з попарно різними елементарними дільниками тощо) є достатньо простою і можна встановити умови їх напівскалярної еквівалентності та канонічну форму, а отже розв'язувати задачу про подібність скінченних наборів та пар матриць над полем. Це і використовував П.С.Казімірський і його учні, розв'язуючи задачі про подібність пар матриць (див., наприклад, праці [51], [56], [57], [121], [122] і ін).

Розділ 3
УЗАГАЛЬНЕНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ НАБОРІВ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ

У третьому розділі встановлено стандартну форму для пар матриць над адекватними кільцями щодо їх узагальненої еквівалентності. Вказано умови узагальненої еквівалентності пар матриць. Виділено класи пар матриць, для яких стандартна форма визначена однозначно. Встановлено критерій діагоналізовності пар матриць, тобто їх узагальненої еквівалентності до пар матриць діагонального вигляду. Для набору матриць, що складається із матриці і її дільників, встановлено умови їх діагоналізовності та для трійки матриць вказана деяка їх форма.

3.1. Звідність матриці до трикутної форми

Надалі, де це не застережено, під адекватним розумітимемо кільце R, введене О.Хелмером [165], тобто R — область цілісності, де кожний скінченно породжений ідеал головний і для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, причому

c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із $b \in R$.

Надалі використовуватимемо такі позначення:

$M(m,\ n,\ R)$ — множина $m \times n$-матриць, $M(n,\ R)$ — кільце $n \times n$-матриць над кільцем R, d_k^A — найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці $A \in M(m,n,R)$.

У праці [165] доведено, що кожна матриця $A \in M(m,n,R)$, де R — адекватне кільце, еквівалентна до канонічної діагональної форми D^A (нормальної форми Сміта), тобто існують такі оборотні матриці $U \in \mathrm{GL}(m,R)$ і $V \in \mathrm{GL}(n,R)$, що

$$D^A = UAV = \mathrm{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \dots,\ \mu_r^A,\ 0,\ \dots,\ 0), \tag{3.1}$$

де $\mu_r^A \neq 0$ і $\mu_i^A | \mu_{i+1}^A$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r-1$.

Матриця D^A із (3.1) є прямокутна $m \times n$-матриця над R, в якій всі елементи в позиціях (i,j) для $i \neq j$ дорівнюють нулю.

Через D_k^A позначатимемо підматрицю k-го порядку матриці D^A, тобто

$$D_k^A = \mathrm{diag}\,(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \dots,\ \mu_k^A),$$

де деякі μ_i^A можуть дорівнювати нулю, тобто для $l > r$

$$\mu_l^A = \mu_r^A \neq 0, \quad \mu_{r+1}^A = \mu_{r+2}^A = \dots = \mu_k^A = 0,$$

де r — ранг матриці $A \in M(m,n,R)$.

Лема 3.1. *Нехай* $B \in M(n,k,R)$, $\mathrm{rang}\, B > 1$. *Тоді існує такий рядок*

$$\mathbf{u} = \|\ 1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n\ \|,\ u_i \in R,\ i = 2,\ 3,\ \dots,\ n,$$

що

$$\mathbf{u}B = \| \; b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \; \|,$$

де

$$(b_1,\, b_2,\, \dots,\, b_k) = d_1^B.$$

Доведення. Доведення леми проведемо за індукцією по n.

Нехай $n = 2$. Тоді $\operatorname{rang} B = 2$ і для деякої матриці $V \in \mathrm{GL}(k, R)$ маємо:

$$BV = \left\| \begin{array}{ccccc} b_1 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

де b_2 і b_3 — ненульові елементи. Тому існує такий елемент $u_2 \in R$, що

$$(b_1 + u_2 b_2, b_3) = (b_1, b_2, b_3) = d_1^B.$$

Отже, $\mathbf{u} = \| \, 1 \quad u_2 \, \|$.

Тепер припустимо, що твердження леми справджується для всіх матриць $B_{lk} \in M(l,\ k,\ R)$, де $l < n$.

Матрицю B запишемо у вигляді

$$B = \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ & B_{n-1,k} & & \end{array} \right\|,$$

де $B_{n-1,k} \in M(n-1, k, R)$.

Очевидно, що $\operatorname{rang} B_{n-1,k} \geqslant 1$. Нехай $\operatorname{rang} B_{n-1,k} = 1$. Тоді для деякої матриці $V \in \mathrm{GL}(k, R)$ маємо, що

$$BV = \left\| \begin{array}{ccccc} b_1 & c & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\|,$$

де $c \neq 0$. Тоді існують такі елементи $u_2, \ u_3, \ \dots, \ u_n \in R$, що

$$(b_1 + u_2 b_2 + \ldots + u_n b_n, c) = (b_1, \ \dots, \ b_n, c) = d_1^B.$$

Отже, $\mathbf{u} = \| \ 1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \ \|$.

Нехай $\operatorname{rang} B_{n-1,k} > 1$. Для деякої матриці $V \in \mathrm{GL}(k, R)$ маємо:

$$BV = \left\| \begin{array}{cccc} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ & B'_{n-1,k} & & \end{array} \right\| = B_1,$$

де $b_1 \neq 0$. Якщо $b_1 = 0$, враховуючи припущення індукції, все доведено.

Тепер для матриці $B'_{n-1,k}$ згідно з припущенням індукції існує такий рядок

$$\mathbf{u} = \| \ 1 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n \ \|,$$

що

$$\mathbf{u}B'_{n-1,k} = \| \ c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_k \ \|,$$

де

$$(c_1, \ c_2, \ \dots, \ c_k) = d_1^{B'_{n-1,k}} = d_1^{B_{n-1,k}}.$$

Тому

$$U_1 B_1 = \left\| \begin{array}{cccc} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ & B_{n-2,k} & & \end{array} \right\|,$$

де

$$U_1 = \left\| \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & u_3 & \dots & u_n \\ \hline & \mathbf{0} & & I_{n-2} & \end{array} \right\|,$$

I_{n-2} – одинична матриця порядку $n-2$.

Розглянемо тепер матрицю

$$B_{2,k} = \left\| \begin{array}{cccc} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_k \end{array} \right\|.$$

Очевидно, що $d_1^{B_{2,k}} = d_1^B$. Якщо $\operatorname{rang} B_{2,k} = 2$, то існує такий рядок $\mathbf{u} = \| \; 1 \quad u_2 \; \|$, що

$$\mathbf{u}B_{2,k} = \| \; f_1 \quad f_2 \quad \ldots \quad f_k \; \|,$$

де $(f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_k) = d_1^B$.

Не важко переконатися, що шуканим для матриці B є рядок

$$u = \| \; 1 \quad u_2 \quad u_2u_3 \quad \ldots \quad u_2u_n \; \|.$$

Якщо $\operatorname{rang} B_{2,k} = 1$, тобто $c_i = 0$ для всіх $i = 2,\, 3,\, \ldots,\, k$, то переходимо до матриці $B_{n-2,k}$ і міркуємо аналогічно. Оскільки $\operatorname{rang} B > 1$, то на деякому кроці одержимо матрицю

$$U_tB_t = \left\| \begin{array}{cccc} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1 & 0 & \ldots & 0 \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_k \\ & B_{n-2,k} & & \end{array} \right\|,$$

де не всі g_i, $i = 2,\, 3,\, \ldots,\, k$, дорівнюють нулю. Дальше доведення леми очевидне.

Зауважимо, що лема 3.1 є узагальненням теореми О.Хелмера (теорема 1.1) для довільних матриць над адекватним кільцем.

Теорема 3.1. *Нехай* $B \in M(m,n,R)$, $m \leq n$ *і*

$$D^B = \operatorname{diag}(\mu_1^B,\ \mu_2^B,\ \dots,\ \mu_r^B,\ 0,\ \dots,\ 0),\ \mu_r^B \neq 0$$

— канонічна діагональна форма матриці B, $R_{\delta_{ij}}$ *— повна система лишків за модулем* $\delta_{ij} \in R$. *Тоді існують такі верхня унітрикутна* $U \in GL(m,R)$ *і оборотна* $V \in GL(n,R)$ *матриці, що*

$$T^B = UBV =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc|c} \mu_1^B & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ b_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_{r-1,1}\mu_1^B & b_{r-1,2}\mu_2^B & \dots & \mu_{r-1}^B & 0 & \mathbf{0} \\ b_{r1}\mu_1^B & b_{r2}\mu_2^B & \dots & b_{r,r-1}\mu_{r-1}^B & b_{rr}\mu_r^B & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_{m1}\mu_1^B & b_{m2}\mu_2^B & \dots & b_{m,r-1}\mu_{r-1}^B & b_{mr}\mu_r^B & \end{array} \right\|, \quad (3.2)$$

де $(b_{rr},\ b_{r+1,r}, \dots,\ b_{mr}) = 1$ *і*

$$b_{ij} \in R_{\delta_{ij}},\ \delta_{ij} = \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B},\ i,j = 1,\ 2,\ \dots,\ r,\ i > j.$$

Доведення. На основі леми 3.1 існує такий рядок

$$\mathbf{u} = \|1\ u_2\ \dots\ u_m\|,$$

що

$$\mathbf{u}B = \|c_1\ c_2\ \dots\ c_n\|,$$

де $(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n) = d_1^B = \mu_1^B$. Покладемо

$$U_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & u_2 & \dots & u_m \\ \mathbf{0} & & I_{m-1} & \end{array} \right\|,$$

де I_{m-1} — одинична матриця порядку $m-1$. Тоді існує така матриця $V_1 \in GL(n,R)$, що

$$U_1 B V_1 = \left\| \begin{array}{cc} \mu_1^B & 0 \ \dots \ 0 \\ b_{21}\mu_1^B & \\ \vdots & B_{m-1,n-1} \\ b_{m1}\mu_1^B & \end{array} \right\| = B_1,$$

де $B_{m-1,n-1} \in M(m-1,n-1,R)$.

Тепер аналогічно міркуємо над матрицею $B_{m-1,n-1}$ і т.д. В результаті одержимо матрицю

$$B_{r-1} = U_{r-1} B V_{r-1} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|c} \mu_1^B & \dots & 0 & \\ b_{21}\mu_1^B & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \\ b_{r-1,1}\mu_1^B & \dots & \mu_{r-1}^B & \\ \hline b_{r1}\mu_1^B & \dots & b_{r,r-1}\mu_{r-1}^B & \\ \dots & \dots & \dots & B_{m-(r-1),n-(r-1)} \\ b_{m1}\mu_1^B & \dots & b_{m,r-1}\mu_{r-1}^B & \end{array} \right\|,$$

де $\operatorname{rang} B_{m-(r-1),n-(r-1)} = 1$, U_{r-1} — верхня унітрикутна матриця і $V_{r-1} \in GL(n,R)$. Тоді існує така матриця $W \in GL(n-(r-1),R)$, що

$$B_{m-(r-1),n-(r-1)} W = \left\| \begin{array}{cccc} b_{rr}\mu_r^B & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{mr}\mu_r^B & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

де $(b_{rr},\ b_{r+1,r},\ \dots,\ b_{mr}) = 1$. Матриця

$$B_{r-1}(I_{r-1} \oplus W) = T^B$$

є вигляду (3.2).

Теорема доведена.

Наслідок 3.1. *Нехай* $B \in M(m, n, R)$, $m \leq n$ *і* $\operatorname{rank} B = m$. *Тоді існують такі верхня унітрикутна* U *і оборотна* $V \in GL(n, R)$ *матриця, що*

$$UBV = T^B = TD^B,$$

де T *— нижня унітрикутна матриця.*

Наслідок 3.2. *Нехай* $B \in M(m, n, R)$, $m \leq n$ *і* $\operatorname{rank} B = m$. *Тоді в множині* $\{U\}_A$ *лівих перетворювальних матриць матриці* B *до її канонічної діагональної форми, тобто матриць, які задовольняють співвідношення (3.1), існує матриця* $U_0 \in \{U\}_A$, *яка розкладається у добуток нижньої* T *та верхньої* H *унітрикутних матриць:* $U_0 = TH$.

3.2. Еквівалентність трикутних матриць

Нехай R – адекватне кільце або загальніше — комутативне кільце з діагональною редукцією матриць.

Лема 3.2. *Нехай* $C \in M(m, R)$ *є нижня трикутна матриця*

$$C = \left\| \begin{matrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \psi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \psi_m \end{matrix} \right\|. \tag{3.3}$$

Матриця C *еквівалентна до діагональної матриці*

$$\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_m)$$

тоді і тільки тоді, коли система рівнянь

$$c_{ii}x_{ij} - \sum_{k=j}^{i-1} c_{kj}y_{ik} = c_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,m, \ i > j, \tag{3.4}$$

де $c_{ii} = \psi_i, \ i = 1,\ldots,m,$ *якщо* $j = i$, *має розв'язки.*

Доведення. Покладемо $m = 2$. Тоді із рівності

$$\psi_2 x_{21} - \psi_1 y_{21} = c_{21} \tag{3.5}$$

випливає матрична рівність

$$\left\| \begin{matrix} \psi_1 & 0 \\ c_{21} & \psi_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -x_{21} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -y_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{matrix} \right\|, \tag{3.6}$$

тобто матриця

$$C = \left\| \begin{matrix} \psi_1 & 0 \\ c_{21} & \psi_2 \end{matrix} \right\|$$

еквівалентна до $\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ \psi_2)$.

Навпаки, якщо трикутна матриця C еквівалентна до діагональної матриці Ψ, то на основі теореми 1.5 (Рота) і її узагальнення для матричних рівнянь над комутативними кільцями [162] рівняння (3.5) розв'язне.

Припустимо справедливість леми 3.2 для матриці C порядку $m-1$ і доведемо її для матриці C порядку m.

Матрицю C порядку m запишемо так:

$$C = \left\| \begin{matrix} C_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{m-1} & \psi_m \end{matrix} \right\|, \tag{3.7}$$

де C_{m-1} — нижня трикутна матриця порядку $m-1$ з головною діагоналлю

$$\mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{m-1})$$

і $\mathbf{c}_{m-1}$ — рядок довжини $m-1$. Далі застосовуємо цю ж теорему 1.5 про еквівалентність клітково-трикутної матриці до діагональної і розв'язністю матричного рівняння Сильвестра до клітково-трикутної матриці C вигляду (3.7) і клітково-діагональної матриці $\mathrm{diag}(C_{m-1},\ \psi_m)$.

Лема 3.3. *Якщо в трикутній матриці C вигляду (3.3)*

$$(\psi_j, \psi_k)|c_{ij}, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots, m,\ i > j \tag{3.8}$$

для всіх $k = i,\ i+1,\ \ldots,\ m$, то матриця C еквівалентна до діагональної матриці

$$\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m).$$

Доведення. На основі леми 3.2 матриця C еквівалентна до матриці Ψ тоді і тільки тоді, коли система рівнянь (3.4) має розв'язки. Розв'язування цієї системи рівнянь зводимо до послідовного знаходження розв'язків рівнянь вигляду

$$ax - by = c,$$

яке має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $(a, b)|c$ [8]. Звідси, за виконання умов (3.8), система рівнянь (3.4) матиме розв'язки.

Лема доведена.

Лема 3.4. *Нехай нижня трикутна матриця $C \in M(m, R)$ з головною діагоналлю*

$$\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots, \psi_m)$$

еквівалентна до матриці Ψ. Тоді матриця C трикутно еквівалентна до діагональної матриці Ψ, тобто існують такі нижні унітрикутні матриці T_1 і T_2 над кільцем R, що $T_1 C T_2 = \Psi$.

Доведення. Покладемо $m = 2$. Нехай матриця

$$C = \begin{Vmatrix} \psi_1 & 0 \\ c_{21} & \psi_2 \end{Vmatrix}$$

еквівалентна до діагональної матриці $\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2)$. Тоді на основі теореми 1.5 рівняння (3.5) розв'язне. Поклавши

$$T_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ y_{21} & 1 \end{Vmatrix}, \quad T_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -x_{21} & 1 \end{Vmatrix},$$

де $x_{21},\ y_{21}$ — розв'язки рівняння (3.5), одержимо $T_1CT_2 = \Psi$.

Для довільного m лему легко довести за індукцією.

Лема доведена.

3.3. Стандартна форма пари матриць

Надалі використовуватимемо такі позначення:

R — адекватне кільце згідно О.Хелмеру;

$U(R)$ — група одиниць кільця R;

R_δ — повна система лишків за модулем $\delta \in R$;

R'_δ — така максимальна підмножина множини R_δ, що для будь-яких $a, b \in R'_\delta$ і кожного $u \in U(R)$ справедливе співвідношення $ua \not\equiv b \,(\mathrm{mod}\delta)$. Іншими словами, R'_δ – це повна система лишків за модулем δ з точністю до оборотних елементів кільця R;

R''_δ — така максимальна підмножина множини R'_δ, що кожний елемент $a \in R''_\delta$ відмінний від одиниці має нетривіальний спільний дільник з δ: $(a, \delta) \neq 1,\ a \neq 1$.

Приклад 3.1. 1) Нехай $R = \mathbb{Z}$, $\delta = 25$. Тоді

$$R_\delta = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 24\},\ R'_\delta = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 12\},\ R''_\delta = \{0,\ 1,\ 5,\ 10\}.$$

2) $R=\mathbf{F}[x]$, де $\mathbf{F}$ — поле і $\delta=x$. Тоді $R_x=\mathbf{F}$, $R'_x=\{0,1\}$. Множина R_x може бути нескінченною ($\mathbf{F}$ — нескінченне поле), а R'_x — скінченна.

Означення 3.1. Нехай $A_i,\ B_i\in M(m,\ n_i,\ R)$, $i=1,\ 2$. Пари матриць $(A_1,\ A_2)$ і $(B_1,\ B_2)$ називаємо узагальнено еквівалентними, якщо

$$A_1=UB_1V_1,\quad A_2=UB_2V_2$$

для деяких матриць $U\in \mathrm{GL}(m,R), V_i\in \mathrm{GL}(n_i,R)$, $i=1,\ 2$.

Зауважимо, що у випадку $n_1=n_2$ і $V_1=V_2$ це означення збігається із класичним означенням еквівалентності пар матриць [12], [80], [16].

У цьому підрозділі встановимо певні форми для пар матриць над адекватним кільцем R стосовно узагальненої еквівалентності.

Теорема 3.2. *Нехай* $A\in M(m,n_1,R)$, $B\in M(m,n_2,R)$ *і*

$$D^A=\mathrm{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \ldots,\ \mu_r^A,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \mu_r^A\neq 0$$

$$D^B=\mathrm{diag}(\mu_1^B,\ \mu_2^B,\ \ldots,\ \mu_s^B,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \mu_s^B\neq 0,\ s\geq r$$

— канонічні діагональні форми матриць A *та* B.

Тоді пара матриць (A,B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A,T^B), *тобто* $UAV_1=D^A$, $UBV_2=T^B$ *для деяких матриць* $U\in GL(m,R)$, $V_i\in GL(n_i,R)$, $i=1,\ 2$, *де матриця* T^B *має один з таких виглядів:*

1) якщо $s=r=m$, *то*

$$T^B=\left\|\begin{array}{ccccccc} \mu_1^B & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ t_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_{m1}\mu_1^B & t_{m2}\mu_2^B & \cdots & \mu_m^B & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right\| \qquad (3.9)$$

і $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$, *де*

$$\delta_{ij} = \left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right), \quad i, j = 1, \ 2, \ \cdots, \ m, \quad i > j;$$

2) якщо $r < s \leqslant m$, *то*

$$T^B =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc|c} \mu_1^B & & & & & & & \\ t_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & & & & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & & & & \\ t_{r1}\mu_1^B & t_{r2}\mu_2^B & \dots & \mu_r^B & & & & \\ t_{r+1,1}\mu_1^B & t_{r+1,2}\mu_2^B & \dots & t_{r+1,r}\mu_r^B & \mu_{r+1}^B & & & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\ t_{s1}\mu_1^B & t_{s2}\mu_2^B & \cdots & t_{sr}\mu_r^B & 0 & \cdots & \mu_s^B & \\ t_{s+1,1}\mu_1^B & t_{s+1,2}\mu_2^B & \cdots & t_{s+1,r}\mu_r^B & 0 & \cdots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ t_{m1}\mu_1^B & t_{m2}\mu_2^B & \cdots & t_{mr}\mu_r^B & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right\| \tag{3.10}$$

і $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$, $i = 1, \ 2, \ \dots, \ m, \ j = 1, \ 2, \ \dots, \ r, \ i > j$, *де*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right), \text{якщо } i, j = 1, \ 2, \ \dots, \ r, \ i > j, \\ \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B}, \ \text{якщо } \ i = r+1, \ r+2, \ \dots, \ s, \ j = 1, \ 2, \ \dots, \ r, \\ 0, \ \text{якщо } \ i = s+1, \ s+2, \ \dots, \ m, \ j = 1, \ 2, \ \dots, \ r; \end{cases}$$

3) якщо $r = s < m$, *тоді*

$$T^B =$$

$$= \left\| \begin{array}{lllllll} \mu_1^B & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}\mu_1^B & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{r-1,1}\mu_1^B & \cdots & \mu_{r-1}^B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{r1}\mu_1^B & \cdots & t_{r,r-1}\mu_{r-1}^B & t_{rr}\mu_r^B & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1}\mu_1^B & \cdots & t_{m,r-1}\mu_{r-1}^B & t_{mr}\mu_r^B & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\|, \quad (3.11)$$

де $(t_{rr},\ t_{r+1,r},\ \cdots,\ t_{mr}\ ) = 1$ і

$$t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}, \quad \delta_{ij} = \left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right), \quad i, j = 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1, \quad i > j.$$

Доведення. Пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари (D^A, B_1), де

$$D^A = PAQ, \quad B_1 = PB,$$

для деяких матриць $P \in GL(m, R)$ і $Q \in GL(n_1, R)$. Далі зводитимемо матриці B_1 до трикутного вигляду допустимими перетвореннями

$$(U, V), \qquad U \in GL(m, R), \qquad V \in GL(n_2, R),$$

тобто такими, що

$$UD^A = D^A V_1 \qquad (3.12)$$

для деякої матриці $V_1 \in GL(n_1, R)$. Із (3.12) випливає, що матриця U є вигляду $U = \|u_{ij}\|_1^m$, де

$$u_{ij} = \frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}\tilde{u}_{ij}, \quad i, j = 1,\ 2,\ \dots,\ m, \quad i > j.$$

Тепер розглянемо випадок

$$\operatorname{rang} B_1 = \operatorname{rang} B = s > r.$$

На основі теореми 3.1 існують такі верхня унітрикутна матриця $U_1 \in GL(m, R)$ і матриця $V_1 \in GL(n_2, R)$, що

$$U_1 B_1 V_1 = B_2 =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} \mu_1^B & 0 & \dots & 0 & \\ b_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_{r1}\mu_1^B & b_{r2}\mu_2^B & \dots & \mu_r^B & \\ \hline b_{r+1,1}\mu_1^B & b_{r+1,2}\mu_2^B & \dots & b_{r+1,r}\mu_r^B & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & B_{m-r,n_2-r} \\ b_{m1}\mu_1^B & b_{m2}\mu_2^B & \dots & b_{mr}\mu_r^B & \end{array} \right\|,$$

де

$$B_{m-r,n_2-r} = \left\| \begin{array}{ccc} b_{r+1,r+1} & \dots & b_{r+1,n_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m,r+1} & \dots & b_{m,n_2} \end{array} \right\|.$$

Тепер для деяких матриць

$$P_{m-r} \in GL(m-r, R),\ Q_{n_2-r} \in GL(n_2-r, R)$$

матимемо, що

$$P_{m-r}B_{m-r,n_2-r}Q_{n_2-r} = \mathrm{diag}(\mu^B_{r+1},\ \mu^B_{r+2},\ \dots,\ \mu^B_s,\ 0,\ \dots,\ 0).$$

Покладемо

$$U_2 = I_r \oplus P_{m-r}, \qquad V_2 = I_r \oplus Q_{n_2-r}.$$

Тоді

$$U_2B_2V_2 = T^B_1 = T_1D^B.$$

Тепер зведемо елементи $b_{i+1,i}$ першої піддіагоналі матриці T_1 за відповідними модулями.

Нехай $R_{\delta_{21}}$ — повна система лишків за модулем

$$\delta_{21} = \left(\frac{\mu^A_2}{\mu^A_1}, \frac{\mu^B_2}{\mu^B_1}\right),$$

і

$$b_{21} \equiv c_{21} (\mathrm{mod}\ \delta_{21}), \qquad c_{21} \in R_{\delta_{21}}.$$

Тому рівняння

$$\frac{\mu^A_2}{\mu^A_1}u_{21} + \frac{\mu^B_2}{\mu^B_1}v_{21} = c_{21} - b_{21}$$

має розв'язок над R. Покладемо

$$U_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu^A_2}{\mu^A_1}u_{21} & 1 \end{Vmatrix} \oplus I_{m-2}, \quad V_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ v_{21} & 1 \end{Vmatrix} \oplus I_{n_2-2}.$$

Тоді елементом матриці $T_2^B = U_3 T_1 V_3$ у позиції $(2,1)$ є елемент $c_{21}\mu_1^B$. Якщо $c_{21} \notin R'_{\delta_{21}}$, то існує такий елемент $t_{21} \in R'_{\delta_{21}}$, що

$$u_1 c_{21} \equiv t_{21} (\mathrm{mod}\ \delta_{21}),\ u_1 \in U(R).$$

Тепер, знову міркуючи, як і в попередньому випадку, одержимо матрицю

$$T_3^B = U_4 T_2^B V_4$$

з елементом $v_{21}\mu_1^B$ у позиції $(2,1)$.

Далі таким самим способом зводимо за відповідними модулями решту елементів першої піддіагоналі матриці T_3^B, а потім — елементи другої піддіагоналі одержаної матриці і т.д. Таким чином одержуємо матрицю T^B, визначену в теоремі.

Оскільки над матрицями B_i і T_i^B, $i = 1, 2, \ldots$ виконувались допустимі перетворення, то пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари (D^A, T^B).

У випадках 1) і 3) доведення теореми подібне.

Наслідок 3.3. *Нехай*

$$A \in M(m, n_1, R),\ B \in M(m, n_2, R),\quad m \leq n_i,\ i = 1,\ 2$$

і матриця B *— максимального рангу, тобто* $\operatorname{rang} B = m$ *або* $\operatorname{rang} B > \operatorname{rang} A$*. Тоді пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A, T^B)*, де матриця* T^B *дорівнює добутку нижньої унітрикутної матриці* T *і канонічної діагональної форми* D^B *матриці* B*, тобто* $T^B = TD^B$*.*

Наслідок 3.4. *Нехай*

$$A \in M(m, n_1, R),\ B \in M(m, n_2, R),\quad m \leq n_i,\ i = 1,\ 2$$

і

$$D^A = \operatorname{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ \mu_m^A),\ D^B = \operatorname{diag}(\mu_1^B,\ \mu_2^B,\ \ldots,\ \mu_m^B).$$

Тоді пара матриць (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A, T^B), *де* T^B *має вигляд*

$$T^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^B & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{m-1}^B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1\mu_1^B & t_2\mu_2^B & \ldots & t_{m-1}\mu_{m-1}^B & \mu_m^B & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

і $t_j \in R'_{\delta_j}$, *де*

$$\delta_j = \left(\mu_m^A, \frac{\mu_m^B}{\mu_j^B}\right),\ \ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.$$

Із теореми 3.2 видно, що кожна пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари

$$(D^A, T^B = TD^B),$$

де T — нижня унітрикутна матриця в усіх випадках, крім одного, коли $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B < m$. Якщо в парі матриць одна матриця є дільником іншої, то T — нижня унітрикутна матриця і в цьому випадку.

Теорема 3.3. *Нехай*

$$A \in M(m, n, R),\ B \in M(m, k, R),\ \operatorname{rang} A = r,\ \operatorname{rang} B = s$$

і $B|A$, *тобто* $A = BC$ *для деякої матриці* $C \in M(k, n, R)$. *Тоді пара матриць* $(A,\ B)$ *узагальнено еквівалентна до пари* $(D^A,\ T^B)$, *де*

$$T^B =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc|c} \mu_1^B & & & & & & \\ t_{21}\mu_1^B & \ddots & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & & & & & \\ t_{r1}\mu_1^B & \ldots & \mu_r^B & & & & \\ \hline t_{r+1,1}\mu_1^B & \ldots & t_{r+1,r}\mu_r^B & \mu_{r+1}^B & & \mathbf{0} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ddots & & \mathbf{0} \\ t_{s1}\mu_1^B & \ldots & t_{sr}\mu_r^B & \mathbf{0} & & \mu_s^B & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} T_r^B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_{21} & D_{s-r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = T_s^B \oplus \mathbf{0} = (T_s \oplus E_{m-s})D^B \qquad (3.13)$$

$$і \;\; t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s, \quad j = 1,\ \ldots,\ r, \quad i > j,$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right), \text{ якщо } i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ i > j, \\[2ex] \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B}, \text{ якщо } i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r. \end{cases}$$

Доведення. Очевидно, що $s \geqslant r$. Покладемо $s > r$. На основі теореми 3.2 пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари (D^A, T^B), де T^B є вигляду (3.10), тобто

$$T^B = \left\| \begin{array}{ccc} T_r^B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_{21} & D_{s-r} & \mathbf{0} \\ B_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де B_{31} — матриця розмірів $(m-s)\times r$ і

$$D^A = UAV_1,\ T^B = UBV_2,$$

де $U \in GL(m,R),\ V_1 \in GL(n,R),\ V_2 \in GL(k,R)$. Тоді із рівності $A = BC$ одержимо рівність

$$D^A = T^B C_1, \tag{3.14}$$

де $D^A = D_r^A \oplus \mathbf{0}$,

$$C_1 = \left\| \begin{array}{ccc} C_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{21} & C_{22} & \mathbf{0} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array} \right\|$$

— трикутна матриця. Тоді із рівності (3.14) випливає, що $B_{31}C_{11} = \mathbf{0}$ і, оскільки, C_{11} не є дільником нуля, то $B_{31} = \mathbf{0}$.

Теорема 3.3 доведена.

Означення 3.2. Пару матриць (D^A, T^B), визначену теоремами 3.2 та 3.3, називатимемо стандартною формою пари матриць (A,B) або стандартною парою.

Наслідок 3.5. *Нехай (A,B) — пара матриць з елементами із довільного поля $\mathbf{F}$, тобто*

$$A \in M(m,n_1,\mathbf{F}),\ B \in M(m,n_2,\mathbf{F})$$

і

$$\operatorname{rang} A = r,\ \operatorname{rang} B = s, \quad s \geq r.$$

Тоді пара матриць (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A, T^B), *де*

$$D^A = \left\| \begin{array}{cccc} I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{r-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \ T^B = \left\| \begin{array}{cccc} I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{r-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{s-r} & \mathbf{0} \\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \quad (3.15)$$

де

$$t = \operatorname{rang} \left\| \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right\| - \operatorname{rang} B.$$

Доведення. На основі теореми 3.2 пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари (D^A, T_1^B), де

$$D^A = \left\| \begin{array}{cccc} I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{r-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|, \ T_1^B = \left\| \begin{array}{cccc} I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{r-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{s-r} & \mathbf{0} \\ \multicolumn{2}{c}{B_{m-s,n_2-r}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де $B_{m-s,n_2-s} \in M(m-s, n_2-s), \mathbf{F})$. Тоді для деяких матриць $U_1 \in GL(m-s, R)$ і $V_1 \in GL(n_2-s, R)$ маємо, що

$$U_1 B_{m-s,n_2-r} V_1 = \left\| \begin{array}{cc} I_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тоді пара матриць

$$((I_s \oplus U_1) D^A I_{n_1}, (I_s \oplus U_1) T_1^B (I_s \oplus V_1)) = (D^A, T^B)$$

є вигляду (3.15).

Вказана форма пари матриць (A, B) над полем визначена однозначно.

У праці [157] наведено форму (A_{gen}, B_{gen}) для пари матриць (A, B) над полем відносно узагальненої еквівалентності:

$$A_{gen} = \left\| \begin{matrix} I_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \ B_{gen} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$r + s = r_A, \ r + t = r_B, \ r + s + t = r_M,$$

і

$$r_M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\|.$$

Форми (D^A, T^B) і (A_{gen}, B_{gen}) з точністю до узагальненої еквівалентності збігаються.

3.4. Умови узагальненої еквівалентності пар матриць

Нехай R – адекватне кільце,

$$A_i \in M(m, n_i, R), \ m < n_i, \ i = 1, 2.$$

Тоді існують такі матриці $V_i \in GL(n_i, R)$, що

$$A_i V_i = \|\tilde{A}_i \ \ \mathbf{0}\|, \text{ де } \tilde{A}_i \in M(m, R), \quad i = 1, \ 2.$$

Тому пара матриць (A_1, A_2) узагальнено еквівалентна до пари

$$(\|\tilde{A}_1 \ \ \mathbf{0}\|, \ \|\tilde{A}_2 \ \ \mathbf{0}\|).$$

Це означає, що достатньо розглядати узагальнену еквівалентність пар квадратних матриць.

Наведемо умови узагальненої еквівалентності пар матриць.

Нехай Φ — d-матриця розміру $m \times n$ над R, тобто

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_r,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

де

$$\varphi_r \neq 0, \quad \varphi_i | \varphi_{i+1}, \ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Розглянемо такі співвідношення:

$$H\Phi = \Phi F, \quad H \in GL(m, R), \quad F \in GL(n, R). \tag{3.16}$$

Матриці H і F мають вигляд $H = \|h_{ij}\|_1^m$, $F = \|f_{ij}\|_1^n$, де

$$h_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\tilde{h}_{ij}, \text{ якщо } i, j = 1,\ ,2,\ \ldots,\ r,\ i > j, \\ 0, \text{ якщо } i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ m,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \end{cases}$$

$$f_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\tilde{f}_{ij}, \text{ якщо } i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ i < j, \\ 0, \text{ якщо } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ j = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n. \end{cases}$$

Множини всіх матриць H і F, які задовольняють співвідношення (3.16), утворюють відповідно групи

$$GL_\Phi(m, R) \ \ i \ \ {}_\Phi GL(m, R),$$

які є підгрупами повних лінійних груп $GL(m, R)$ і $GL(n, R)$. Для матриць над кільцем поліномів $\mathbf{F}[x]$ це показано у праці [31].

Лема 3.5. *Нехай* $A_i, B_i \in M(m, R)$, $i = 1,\ 2$. *Якщо пари матриць* (A_1, B_1) *і* (A_2, B_2) *узагальнено еквівалентні, то матриці* $(\operatorname{adj} A_1)B_1$ *і* $(\operatorname{adj} A_2)B_2$ *еквівалентні.*

Доведення. Нехай

$$A_2 = UA_1V_1, \qquad B_2 = UB_1V_2$$

для деяких матриць $U, V_1, V_2 \in GL(m, R)$. Тоді

$$\operatorname{adj} A_2 = V_1^{-1}(\operatorname{adj} A_1)U^{-1}c, \qquad c \in U(R).$$

Тому

$$(\operatorname{adj} A_2)B_2 = \bigl(V_1^{-1}(\operatorname{adj} A_1)U^{-1}c\bigr)(UB_1V_2) =$$
$$= V_1^{-1}(\operatorname{adj} A_1)B_1V_2u = V_1^{-1}(\operatorname{adj} A_1)B_1V_3,$$

де $V_3 \in GL(m, R)$.

Лема доведена.

Оскільки кожна пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари стандартної форми (D^A, T^B), то досить розглянути узагальнену еквівалентність пар матриць такого вигляду.

Теорема 3.4. *Нехай (D, T_1) і (D, T_2) — пари матриць із $M(m, R)$ у стандартній формі, тобто*

$$D = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m), \quad \varphi_m \neq 0,$$

$\mu_i^A | \mu_{i+1}^A$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ *і* T_1, T_2 *— нижні трикутні матриці з головними діагоналями*

$$\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_s,\ 0,\ \ldots,\ 0), \ \psi_s \neq 0,$$

$\psi_i | \psi_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$. *Тоді пари матриць* (D, T_1) *і* (D, T_2) *є узагальнено еквівалентними в тому і тільки тому випадку, коли матриці* $(\operatorname{adj} D)T_1$ *і* $(\operatorname{adj} D)T_2$ *є еквівалентні, тобто*

$$F(\operatorname{adj} D)T_1 = (\operatorname{adj} D)T_2Q, \tag{3.17}$$

де $F \in {}_{\Phi}GL(m, R)$ *і* $Q \in GL(n, R)$.

Доведення. Необхідність. Нехай

$$UDV_1 = D, \qquad UT_1V_2 = T_2, \qquad U, V_1, V_2 \in GL(m, R).$$

Оскільки $UD = DV_1^{-1}$, то

$$V_1^{-1} \in {}_{\Phi}GL(m, R) \ \text{ і } V_1 \in {}_{\Phi}GL(m, R).$$

Тоді

$$(\operatorname{adj} D)T_2 = (\operatorname{adj} V_1)(\operatorname{adj} D)(\operatorname{adj} U)UT_1V_2 = \\ = (\operatorname{adj} V_1)(\operatorname{adj} D)T_1V_2c, \tag{3.18}$$

де $c \in U(R)$. Враховуючи, що $\operatorname{adj} V_1 = c_1V_1^{-1}$, $c_1 \in U(R)$, то з рівності (3.18) одержуємо:

$$V_1^{-1}(\operatorname{adj} D)T_1 = (\operatorname{adj} D)T_2Q,$$

де $V_1^{-1} \in {}_{\Phi}GL(m, R), \quad Q \in GL(m, R)$.

Необхідність доведена.

Достатність. Нехай тепер справедливе співвідношення (3.17). Тоді легко бачити, що

$$F(\operatorname{adj} D) = (\operatorname{adj} D)H,$$

де $H \in GL_{\Phi}(m, R)$. Тому із рівності (3.17) одержуємо:

$$(\operatorname{adj} D)HT_1 = (\operatorname{adj} D)T_2Q.$$

Після скорочення із цієї рівності маємо $HT_1 = T_2Q$. Оскільки $H \in GL_{\Phi}(m, R)$, то $HD = DV$. Отже, пари матриць (D, T_1) і (D, T_2) узагальнено еквівалентні.

Теорема доведена.

Стандартна форма (D^A, T^B) для пари матриць (A, B) загалом визначається неоднозначно. Вкажемо деякі класи пар матриць, стандартна форма для яких визначена однозначно.

Нехай (D, T_1) і (D, T_2) — пари матриць такого вигляду:

$$D = \operatorname{diag}(1, \ \dots, \ 1, \ \varphi_n), \quad \varphi_n \neq 0,$$

$$T_i = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_{n-1} & 0 \\ t_{i1} & t_{i2}\psi_2 & \dots & t_{i,n-1}\psi_{n-1} & \psi_n \end{array} \right\|. \tag{3.19}$$

Без обмеження загальності вважаємо, що $\psi_1 = 1$, в іншому випадку цього можна досягнути винесенням ψ_1 з матриці T_i, $i = 1, \ 2$. Надалі через d_i позначатимемо найбільший спільний дільник елементів останнього рядка матриці T_i, тобто

$$d_i = (t_{i1}, \ t_{i2}\psi_2, \ \dots, \ t_{i,n-1}\psi_{n-1}, \ \psi_n), \quad i = 1, \ 2.$$

Лема 3.6. *Нехай пари матриць (D, T_1) і (D, T_2) — узагальнено еквівалентні. Тоді*

$$(d_1, \ \varphi_n) = (d_2, \ \varphi_n). \tag{3.20}$$

Доведення. На основі леми 3.5 матриці $(\operatorname{adj} D)T_1$ і $(\operatorname{adj} D)T_2$ еквівалентні. Звідси і одержуємо рівність (3.20).

Лема 3.7. *Нехай (D, T_1) — пара матриць вигляду (3.19) і $(d_1, \ \varphi_n) = 1$. Тоді канонічна діагональна форма матриць $(\operatorname{adj} D)T_1$ дорівнює добутку канонічних діагональних форм матриць $\operatorname{adj} D$ і T_1, тобто*

$$D^{(\operatorname{adj} D)T_1} = D^{\operatorname{adj} D} D^{T_1} = \operatorname{diag}(1, \ \varphi_n\psi_2, \ \varphi_n\psi_3, \ \dots, \ \varphi_n\psi_n).$$

Доведення. Застосувавши формулу Біне-Коші, яка виражає мінор добутку матриць через мінори співмножників, одержимо, що кожний мінор p-го порядку матриці $(\operatorname{adj} D)T_1$ ділиться на $\varphi_n^{p-1}\psi_2\dots\psi_p$. Врахувавши при цьому, що $(d_1,\varphi_n)=1$, матимемо:

$$d_p^{(\operatorname{adj} D)T_1}=\varphi_n^{p-1}\psi_1\dots\psi_p,\quad p=1,\dots,n-1.$$

Звідси і випливає твердження леми.

Теорема 3.5. *Нехай* (D,T_1) *і* (D,T_2) *— пари матриць вигляду (3.19). Якщо* $(d_1,\ \varphi_n)=(d_2,\ \varphi_n)=1$, *то пари матриць* (D,T_1) *і* (D,T_2) *узагальнено еквівалентні.*

Доведення. На основі леми 3.7 канонічні діагональні форми матриць $(\operatorname{adj} D)T_1$ і $(\operatorname{adj} D)T_2$ збігаються, тобто ці матриці еквівалентні:

$$S(\operatorname{adj} D)T_1=(\operatorname{adj} D)T_2Q,\quad S=\|s_{ij}\|_1^n, \tag{3.21}$$

де $S,Q\in GL(n,R)$.

Із рівності (3.21) випливає, що

$$\varphi_n|s_{in}t_{1j}\psi_j,\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n-1,$$

при цьому $\psi_1=1$, $t_{1n}=1$. Оскільки $(d_1,\varphi_n)=1$, то звідси одержимо, що $\varphi_n|s_{in}$ для всіх $i=1,\ 2,\ \dots,\ n-1$, тобто матриця S задовольняє умову (3.17) теореми 3.21.

Теорема доведена.

Наслідок 3.6. *Нехай* (D,T_1) *— пара матриць вигляду (3.19). Якщо* $(d_1,\ \varphi_n)=1$, *то пара матриць* (D,T_1) *узагальнено еквівалентна до пари* $(D,T\Psi)$, *де*

$$\Psi=\operatorname{diag}(1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_n)$$

і

$$T=\left\|\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline t\ \ 0\ \ \dots\ \ 0 & 1\end{array}\right\|, \tag{3.22}$$

де

$$t = \begin{cases} 0, & \text{якщо матриці } (\operatorname{adj} D)T_1 \text{ і } (\operatorname{adj} D)\Psi \text{ еквівалентні;} \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Наслідок 3.7. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$,

$$D^A = \operatorname{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ \varphi_n), \quad D^B = \operatorname{diag}(1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)$$

і

$$(\varphi_n, \psi_n) = \delta_n, \quad (\psi_{n-1},\ \delta_n) = 1.$$

Тоді пара матриць (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари матриць* (D^A, TD^B), *де*

$$T = \left\| \begin{array}{cccc|c} & & I_{n-1} & & \mathbf{0} \\ \hline t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} & 1 \end{array} \right\|$$

і

$$t_j \in R''_{\delta_n}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Теорема 3.6. *Нехай* $A_i, B_i \in M(n, R)$ *і*

$$D^{A_i} = D^A = \operatorname{diag}(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \varphi_n),$$

$$D^{B_i} = D^B = \operatorname{diag}(1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n), \quad i = 1,\ 2.$$

Нехай, далі $(\varphi_n,\ \psi_n) = p$, $(\psi_{n-1},\ p) = 1$, p *— нерозкладний елемент кільця* R. *Тоді*

1) *пари матриць* (A_1, B_1) *і* (A_2, B_2) *узагальнено еквівалентні тоді і тільки тоді, коли матриці* $(\operatorname{adj} A_1)B_1$ *і* $(\operatorname{adj} A_2)B_2$ *еквівалентні;*

2) *пара матриць* (A_1, B_1) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^{A_1}, TD^{B_1}), *де*

$$T = \left\| \begin{array}{c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline t \quad 0 \quad \dots \quad 0 & 1 \end{array} \right\|$$

і

$$t = \begin{cases} 0, & \text{якщо матриці } (\operatorname{adj} A_1)B_1 \text{ і } (\operatorname{adj} D^{A_1})D^{B_1} \\ & \text{еквівалентні;} \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Пари матриць (A_1, B_1) і (A_2, B_2) узагальнено еквівалентні відповідно до пар $(D^{A_1}, T_i^{B_1})$ і $(D^{A_2}, T_i^{B_2})$ вигляду (3.19), причому $t_{ij} \in R_p$, $j = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$. Тоді $(d_i,\ \varphi_n) = 1$, якщо не всі $t_{ij} \neq 0$, $j = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$, дорівнюють нулю. Далі використовуємо теорему 3.5.

Теорема доведена.

Приклад 3.2. Нехай (A, B) — множина таких пар 2×2-матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$, що

$$D^A = \operatorname{diag}(1,\ 25), \quad D^B = \operatorname{diag}(1,\ 175).$$

Тоді $\delta = (25,\ 175) = 25$ і

$R_\delta = \{0,\ 1,\ \dots\ ,\ 24\}$, $R'_\delta = \{0,\ 1,\ \dots,\ 12\}$, $R''_\delta = \{0,\ 1,\ 5,\ 10\}$.

Таким чином, множину заданих пар матриць відносно узагальненої еквівалентності розбиваємо на чотири класи з представниками:

$$\left(\left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ t & 175 \end{array} \right\| \right), \quad t = 0, 1, 5, 10.$$

Безпосередньо перевіряємо, що пари матриць

$$\left(\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 5 & 175 \end{matrix}\right\|\right) \text{ і } \left(\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 10 & 175 \end{matrix}\right\|\right)$$

не є узагальнено еквівалентними. Це також говорить про те, що умови леми 3.5 не є достатніми для узагальненої еквівалентності пар матриць.

3.5. Узагальнена еквівалентність та діагоналізація наборів матриць

Нехай R – адекватне кільце,

$$A_i, B_i \in M(m, n_i, R), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Означення 3.3. Набори матриць

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k) \text{ і } (B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k)$$

називаємо узагальнено еквівалентними, якщо

$$A_1 = UB_1V_1, \quad A_2 = UB_2V_2, \quad \ldots, \quad A_k = UB_kV_k$$

для деяких матриць

$$U \in GL(m, R),\ V_i \in GL(n_i, R), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

У п. 3.3 встановлено стандартну форму для пари матриць над адекватним кільцем. Природно виникає запитання: до яких простіших форм можна звести узагальнено еквівалентними перетвореннями набір матриць

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k),$$

якщо $k > 2$? Навіть над кільцем головних ідеалів трійка матриць $(A_1,\ A_2,\ A_3)$ такими перетвореннями не зводиться до трійки $(T^{A_1},\ T^{A_2},\ T^{A_3})$ матриць трикутної форми з інваріантними множниками на головних діагоналях.

Приклад 3.3. Нехай $R = \mathbb{Z}$ і $A_1, A_2, A_3 \in M(2, \mathbb{Z})$, де

$$A_1 = \left\| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{array} \right\|,\ A_2 = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{array} \right\|,\ A_3 = \left\| \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{array} \right\|.$$

Безпосередньо перевіряємо, що не існує такої матриці $U \in GL(2, \mathbb{Z})$, що в кожній матриці

$$\bar{A}_1 = UA_1,\ \bar{A}_2 = UA_2,\ \bar{A}_3 = UA_3$$

елементи перших рядків взаємно прості. А це означає, що трійка матриць $(A_1,\ A_2,\ A_3)$ не є узагальнено еквівалентна до трійки

$$T^{A_1} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & 2 \cdot 3 \end{array} \right\|,\ T^{A_2} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & 2^2 \end{array} \right\|,\ T^{A_3} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & 2 \cdot 5 \end{array} \right\|$$

трикутних матриць з інваріантними множниками на головних діагоналях. Тут знак $*$ означає деякі елементи із $\mathbb{Z}$.

Проте таке зведення можна зробити для наборів матриць над кільцем поліномів над полем $\mathbf{F}$ (розділ 2) або ж для наборів матриць з певними умовами, наприклад, якщо набір складається із матриці та її дільників.

Ще зауважимо, що стандартну форму (D^A, T^B) пари матриць (A, B) щодо узагальненої еквівалентності визначено однозначно лише в окремих випадках, які, зокрема, розглянуто в підрозлі 1.3. Вона буде єдиною і тоді, коли стандартною парою є пара діагональних матриць (D^A, D^B).

Означення 3.4. Кажемо, що набір матриць

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k)$$

діагоналізується або діагоналізовний, якщо цей набір узагальнено еквівалентний до набору діагональних матриць

$$(D^{A_1},\ D^{A_2},\ \ldots,\ D^{A_k}).$$

Вкажемо деякі умови діагоналізації пар та скінченних наборів матриць. Із теореми 3.7 відразу одержуємо такий наслідок.

Наслідок 3.8. *Нехай* $A \in M(m, n_1, R)$, $B \in M(m, n_2, R)$. *Якщо* $(d_m^A, d_m^B) = 1$, *то пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A, D^B) *діагональних матриць.*

Теорема 3.7. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$, $\det A \neq 0$. *Тоді пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць* (D^A, D^B) *в тому і тільки тому випадку, коли матриці* $(\operatorname{adj} A)B$ *і* $(\operatorname{adj} D^A)D^B$ *еквівалентні.*

Доведення. Необхідність випливає із леми 3.5.

Достатність. Пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари матриць (D^A, T^B). Тоді на основі леми 3.5 матриця $(\operatorname{adj} D^A)T^B$ еквівалентна до матриці

$(\operatorname{adj} A)B$, а отже, еквівалентна до $(\operatorname{adj} D^A)D^B$. Оскільки матриця $(\operatorname{adj} D^A)T^B$ є нижня трикутна і еквівалентна до діагональної матриці $(\operatorname{adj} D^A)D^B$, то на основі теореми 1.5 (Рота) і її узагальнень [219], [153], [162], [163] існують такі нижні унітрикутні матриці F і Q, що

$$F(\operatorname{adj} D^A)T^B = (\operatorname{adj} D^A)D^B Q.$$

Очевидно, що $F \in {}_{\Phi}GL(n, R)$ і тому на основі теореми 3.4 пари матриць (A, B) і (D^A, D^B) узагальнено еквівалентні.

Теорема доведена.

Тепер розглянемо пару матриць, в якій одна із матриць є дільником іншої, які можуть бути особливими чи неповних рангів, якщо вони прямокутні. Вкажемо критерії діагоналізовності таких пар матриць.

Розглянемо матричне лінійне рівняння

$$BX = A, \tag{3.23}$$

де $A \in M(m, n, R)$, $B \in M(m, k, R)$ і X – невідома матриця із $M(k, n, R)$. Нехай $\operatorname{rang} A = r$, $\operatorname{rang} B = s$, $s \geqslant r$. Припустимо, що це рівняння має розв'язки (відомий критерій розв'язності). Тоді на основі теореми 3.3 пара матриць $(A,\ B)$ узагальнено еквівалентна до пари $(D^A,\ T^B)$, тобто

$$UAV_1 = D^A, \qquad UBV_2 = T^B, \tag{3.24}$$

де

$$U \in \mathrm{GL}(m, R),\ V_1 \in \mathrm{GL}(n, R),\ V_2 \in \mathrm{GL}(k, R),$$

а матриця T^B має вигляд (3.1). Рівняння (3.23) рівносильне рівнянню

$$T^B Y = D^B, \tag{3.25}$$

де $Y = V_2^{-1} X V_1$. Тоді розв'язками рівняння (3.25) є матриці

$$Y = \begin{Vmatrix} Y_1 & \mathbf{0} \\ Y_2 & Y_3 \end{Vmatrix},$$

де

$$Y_1 = (T_s^B)^{-1}\, D_s^A,$$

а

$$Y_2 \in M(k-s, s, R),\ Y_3 \in M(k-s, n-s, R)$$

– довільні матриці. Звідси випливає таке твердження.

Лема 3.8. *Розв'язками рівняння (3.23) є матриці вигляду*

$$X = V_2 \begin{Vmatrix} X_1 & \mathbf{0} \\ X_2 & X_3 \end{Vmatrix} V_1^{-1}, \tag{3.26}$$

де V_1, V_2 *— усі можливі матриці, які задовольняють співвідношення (3.24),*

$$X_1 = (T_s^B)^{-1} D_s^A,$$

а

$$X_2 \in M(k-s, s, R),\ X_3 \in M(k-s, n-s, R)$$

— довільні матриці.

Наслідок 3.9. *Розв'язками рівняння (3.23) є матриці* X *рангів*

$$q = r,\ r+1,\ \ldots,\ r+t, \quad t = \min(k-s,\ n-r).$$

Нехай

$$A \in M(m, n, R),\ B \in M(m, k, R), \quad \operatorname{rang} A = r,\ \operatorname{rang} B = s$$

і $B|A$, тобто
$$A = BC \tag{3.27}$$
для деяких матриць $C \in M(k, n, R)$, які визначають за формулою (3.26). Тоді $D^B | D^A$, тобто
$$D^A = D^B\,\Psi, \tag{3.28}$$
де
$$\Psi = \left\| \begin{matrix} \Psi_s & \mathbf{0} \\ F_{k-s,s} & F_{k-s,n-s} \end{matrix} \right\|,$$
$$\Psi_s = (D_s^B)^{-1}\,D_s^A = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_s) \tag{3.29}$$
і $F_{k-s,s}$, $F_{k-s,n-s}$ — довільні матриці із $M(k-s, s, R)$ та $M(k-s, n-s, R)$ відповідно.

Лема 3.9. *Якщо для деякої матриці C, яка задовольняє рівність (3.27), виконуються співвідношення*
$$d_k^C = d_k^{\Psi_k},\ k = 1,\ 2\ \ldots,\ r,$$
де
$$\Psi_r = (D_r^B)^{-1}\,D_r^A = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2\ \ldots,\ \psi_r),$$
то пара матриць $(A,\ B)$ узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць $(D^A,\ D^B)$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.3 існують такі матриці
$$U \in \mathrm{GL}(m, R),\ V_1 \in\ \ \in \mathrm{GL}(n, R), V_2 \in \mathrm{GL}(k, R),$$
що
$$UAV_1 = D^A,\ UBV_2 = T^B,$$

де T^B — матриця вигляду (3.13). Тоді з рівності $A = BC$ одержимо:

$$UAV_1 = (UBV_2)(V_2^{-1}CV_1)$$

або

$$\left\| \begin{array}{ccc} D_r^A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} T_r^B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_{21} & D_{s-r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} C_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{21} & C_{22} & \mathbf{0} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array} \right\| = T^B C_1. \qquad (3.30)$$

Із цієї рівності випливає, що C_{11} – нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Ψ_r і $C_{22} = \mathbf{0}$. Оскільки

$$d_k^{C_1} = d_k^{C} = d_k^{\Psi_r}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

то

$$d_k^{C_2} = d_k^{\Psi_r}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

де

$$C_2 = \left\| \begin{array}{cc} C_{11} & \mathbf{0} \\ C_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right\|$$

— підматриця матриці C_1. Із (3.30) маємо:

$$\left\| \begin{array}{cc} D_r^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} T_r^B & \mathbf{0} \\ B_{21} & D_{s-r} \end{array} \right\| C_2$$

або $D_s^A = T_s^B C_2$. Оскільки C_2 є нижньою трикутною матрицею з головною діагоналлю $\Psi_s = \Psi_r \oplus \mathbf{0}$ і еквівалентною до матриці Ψ_s, то відомо, що існують такі нижні унітрикутні матриці F і H, що $FC_2H = \Psi_s$. Подальше зведення пари матриць $(D_s^A,\ T_s^B)$ до діагонального вигляду продовжуємо аналогічно, як у доведенні теореми 1 у праці [100].

Лема доведена.

Наслідок 3.10. *Нехай деяка матриця C з (3.27) еквівалентна до d-матриці Ψ, яка задовольняє співвідношення (3.28). Тоді пара матриць $(A,\ B)$ діагоналізовна.*

Теорема 3.8. *Нехай $A \in M(m,n,R)$, $B \in M(m,k,R)$ і $B|A$, тобто $A = BC$ для деякої матриці $C \in M(k,n,R)$. Тоді пара матриць $(A,\ B)$ узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць $(D^A,\ D^B)$ у тому й тільки в тому випадку, коли існує матриця C, що задовольняє співвідношення (3.27), і яка еквівалентна до матриці $\Psi = \Psi_s \oplus \mathbf{0}$, де $\Psi_s = (D_s^B)^{-1} D_s^A$.*

Доведення. Необхідність. Нехай пара матриць (A, B) діагоналізовна, тобто

$$UAV_1 = D^A, \quad UBV_2 = D^B,$$

для деяких матриць $U \in \mathrm{GL}(m,R)$, $V_1 \in \mathrm{GL}(n,R)$, $V_2 \in \mathrm{GL}(k,R)$. Покладемо $\Psi = \Psi_s \oplus \mathbf{0}$. Тоді з рівності (3.28) одержимо:

$$UAV_1 = UBV_2\Psi$$

або

$$A = BV_2\Psi V_1^{-1} = BC,$$

де $C = V_2\Psi V_1^{-1}$ — матриця, еквівалентна до матриці Ψ.

Достатність. Як і під час доведення леми 3.9, від рівності $A = BC$ переходимо до рівності (3.30), де, як бачимо,

$$C_{22} = C_{32} = C_{33} = \mathbf{0}.$$

Далі застосовуємо лему 3.9.

Наслідок 3.11. *Нехай* $A \in M(m,n,R)$, $B \in M(m,m,R)$, $\det B \neq 0$, *і* $B|A$. *Пара матриць* $(A,\ B)$ *діагоналізовна тоді й тільки тоді, коли матриці* $B^{-1}A$ *і* $(D^B)^{-1}D^A$ *еквівалентні.*

Теорема 3.9. *Нехай*

$A \in M(m,n,R),\ m \leq n, \operatorname{rang} A = r,\ B_i \in M(m,R),\ \operatorname{rang} B_i = s,$

$s \geq r$ *і*

$$D^{B_i} = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_s,\ 0,\ \ldots,\ 0), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Нехай B_i *є лівими дільниками матриці* A, *тобто*

$$A = B_i C_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.31}$$

і, відповідно,

$$D^A = \Phi\Psi = \Phi \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_t,\ 0,\ \ldots,\ 0), \tag{3.32}$$

де $\psi_i | \psi_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t-1$.

Якщо

$$s = r \ \text{ або } \ s = m \ \text{ і } \ \varphi_{r+1} = \varphi_{r+2} = \ldots = \varphi_m,$$

то кожний скінченний набір матриць

$$(A, B_1, \ldots, B_k)$$

узагальнено еквівалентний до набору діагональних матриць

$$(D^A, D^{B_1}, \ldots, D^{B_k})$$

тоді і тільки тоді, коли матриці C_i *із (3.31) еквівалентні до* Ψ *із (3.32) для всіх* $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Доведення. Достатність. Нехай набір матриць

$$(A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k)$$

такий, що кожна матриця $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ еквівалентна до Ψ із (3.32). Доводитимемо теорему за індукцією по k.

Для $k = 1$, тобто для пари (A, B_1), доведення випливає із теореми 3.7. Припустимо справедливість теореми для $k-1$, тобто, що набір матриць

$$(A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{k-1})$$

узагальнено еквівалентний до набору діагональних матриць

$$(D^A, D^{B_1}, \ldots, D^{B_{k-1}}),$$

тобто існують такі матриці $U, V_i \in G(m, R)$ і $V \in GL(n, R)$, що

$$UAV = D^A, \quad UB_iV_i = D^{B_i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1. \tag{3.33}$$

Тоді набір матриць

$$(A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{k-1}, B_k)$$

узагальнено еквівалентний до набору

$$(D^A,\ D^{B_1},\ D^{B_1},\ \ldots,\ D^{B_{k-1}},\ \tilde{B}_k),$$

де $\tilde{B}_k = UB_k$. Але $A = B_kC_k$. Тоді $D^A = \tilde{B}_k\tilde{C}_k$, де $D^A = UAV$, U і V із співвідношення (3.33). Оскільки $\tilde{C}_k$ еквівалентна до Ψ із (3.32), то пара матриць $(D^A,\ \tilde{B}_k)$ узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць $(D^A,\ D^{B_k})$, тобто

$$\tilde{U}D^A\tilde{V} = D^A,\ \tilde{U}\tilde{B}_k\tilde{V}_k = D^{B_k},$$

де $\tilde{U}, \tilde{V}_k \in GL(m, R)$, $\tilde{V} \in GL(n, R)$. Матриця $\tilde{U}$ є вигляду $\tilde{U} = \|u_{ij}\|_1^m$, де

$$u_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A} \tilde{u}_{ij}, & \text{якщо} \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \quad i > j, \\ 0, & \text{якщо} \quad i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ m, \\ & j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r. \end{cases}$$

Тоді безпосередньо перевіряється, що $\tilde{U} = \Phi S$ для деякої матриці $S \in GL(m, R)$. Звідси отримуємо, що набір матриць

$$(D^A,\ D^{B_1},\ D^{B_2},\ \ldots,\ D^{B_{k-1}},\ \tilde{B}_k)$$

узагальнено еквівалентний до набору

$$(D^A,\ D^{B_1},\ D^{B_2},\ \ldots,\ D^{B_{k-1}},\ D^{B_k})$$

діагональних матриць.

Необхідність. Нехай набір матриць

$$(A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k)$$

узагальнено еквівалентний до набору діагональних матриць

$$(D^A,\ D^{B_1},\ D^{B_2},\ \ldots,\ D^{B_k}),$$

тобто справедливе співвідношення (3.33) для $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Тоді із співвідношення (3.31) матимемо:

$$UAV = (UB_iV_i)(V_i^{-1}C_i)V, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

де $V_1^{-1}C_iV = \Psi$.

Доведення теореми завершено.

Теорема 3.10. *Нехай* $B_i \in M(m,n,R)$ *і матриці* $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ *попарно еквівалентні, тобто*

$$D^{B_i} = \Phi, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) *набір матриць* $(B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k)$ *діагоналізується;*

2) *матриці* $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ *попарно правоасоційовані, тобто* $B_i = B_j V_j$ *для деяких матриць* $V_j \in GL(n,R)$, $j = 1,\ 2\ \ldots,\ k$.

Доведення. Покладемо $k = 2$.

Нехай маємо співвідношення 2), тобто

$$UB_1V_1 = UB_2V_2 = \Phi,$$

для деяких матриць $U \in GL(m,R)$, $V_1, V_2 \in GL(n,R)$. Звідси одержуємо, що

$$B_1 = B_2V_3, \quad \text{де } V_3 = V_2V_1^{-1},$$

тобто із 1) випливає 2).

Нехай тепер матриці B_1 і B_2 правоасоційовані, тобто $B_1 = B_2V$, для деякої матриці $V \in GL(n,R)$. Тоді для деяких матриць $U \in GL(m,R)$ і $V_1 \in GL(n,R)$ маємо, що

$$UB_1V_1 = D^{B_1} = \Phi.$$

Як бачимо

$$UB_2V_2 = D^{B_2} = \Phi,$$

де $V_2 = VV_1$. Отже, із 2) випливає 1).

Далі доводимо за індукцією по k.

Теорема 3.11. *Нехай* $A_i \in M(m, n_i, R)$, $i = 1, 2, 3$ *і пара матриць* $(A_1,\ A_2)$ *діагоналізовна. Тоді трійка матриць* (A_1, A_2, A_3) *узагальнено еквівалентна до трійки матриць*

$$(D^{A_1},\ D^{A_2},\ T^{A_3} = TD^{A_3}),$$

де T *— нижня трикутна матриця.*

Доведення. Трійка матриць

$$(A_1,\ A_2,\ A_3)$$

узагальнено еквівалентна до трійки

$$(D^{A_1}, D^{A_2}, \tilde{A}_3 = UA_3),$$

тобто

$$UA_1V_1 = D^{A_1}, \quad UA_2V_2 = D^{A_2}, \quad \tilde{A}_3 = UA_3,$$

де $U \in GL(m, R)$, $V_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1, 2$.

На основі теореми 3.1 для матриці $\tilde{A}_3$ існують такі верхня унітрикутна матриця $U_1 \in GL(m, R)$ і матриця $V_3 \in GL(n_3, R)$, що $U_1\tilde{A}_3V_3 = TD^{A_3}$, де T — нижня трикутна матриця. Тоді

$$U_1D^{A_1} = D^{A_1}V_4, \quad UD^{A_2} = D^{A_2}V_5$$

для деяких матриць $V_4 \in GL(n_1, R)$, $V_5 \in GL(n_2, R)$. Звідси і випливає твердження теореми.

Теорема 3.12. *Нехай*

$$A_i \in M(m, n_i, R),\ m \leqslant n_i,\ i = 1, 2,\ B \in M(m, R)$$

і

$$D^B = \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_s,\ 0,\ \dots,\ 0).$$

Нехай B *— спільний лівий дільник матриць* A_1 *і* A_2*, тобто*

$$A_1 = BC_1, \quad A_2 = BC_2, \tag{3.34}$$

а отже,

$$D^{A_1} = \Phi\Psi_1 = \Phi \operatorname{diag}(\psi_{11},\ \psi_{12},\ \ldots,\ \psi_{1t},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

$$D^{A_2} = \Phi\Psi_2 = \Phi \operatorname{diag}(\psi_{21},\ \psi_{22},\ \ldots,\ \psi_{2q},\ 0,\ \ldots,\ 0). \tag{3.35}$$

Якщо матриця C_1 *еквівалентна до* Ψ_1 *або матриця* C_2 *еквівалентна до* Ψ_2*, то трійка матриць* (A_1, A_2, B) *узагальнено еквівалентна до трійки* $(D^{A_1}, \Phi T_2, D^B)$*, або до трійки* $(\Phi T_1, D^{A_2}, D^B)$*, де* T_1*,* T_2 *— нижні трикутні матриці.*

Доведення. Нехай матриця C_1 із рівності (3.34) еквівалентна до матриці Ψ_1 із рівності (3.35). Тоді на основі теореми 3.8 пара матриць (A_1, B) діагоналізується, тобто

$$UA_1V_1 = D^{A_1},\ UBV_2 = D^B = \Phi,$$

для деяких матриць $U, V_2 \in GL(m, R)$, $V_1 \in GL(n_1, R)$. Тоді трійка матриць

$$(A_1, A_2 = BC_2, B)$$

узагальнено еквівалентна до трійки

$$(D^{A_1}, \tilde{A}_2 = \Phi\tilde{C}_2, \Phi),$$

де $\tilde{A}_2 = UA_2$, $\tilde{C}_2 = V_2^{-1}C_2$. Існують такі верхня унітрикутна $U_1 \in GL(m, R)$ і оборотна матриці $S \in GL(n_2, R)$, що $U_1\tilde{A}_2S = T^{A_2}$, де T^{A_2} — нижня трикутна матриця з головною діагоналлю D^{A_2}. Оскільки

$$U_1\Phi = \Phi\tilde{U}_1$$

для деякої матриці $\tilde{U}_1 \in GL(m, R)$, то

$$T^{A_2} = \Phi T_2,$$

де T_2 — нижня трикутна матриця. Крім того,

$$\tilde{U}_1 D^{A_1} = D^{A_1} V_2, \quad V_2 \in GL(n_1, R).$$

Доведення теореми завершено.

Наслідок 3.12. *Нехай* $A_i \in M(m, n_i, R)$, $m \leqslant n_i$, $i = 1, 2$, *і канонічні діагональні форми* D^{A_1} *і* D^{A_2} *матриць* A_1 *і* A_2 *зображаємо у вигляді добутків*

$$D^{A_i} = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m) \operatorname{diag}(\psi_{i1},\ \psi_{i2},\ \ldots,\ \psi_{im}),\ i = 1, 2,$$

де $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$. *Нехай* $B \in M(m, R)$ — *лівий спільний дільник матриць* A_1, A_2 *з канонічною діагональною формою*

$$D^B = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m) = \Phi.$$

Якщо

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ (\psi_{1i}, \psi_{1j})\right) = 1,\ i, j = 1, 2, \ldots,\ m,\ i > j \tag{3.36}$$

або

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ (\psi_{2i}, \psi_{2j})\right) = 1,\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ i > j, \tag{3.37}$$

то трійка матриць $(A_1,\ A_2,\ B)$ *узагальнено еквівалентна до трійки матриць* $(D^{A_1},\ \Phi T_2,\ D^B)$, *або до трійки* $(\Phi T_1,\ D^{A_2},\ D^B)$, *де* T_1 *і* T_2 — *нижні трикутні матриці.*

3.6. Мультиплікативні властивості канонічних діагональних форм матриць

У багатьох задачах, зокрема, в задачах подільності та факторизації матриць, необхідні відомості не тільки про канонічні діагональні форми матриць, але й про властивості. В працях [141], [142], [204] встановлено властивості канонічних діагональних форм та інваріантних множників кліткових матриць, в [158], [196], [197], [205], [206], [230], [231], [232], [222] — суми та добутку матриць. У працях [231], [239], [240], [241] розглянуто задачу про побудову матриць із заданою їх частиною (рядком, стовпцем, певними підматрицями) та інваріантними множниками.

Окремою є задача про мультиплікативні властивості канонічних діагональних форм матриць, яка полягає в описанні зв'язків між канонічними діагональними формами і інваріантними множниками матриць B, C та їх добутку $A = BC$, зокрема, у встановленні умов, за яких канонічна діагональна форма добутку матриць дорівнює добутку їх канонічних діагональних форм. У цьому випадку кажуть, що матриці B і C мають властивість мультиплікативності їх канонічних діагональних форм.

У праці [168] сформульовано такий результат: якщо A, B, C є λ-матриці (тобто над кільцем поліномів $R = \mathbf{F}[\lambda]$, де $\mathbf{F}$ — поле) і $A = BC$, то інваріантні множники матриць B і C є дільниками відповідних інваріантних множників матриці A.

М.Ньюмен [202, 203] аналогічний результат доводить для неособливих матриць B і C над кільцем головних ідеалів: канонічні діагональні форми матриць B і C є дільниками канонічної діагональної форми їх добутку, тобто

$$D^A = D^B \Psi, \quad D^A = D^C \Lambda.$$

Результати такого типу отримуємо на основі стандартної форми пари матриць у набагато загальнішій ситуації: для довільних матриць над адекватними кільцями. Крім того, вказуємо значно ширші класи матриць, які мають властивість мультиплікативності канонічних діагональних форм.

Надалі R — адекватне кільце.

Лема 3.10. *Нехай*

$$A \in M(m, n, R), \; B \in M(m, k, R), \; C \in M(k, n, R)$$

і

$$A = BC.$$

Тоді

$$D^A = D^B \Psi.$$

Доведення. На основі теореми 3.3 пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари (D^A, T^B), тобто

$$UAV_1 = D^A, \quad UBV_2 = T^B.$$

Тоді на основі цього з рівності $A = BC$ одержуємо таку рівність:

$$UAV_1 = (UBV_2)(V_2^{-1}C)V_1$$

або

$$D^A = T^B C_1,$$

де $C_1 = V_2^{-1}CV_1$ — нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Ψ. З останньої рівності одержуємо, що $D^A = D^B \Psi$.

Перейшовши до транспонованих матриць, так само доводимо, що $D^A = D^C \Psi$.

Лема доведена.

Отже із факторизації $A = BC$ матриці A випливає факторизація $D^A = D^B \Psi$ її канонічної діагональної форми D^A.

У зв'язку з цим виникає запитання: коли матриця Ψ є d-матрицею, тобто

$$\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ \dots,\ \psi_t,\ 0,\ \dots,\ 0),$$

де

$$\psi_i | \psi_{i+1},\quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ t-1$$

і $D^C = \Psi$, тобто канонічна діагональна форма добутку матриць дорівнює добутку канонічних діагональних форм матриць-співмножників: $D^A = D^B D^C$. У цьому випадку кажуть, що канонічні діагональні форми матриць B і C володіють властивістю мультиплікативності.

М.Ньюмен [202] довів, що коли матриці B і C неособливі над кільцем головних ідеалів і їх визначники взаємно прості,тобто $(\det B, \det C) = 1$, то $D^{BC} = D^B D^C$. Це й же результат доведено і в праці [195].

Задача про мультиплікативність канонічних діагональних форм матриць тісно пов'язана з задачею про діагоналізовність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями. Використовуючи одержані результати про діагоналізовність пар матриць, вкажемо значно ширші класи матриць, які володіють властивістю мультиплікативності їх канонічних діагональних форм.

Теорема 3.13. *Нехай* $B \in M(m,k,R)$, $C \in M(k,n,R)$. *Канонічна діагональна форма добутку матриць* $A = BC$ *дорівнює добутку канонічних діагональних форм матриць* B *і* C, *тобто* $D^A = D^B D^C$, *тоді і тільки тоді, коли:*

1) *пара матриць* $(A,\ B)$ *діагоналізовна, тобто*

$$UAV_1 = D^A,\ UBV_2 = D^B \tag{3.38}$$

для деяких матриць

$$U \in GL(m,R),\ V_1 \in GL(n,R),\ V_2 \in GL(k,R);$$

2) *для деяких матриць* V_1 *і* V_2, *які задовольняють умову (3.38), матриця* $V_2^{-1}CV_1 = \Psi$ *є* d*-матрицею, тобто*

$$\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_t,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

де $\psi_i | \psi_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t-1$.

Доведення. Необхідність. Нехай

$$A = BC,\ D^A = D^B D^C.$$

Оскільки $D^C = \Psi$ і матриця C еквівалентна до d-матриці Ψ, то згідно з лемою 3.9 і наслідком 3.10 пара матриць $(A,\ B)$ діагоналізовна, тобто справедливе співвідношення (3.38).

Тоді із рівності $A = BC$ одержимо, що

$$UAV_1 = (UBV_2)(V_2^{-1}CV_1),$$

де матриці

$$U \in \mathrm{GL}(m, R), \quad V_1 \in \mathrm{GL}(n, R), \quad V_2 \in \mathrm{GL}(k, R),$$

задовольняють співвідношення (3.38), тобто

$$D^A = D^B C_1. \tag{3.39}$$

Покладемо, що

$$\operatorname{rang} A = r,\ \operatorname{rang} B = s,\ \operatorname{rang} C = t.$$

Тоді $r = \min(s,\ t)$.

Нехай $r = s$.

Тоді рівність (3.39) має вигляд

$$\left\| \begin{matrix} D_r^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D_r^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} D_r^C & \mathbf{0} \\ F_{k-r,r} & F_{k-r,n-r} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$F_{k-r,r} \in M(k-r, r, R),\ F_{k-r,n-r} \in M(k-r, n-r, R).$$

Існує така матриця

$$S = \left\| \begin{array}{cc} E_r & \mathbf{0} \\ S_{k-r,r} & E_{k-r} \end{array} \right\|,$$

що

$$SC_1 = D_r^C \oplus F_{k-r,n-r} = C_2.$$

Для матриць

$$P_{k-r} \in \mathrm{GL}(k-r, R),\ Q_{n-r} \in \mathrm{GL}(n-r, R)$$

одержимо:

$$P_{k-r}F_{k-r,n-r}Q_{n-r} = \mathrm{diag}\,(\mu_{r+1}^C,\ \mu_{r+2}^C,\ \ldots,\ \mu_t^C,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

тобто $PC_2Q = D^C$, де

$$P = E_r \oplus P_{k-r},\ Q = E_r \oplus Q_{n-r}.$$

Отже,

$$PSV_2^{-1}CV_1Q = D^C = \Psi$$

є d-матрицею. При цьому

$$UAV_1Q = D^A,\ UBV_2S^{-1}P^{-1} = D^B,$$

тобто матриці $V_1Q = W_1$ і $V_2S^{-1}P^{-1} = W_2$ задовольняють співвідношення (3.38).

Нехай тепер $t < s$, тобто $r = t$.

Тоді рівність (3.39) має вигляд

$$\left\| \begin{matrix} D_r^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D_r^B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{s-r}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} D_r^C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ F_{k-s,r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Далі міркуємо, як і у попередньому випадку.

Достатність умов теореми очевидна.

Теорема 3.14. *Нехай*

$$B \in M(m, R),\ C \in M(m, n, R), \quad \det B \neq 0,\ \operatorname{rang} C = r$$

і $A = BC$. *Якщо*

$$(\mu_i^A,\ \mu_m^B) = \mu_i^B, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{3.40}$$

то $D^A = D^B D^C$.

Доведення. На основі теореми 3.3 пара матриць $(A,\ B)$ узагальнено еквівалентна до пари $(D^A,\ T^B)$, де T^B — матриця вигляду (3.13). Тоді із рівності $A = BC$ отримуємо таку рівність:

$$D^A = T^B C_1,$$

де

$$T^B =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \mu_1^B & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1}\mu_1^B & b_{r2}\mu_2^B & \ldots & \mu_r^B & 0 & \ldots & 0 \\ b_{r+1,1}\mu_1^B & b_{r+1,2}\mu_2^B & \ldots & b_{r+1,r}\mu_r^B & \mu_{r+1}^B & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1}\mu_1^B & b_{m2}\mu_2^B & \ldots & b_{m,r}\mu_r^B & b_{m,r+1}\mu_{r+1}^B & \ldots & \mu_m^B \end{matrix} \right\|,$$

$$C_1 = \left\| \begin{array}{ccccccc} \psi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \psi_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & \psi_r & 0 & \dots & 0 \\ c_{r+1,1} & c_{r+1,2} & \dots & c_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{m,r} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Із цієї рівності для елементів першої піддіагоналі матриці C_1 одержимо такі співвідношення:

$$b_{i+1,i}\mu_i^B\psi_i + c_{i+1,i}\mu_{i+1}^B = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ r,$$

або

$$b_{i+1,i}\psi_i + c_{i+1,i}\frac{\mu_{i+1}^B}{\mu_i^B} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ r. \tag{3.41}$$

Оскільки

$$\mu_i^A = \mu_i^B\psi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ r, \tag{3.42}$$

то із умови (3.41) отримуємо, що

$$\left(\psi_j,\ \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}\right) = 1 \tag{3.43}$$

для всіх $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r,\ i > j$. Тоді із рівності (3.41) випливає, що

$$c_{i+1,i} = \psi_i d_{i+1,i}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ r. \tag{3.44}$$

Враховуючи (3.44), аналогічно показуємо, що елементи другої піддіагоналі матриці C_1, тобто $c_{i+2,i}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r$, діляться на ψ_i, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r$.

Так поступаючи далі, одержимо, що $\psi_i | c_{pi}$ для всіх $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r$; $p = 2,\ 3,\ \dots,\ m$.

Тепер із того, що $\mu_i|\mu_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$ і умов (3.42) і (3.43) випливає, що $\psi_i|\psi_{i+1}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Отже, матриця C еквівалентна до d-матриці

$$\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ \psi_2, \ \ldots, \ \psi_r, \ 0, \ \ldots, \ 0),$$

тобто $D^C = \Psi$. Тому на основі теореми 3.13 маємо, що $D^A = D^B D^C$.

Теорема доведена.

Наслідок 3.13. *Нехай*

$$B \in M(m, R), \ C \in M(m, n, R), \ m \le n, \ \det B \ne 0,$$

і $A = BC$. *Якщо виконується принаймні одна з умов*

1) $\operatorname{rang} C = r < m$ *і* $\left(\det B, \dfrac{d_r^A}{d_r^B}\right) = 1$;

2) $\operatorname{rang} C = m$ *і* $\left(\det B, \dfrac{d_{m-1}^A}{d_{m-1}^B}\right) = 1$,

то $D^A = D^B D^C$.

З цього наслідку випливає результат М.Ньюмена.

Наслідок 3.14. *[202],[203]. Нехай* R *— кільце головних ідеалів і* $B, C \in M(m, R)$. *Якщо*

$$(\det B, \det C) = 1,$$

то

$$D^{BC} = D^B D^C.$$

Розділ 4

СТРУКТУРА МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ БЕЗ КРАТНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ КОРЕНІВ

У цьому розділі вивчено структуру поліноміальних матриць без кратних характеристичних коренів. Введено поняття абсолютно розкладних матричних поліномів. Доведено існування абсолютно розкладних матричних поліномів із будь-якими заданими попарно різними характеристичними коренями. Вказано критерій абсолютної розкладності матричних поліномів. Доведено, що абсолютно розкладний матричний поліномів є незвідним. Встановлено нижню та верхню межі для числа лінійних унітальних дільників матричного полінома. Вказано зв'язки між числом дільників та звідністю поліноміальних матриць до кліткових виглядів, зокрема, виділено області для кількості дільників поліноміальних матриць, в яких вони звідні чи незвідні.

4.1. Абсолютна розкладність матричних поліномів

Нехай

$$A(x) = Ix^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m, \tag{4.1}$$

$A_i \in M(n, \mathbf{F})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — унітальний матричний поліном над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{F}$ характеристики нулю. Нехай матричний поліном $A(x)$ розкладний у добуток унітальних множників

$$A(x) = B_1(x) B_2(x) \cdots B_l(x). \tag{4.2}$$

Тоді розкладу (4.2) полінома $A(x)$ відповідає такий розклад його характеристичного полінома $\Delta(x) = \det A(x)$

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \Delta_2(x) \cdots \Delta_l(x), \tag{4.3}$$

що

$$\det B_i(x) = \Delta_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Але не для кожного розкладу вигляду (4.3) характеристичного полінома $\Delta(x)$ існує такий розклад на унітальні множники вигляду (4.2) матричного полінома $A(x)$, що

$$\det B_i(x) = \Delta_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тому введемо таке означення.

Означення 4.1. Якщо для кожного розкладу

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \Delta_2(x) \cdots \Delta_m(x), \tag{4.4}$$

$\deg \Delta_i = n,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ характеристичного полінома $\Delta(x)$ існує паралельний розклад

$$A(x) = B_1(x)B_2(x)\ \cdots\ B_m(x), \tag{4.5}$$

де

$$\det B_i(x) = \Delta_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

на лінійні унітальні множники $B_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ матричного полінома $A(x)$, то матричний поліном $A(x)$ називатимемо абсолютно розкладним.

Очевидно, якщо матричний поліном $A(x)$ абсолютно розкладний на лінійні унітальні множники, паралельно будь-якому розкладу (4.4) його характеристичного полінома, то він також абсолютно розкладний на унітальні множники, паралельно будь-якому розкладу характеристичного полінома $\Delta(x)$ вигляду

$$\Delta(x) = \Delta_{k_1}(x)\Delta_{k_2}(x)\ \cdots\ \Delta_{k_l}(x),$$

де $\deg \Delta_{k_i} = k_i n,\ i \leq k_i \leq m-1, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$

Якщо матричний поліном $A(x)$ має лише один характеристичний корінь, тобто $\det A(x) = (x-\alpha)^{mn}$, то, очевидно, що із його розкладності на лінійні множники випливає його абсолютна розкладність. Тому ця задача найбільш цікава у випадку, коли всі характеристичні корені полінома $A(x)$ різні.

Вкажемо умови абсолютної розкладності матричних поліномів та доведемо існування матричних поліномів із властивістю їх абсолютної розкладності.

Нехай характеристичні корені матричного полінома $A(x)$ попарно різні, тобто

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^{mn}(x-\alpha_i), \qquad \alpha_i \neq \alpha_j, \text{ при } i \neq j.$$

Тоді, на основі наслідку 2.6, поліноміальна матриця $A(x)$ напівскалярно еквівалентна до стандартної форми $T^A(x)$ вигляду

$$T^A(x) = UA(x)V(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|, \qquad (4.6)$$

де $U \in GL(n, \mathbf{F})$, $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$ і

$$\deg f_i < \deg \Delta = mn, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Запишемо матрицю, взаємну до матриці $T^A(x)$:

$$T^A_*(x) = \left\| \begin{array}{ccccc} \Delta(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta(x) & 0 \\ g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_{n-1}(x) & 1 \end{array} \right\|, \qquad (4.7)$$

де

$$g_i(x) = -f_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1. \qquad (4.8)$$

Останній рядок матриці $T^A_*(x)$ позначимо через $\mathbf{g}(x)$, тобто

$$\mathbf{g}(x) = \|\ g_1(x) \ \ g_2(x) \ \ \cdots \ \ g_{n-1} \ \ 1\ \|.$$

Через G_r надалі позначатимемо матрицю вигляду

$$G_r = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_1^r g_1(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1^r g_{n-1}(\alpha_1) & \alpha_1^r \\ \alpha_2^r g_1(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2^r g_{n-1}(\alpha_2) & \alpha_2^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{mn}^r g_1(\alpha_{mn}) & \ldots & \alpha_{mn}^r g_{n-1}(\alpha_{mn}) & \alpha_{mn}^r \end{array} \right\|. \qquad (4.9)$$

Лема 4.1. *Нехай характеристичні корені матричного полінома* $A(x)$ *різні і поліном*

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{sn} (x - \alpha_i), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \; i \neq j$$

є дільником його характеристичного полінома $\Delta(x)$*. Тоді існує лівий унітальний дільник* $B(x)$ *степеня* s *з характеристичним поліномом* $det B(x) = \varphi(x)$ *матричного полінома* $A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$L = \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{g}(\alpha_1) & \alpha_1 \mathbf{g}(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1^{s-1} \mathbf{g}(\alpha_1) \\ \mathbf{g}(\alpha_2) & \alpha_2 \mathbf{g}(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2^{s-1} \mathbf{g}(\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{g}(\alpha_{sn}) & \alpha_{sn} \mathbf{g}(\alpha_{sn}) & \ldots & \alpha_{sn}^{s-1} \mathbf{g}(\alpha_{sn}) \end{array} \right\|$$

є неособливою.

Доведення. Матриця $A_{s-1}(x)$ є супутньою матрицею матричного полінома $A(x)$, тобто

$$A_{s-1}(x) = A_*(x) \left\| \begin{array}{cccc} I & Ix & \ldots & Ix^{s-1} \end{array} \right\|,$$

де $A_*(x)$ — матриця, взаємна до матриці $A(x)$ і $M_{A_{s-1}(x)}(\varphi)$ — значення матриці $A_{s-1}(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$ (означення 5.1, 5.2). Тоді

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{T^A_{s-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} L = ns.$$

Тепер на основі теореми 1.8 і одержуємо твердження леми.

Із попередньої леми, як наслідки, отримуємо такі твердження.

Наслідок 4.1. *Для матричного полінома $A(x)$ з різними характеристичними коренями існує лівий лінійний унітальний дільник $B(x) = Ix - B$ з характеристичними коренями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$G_0 = \left\| \begin{array}{cccc} g_1(\alpha_1) & \dots & g_{n-1}(\alpha_1) & 1 \\ g_1(\alpha_2) & \dots & g_{n-1}(\alpha_2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(\alpha_n) & \dots & g_{n-1}(\alpha_n) & 1 \end{array} \right\|$$

є неособливою.

Наслідок 4.2. *Число k лівих лінійних унітальних дільників матричного полінома $A(x)$ з різними характеристичними коренями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{mn}$ дорівнює числу неособливих матриць порядку n, утворених із рядків $mn \times n$-матриці*

$$G = \left\| \begin{array}{cccc} g_1(\alpha_1) & \dots & g_{n-1}(\alpha_1) & 1 \\ g_1(\alpha_2) & \dots & g_{n-1}(\alpha_2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(\alpha_{mn}) & \dots & g_{n-1}(\alpha_{mn}) & 1 \end{array} \right\|.$$

Лема 4.2. *Нехай характеристичний поліном $\Delta(x)$ матричного полінома $A(x)$ розкладний на множники вигляду (4.4). Тоді існує розклад матричного полінома $A(x)$ на лінійні унітальні множники вигляду (4.5), паралельний до розкладу (4.4) його характеристичного полінома $\Delta(x)$ тоді і тільки тоді, коли кожна матриця*

$$M_{\mathbf{g}(x)}(\Delta_1), \quad M_{\mathbf{g}_1(x)}(\Delta_1\Delta_2), \quad \dots,$$

$$\ldots, M_{\mathbf{g}_{m-2}(x)}(\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_{m-1}) \tag{4.10}$$

є неособливою.

Доведення. Оскільки

$$\operatorname{rang} M_{T_k^A(x)}(\Delta_i) = \operatorname{rang} M_{\mathbf{g}_k(x)}(\Delta_i),$$

де

$$\mathbf{g}_k(x) = \mathbf{g}(x)\| \; I \;\; Ix \;\; \ldots \;\; Ix^k \; \| = \| \; g(x) \;\; xg(x) \;\; \ldots \;\; x^k g(x) \; \|,$$

$\Delta_i(x)$ — дільник характеристичного полінома $\Delta(x)$ і

$$\operatorname{rang} M_{A_k(x)}(\Delta_i) = \operatorname{rang} M_{T_k^A(x)}(\Delta_i),$$

то твердження леми випливає із теореми 1 (див. стор. 60 із праці [49]).

Теорема 4.1. *Унітальний матричний поліном $A(x)$, характеристичні корені якого попарно різні, є абсолютно розкладним тоді і тільки тоді, коли в кожній матриці*

$$H_k = \| \; G_0 \;\; G_1 \; \ldots \; G_k \; \|$$

будь-які $(k+1)n$ рядки лінійно незалежні для всіх $k = 0, 1, \ldots, m-2$.

Доведення. На основі леми 4.2 унітальний матричний поліном $A(x)$ з попарно різними характеристичними коренями розкладний у добуток лінійних унітальних множників паралельно розкладу (4.4) його характеристичного полінома тоді і тільки тоді, коли матриці із (4.10) є неособливі. Кожна із матриць

$$M_0 = M_{\mathbf{g}(x)}(\Delta_1), \quad M_1 = M_{\mathbf{g}_1(x)}(\Delta_1\Delta_2), \quad \ldots,$$

$$\ldots,\ M_{m-1} = M_{\mathbf{g}_{m-2}(x)}(\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_{m-1}), \qquad (4.11)$$

складена із $n,\ 2n,\ \ldots,\ (m-1)n$ рядків відповідно матриць

$$H_0 = G_0, \quad H_1 = \|\ G_0 \ \ G_1\ \|, \ \ \ldots,$$

$$\ldots,\ H_{m-2} = \|\ G_0 \ \ G_1 \ \ \ldots \ \ G_{m-2}\ \|. \qquad (4.12)$$

Тому множини цих рядків є лінійно незалежні.

Навпаки, множинам із $n,\ 2n,\ \ldots,\ (m-1)n$ лінійно незалежних рядків матриць із (4.12) відповідає множина неособливих матриць вигляду (4.11). Тому існує розклад матричного полінома $A(x)$ на лінійні унітальні множники, паралельний до розкладу його характеристичного полінома, що відповідає множині неособливих матриць вигляду (4.11).

Доведення теореми завершено.

Тепер покажемо, що існують унітальні матричні поліноми з попарно різними характеристичними коренями, що володіють властивістю абсолютної розкладності. Для цього вважатимемо поліноми

$$f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

у матриці (4.6), а отже, і поліноми

$$g_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

в матриці (4.7) невідомими. Позначимо елементи

$$g_i(\alpha_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \ j = 1, 2, \ldots, mn$$

через t_{ij}, а матрицю, отриману з матриці (4.9) заміною $g_i(\alpha_j)$ на t_{ij} — через $G_r(t_{ij})$.

Лема 4.3. *Мінор порядку $(k+1)n$, складений з довільних $(k+1)n$ рядків матриці*

$$H_k(t_{ij}) = \|\ G_0(t_{ij}) \ \ G_1(t_{ij}) \ \ldots \ G_k(t_{ij})\ \|, \qquad (4.13)$$

$0 \le k \le m-1$, *тотожно нерівний нулю.*

Доведення. Без обмеження загальності можна розглядати мінор, складений з перших $(k+1)n$ рядків матриці (4.13). Переставляючи його стовпці, отримаємо такий мінор:

$$M = |\; N_0 \;\; N_1 \;\cdots\; N_{n-2} \;\; N_{n-1} \;|, \qquad (4.14)$$

де

$$N_0 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_{(k+1)n} & \dots & \alpha_{(k+1)n}^k \end{array} \right|;$$

$$N_j = \operatorname{diag}(t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_{(k+1)n}})N_0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Подальше доведення виконуємо індукцією за n.

Мінор порядку $k+1$

$$V(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{k+1}}) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \alpha_{i_1} & \dots & \alpha_{i_1}^k \\ 1 & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_{i_{k+1}} & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{array} \right|,$$

складений з довільних $k+1$ рядків матриці N_0, як визначник Вандермонда, відмінний від нуля, тобто

$$V(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{k+1}}) \neq 0.$$

Розкладаючи мінор (4.14) за останніми $k+1$ стовпцями (стовпцями матриці N_{n-1}), отримуємо:

$$M =$$
$$= \sum t_{n-1,i_1} t_{n-1,i_2} \dots t_{n-1,i_{k+1}} V(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{k+1}}) M_i, \quad (4.15)$$

де M_i — мінор порядку $(k+1)(n-1)$ вигляду (4.14). За припущенням індукції $M_i \not\equiv 0$. Тоді з (4.15) випливає, що $M \not\equiv 0$. Лему доведено.

У кожній матриці

$$H_k(t_{ij}) = \| \; G_0(t_{ij}) \;\; G_1(t_{ij}) \;\; \dots \;\; G_k(t_{ij}) \; \|, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

утворимо всеможливі мінори порядку $(k+1)n$. Враховуючи попередню лему, отримаємо систему ненульових поліномів відносно змінних:

$$t_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \; j = 1, 2, \dots, mn.$$

У нескінченному полі знайдеться набір значень

$$\lambda_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \; j = 1, 2, \dots, mn,$$

за яких кожний із згаданих поліномів відмінний від нуля. Далі, існує один і тільки один поліном $g_i(x)$ степеня, меншого за mn, який за заданих mn різних значень $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{mn}$ змінної набуває заданих значень $g_i(\alpha_j) = \lambda_{ij}$. Цей поліном задано за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа [9].

Запишемо матрицю $T^A(x)$ вигляду (4.6), в якій поліноми

$$\varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

знайдені зі співвідношень (4.8), а

$$g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

задовольняє вищевказаним умовам. Тоді ранг матриці

$$H_{m-1} = \| \; G_0 \;\; G_1 \;\; \dots \;\; G_{m-1} \; \|$$

дорівнює mn і матриця $T^A(x)$ регуляризується справа (теорема 1.9), тобто існує така оборотня матриця $V(x)$, що

$$T^A(x)V(x) = B(x)$$

— унітальна матриця. На основі теореми 4.1 так побудований матричний поліном $B(x)$ є абсолютно розкладним.

Отже, встановлено таке твердження.

Теорема 4.2. *Нехай*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}, \;\; \alpha_i \in \mathbf{F}, \;\; i = 1, 2, \ldots, mn$$

—попарно різні елементи. Тоді існує унітальний матричний поліном $A(x)$ з характеристичними коренями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$, який володіє властивістю абсолютної розкладності.

Кажуть, що матричний поліном $A(x)$ володіє властивістю абсолютної виділюваності лівих лінійних унітальних множників, якщо для кожного дільника $\varphi_i(x)$ степеня n характеристичного полінома $\Delta(x)$ матричного полінома $A(x)$ існує лівий унітальний дільник $B_i(x)$ з характеристичним поліномом $\det B_i(x) = \varphi_i(x)$, тобто для кожного розкладу

$$\Delta(x) = \varphi_i(x)\Delta_i(x)$$

характеристичного полінома $\Delta(x)$ існує паралельний розклад

$$A(x) = B_i(x)A_i(x)$$

матричного полінома $A(x)$.

З теореми 4.1, як наслідок, одержуємо умови абсолютної виділюваності лінійних унітальних множників із матричного полінома.

Наслідок 4.3. *Регулярний матричний поліном $A(x)$ з попарно різними характеристичними коренями володіє властивістю абсолютної виділюваності лівих лінійних унітальних множників тоді і тільки тоді, коли в матриці*

$$H_0 = \left\| \begin{array}{cccc} g_1(\alpha_1) & \dots & g_{n-1}(\alpha_1) & 1 \\ g_1(\alpha_2) & \dots & g_{n-1}(\alpha_2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(\alpha_{mn}) & \dots & g_{n-1}(\alpha_{mn}) & 1 \end{array} \right\|$$

кожні n рядків лінійно незалежні.

Відмітимо одну властивість абсолютно розкладних матричних поліномів.

Теорема 4.3. *Абсолютно розкладний унітальний матричний поліном $A(x)$ з попарно різними характеристичними коренями подібними перетвореннями не зводиться до кліткововтрикутного вигляду, тобто є незвідним.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто для деякої матриці $S \in GL(n, \mathbf{F})$ маємо, що

$$SA(x)S^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ \mathbf{0} & A_{22}(x) \end{array} \right\|, \tag{4.16}$$

де $A_{11}(x)$, $A_{22}(x)$ — матриці порядків n_1, n_2, причому $n_1, n_2 \geq 1$ і

$$\det A_{11}(x) = \prod_{i=1}^{mn_1} (x - \alpha_i)$$

і

$$\det A_{22}(x) = \prod_{i=1}^{mn_2} (x - \beta_i).$$

Тоді взаємна матриця до матриці (4.16) має вигляд

$$(SA(x)S^{-1})_* =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \det A_{22}(x)(A_{11}(x))_* & \tilde{A}_{12}(x) \\ \mathbf{0} & \det A_{11}(x)(A_{22}(x))_* \end{array} \right\|. \qquad (4.17)$$

Розглянемо такий розклад характеристичного полінома $\Delta(x) = \det A(x)$:

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\Delta_2(x),$$

де

$$\Delta_1(x) = (x-\alpha_1),\ \dots\ ,(x-\alpha_r)(x-\beta_1),\ \dots\ ,(x-\beta_s),$$

і $r+s=n,\ r<n_1$. Для цього розкладу не існує паралельного розкладу матричного полінома $A(x)$.

Дійсно, оскільки для кожного кореня α_i полінома

$$\det A_{11}(x), \quad \operatorname{rang}(A_{11}(\alpha_i))_* = 1,$$

то

$$\operatorname{rang} M_{(A_{11}(x))_*}(\varphi) < n_1,$$

де

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1), \dots, (x-\alpha_r).$$

Враховуючи вигляд матриці (4.17), одержимо, що перші n_1 стовпці матриці

$$M_{(TA(x)T^{-1}))_*}(\Delta_1)$$

лінійно залежні. Звідси випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{(TA(x)T^{-1}))_*}(\Delta_1) = \operatorname{rang} M_{(A_*(x))}(\Delta_1) < n,$$

тобто із матричного полінома $A(x)$ не виділяється лінійний унітальний множник $B_1(x)$ з характеристичним поліномом

$\det B_1(x) = \Delta_1$. Отже, матричний поліном $A(x)$ не є абсолютно розкладним. Одержане протиріччя доводить теорему.

Зауважимо, що обернене до теореми 4.3 твердження невірне, тобто незвідний матричний поліном може не бути абсолютно розкладним.

Приклад 4.1. Матричний поліном

$$A(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| x^2 + \frac{1}{7} \left\| \begin{array}{ccc} -15 & 3 & -3 \\ 8 & -3 & 3 \\ -8 & -4 & -3 \end{array} \right\| x + \frac{1}{7} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & -4 & -34 \end{array} \right\|$$

перетворенням подібності не зводиться до клітково-трикутного вигляду. Це перевіряємо безпосередньо, використовуючи умови звідності матричного полінома до такого вигляду, наведені в праці [49]. Водночас для такого розкладу характеристичного полінома

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\Delta_2(x), \quad \Delta_1(x) = x(x+1)(x-3)$$

не існує паралельного розкладу тричлена $A(x)$ на лінійні множники, тобто тричлен $A(x)$ не є абсолютно розкладним.

4.2. Набори лінійно незалежних векторів, їх властивості

Нехай $\mathbf{a}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{is})$ — вектор-рядки із елементами a_{ij} з поля $\mathbf{F}$.

Лема 4.4. *Нехай*

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n),\ (\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_l),\quad l \geq n$$

— набори лінійно незалежних векторів. Тоді серед наборів

$$(\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_{i_1},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{a}_{r+q+1},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n),$$

де $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_q$ *пробігають* $1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ *існує принаймні один набір, що складається з лінійно незалежних векторів.*

Доведення легко проводиться від супротивного.

Лема 4.5. *Нехай*

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n),$$

$$\underbrace{(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n),\ (\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_n),\ \ldots,\ (\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \ldots,\ \mathbf{g}_n)}_{p}$$

— набори лінійно незалежних векторів. Тоді серед наборів векторів вигляду

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r,\ \mathbf{x}_{i_1},\ \mathbf{x}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{i_q},\ \mathbf{a}_{r+q+1},\ \mathbf{a}_{r+q+2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n),$$

де $\mathbf{x}_{i_1},\ \mathbf{x}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{i_q}$ *— всеможливі вектори із множин*

$$\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n\},\ \{\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_n\},\ \ldots,\ \{\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \ldots,\ \mathbf{g}_n\}$$

існує $k \geqslant p^q$ *наборів, що складаються з лінійно незалежних векторів.*

Доведення проводимо методом індукції.

Для $p = 1$ лема 4.5 випливає з леми 4.4. Припустимо її справедливість для $p - 1$. На основі леми 4.4 існує набір

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{a}_{r+q+1},\ \mathbf{a}_{r+q+2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n)$$

лінійно незалежних векторів. Тепер розглянемо такі набори векторів:

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{a}_{r+q+1},\ \mathbf{a}_{r+q+2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n),$$

$$\underbrace{(\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_n),\ \ldots,\ (\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \ldots,\ \mathbf{g}_n)}_{p-1}.$$

За припущенням індукції серед наборів векторів вигляду

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_{u_1},\ \mathbf{b}_{u_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{u_s},\ \mathbf{y}_{j_1},\ \mathbf{y}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{y}_{j_t},$$

$$\mathbf{b}_{u_{s+t+1}},\ \mathbf{b}_{u_{s+t+2}},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{u_q},\ \mathbf{a}_{r+q+1},\ \mathbf{a}_{r+q+2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n),$$

де $\mathbf{y}_{j_1},\ \mathbf{y}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{y}_{j_t}$ — всеможливі вектори із множин

$$\{\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{c}_n\},\ \ldots,\ \{\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \ldots,\ \mathbf{g}_n\},$$

а

$$\mathbf{b}_{u_1},\ \mathbf{b}_{u_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{u_s},\ \mathbf{b}_{u_{s+t+1}},\ \mathbf{b}_{u_{s+t+2}},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{u_q}$$

— фіксовані вектори із множини

$$\{\mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q}\},$$

існує не менше $(p-1)^t$ наборів, що складаються з лінійно незалежних векторів. Якщо до того ж індекси

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_s,\ u_{s+t+1},\ u_{s+t+2},\ \ldots,\ u_q$$

пробігають множину

$$\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_q\},$$

то таких наборів лінійно незалежних векторів буде не менше $\binom{q}{t}(p-1)^t$. Покладаючи $t=0,\ 1,\ \ldots,\ q$, отримуємо всі набори лінійно незалежних векторів, вказані лемою, тобто

$$k \geqslant \sum_{t=0}^{q} \binom{q}{t} (p-1)^t = p^q.$$

З леми 4.5, як наслідок, випливає таке твердження.

Лема 4.6. *Нехай* mn *різних векторів можна розбити на* m *множин з* n *лінійно незалежних векторів у кожній. Тоді з цих векторів можна утворити принаймні* m^n *множин з* n *лінійно незалежних векторів.*

4.3. Повний набір дільників матричних поліномів

Нехай характеристичні корені регулярного матричного полінома $A(x)$ є різними. Тоді він напівскалярно еквівалентний до стандартної форми $T^A(x)$ вигляду (4.6).

Кажуть [144], [82], що множина, складена із m розв'язків матричного рівняння

$$Y^m A_0 + Y^{m-1} A_1 + \cdots + Y A_{m-1} + A_m = 0,$$

де $A_i \in M(n, \mathbf{F})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, утворює повний набір, якщо множина характеристичних коренів цих розв'язків збігається із множиною характеристичних коренів їх характеристичної матриці

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m.$$

Це поняття стосується матричних рівнянь, якщо характеристична матриця $A(x)$ яких має всі попарно різні характеристичні корені.

Узагальнемо це поняття на набір дільників довільного степеня матричного полінома.

Означення 4.2. Набір дільників

$$B_1(x),\ B_2(x),\ \ldots,\ B_r(x), \quad r > 1$$

матричного полінома $A(x)$ називаємо повним, якщо

$$\prod_{i=1}^{r} \det B_i(x) = \det A(x).$$

Теорема 4.4. *Нехай $A(x)$ — матричний поліном з попарно різними характеристичними коренями степеня* $\deg A(x) = m$ *і m_1, m_2, …, m_r — такі натуральні числа, що*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m.$$

Тоді матричний поліном $A(x)$ має повний набір унітальних дільників

$$B_1(x), \; B_2(x), \; \ldots, \; B_r(x)$$

відповідно степенів m_1, m_2, …, m_r.

Доведення. Розглянемо матрицю

$$G = \| \, G_0 \;\; G_1 \;\; \ldots \;\; G_{m-1} \, \|,$$

де матриці G_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ мають вигляд (4.9), які побудовані за стандартною формою $T^A(x)$ матричного полінома $A(x)$ щодо напівскалярної еквівалентності та його характеристичними коренями α_1, α_2, …, α_{mn}. Оскільки матричний поліном $A(x)$ є регулярний, то матриця $T^A(x)$ правоеквівалентна до регулярної матриці. Тому

$$\operatorname{rang} M_{F_{m-1}(x)}[\alpha_1, \; \alpha_2, \; \ldots, \; \alpha_{mn}] = mn.$$

Тоді і

$$\operatorname{rang} M_{m-1(x)}[\alpha_1, \; \alpha_2, \; \ldots, \; \alpha_{mn}] = mn,$$

тобто матриця G неособлива. Переставляючи рядки, матрицю G зведемо до вигляду

$$G = \left\| \begin{array}{cccc} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1r} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{r1} & G_{r2} & \cdots & G_{rr} \end{array} \right\|,$$

де матриці G_{ii} є порядків $m_i n$, $i = 1, 2, \ldots, r$ і неособливі. Враховуючи будову матриць G_{ii} і лему 4.1, одержуємо, що кожній матриці

$$G_{ii}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

відповідає унітальний дільник $B_i(x)$ степеня m_i матричного полінома $A(x)$, причому множини характеристичних коренів дільників $B_i(x)$ не перетинаються.

Доведення теореми завершено.

4.4. Число дільників поліноміальних матриць та їх звідність

Поліноміальну матрицю $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ називають звідною, якщо вона подібна до матриці клітково-трикутного вигляду, тобто для деякої матриці $S \in GL(n, \mathbf{F})$

$$SA(x)S^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ \mathbf{0} & A_{22}(x) \end{array} \right\|,$$

де $A_{11}(x)$, $A_{22}(x)$ — матриці порядків n_1, n_2, причому $n_1, n_2 \geq 1$. В іншому випадку її називають незвідною [76].

Зрозуміло, що можна розглядати звідність чи незвідність матриці $A(x)$ щодо її подібності до нижньої клітково-трикутної матриці:

$$SA(x)S^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}(x) & \mathbf{0} \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{array} \right\|.$$

Звідність чи незвідність поліноміальної матриці $A(x)$ пов'язана із її факторизацією. В п. 3.2 доведено, що абсолютно розкладна поліноміальна матриця, тобто матриця, яка має максимальне число факторизацій, є незвідна. Встановимо зв'язки між числом лінійних унітальних дільників поліноміальної матриці $A(x)$ з різними характеристичними коренями та її звідністю до певних кліткових виглядів.

Надалі $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ — унітальна матриця степеня m, характеристичні корені якої попарно різні.

Лема 4.7. *Нехай*

$$A(x) = \left\| \begin{array}{cc} A_2(x) & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1(x) \end{array} \right\|, \tag{4.18}$$

де $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *— матриці порядків* n_1 *і* n_2, $1 \leq n_1 \leq n-1$, *відповідно. Тоді матриця* $A(x)$ *має*

$$k \leq \sum_{i=0}^{n_1} \binom{mn_1}{i} \binom{m(n-n_1)}{n-i} \tag{4.19}$$

лінійних унітальних дільників.

Доведення. Покладемо

$$\det A_1(x) = \prod_{i=1}^{mn_1} (x - \alpha_i)$$

і

$$\det A_2(x) = \prod_{i=1}^{mn_2} (x - \beta_i).$$

Розглянемо поліном

$$\varphi(x) = (x - \alpha_{i_1}) \dots (x - \alpha_{i_r})(x - \beta_{j_1}) \dots (x - \beta_{j_{n-r}}), \qquad (4.20)$$

$r > n_1$. Не важко переконатися, що не існує лінійного дільника матриці $A(x)$ з характеристичним поліномом $\varphi(x)$.

Оскільки поліномів вигляду (4.20) можна утворити

$$t = \sum_{i=1}^{n-n_1} \binom{mn_1}{n_1 + i} \binom{m(n-n_1)}{n-(n_1+i)},$$

то

$$k \le \binom{mn}{n} - t.$$

Із останньої нерівності легко одержати нерівність (4.19).

Лема доведена.

Теорема 4.5. *Якщо число k лінійних унітальних дільників матриці $A(x)$ без кратних характеристичних коренів задовольняє умову*

$$\binom{m(n-1)}{n} + m\binom{m(n-1)}{n-1} < k \le \binom{mn}{n}, \qquad (4.21)$$

то матриця $A(x)$ незвідна.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай число k лінійних унітальних дільників матриці $A(x)$ задовольняє нерівність (4.21), і матриця $A(x)$ звідна, тобто існує така неособлива числова матриця S, що матриця $SA(x)S^{-1}$ має клітковотрикутний вигляд (4.18) для деякого $n_1 \ge 1$. Оскільки число лінійних унітальних дільників матриці $SA(x)S^{-1}$ дорівнює числу лінійних унітальних дільників матриці $A(x)$, то на підставі леми 4.7 число k задовольняє нерівність (4.19). Використовуючи біноміальні тотожності, легко показати, що при

$n_1 = 1$ права частина нерівності (4.19) набуває найбільшого значення. Тому

$$k \leq \binom{m(n-1)}{n} + m\binom{m(n-1)}{n-1}.$$

Отримане протиріччя й доводить теорему.

Покладемо $m = 2$, тобто

$$A(x) = Ex^2 + A_1 x + A_2.$$

На підставі леми 4.4 про існування повного набору дільників поліноміальної матриці, $2n$ характеристичних коренів матриці $A(x)$ можна розбити на дві множини

$$\mathcal{M}_1 = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\}$$

і

$$\mathcal{M}_2 = \{\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n\}$$

так, що набори рядків

$$(\mathbf{a}_1 = \mathbf{g}(\alpha_1),\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{g}(\alpha_2),\ \ldots,\ \mathbf{a}_n = \mathbf{g}(\alpha_n))$$

і

$$(\mathbf{b}_1 = \mathbf{g}(\beta_1),\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{g}(\beta_2),\ \ldots,\ \mathbf{b}_n = \mathbf{g}(\beta_n))$$

складаються із лінійно незалежних рядків.

Нехай q — ціле число, $1 \leq q < n$. Розглянемо множину $\mathcal{M}(\mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$ наборів із n рядків вигляду

$$(\mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{x}_{j_1},\ \mathbf{x}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{j_{n-q}}), \tag{4.22}$$

де

$$\mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q}$$

— деякі фіксовані рядки із набору

$$(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n),$$

а

$$(\mathbf{x}_{j_1},\ \mathbf{x}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$$

— всеможливі $n-q$ рядки із набору

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n).$$

Згідно з лемою 4.4 у множині $\mathcal{M}(\mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$ існує принаймні один набір, що складається з лінійно незалежних рядків.

Лема 4.8. *Якщо в множині $\mathcal{M}(\mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$ є тільки один набір, що складається з лінійно незалежних рядків, то існує така матриця $S \in GL_n(P)$, що*

$$SA(x)S^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{n-q} & * \\ \mathbf{0} & A_q(x) \end{array} \right\|, \tag{4.23}$$

де $A_q(x)$ — квадратна матриця порядку q.

Доведення. Без обмеження загальності вважатимемо, що

$$\mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q}$$

— це рядки

$$(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_q),$$

і

$$(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_q,\ \mathbf{a}_{q+1},\ \mathbf{a}_{q+2},\ \ldots,\mathbf{a}_n) \tag{4.24}$$

— єдиний набір у множині $\mathcal{M}(\mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$, що складається з лінійно незалежних рядків. Це означає, що існує лінійний дільник $Ix-D$ матриці $A(x)$, характеристичними коренями якого є

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q,\ \alpha_{q+1},\ \alpha_{q+2},\ \ldots,\ \alpha_n,$$

тобто

$$A(x) = (Ix - D)A_1(x). \qquad (4.25)$$

Матриця D подібна до діагональної матриці

$$\mathrm{diag}(\alpha_{q+1},\ \alpha_{q+2},\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q).$$

Тому із співвідношення (4.25) для деякої матриці $T \in GL(n, \mathbf{F})$ одержимо:

$$TA(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} (x-\alpha_{q+1})a_{11}(x) & \cdots & (x-\alpha_{q+1})a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\alpha_n)a_{n-q,1}(x) & \cdots & (x-\alpha_n)a_{n-q,n}(x) \\ (x-\beta_1)b_{11}(x) & \cdots & (x-\beta_1)b_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\beta_q)b_{q1}(x) & \cdots & (x-\beta_q)b_{qn}(x) \end{array} \right\|. \qquad (4.26)$$

Через $d_q(x)$ позначимо найбільший спільний дільник мінорів порядку q підматриці

$$B_q(x) = \mathrm{diag}(x-\beta_1,\ \ldots,\ x-\beta_q)\|b_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{q,n}$$

матриці (4.26). Тоді

$$d_q(x) = c\prod_{i=1}^{q}(x-\beta_i)(x-\alpha_i), \quad c \in \mathbf{F}.$$

Справді, якщо припустити, наприклад, що $d_q(\alpha_1) \neq 0$, то знайдеться така матриця $T_1 \in GL(n, \mathbf{F})$ що

$$T_1TA(x) = \left\| \begin{array}{ccc} (x-\alpha_1)a_{11}(x) & \cdots & (x-\alpha_1)a_{1n}(x) \\ (x-\alpha_{i_{q+2}})a_{21}(x) & \cdots & (x-\alpha_{i_{q+2}})a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\alpha_{i_n})a_{n-q,1}(x) & \cdots & (x-\alpha_{i_n})a_{n-q,n}(x) \\ (x-\beta_1)b_{11}(x) & \cdots & (x-\beta_1)b_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\beta_q)b_{q1}(x) & \cdots & (x-\beta_q)b_{qn}(x) \end{array} \right\|,$$

де $\alpha_{i_{q+2}}, \ \ldots, \ \alpha_{i_n}$ — деякі елементи із множини

$$\{\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \ldots, \alpha_n\}.$$

Це означало б, що рядки

$$(\mathbf{b}_1, \ \mathbf{b}_2, \ \ldots, \ \mathbf{b}_q, \ \mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_{i_{q+2}}, \ \mathbf{a}_{i_{q+3}}, \ \ldots, \mathbf{a}_{i_n})$$

лінійно незалежні, і це суперечить єдиності набору (4.24), який складається з лінійно незалежних рядків у множині $\mathcal{M}(\mathbf{b}_{i_q}, \ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$.

Оскільки поліноміальна матриця $B_q(x)$ є степеня 2 і $\deg d_q = 2q$, то існує матриця $U \in GL(n, \mathbf{F})$ така, що

$$B_q(x)U = \| \ \mathbf{0} \quad A_q(x) \ \|,$$

де $A_q(x)$ — квадратна унітальна матриця порядку q і

$$\det A_q(x) = \prod_{i=1}^{q} (x-\beta_i)(x-\alpha_i).$$

Тоді матриця $T_1TA(x)U$ є вигляду (4.23).

Лема доведена.

Теорема 4.6. *Якщо число* k *лінійних унітальних дільників матриці*

$$A(x) = Ix^2 + A_1 x + A_2$$

без кратних характеристичних коренів задовольняє умову

$$2^n \leq k < 2(2^n - 1), \tag{4.27}$$

то матриця $A(x)$ *є звідною.*

Доведення. Оскільки кожному лінійному унітальному дільнику матриці $A(x)$ відповідає набір вигляду (4.22), який складається з лінійно незалежних рядків, і, навпаки, то враховуючи лему 4.5 і те, що $k < 2(2^n - 1)$, робимо висновок, що для деяких

$$\mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_q},\quad 1 \leq q \leq n-1,$$

у множині $\mathcal{M}(\mathbf{b}_{i_q},\ \mathbf{x}_{j_{n-q}})$ є тільки один набір, що складається з лінійно незалежних рядків. Тоді за лемою 4.8 матриця $A(x)$ звідна.

Теорема доведена.

Приклад 4.2. Нехай

$$A(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \quad A_i \in M(3, \mathbf{F}), \quad i = 0, 1, 2, \quad \det A_0 \neq 0$$

— поліноміальна матриця з попарно різними характеристичними коренями. Тоді матриця $A(x)$ має k різних лінійних унітальних дільників, причому $8 \leq k \leq 20$. На основі теорем 4.5, 4.6 маємо, що коли

а) $8 \leq k < 14$, то $A(x)$ — звідна;

б) $16 < k \leq 20$, то $A(x)$ — незвідна.

Крім того, якщо $k = 8$, то матриця $A(x)$ зводиться до діагонального вигляду, тобто

$$SA(x)S^{-1} = \operatorname{diag}(a_{11}(x), a_{22}(x), a_{33}(x)), \quad S \in GL(n, \mathbf{F}).$$

Якщо $14 \leq k \leq 16$, то серед матриць $A(x)$ з таким числом дільників можуть бути як звідні, так і незвідні.

Розділ 5
РОЗКЛАДНІ НА МНОЖНИКИ ПОЛІНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ

У цьому розділі встановлено розкладність на множники регулярних поліноміальних матриць, які мають елементарні дільники вищих степенів, зокрема більші, ніж два і три.

5.1. Виділення із поліноміальних матриць множників простої структури

Нехай $\mathbf{F}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $A(x)$ — поліноміальна матриця із $M(n, \mathbf{F}[x])$, тобто

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}, \quad A_i \in M(n, \mathbf{F}).$$

Нагадаємо, що матрицю $A(x)$ називають регулярною, якщо A_0 – неособлива матриця, і унітальною, якщо $A_0 = I$ – одинична матриця. Поліном $\Delta(x) = \det A(x)$ називають характеристичним, а його корені – характеристичними коренями матриці $A(x)$.

Надалі через $d^{A_i}(x)$ позначатимемо найбільший спільний дільник мінорів i-го порядку матриці $A_i(x)$, складеної із деяких i рядків матриці $A(x)$, $i < n$.

Означення 5.1. Кажемо, що із матриці $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ виділяється регулярний множник порядку $k \leqslant n$, якщо існує така матриця $Q \in GL(n, \mathbf{F})$, що

$$QA(x) = \left\| \begin{array}{ll} B_k(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k} \end{array} \right\| C(x),$$

де $B_k(x)$ — регулярна матриця порядку k, I_{n-k}— одинична матриця порядку $n-k$.

Лема 5.1. *Нехай $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ — регулярна поліноміальна матриця степеня m з елементарними дільниками вигляду*

$$(x - \alpha^{r}_{i}{}_{i}(x-\alpha_i)^{r_i}, \ \ r_i \leqslant 2, \ \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ p_1;$$

$$(x-\beta_j)^{s_j}, \quad s_j > 2, \ \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ p_2 \ , \ \ p_2 \geqslant 1.$$

Якщо

$$\sum_{j=1}^{p_2} s_j = s \leqslant m + p_2,$$

то із матриці $A(x)$ виділяється лінійний регулярний множник простої структури порядку $k \geqslant \frac{n}{2}$.

Доведення. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{p_1} r_i = r \leqslant 2p_1, \quad s \leqslant m + p_2, \quad r + s = mn,$$

то $2p_1 + m + p_2 \geqslant mn$. Звідси одержуємо, що

$$p_1 \geqslant \frac{m(n-1)}{2} - \frac{p_2}{2}.$$

Число всіх елементарних дільників матриці $A(x)$

$$p_1 \geqslant \frac{m(n-1)}{2} - \frac{p_2}{2}.$$

Оскільки p_2 — це число елементарних дільників матриці $A(x)$ кратностей не менше трьох, то $3p_2 \leqslant s$, або $3p_2 \leqslant m + p_2$. Отже, $1 \leqslant p_2 \leqslant \frac{m}{2}$.

Для виділення із матриці $A(x)$ лінійного регулярного множника простої структури порядку k достатньо, щоб матриця $A(x)$ мала d елементарних дільників, де

$$d > \begin{cases} (l-1)m, & \text{якщо } n = 2l, \\ lm, & \text{якщо } n = 2l+1. \end{cases}$$

Безпосередньо перевіряється, що $p_1 + p_2 \geqslant d$.

Лема доведена.

Наслідок 5.1. *Регулярна поліноміальна матриця*

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}, \quad A_i \in M(n, \mathbf{F})$$

простої структури розкладна у добуток лінійних унітальних множників:

$$A(x) = A_0(Ix - B_1)(Ix - B_2) \cdots (Ix - B_m).$$

Означення 5.2. Нехай

$$A_k(x) = \| \, (x - \alpha_i)\tilde{a}_{ij}(x) \, \|_1^{k,n} =$$

$$= \operatorname{diag}(x-\alpha_1,\ (x-\alpha_2,\ \ldots,\ x-\alpha_k)\tilde{A}_k(x).$$

Якщо для деякої матриці $Q_k(x) \in GL(k, \mathbf{F})$ і кореня γ_i полінома $d^{\tilde{A}_k}(x)$ маємо

$$Q_k A_k(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} (x-\alpha_1)\tilde{a}_{11}(x) & \cdots & (x-\alpha_1)\tilde{a}_{1n}(x) \\ (x-\alpha_2)\tilde{a}_{21}(x) & \cdots & (x-\alpha_2)\tilde{a}_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\alpha_{j-1})\tilde{a}_{j-1,1}(x) & \cdots & (x-\alpha_{j-1})\tilde{a}_{j-1,n}(x) \\ (x-\gamma_i)b_{j1}(x) & \cdots & (x-\gamma_i)b_{jn}(x) \\ (x-\alpha_{j+1})\tilde{a}_{j+1,1}(x) & \cdots & (x-\alpha_{j+1})\tilde{a}_{j+1,n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\alpha_k)\tilde{a}_{k1}(x) & \cdots & (x-\alpha_k)\tilde{a}_{kn}(x) \end{array} \right\| =$$

$$= \operatorname{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ x-\gamma_i,\ 1,\ \ldots, 1)B_k(x),$$

то кажемо, що корінь γ_i можна виділити в матриці $A_k(x)$ із її j-го рядка замість кореня α_j.

Лема 5.2. *Кожний корінь γ_j полінома $d_k^{\tilde{A}_k}(x)$ можна виділити в матриці $A_k(x)$ замість деяких коренів α_i із відповідних рядків, причому, якщо γ_j виділяється тільки замість*

$$\alpha_i, \ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,$$

із рядків

$$\mathbf{a}_{j_i}(x), \ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$$

матриці $A_k(x)$, то рядки

$$\mathbf{a}_{j_i}(\gamma_j), \ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$$

є лінійно залежні.

Доведення. Перша частина твердження леми очевидна.

Тепер, якщо припустити, що рядки $\mathbf{a}_{j_i}(\gamma_j)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ лінійно незалежні, то γ_j можна було б виділити в матриці $A_k(x)$ замість деякого α_r із r−го рядка, де $r \neq j_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, що суперечить твердженню леми.

5.2. Факторизація поліноміальних матриць з кратними характеристичними коренями та елементарними дільниками вищих степенів

У цьому підрозділі встановлюємо розкладність на множники регулярної поліноміальної матриці $A(x)$, коли вона має елементарні дільники степенів більших, ніж 2 і 3. Основним результатом є така теорема.

Теорема 5.1. *Нехай* $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ *– регулярна поліноміальна матриця степеня* m, *і*

$$(x - \alpha_i)^{r_i}, \;\; r_i \leqslant 2, \;\; i = 1, 2, \ldots, p_1;$$

$$(x - \beta_j)^{s_j}, \quad s_j > 2, \;\; j = 1, 2, \ldots, p_2\,, \;\; p_2 \geqslant 1 \tag{5.1}$$

— її елементарні дільники. Якщо

$$\sum_{j=1}^{p_2} s_j = s \leqslant m + p_2, \tag{5.2}$$

то матриця $A(x)$ *розкладна на множники*

$$A(x) = (Ix - B_1) \, \cdots \, (Ix - B_t) \, C_t(x), \tag{5.3}$$

де $t \geqslant m + p_2 + 1 - s$.

Доведення. Припустимо спочатку, що елементарні дільники матриці $A(x)$ попарно взаємно прості, тобто її канонічна діагональна форма є

$$D^A(x) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \Delta(x)).$$

На основі леми 5.2 для деякої матриці $Q \in GL(n, \mathbf{F})$ маємо зображення матриці $A(x)$:

$$QA(x) = \left\| \begin{matrix} B_k(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \tilde{A}_k(x) \\ A_{n-k}(x) \end{matrix} \right\|,$$

де

$$B_k(x) = \mathrm{diag}(x - \alpha_1,\ x - \alpha_2,\ \ldots,\ x - \alpha_k), \quad k \geqslant \frac{n}{2}.$$

Множину

$$\{\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ , \alpha_k\}$$

характеристичних коренів матриці $A(x)$ позначатимемо через $\mathcal{K}$. Розглянемо поліном

$$v(x) = \frac{\Delta(x)}{\det\ B_k(x)\ d^{\tilde{A}_k}(x)}.$$

Якщо $k < \frac{3n}{4}$, то для деяких коренів γ_i полінома $v(x)$ маємо, що $d^{\tilde{A}_k}(\gamma_i) \neq 0$, тобто рядки матриці $A_k(\gamma_i)$ лінійно незалежні. Очевидно, що $\gamma_i \in \mathcal{K}$, тобто $\gamma_i = \alpha_i$. Тому ми можемо продовжити виділення із матриці

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{A}_k(x) \\ A_{n-k}(x) \end{matrix} \right\| \tag{5.4}$$

множників вигляду

$$D_i(x) = \mathrm{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ x - \alpha_i,\ 1,\ \ldots\ , 1). \tag{5.5}$$

Так одержимо зображення матриці $A(x)$:

$$RA(x) = \left\| \begin{array}{ccccc} B_k(x) & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & x-\alpha_1 & & \mathbf{0} & \\ * & & \ddots & & \mathbf{0} \\ & * & & x-\alpha_l & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & I_{n-(k+l)} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{c} \tilde{A}_k(x) \\ \tilde{A}_l(x) \\ A_{n-(k+l)}(x) \end{array} \right\|, \tag{5.6}$$

де $R \in GL(n, \mathbf{F})$ і $k+l \geqslant \frac{3n}{4}$. Далі цей процес не можна продовжити.

Зауважимо, що серед коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ і коренів із множини K можуть бути β_j, тобто деякі $\alpha_i = \beta_j$. Крім того, множники вигляду (5.5) із матриці (5.4) ми виділяли так, що в першому множнику в розкладі (5.6) матриці $A(x)$ корені β_j, $j = 1, 2, \ldots, p_2$ є кратностей не більших за 2, що завжди можна зробити.

Із матриці $A(x)$ виділений лінійний регулярний множник порядку $k+l$. Якщо $k+l<n$, то покажемо, що, виходячи із (5.6), можна виділити із матриці $A(x)$ регулярний множник порядку $k+l+1$.

У розкладі (5.6) матриці $A(x)$ перший множник зводимо подібними перетвореннями до жорданової форми, потім переставляємо його рядки і стовпці, множимо на другий множник і одержуємо матрицю

$$TA(x) = \left\| \begin{array}{c} A_k(x) \\ A_l(x) \\ A_{n-(k+l)}(x) \end{array} \right\|, \tag{5.7}$$

де

$$A_k(x) = \left\| \begin{array}{lcl} (x-\alpha_1)\tilde{a}_{11}(x) & \dots & (x-\alpha_1)\tilde{a}_{1n}(x) \\ (x-\alpha_2)\tilde{a}_{21}(x) & \dots & (x-\alpha_2)\tilde{a}_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x-\alpha_l)\tilde{a}_{l1}(x) & \dots & (x-\alpha_l)\tilde{a}_{ln}(x) \\ (x-\alpha_{l+1})\tilde{a}_{l+1,1}(x) & \dots & (x-\alpha_{l+1})\tilde{a}_{l+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x-\alpha_k)\tilde{a}_{k1}(x) & \dots & (x-\alpha_k)\tilde{a}_{kn}(x) \end{array} \right\|,$$

$$A_l(x) =$$

$$\left\| \begin{array}{lcl} (x-\alpha_1)\tilde{a}_{k+1,1}(x)+\tilde{a}_{11}(x) & \dots & (x-\alpha_1)\tilde{a}_{k+1,n}(x)+\tilde{a}_{1n}(x) \\ (x-\alpha_2)\tilde{a}_{k+2,1}(x)+\tilde{a}_{21}(x) & \dots & (x-\alpha_2)\tilde{a}_{k+2,n}(x)+\tilde{a}_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x-\alpha_l)\tilde{a}_{k+l,1}(x)+\tilde{a}_{l,1}(x) & \dots & (x-\alpha_l)\tilde{a}_{k+l,n}(x)+\tilde{a}_{l,n}(x) \end{array} \right\|,$$

а $A_{n-(k+l)}(x)$ — матриця зі співвідношення (5.6).

Нехай тепер

$$d^{A_{k+l}}(x) = \prod_{j=1}^{p_2}(x-\beta)^{q_j}v(x), \quad v(\beta_j) \neq 0, \quad 1 \leqslant q_j \leqslant s,$$

де

$$A_{k+l}(x) = \left\| \begin{array}{c} A_k(x) \\ A_l(x) \end{array} \right\|.$$

Утворимо поліноми

$$g(x) = \frac{\Delta(x)}{d^{A_{k+l}}(x)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{p_2}(x-\beta_j)^{f_j}u_1(x), \quad u_1(\beta_j) \neq 0, \quad 0 \leqslant f_j \leqslant s-1 \qquad (5.8)$$

і

$$g_1(x) = \prod_{j=1}^{p_2} (x - \beta_j)^{f_{1j}} u_1(x), \tag{5.9}$$

де

$$f_{1j} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \ q_j > 1, \\ 1, \text{ якщо } \ q_j = 1, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ p_2. \end{cases}$$

Надалі позначатимемо

$$q = \sum_{j=1}^{p_2} q_j, \quad f = \sum_{j=1}^{p_2} f_j.$$

Поліном $g_1(x)$ має лише прості корені і $g_1 | d^{A_k}$. Множину його коренів позначимо через $\mathcal{M}_{g_1}$.

Покажемо, що $\mathcal{M}_{g_1} \neq \varnothing$, тобто $\deg g_1 > 0$.

Оскільки

$$\deg \Delta = mn, \quad \deg d^{A_{k+l}} = m(k+l) - \omega, \quad \omega \geqslant 0, \tag{5.10}$$

то

$$\deg g = \deg \Delta - \deg d^{A_{k+l}} = m(n - (k+l)) + \omega. \tag{5.11}$$

Але $k + l < n$, тому із (5.11) отримаємо:

$$\deg g \geqslant m + \omega. \tag{5.12}$$

Нехай у поліномі $g_1(x)$ в (5.9) $f_{1i} = 1$ для $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ r_1$, $0 \leqslant r_1 \leqslant p_2$, а решта дорівнюють 0. Тоді, враховуючи (5.12), маємо

$$\deg g_1 = \deg g - f + r_1 \geqslant m + \omega - f + r_1. \tag{5.13}$$

Тепер $f = s - q$ і $s \leqslant m + p_2$, $q \geqslant p_2$.

Нехай

а) $q > p_2$.

Тоді

$$s - q < m + p_2 - p_2,$$

тобто $f < m$. Оскільки $r_1 \geqslant 0$, то із (5.13) маємо, що $\deg g_1 > 0$.

б) $q = p_2$.

Оскільки

$$q_i \geqslant 1, \ \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ p_2,$$

то це означає, що $q_i = 1$, для всіх $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ p_2$, тому $f_{1i} = 1$ для всіх $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ p_2$, а отже, $r_1 = p_2 \geqslant 1$. Тому $f \leqslant m$ і із (5.13) маємо, що $\deg g_1 > 0$. Отже, $g_1 \neq \varnothing$.

Нехай тепер на основі леми 5.2 кожний корінь γ_j полінома $g_1(x)$, тобто із множини $\mathcal{M}_{g_1}$ можна виділити в матриці $A_k(x)$ із (5.7) замість деяких коренів α_i із множини $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ і, навпаки, замість кожного кореня із множини $\mathcal{K}_1$ можна виділити в матриці $A_k(x)$ деякий корінь із множини $\mathcal{M}_{g_1}$. Таку відповідність між елементами цих множин позначимо так:

$$\mathcal{K}_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{g_1}. \tag{5.14}$$

Без обмеження загальності можемо вважати, що множина $\mathcal{K}_1$ складена із коренів $\{ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_{k_1} \}$, бо в іншому разі корені і рядки, в яких вони знаходяться, можемо перенумерувати.

Покладемо, що

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_l = \{ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_l \},$$

в іншому випадку, як буде показано далі, все доведено.

Матриця

$$A_{k_1}(x) =$$

$$= \|(x - \alpha_i)\tilde{a}_{ij}(x)\|_1^{k_1, n} = \mathrm{diag}\,(x - \alpha_1, x - \alpha_2, \ldots, x - \alpha_{k_1})\tilde{A}_{k_1}(x)$$

складена із $1,\ 2,\ \dots\ , k_1$-го рядків матриці $A_k(x)$, а матриця $A_{k+l-k_1}(x)$ одержана із $A_{k+l}(x)$ викресленням k_1 рядків з номерами $k+1,\ k+2,\ \dots\ , k+k_1$. Враховуючи (5.14) і лему 5.2, маємо, що $g_1(x)|d^{\tilde{A}_{k_1}}(x)$, а тому

$$\deg g_1 \leqslant (m-1)k_1. \tag{5.15}$$

Тепер утворимо поліноми

$$h_1(x) = \frac{d^{A_{k+l}}(x)}{d^{A_{k+l-k_1}}(x)\prod\limits_{i=1}^{k_1}(x-\alpha_i)} = \prod_{j=1}^{p_2}(x-\beta_j)^{t_j}v_1(x), \quad v_1(\beta_j) \neq 0 \tag{5.16}$$

і

$$\tilde{h}_1(x) = \prod_{j=1}^{p_2}(x-\beta_j)^{t_{1j}}v_1(x), \tag{5.17}$$

де

$$t_{1j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad q_{1j} > 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad q_{1j} = 1, \quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ p_2, \end{cases}$$

де q_{1j} — кратності коренів $\beta_j,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ p_2$ у поліномі

$$d^{A_{k+l-k_1}}(x)\prod_{i=1}^{k_1}(x-\alpha_i).$$

Корені полінома $\tilde{h}_1(x)$ прості, їх множину позначимо через $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1}$.

Доведемо, що $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1} \neq \varnothing$, тобто $\deg \tilde{h}_1 > 0$.

Нехай у поліномі $\tilde{h}_1(x)$ в (5.17) $t_{1i} = 1$ для $i = 1,\ 2,\ \dots,\ r_2,\ \ 0 \leqslant r_2 \leqslant p_2$. Тоді із (5.16) і (5.17) маємо:

$$\deg \tilde{h}_1 = \deg h_1 - t + r_2 =$$

$$= \deg d^{A_{k+l}} - \deg d^{A_{k+l-k_1}} - k_1 - t + r_2, \tag{5.18}$$

де

$$t = \sum_{j=1}^{p_2} t_j.$$

Враховуючи (5.10) і те, що

$$\deg d^{A_{k+l-k_1}} \leqslant m(k+l-k_1),$$

із (5.18) одержимо:

$$\deg \tilde{h}_1 \geqslant (m-1)k_1 - \omega - t + r_2. \tag{5.19}$$

Із (5.13) і (5.15) маємо, що

$$(m-1)k_1 \geqslant m + \omega - f + r_1.$$

Тому із (5.19) отримано

$$\deg \tilde{h}_1 \geqslant m - (f+t) + r_1 + r_2. \tag{5.20}$$

Але

$$f + t = (s-q) + (q-\tilde{q}) = s - \tilde{q},\ \ s \leqslant m + p_2,\ \ \tilde{q} \geqslant p_2,$$

де

$$\tilde{q} = \sum_{j=1}^{p_2} q_{1j}.$$

Нехай а) $\tilde{q} > p_2$.

Тоді $s - \tilde{q} < m + p_2 - p_2$, тобто

$$f + t < m \tag{5.21}$$

і із (5.20) одержуємо, що $\deg \tilde{h}_1 > 0$.
б) $\tilde{q} = p_2$.

Це означає, що $q_{1i} = 1$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, p_2$, тому $t_{1i} = 1$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, p_2$, тобто $r_2 = p_2 \geqslant 1$. Тоді

$$f + t \leqslant m \tag{5.22}$$

і із (5.20) випливає, що $\deg \tilde{h}_1 > 0$. Отже, довели, що $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1} \neq \varnothing$.

Рядки підматриць $A_k(x)$ і $A_l(x)$ із (5.7) є попарно "зв'язними", тобто, якщо із i-го рядка

$$\mathbf{a}_i(x) = \|(x-\alpha_i)\tilde{a}_{i1}(x) \;\; (x-\alpha_i)\tilde{a}_{i2}(x) \;\cdots\; (x-\alpha_i)\tilde{a}_{in}(x)\|$$

матриці $A_k(x)$ винесено множник $x - \alpha_i$ (з матриці $TA(x)$ із (5.7) відповідно множник вигляду

$$\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \; x-\alpha_i, 1, \ldots, 1)),$$

тоді, віднявши рядок

$$\tilde{\mathbf{a}}_i(x) = \|\tilde{a}_{i1}(x) \;\; \tilde{a}_{i2}(x) \;\; \cdots \;\; \tilde{a}_{in}(x)\|$$

від $k+i$–го рядка

$$\mathbf{a}_{k+i}(x) = \|(x-\alpha_i)\tilde{a}_{k+i,1} + \tilde{a}_{i1}(x) \;\; (x-\alpha_i)\tilde{a}_{k+i,2} + \tilde{a}_{i2}(x) \;\cdots$$
$$\cdots (x-\alpha_i)\tilde{a}_{k+i,n}(x) + \tilde{a}_{in}(x)\|$$

матриці $A_l(x)$, з цього рядка винесемо множник $x - \alpha_i$. Таку відповідність між множинами $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1}$ записуватимемо так:

$$\mathcal{K}_1 \Leftarrow \mathcal{M}_{\tilde{h}_1}.$$

Припускаємо, що

$$\mathcal{M}_{\tilde{h}_1} \cap \mathcal{K} = \varnothing,$$

тобто $\tilde{h}_1 | d^{\tilde{A}_k}$. В іншому випадку все вже доведено.

Тепер утворюємо поліном

$$g_2(x) = \frac{\tilde{h}_1(x)}{\delta_1(x)}, \tag{5.23}$$

де

$$\delta_1(x) = (\tilde{h}_1(x),\ d^{\tilde{A}_{k_1}}(x)).$$

Покажемо, що $\deg g_2 > 0$.

Нехай поліноми $g_1(x)$ із (5.9) і $\tilde{h}_1(x)$ із (5.17) такі, як і у попередніх випадках, тобто мають по r_1 і r_2 коренів із множини

$$\{\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{p_2}\},$$

відповідно. Тоді із (5.13) і (5.19) матимемо:

$$\deg g_1 + \deg \tilde{h}_1 \geqslant (m-1)k_1 + m - (f+t) + r_1 + r_2. \tag{5.24}$$

Звідси, враховуючи (5.21) і (5.22), одержуємо, що

$$\deg g_1 + \deg \tilde{h}_1 > (m-1)k_1. \tag{5.25}$$

Тепер на основі (5.23 матимемо, що $\deg g_2 > 0$.) Множину коренів полінома $g_2(x)$ позначаємо через $\mathcal{M}_{g_2}$ і вона не є порожньою.

Кожний корінь із множини $\mathcal{M}_{g_2}$ можна виділити в підматриці $A_k(x)$ замість деяких коренів $\alpha_j \in \mathcal{K}$. Виберемо лише ті, які не належать $\mathcal{K}_1$. Множину таких коренів позначимо через $\mathcal{K}_2$. Зважаючи на те, що $\deg g_2 > 0$, то $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Покладемо, що

$$\mathcal{K}_2 = \{\ \alpha_{k_1+1},\ \alpha_{k_1+2},\ \ldots\ ,\alpha_{k_2}\}.$$

Вищезазначену відповідність між елементами цих множин записуватимемо так:

$$\mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{g_2}.$$

Знову припускаємо, що $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_l$ і утворюємо поліноми $\tilde{h}_2(x)$ і $g_3(x)$, $\deg \tilde{h}_2 > 0$, $\deg g_3 > 0$, тобто $\mathcal{M}_{\tilde{h}_2} \neq \varnothing$ і $\mathcal{M}_{g_3} \neq \varnothing$

і т.д. Якщо на кожному кроці для поліномів $g_i(x)$ і $\tilde{h}_i(x)$ і множин їх коренів

$$\mathcal{M}_{g_i} \ \text{ і } \ \mathcal{M}_{\tilde{h}_i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t-1,$$

виконуються умови

$$\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_l$$

або

$$\mathcal{M}_{\tilde{h}_i} \cap \mathcal{K} = \varnothing,$$

то цей процес не обривається, тобто степені утворених поліномів $g_t(x)$ і $\tilde{h}_t(x)$ — більше нуля, тобто $\mathcal{M}_{g_t} \neq \varnothing$ і $\mathcal{M}_{\tilde{h}_t} \neq \varnothing$, що доводиться подібно, як і у попередніх випадках. Таким чином, одержимо такі підмножини характеристичних коренів матриці $A(x)$ і відповідності між їх елементами

$$\mathcal{K}_i \Leftrightarrow \mathcal{M}_{g_i}, \quad \mathcal{K}_i \Leftarrow \mathcal{M}_{\tilde{h}_i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t, \tag{5.26}$$

де

$$\mathcal{K}_i = \left\{ \alpha_{k_{i-1}+1}, \alpha_{k_{i-1}+2}, \ \ldots \ , \alpha_{k_i} \right\}$$

і $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \varnothing$, $i \neq j$, при цьому покладаємо $k_0 = 0$.

Оскільки вищезазначений процес не обривається, то на деякому кроці одержимо, що

$$\mathcal{K}_t \not\subset \mathcal{K}_l, \tag{5.27}$$

тобто

$$\mathcal{K}_t \cap (\mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_l) \neq \varnothing$$

або

$$\mathcal{M}_{\tilde{h}_t} \cap \mathcal{K} \neq \varnothing. \tag{5.28}$$

Це випливає з того, що $k \geqslant \frac{n}{2}$ і $k + l < n$, а тому $l < k$, тобто

$$\mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_l \neq \varnothing.$$

Припустимо, що виконується умова (5.28). Матрицю (5.7) ми розбиваємо на смуги, тобто

$$T_1TA(x) = \left\| \begin{array}{l} S_1(x) \\ S_2(x) \\ \vdots \\ S_{t-1}(x) \\ S_t(x) \\ * \\ - - - - - \\ * \\ \tilde{S}_t(x) \\ \tilde{S}_{t-1}(x) \\ \vdots \\ \tilde{S}_2(x) \\ \tilde{S}_1(x) \\ - - - - - \\ A_{n-(k+l)}(x) \end{array} \right\|, \tag{5.29}$$

де

$$S_r(x) = \|(x-\alpha_i)\tilde{a}_{ij}(x)\|_{k_{r-1}+1,1}^{k_r,n},$$

$$\tilde{S}_r(x) = \|(x-\alpha_i)\tilde{a}_{k+i,j}(x) + \tilde{a}_{ij}(x)\|_{k_{r-1}+1,1}^{k_r,n},$$

тобто смуга $S_r(x)$ складена із рядків підматриці $A_k(x)$ з номерами

$$k_{r-1}+1,\ k_{r-1}+2,\ \dots\ , k_r,$$

а $\tilde{S}_r(x)$ — із рядків підматриці $A_l(x)$ із номерами

$$k+k_{r-1}+1,\ k+k_{r-1}+2,\ \dots\ , k+k_r, \quad r=1,\ 2,\ \dots,\ t,$$

причому $k_0 = 0$.

Тоді в смузі $S_i(x)$ кожний характеристичний корінь множини $\mathcal{M}_{g_i}$ можна виділити із деяких її рядків замість коренів множини $\mathcal{K}_i$, а далі відповідно в смузі $\tilde{S}_i(x)$ замість цього кореня із $\mathcal{K}_i$ виділяється деякий корінь множини $\mathcal{M}_{\tilde{h}_i}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t$.

Отже, нехай виконується умова (5.28), тобто існує такий характеристичний корінь $\lambda_t \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_t}$, що $\lambda_t \in \mathcal{K}$. Очевидно, що $\lambda_t \in \mathcal{K} \backslash K_l$. Зважаючи на спосіб утворення множин

$$\mathcal{M}_{\tilde{h}_i} \ \text{ і } \ \mathcal{K}_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t,$$

замінимо елементи між цими множинами так. Корінь

$$\lambda_t \in (\mathcal{M}_{\tilde{h}_t} \cap \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_l)$$

у смузі $\tilde{S}_t(x)$ можна виділити із її деякого $k + k_t$ -го рядка замість кореня $\alpha_{k_t} \in K_t$.

Тоді $\tilde{\mathcal{K}}_t$ — це множина, одержана із $\mathcal{K}_t$ заміною α_{k_t} на λ_t. У смузі $S_t(x)$ із k_t-го її рядка замість кореня α_{k_t} можна виділити деякий корінь $\lambda_{t-1} \in \mathcal{M}_{g_t}$. Тоді $\bar{\mathcal{K}}_t$ — це множина, одержана із $\mathcal{K}_t$ заміною α_{k_t} на λ_{t-1}.

Із способу утворення поліномів $g_i(x)$ випливає, що $g_{i+1} | \tilde{h}_i$, тобто

$$\mathcal{M}_{g_{i+1}} \subset \mathcal{M}_{\tilde{h}_i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t-1$$

і $g_1 | g$, де поліном $g(x)$ визначений у (5.8). Тому λ_{t-1} є коренем полінома $\tilde{h}_{t-1}(x)$, тобто $\lambda_{t-1} \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_{t-1}}$.

Тепер $\lambda_{t-1} \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_{t-1}}$ у смузі $\tilde{S}_{t-1}(x)$ можна виділити із її $k + k_{t-1}$ -го рядка замість кореня $\alpha_{k_{t-1}} \in \mathcal{K}_{t-1}$. Тоді утворюємо множину коренів $\tilde{\mathcal{K}}_{t-1}$ із множини $\mathcal{K}_{t-1}$, замінюючи $\alpha_{k_{t-1}}$ на λ_{t-1}, і у смузі $S_{t-1}(x)$ замість $\alpha_{k_{t-1}}$ із деякого її k_{t-1}-го рядка можна виділити деякий корінь $\lambda_{t-2} \in \mathcal{M}_{g_{t-1}}$, тому утворюємо множину коренів $\bar{\mathcal{K}}_{t-1}$ із множини $\mathcal{K}_{t-1}$ заміною $\alpha_{k_{t-1}}$ на λ_{t-2} і т.д. Нарешті, $\lambda_1 \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_1}$ у смузі $\tilde{S}_1(x)$ можна виділити із її $k+k_1$-го рядка замість кореня $\alpha_{k_1} \in \mathcal{K}_1$ і тому утворюємо множину коренів $\tilde{\mathcal{K}}_1$ із множини $\mathcal{K}_1$ заміною α_{k_t} на λ_1, і у смузі $S_1(x)$ замість кореня $\alpha_{k_1} \in \mathcal{K}_1$ можна виділити із деякого рядка корінь $\lambda_0 \in \mathcal{M}_{g_1}$ і замість множини $\mathcal{K}_1$ розглядатимемо множину $\bar{\mathcal{K}}_1$, в якій α_{k_t} замінено на λ_0.

Тепер не важко показати, що із матриці (5.29) можна виділити лінійний регулярний множник

$$H(x) = \tilde{B}_{k+l}(x) \oplus I_{n-(k+l)}$$

порядку $k+l$ з характеристичними коренями із множин

$$\tilde{\mathcal{K}}_i, \quad \bar{\mathcal{K}}_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t, \quad \mathcal{K} \backslash \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{K}_i \quad \text{і} \quad \mathcal{K}_l \backslash \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{K}_i$$

(з урахуванням їх кратностей), тобто для деякої матриці $T_2 \in GL(n, \mathbf{F})$ одержимо зображення матриці $A(x)$:

$$T_2 T_1 T A(x) = \left\| \begin{array}{ll} \tilde{B}_{k+l}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-(k+l)} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{l} G_{k+l}(x) \\ A_{n-(k+l)} \end{array} \right\|. \qquad (5.30)$$

Оскільки корінь λ_0 у поліномах $g_1(x)$ і $d^{A_{k+l}}(x)$ має кратність один, і є характуристичним коренем $\tilde{B}_{k+l}(x)$, то $d^{G_{k+l}}(\lambda_0) \neq 0$, тобто рядки матриці $G_{k+l}(\lambda_0)$ є лінійно незалежні. Тому із (5.30) одержимо розклад

$$T_3 T_2 T_1 T A(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{lll} \tilde{B}_{k+l}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & x-\lambda_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-(k+l+1)} \end{array} \right\| C_{k+l+1}(x), \qquad (5.31)$$

$T_3 \in GL(n, \mathbf{F})$, тобто із матриці $A(x)$ виділений лінійний регулярний множник порядку $k + l + 1$.

Подібно показуємо, що і тоді, коли виконується умова (5.27), виходячи із (5.29), виділимо із матриці $A(x)$ лінійний регулярний множник порядку $k + l + 1$.

Тепер, якщо $k+l+1 < n$, то, аналогічно міркуючи, покажемо, що, виходячи із (5.31) із матриці $A(x)$, можемо виділити лінійний регулярний множник порядку $k + l + 2$. Так крок за кроком, виділимо із матриці $A(x)$ лінійний регулярний множник порядку n, який можна вважати унітальним, тобто

$$A(x) = (Ix - B_1)C_1(x). \qquad (5.32)$$

На початку доведення теореми припускали, що елементарні дільники матриці $A(x)$ є попарно взаємно простими, тобто кожному характеристичному кореню матриці $A(x)$ відповідає один елементарний дільник. Оскільки для матриці $A(x)$ існує лінійний унітальний дільник, то на основі теореми 1.4 існує канонічна система власних і приєднаних векторів матриці $A(x)$.

Нехай тепер елементарні дільники матриці $A(x)$ задовольняють умови (5.1), (5.2) і виберемо її деяку канонічну систему власних і приєднаних векторів. На основі леми 1.1 існує поліноміальна унітальна матриця $F(x)$, яка має ту ж канонічну систему власних і приєднаних векторів, але кожному її характеристичному кореню відповідає один елементарний дільник. На основі доведеного із матриці $F(x)$ виділяється лінійний унітальний множник. Тоді на основі теореми 1.4 існує система із n лінійно незалежних власних і приєднаних векторів матриці $F(x)$. Оскільки канонічні системи матриць $A(x)$ і $F(x)$ збігаються, то існує система із n лінійно незалежних власних і приєднаних векторів матриці $A(x)$, тобто із $A(x)$ виділяємо лінійний унітальний множник, і так матрицю $A(x)$ зображаємо у вигляді (5.32).

Матриця $C_1(x)$ у (5.32) є степеня $m-1$, і її елементарні дільники є степенів, не більших, ніж степені відповідних елементарних дільників матриці $A(x)$. Тому, якщо для елементарних дільників матриці $C_1(x)$ виконується умова (5.2) теореми, то із неї виділяється лінійний унітальний множник $Ix - B_2$. Так, міркуючи далі, і одержимо розклад (5.3) матриці $A(x)$. Теорему доведено.

Із цієї теореми та її доведення випливають такі наслідки.

Наслідок 5.2. *Регулярна поліноміальна матриця $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ розкладна у добуток лінійних регулярних множників, якщо виконується одна з умов:*

а) кратність її характеристичних коренів не перевищує двох, крім одного, кратність якого не більше трьох;

б) не більше як один її елементарний дільник є степеня три, а решта є степенів не більших за два.

Наслідок 5.3. *Нехай*

$$A_0Y^m + A_1Y^{m-1} + \ \cdots \ + A_{m-1}Y + A_m = 0, \tag{5.33}$$

$$Y^mA_0 + Y^{m-1}A_1 + \ \cdots \ + YA_{m-1} + A_m = 0 \tag{5.34}$$

— матричні рівняння, де $A_i \in M(n, \mathbf{F})$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$ і

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ \cdots \ + A_{m-1}x + A_m$$

— їх характеристична матриця. Якщо елементарні дільники матриці $A(x)$ задовольняють умови (5.1) і (5.2), то матричні рівняння (5.33) і (5.34) розв'язні.

Зауважимо, що за невиконання умови (5.2) теореми 5.2 унітальна поліноміальна матриця $A(x)$ може не розкладатися на унітальні множники.

Приклад 5.1. Нехай задана клітково-діагональна унітальна поліноміальна матриця $A(x)$ з елементами із кільця $\mathbb{C}[x]$:

$$A(x) = \operatorname{diag}\{A_1(x), A_2(x)\},$$

де

$$A_1(x) = \left\| \begin{array}{cc} x^3 & 1 \\ 0 & x^2(x+1) \end{array} \right\|$$

і $A_2(x)$ — унітальна поліноміальна матриця степеня три, причому

$$\det A_2(0) \neq 0, \ \det A_2(-1) \neq 0$$

і її елементарні дільники лінійні.

Елементарними дільниками матриці $A_1(x)$ є x^5, $x+1$, а матриці $A(x)$ — об'єднання елементарних дільників матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$.

Тоді $m = 3$, $p_2 = 1$, $s = 5$. Отже, $s > m + p_2$. Оскільки

$$(\det A_1(x), \det A_2(x)) = 1$$

і матриця $A_1(x)$ — нерозкладна на унітальні множники, то на основі теореми 7.4 і матриця $A(x)$ — нерозкладна на унітальні множники.

5.3. Число дільників поліноміальних матриць з кратними характеристичними коренями та їх структура

Нехай $\mathbf{F}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль,

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

— поліноміальна матриця з кратними характеристичними коренями, де $A_i - n \times n$-матриці над полем $\mathbf{F}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Із теореми 5.1 випливає, що регулярна поліноміальна матриця $A(x)$, характеристичні корені якої є кратностей не більше двох, розкладна в добуток лінійних унітальних множників, а отже, має лінійні унітальні дільники. В п. 3.4 встановлені межі для числа дільників поліноміалних матриць, характеристичні корені яких є кратностей один. У цьому підрозділі досліджуємо можливе число унітальних дільників поліноміальних матриць, характеристичні корені яких є кратностей не більше двох та вивчаємо їх структуру залежно від цього числа.

Лема 5.3. *Нехай $f(x)$ — унітальний поліном над полем $\boldsymbol{F}$ степеня $\deg f = m$ і його корені є кратностей два, тобто*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^2,$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$, якщо $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$. Тоді поліном $f(x)$ має

$$k = \sum_{i=0}^{n-s} \binom{n-i}{i} \binom{r}{n-i} \tag{5.35}$$

різних дільників степеня $n \leqslant m$, де

$$s = \begin{cases} q, & \text{якщо} \quad n = 2q, \\ q+1, & \text{якщо} \quad n = 2q+1. \end{cases}$$

Доведення. Для встановлення числа k вигляду (5.35) дільників степеня n полінома $f(x)$ використані формули для обчислення числа сполук із r різних елементів по n з повтореннями по два [113].

Теорема 5.2. *Нехай характеристичні корені унітальної поліноміальної матриці $A(x)$ є кратностей не більше ніж два. Тоді матриця $A(x)$ має тільки один $k = 1$ лівий лінійний унітальний дільник у тому і тільки тому випадку, коли:*

а) степінь матриці $A(x)$ дорівнює два, $m = 2$;

б) характеристичні корені матриці $A(x)$ є кратностей два;

в) матриця $A(x)$ подібна до матриці $A_1(x)$ діагонального вигляду, тобто для деякої матриці $S \in GL(n, \mathbf{F})$

$$A_1(\lambda) = STA(\lambda)S^{-1} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} (x-\alpha_1)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (x-\alpha_2)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x-\alpha_n)^2 \end{array} \right\|, \qquad (5.36)$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$, якщо $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Доведення. Якщо не виконується хоч би одна із умов *а*) чи *б*), то матриця $A(x)$ має більш ніж n різних характеристичних коренів. Застосовуючи метод виділення лінійних унітальних дільників із матриці $A(x)$, запропонований у праці [49], і враховуючи те, що кратності характеристичних коренів матриці $A(x)$ є не більш ніж два, одержимо, що матриця $A(x)$ має більше одного лінійного унітального дільника.

Нехай тепер матриця $A(x)$ подібна до матриці $A_1(x)$ вигляду (6.80). Тоді матриця

$$Ix - B = \mathrm{diag}(x-\alpha_1, x-\alpha_2, \ldots, x-\alpha_n)$$

є єдиним лінійним унітальним дільником матриці $A_1(x)$, враховуючи умови однозначності унітальних дільників із заданими їх характеристичними поліномами [14]. Очевидно, що матриця $S^{-1}(Ix - B)S$ є єдиним лінійним унітальним дільником матриці $A(x)$.

Якщо ж матриця $A(x)$ подібна до діагональної матриці $A_2(x)$ вигляду

$$A_2(x = SA(x)S^{-1} = \operatorname{diag}(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)),$$

в якій є діагональний елемент

$$a_k(x) = (x - \alpha_{k_1})(x - \alpha_{k_2}),$$

де $\alpha_{k_1} \neq \alpha_{k_2}$, то не важко переконатися, що матриця $A_2(x)$, а отже, і $A(x)$ має більше ніж один лінійний унітальний дільника.

Нехай тепер матриця $A(x)$ є степеня два, кратності її характеристичних коренів є кратностей два і вона не подібна до матриці діагонального вигляду (5.36). Тоді, враховуючи умови звідності подібними перетвореннями матриці $A(x)$ до клітководіагонального вигляду [49], за допомогою індукції не важко показати, що матриця $A(x)$ матиме більше одного лінійного унітального дільника.

Теорема доведена.

Теорема 5.3. *Нехай характеристичні корені унітальної поліноміальної матриці* $A(x)$ *є кратностей два, тобто*

$$\det A(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^2,$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$, *якщо* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$ *і елементарні дільники матриці* $A(x)$ *є попарно взаємно простими. Тоді матриця* $A(x)$ *має* k *лінійних унітальних дільників, причому*

$$1 \leqslant k \leqslant \sum_{i=0}^{n-s} \binom{n-i}{i} \binom{r}{n-i}, \tag{5.37}$$

де

$$s = \begin{cases} q, & \text{\textit{якщо}} \ \ n = 2q, \\ q+1, & \text{\textit{якщо}} \ \ n = 2q+1. \end{cases}$$

Доведення. На основі наслідку 2.6 матриця $A(x)$ з попарно взаємно простими елементарними дільниками напівскалярно еквівалентна до такої стандартної форми:

$$T^A(x) = UA(x)V(x) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1(x) & \cdots & t_{n-1}(x) & t_n(x) \end{array} \right\|, \quad (5.38)$$

де $U \in GL\,(n, \mathbf{F})$, $V\,(x) \in GL\,(n, \mathbf{F}[x])$,

$$t_n(x) = \ \Delta(x) = \det A(x)$$

і

$$\deg t_i < \deg t_n, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Запишемо рядок

$$\mathbf{g}(x) = \left\| \ g_1(x) \quad \cdots \quad g_{n-1}(x) \quad 1 \ \right\|,$$

де

$$g_i(x) = -t_i(x), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Тоді існує лівий дільник $Ix - B$ матриці $T^A(x)$ з характеристичним поліномом

$$\det(Ix - B) = \varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ — дільник характеристичного полінома $\Delta(x) = \det A(x)$ матриці $A(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rang} M_{\mathbf{g}(x)}(\varphi) = n,$$

де $M_{\mathbf{g}(x)}(\varphi)$ — матриця значень рядка $\mathbf{g}(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$ [49].

Тепер розглянемо трикутну матрицю $T(x)$ вигляду (6.82), в якій

$$t_n(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \alpha_i)^2,$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$, якщо $i \neq j$,

$$m \leqslant \deg t_i < mn, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

і коефіцієнти t_{ij} поліномів

$$t_i(x), \;\; i = 1, \ldots, n-1,$$

є параметрами. Тоді існують такі значення параметрів t_{ij} в полі $\mathbf{F}$, що для кожного дільника $\varphi_i(x)$, $\deg \varphi_i = n$ полінома $t_n(x)$

$$\operatorname{rang} M_{\,\mathbf{g}(x)}(\varphi_i) = n,$$

тобто матриця $T(x)$ має дільники $Ix - B_i$ з характеристичними поліномами

$$\det(Ix - B_i) = \varphi_i(x)$$

і матриця $T(x)$ регуляризується, тобто для деяких матриць $U \in GL\,(n, \mathbf{F})$ і $V\,(x) \in GL\,(n, \mathbf{F}[x])$ матриця

$$UT(x)V(x) = A(x)$$

є унітальною. Тоді, враховуючи лему 5.3, матриця $A(x)$ матимемо

$$k = \sum_{i=0}^{n-s} \begin{pmatrix} n-i \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ n-i \end{pmatrix}$$

лінійних унітальних дільників.

Те, що існують поліноміальні матриці $A(x)$, які мають тільки один лінійний унітальний дільник, випливає з теореми 5.2.

Теорема доведена.

Зауважимо, що в теоремі 5.2 можна зняти обмеження про те, що елементарні дільники поліноміальної матриці $A(x)$ є попарно взаємно простими. За довільних елементарних дільників матриці $A(x)$ k означатиме число класів лінійних унітальних дільників, де клас дільників $\{Ix - B_i\}$ складається із дільників $Ix - B_i$ із одним характеристичним поліномом

$$\det(Ix - B_i) = \varphi(x).$$

Кожний клас містить один або ж нескінченне число дільників.

У п. 3.5 встановлено, що кліткова структура поліноміальної матриці $A(x)$ без кратних характеристичних коренів залежить від числа її лінійних унітальних дільників. Зокрема, доведено, що коли це число мінімальне, $k = m^m$, то матриця $A(x)$ діагоналізується, тобто подібна до діагональної матриці і незвідна перетвореннями подібності до жодного клітковотрикутного вигляду, якщо це число максимальне, $k = \binom{mn}{n}$. За наявності у матриці $A(x)$ кратних характеристичних коренів ця залежність порушується. Тоді матриця $A(x)$ може діагоналізуватися як за її мінімального, так і максимального числа лінійних унітальних дільників, що підтверджує такий приклад.

Приклад 5.2. Нехай

$$A(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & 0 & 0 \\ 0 & (x-\alpha_1)(x-\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \end{Vmatrix}$$

— діагональна матриця, де $\alpha_i \in \mathbb{C}$, і $\alpha_i \neq \alpha_j$, якщо $i \neq j$, $i = 1, 2, 3$. Тоді для кожного дільника

$$\varphi_k(x), \ \deg \varphi_k = 3$$

полінома $\det A(x)$ існує лінійний дільник $Ix - B_k$ з характеристичним поліномом

$$\det(Ix - B_k) = \varphi_k(x)$$

матриці $A(x)$, тобто матриця $A(x)$ має максимальне число $k = 7$, яке обчислено за формулою (6.81), лінійних унітальних дільників.

Зауважимо, що оскільки у цьому випадку лінійні унітальні дільники $Ix - B_i$ матриці $A(x)$ своїми характеристичними поліномами $\varphi_i(x)$ визначені неоднозначно, то для кожного дільника

$$\varphi_i(x), \ \deg \varphi_i = 3$$

полінома $\det A(x)$ існує клас дільників $Ix - B_i$ із характеристичним поліномом

$$\det(x - B_i) = \varphi_i(x).$$

Те, що матриця $A(x)$ діагоналізується за мінімального числа дільників, випливає з теореми 5.2.

Розділ 6
ДІЛЬНИКИ ТА ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

Відомі підходи і розроблені на основі них методи факторизації матричних поліномів можна застосовувати для матричних поліномів у випадку, коли основним є поле комплексних чисел чи алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль. Задача факторизації матричних поліномів над іншими полями розв'язана лише в окремих випадках.

На основі встановленої стандартної форми матричних поліномів щодо їх напівскалярної еквівалентності (п. 1.5) у цьому розділі розроблено метод їх факторизації.

6.1. Регуляризація матричних поліномів

Нехай

$$A(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

— матричний поліном, де A_i – $n \times n$-матриці над полем $\mathbf{F}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Однією із основних задач теорії факторизації матричних поліномів є задача про їх регуляризацію.

Означення 6.1. Матричний поліном (поліноміальна матриця) $A(x)$ регуляризується справа, якщо поліном $A(x)$ правоеквівалентний до регулярного, зокрема, унітального матричного полінома (поліноміальної матриці) $B(x)$, тобто існує така матриця $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, що

$$A(x)V(x) = B_s x^s + B_{s-1}x^{s-1} + \cdots + B_1 x + B_0,$$

де B_s — неособлива, зокрема, одинична матриця.

Відомі декілька способів регуляризації матричних поліномів залежно від їхнього вигляду та основного поля, над яким розглядаються матричні поліноми. Белл [136] вказав умови односторонньої еквівалентності (асоційовності) поліноміальної матриці, яка є у формі Ерміта, до унітальної матриці. П.С.Казімірський [49] дав критерій регуляризації матричного полінома над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. У працях [109] і [111], у термінах рангів матриць, побудованих за коефіцієнтами матричного полінома і коефіцієнтами його характеристичного полінома, наведено умови регуляризації матричного полінома.

Вкажемо досить простий спосіб регуляризації матричних поліномів, які є у стандартній формі.

Нехай матриця $A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$, $\det A(x) \neq 0$, напівскалярно еквівалентна до стандартної матриці $T^A(x)$ вигляду (2.3), тобто

$$T^A(x) = UA(x)V(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \mu_1^A(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t_{21}(x) & \mu_2^A(x) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n-1,1}(x) & t_{n-1,2}(x) & \cdots & \mu_{n-1}^A(x) & 0 \\ t_{n1}(x) & t_{n2}(x) & \cdots & t_{n,n-1}(x) & \mu_n^A(x) \end{Vmatrix},$$

для деяких матриць $U \in GL(n, \mathbf{F})$ і $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$.

Надалі такі трикутні матриці з головною діагоналлю

$$\mathrm{diag}(\mu_1^A(x),\ \mu_2^A(x),\ \ldots,\ \mu_n^A(x))$$

в скороченому вигляді записуватимемо так:

$$T^A(x) = \mathrm{triang}(\mu_1^A(x),\ \mu_2^A(x),\ \ldots,\ \mu_n^A(x)).$$

Очевидно, що поліноміальна матриця $A(x)$ регуляризується тоді і тільки тоді, коли регуляризується її стандартна форма $T^A(x)$.

Нехай тепер

$$T(x) = \mathrm{triang}(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)) \tag{6.1}$$

— трикутна матриця з головною діагоналлю

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$$

вигляду (2.3). Покладемо

$$\deg \varphi_i = m_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Оскільки

$$\varphi_i | \varphi_{i+1}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

то

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant\ \cdots\ \leqslant m_n.$$

Запишемо $T(x)$ у вигляді матричного полінома

$$T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} T_j x^j, \tag{6.2}$$

при цьому покладаємо $m_0 = 0$. Зауважимо, що деякі суми можуть дорівнювати нулю, тобто, якщо для деяких k,
$m_k = m_{k-1}$, то

$$\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} T_j x^j = 0.$$

Тепер не важко бачити, що у кожній матриці

$$T_{m_k+1},\ T_{m_k+2},\ \ldots,\ T_{m_{k+1}},\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

перші k рядки нульові.

Надалі через $T_r^{(n-k)}$ позначатимемо $(n-k) \times n$-матрицю, одержану із матриці T_r, викресленням її k перших рядків.

Нехай

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = sn.$$

Поліноміальній матриці (матричному поліному) $T(x)$ трикутної форми (6.1) з головною діагоналлю $\Phi(x)$, записаного у вигляді (6.2), ставимо у відповідність скалярну, тобто із елементами із поля $\mathbf{F}$, матрицю $M_T(\Phi)$, побудовану за коефіцієнтами матричного полінома $T(x)$ так:

$$M_T(\Phi) = \begin{Vmatrix} G_n \\ G_{n-1} \\ \vdots \\ G_2 \\ G_1 \end{Vmatrix}, \tag{6.3}$$

де

$$G_k = \left\| \begin{array}{ccccc} T^{(n-(k-1))}_{m_k} & T^{(n-(k-1))}_{m_k+1} & \dots & T^{(n-(k-1))}_{m_k+(s-2)} & T^{(n-(k-1))}_{m_k+(s-1)} \\ T^{(n-(k-1))}_{m_k-1} & T^{(n-(k-1))}_{m_k} & \dots & T^{(n-(k-1))}_{m_k+(s-3)} & T^{(n-(k-1))}_{m_k+(s-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+2} & T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+3} & \dots & T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+s} & T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+(s+1)} \\ T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+1} & T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+2} & \dots & T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+(s-1)} & T^{(n-(k-1))}_{m_{k-1}+s} \end{array} \right\|,$$

$k = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. При цьому покладаємо $m_0 = 0$ і при $m_j + i > m_n$, $T^{(n-l)}_{m_j+i} = 0$ — нульова матриця розмірів $(n-l)\times n$. При $m_k = 0$, G_k — порожня матриця, тобто матриця розміру $0 \times n$. Матриця G_k є розмірів

$$(m_k - m_{k-1})(n-(k-1)) \times sn.$$

Тоді матриця M_T є квадратною, порядку sn.

Теорема 6.1. *Нехай*

$$T(x) = \mathrm{triang}(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x))$$

— матричний поліном трикутного вигляду (2.3) і

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = sn.$$

Матричний поліном $T(x)$ регуляризується справа тоді і тільки тоді, коли відповідна йому матриця $M_T(\Phi)$ неособлива.

Доведення. Із коефіцієнтів матричного полінома $T(x)$ складемо матрицю N_T вигляду

$$N_T = \left\| \begin{matrix} T_{m_n} & 0 & \dots & 0 \\ T_{m_n-1} & T_{m_n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{m_n-s} & T_{m_n-(s-1)} & \dots & T_{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_1 & T_2 & \dots & T_s \end{matrix} \right\|.$$

Трикутна матриця $T(x)$ є канонічною формою Ерміта, тому на основі [136] матриця $T(x)$ правоеквівалентна до унітальної матриці тоді і тільки тоді, коли

$$\deg \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = sn, \tag{6.4}$$

$$\deg \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(x) \leq sk \tag{6.5}$$

для всіх $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$ і

$$\operatorname{rang} N_T = sn.$$

Оскільки $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$, то умови (6.4) і (6.5) виконуються. Матрицю $M_T(\Phi)$ одержуємо із матриці N_T викресленням у ній відповідних нульових рядків. Тому

$$\operatorname{rang} M_T(\Phi) = \operatorname{rang} N_T = sn.$$

Лема доведена.

Лема 6.1. *Нехай відповідна матричному поліному $T(x)$ матриця $M_T(\Phi)$ неособлива і*

$$M_T(\Phi)^{-1} = \|M_{ij}\|,\ M_{ij} \in M(n, \boldsymbol{F}[x]), \quad i, j = 1,\ 2,\ \dots,\ s$$

— її обернена матриця, записана в блочному вигляді. Тоді коефіцієнти унітального матричного полінома

$$L(x) = T(x)V(x) = Ix^s + L_{s-1}x^{s-1} + \cdots + L_1x + L_0, \quad (6.6)$$

$V(x) \in GL(n, P[x])$, *до якого* $T(x)$ *правоеквівалентний, обчислюють за формулою*

$$L_k = \sum_{i=0}^{k} T_i V_{k-i}, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1, \quad (6.7)$$

де

$$\left\| \begin{matrix} V_{s-1} \\ V_{s-2} \\ \vdots \\ V_1 \\ V_0 \end{matrix} \right\| = -M_T^{-1} \left\| \begin{matrix} T_{m_n-1}V_s \\ T_{m_n-2}V_s \\ \vdots \\ T_1V_s \\ T_0V_s - I \end{matrix} \right\|. \quad (6.8)$$

Доведення. Нехай у трикутній матриці $T(x)$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 1, \quad 0 \leq p < n.$$

На основі леми 6.1 поліноміальна матриця $T(x)$ регуляризується, тобто існує така матриця $V(x) \in GL(n, P[x])$, що маємо співвідношення (6.6), причому $\deg V \leqslant s$. Це означає, що

$$V(x) = \sum_{i=0}^{s} V_i x^i$$

і матриця V_s має вигляд

$$V_s = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p}, 0, 0, \ldots, 0).$$

Матричне рівняння

$$M_T \left\| \begin{matrix} V_{s-1} \\ V_{s-2} \\ \vdots \\ V_1 \\ V_0 \end{matrix} \right\| = - \left\| \begin{matrix} T_{m_n-1}V_s \\ T_{m_n-2}V_s \\ \vdots \\ T_1V_s \\ T_0V_s - I \end{matrix} \right\| \tag{6.9}$$

відносно невідомих V_i, $i = 0, 1, \ldots, s-1$ має розв'язки вигляду (6.8).

Порівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x в обох частинах рівності (6.6), бачимо, що V_i, $i = 0, 1, \ldots, s-1$ задовольняють рівняння

$$N_T \left\| \begin{matrix} V_{s-1} \\ V_{s-2} \\ \vdots \\ V_1 \\ V_0 \end{matrix} \right\| = - \left\| \begin{matrix} T_{m_n-1}V_s \\ T_{m_n-2}V_s \\ \vdots \\ T_1V_s \\ T_0V_s - I \end{matrix} \right\|,$$

яке еквівалентне рівнянню (6.9).

Тепер формули (6.7) випливають із співвідношень (6.6).

Лема доведена.

Нехай елементарні дільники матриці $A(x)$ попарно взаємно прості. Тоді її стандартна форма відносно напівскалярної еквівалентності має такий вигляд:

$$T(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1(x) & t_2(x) & \cdots & t_{n-1}(x) & t_n(x) \end{matrix} \right\|, \tag{6.10}$$

де $\deg t_n = m$, $\deg t_i < \deg t_n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ і

$$t_i(x) = \sum_{j=0}^{m} t_{ij} x^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причому $t_{im} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad i = n, \\ 0, & \textit{якщо} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$

Далі позначатимемо

$$\mathbf{t}_j = \left\| \, t_{1j} \quad t_{2j} \quad \cdots \quad t_{n-1,j} \quad t_{nj} \, \right\|, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

$\mathbf{0}_n$—нульовий рядок довжини n.

Наслідок 6.1. *Поліноміальна матриця $T(x)$ вигляду (6.10) регуляризується тоді і тільки тоді, коли $\deg t_n = m = sn$ і матриця*

$$M_T(\Phi) = \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{t}_m & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{t}_{m-1} & \mathbf{t}_m & \cdots & \mathbf{0}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{t}_{m-(s-1)} & \mathbf{t}_{m-(s-2)} & \cdots & \mathbf{t}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \cdots & \mathbf{t}_s \end{array} \right\|$$

— неособлива, де $\Phi(x) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, t_n(x))$.

6.2. (Φ, Ψ)-факторизації матричних поліномів

На основі встановленої у п. 2.2 стандартної форми $T^A(x)$ для поліноміальної матриці $A(x)$ відносно напівскалярної еквівалентності пропонуємо метод факторизації матричних поліномів (поліноміальних матриць).

Нехай

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

– матричний поліном, де A_i – $n \times n$-матриці над полем $\mathbf{F}$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Нехай матричний поліном $A(x)$ розкладається на множники

$$A(x) = B(x)C(x), \; B(x), C(x) \in M(n, \mathbf{F}[x]). \tag{6.11}$$

Тоді, згідно з лемою 3.10, факторизації (6.11) матричного полінома $A(x)$ відповідає факторизація його канонічної діагональної форми D^A:

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x),\; \varphi_2(x),\; \ldots,\; \varphi_n(x)) \times$$
$$\times \, \mathrm{diag}(\psi_1(x),\; \psi_2(x),\; \ldots,\; \psi_n(x)), \tag{6.12}$$

де $\Phi(x)$ — d-матриця, тобто $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1,\; 2,\; \ldots,\; n-1$ і канонічна діагональна форма дільника $B(x)$ матричного полінома $A(x)$ дорівнює $\Phi(x)$: $D^B(x) = \Phi(x)$.

Це означає, що матричні поліноми $A(x)$ і $B(x)$ із рівності (6.11) еквівалентні відповідно до матриць $D^A(x)$ і $\Phi(x)$ із співвідношення (6.12). Матричний поліном $C(x)$ із (6.11) може бути еквівалентний до $\Psi(x)$ із (6.12) або ж ні.

Означення 6.2. Факторизацію (6.11) матричного полінома $A(x)$ таку, що $D^B(x) = \Phi(x)$ називаємо відповідною до факторизації (6.12) його канонічної діагональної форми D^A.

Означення 6.3. Якщо у факторизації (6.11) матричного полінома $A(x)$ поліном $B(x)$ еквівалентний до $\Phi(x)$, а поліном $C(x)$ еквівалентний до $\Psi(x)$, то факторизацію (6.11) полінома $A(x)$ називаємо паралельною до факторизації (6.12) його канонічної діагональної форми $D^A(x)$ або (Φ, Ψ)-факторизацією.

Зауважимо, що кожна факторизація матричного полінома $A(x)$ — відповідна деякій факторизації його канонічної діагональної форми $D^A(x)$. Але не для кожної факторизації матричного полінома $A(x)$ існує факторизація його канонічної діагональної форми $D^A(x)$, до якої ця факторизація була б паралельною, тобто не кожна факторизація матричного полінома $A(x)$ є (Φ, Ψ)-факторизацією.

Приклад 6.1. Нехай $\mathbb{R}[x]$ — кільце поліномів з коефіцієнтами із поля дійсних чисел $\mathbb{R}$ і

$$A(x) = \begin{Vmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix}$$

— поліноміальна матриця над $\mathbb{R}[x]$. Поліноміальна матриця $A(x)$ разкладна у добуток лінійних унітальних множників:

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{6.13}$$

де

$$B(x) = \begin{Vmatrix} (x-1) & 0 & 0 \\ t & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{Vmatrix}, \ C(x) = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ -t & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{Vmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ця факторизація поліноміальної матриці $A(x)$ відповідна до такої факторизації її канонічної діагональної форми $D^A(x) = \operatorname{diag}(x, x^2, x^2(x-1))$:

$$D^A(x) = \Phi(x) \cdot \Psi(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{Vmatrix}. \tag{6.14}$$

Якщо $t \neq 0$, поліноміальна матриця $C(x)$ не є еквівалентною до $\Psi(x)$, тобто в цьому випадку факторизація (6.13) матриці $A(x)$ не є паралельною до факторизації (6.14) її канонічної діагональної форми, а при $t = 0$ є такою.

Вкажемо умови, за яких факторизація поліноміальної матриці $A(x)$, відповідна до факторизації її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, є (Φ,Ψ)-факторизацією.

Теорема 6.2. *Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$, $\det A(x) \not\equiv 0$ і матриця $A(x)$ зображені у вигляді добутків (6.12) і (6.11) відповідно. Якщо*

$$\left(\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_j(x)},\ (\psi_i(x), \psi_j(x)\right) = 1 \tag{6.15}$$

для всіх $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j$, то кожна факторизація (6.11) матриці $A(x)$, відповідна до факторизації (6.12) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, тобто така, що $D^B(x) = \Phi(x)$, є (Φ,Ψ)-факторизацією.

Доведення. Нехай матриця $A(x)$ зображена у вигляді добутку (6.11) і ця факторизація відповідна факторизації (6.12) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, тобто така, що

$$D^B(x) = \Phi(x) = \operatorname{diag}(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)).$$

Тоді на основі теореми 2.2 пара матриць $A(x), B(x)$ напівскалярно еквівалентна до пари стандартних матриць $T^A(x), T^B(x)$ вигляду (2.12), тобто існують такі оборотні матриці $U \in GL(n, \mathbf{F})$ і $V_1(x), V_2(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, що

$$T^A(x) = UA(x)V_1(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} \mu_1^A(x) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2^A(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & \mu_n^A(x) \end{array} \right\|, \tag{6.16}$$

$$T^B(x) = UB(x)V_2(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}(x) & \varphi_2(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{Vmatrix}.$$

Тоді із рівності (6.11) одержуємо:

$$UA(x)V_1(x) = UB(x)V_2(x)V_2(x)^{-1}C(x)V_1(x),$$

тобто

$$T^A(x) = T^B(x)C_1(x), \tag{6.17}$$

де матриця $C_1(x)$ є нижньо трикутного вигляду з головною діагоналлю $\Psi(x)$:

$$C_1(x) = V_2(x)^{-1}C(x)V_1(x) = \begin{Vmatrix} \psi_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21}(x) & \psi_2(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}(x) & c_{n2}(x) & \cdots & \psi_n(x) \end{Vmatrix}.$$

Із співвідношення (6.17) одержуємо рівності

$$\sum_{k=1}^{i} b_{ik}(x)c_{kj}(x) = a_{ij}(x), \quad i,j = 1,\ 2,\ \ldots, n,\ i > j,$$

при цьому

$$b_{ii}(x) = \varphi_i(x),\ \ c_{ii}(x) = \psi_i(x),\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Оскільки

$$\mu_j^A(x) \mid a_{ij}(x),\ \varphi_j(x) \mid b_{ij}(x),\ \ i,j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j,$$

то з цих рівнестей за умови (6.15) отримаємо, що

$$(\psi_j(x),\psi_k(x)) \mid c_{ij}(x),\ k=i,i+1,\dots,n,\ i,j=1,\dots,n,\ i>j.$$

Тоді на основі леми 3.3, матриця $C_1(x)$ еквівалента до діагональної матриці $\Psi(x)$. Оскільки матриця $C(x)$ із (6.11) еквівалента до матриці $C_1(x)$, то $C(x)$ еквівалентна до $\Psi(x)$. Теорема доведена.

Наслідок 6.2. *Нехай матриця $A(x)\in M(n,\boldsymbol{F}[x])$ є неособливою і виконується хоча б одна із умов:*

1) $\det A(x)=d_1^{q_1}(x)d_2^{q_2}(x)\ \cdots\ d_p^{q_p}(x)$, *де* $d_i^{q_i}(x)$ — *нерозкладні поліноми і* $q_i\leqslant 2,\ \ i=1,\ 2,\ \dots,\ p;$

2) *елементарні дільники* $\big(\varepsilon_i(x)\big)^{s_i}$ *матриці* $A(x)$, *що відповідають* $\varepsilon_i(x)$, *яких є більше, ніж один, є простими, тобто* $i=1;$

3) *матриця* $A(x)$ *є простої структури, тобто її елементарні дільники лінійні.*

Тоді кожна факторизація матриці $A(x)$ є (Φ,Ψ)-факторизацією.

Нехай далі $T^A(x)$ — стандартна форма матриці $A(x)$ відносно напівскалярної еквівалентності, тобто

$$T^A(x)=UA(x)V(x)=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\mu_1^A(x) & 0 & \cdots & 0\\ t_{21}(x)\mu_1^A(x) & \mu_2^A(x) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_{n-1,1}(x)\mu_1^A(x) & t_{n-1,2}(x)\mu_2^A(x) & \cdots & 0\\ t_{n1}(x)\mu_1^A(x) & t_{n2}(x)\mu_2^A(x) & \cdots & \mu_n^A(x)\end{matrix}\right\|, \qquad (6.18)$$

де $U \in GL(n, \mathbf{F}), V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$ і

$$\deg t_{ij} < \deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A, \tag{6.19}$$

якщо $\mu_i^A \neq \mu_j^A$, і

$$t_{ij}(x) \equiv 0, \tag{6.20}$$

якщо $\mu_i^A = \mu_j^A$ $i, j = 1, 2, \ldots, n, i > j$.

Очевидно, що для поліноміальної матриці $A(x)$ існують унітальні дільники і факторизації з унітальними множниками тоді і тільки тоді, коли такі дільники і факторизації існують для її стандартної форми $T^A(x)$. Унітальні дільники матриць $A(x)$ і $T^A(x)$ — подібні з перетворювальною матрицею U. Тому достатньо розглянути факторизації стандартної форми $T^A(x)$ матриці $A(x)$.

Нехай канонічна діагональна форма

$$D^A(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x))$$

матриці $A(x)$ зображена у вигляді добутку

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \times$$
$$\times \operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)), \tag{6.21}$$

де $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, і

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = sn.$$

Нагадаємо, що якщо факторизація $A(x) = B(x)C(x)$ матриці $A(x)$ така, що матриці $B(x)$ і $C(x)$ еквівалентні відповідно до матриць $\Phi(x)$ і $\Psi(x)$ із факторизації (6.21) канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриці $A(x)$, то таку факторизацію називаємо (Φ, Ψ)-факторизацією або паралельною факторизацією матриці $A(x)$ до факторизації (6.21) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$.

Зважаючи на вигляд (6.18) матриці $T^A(x)$, можемо її зобразити так:

$$T^A(x) = W(x)D^A(x), \tag{6.22}$$

де $W(x)$ — нижня унітрикутна матриця із $GL(n,[x])$. Запишемо нижню унітрикутну матрицю:

$$K(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}k_{n1} & \frac{\mu_{n-1}}{\mu_2}k_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{\mu_n}{\mu_1}k_{n1} & \frac{\mu_n}{\mu_2}k_{n-1,2} & \dots & \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}k_{n,n-1} & 1 \end{Vmatrix}, \tag{6.23}$$

де

$$k_{ij} = k_{ij}^{(r_{ij})}x^{r_{ij}} + k_{ij}^{(r_{ij}-1)}x^{r_{ij}-1} + \ldots + k_{ij}^{(0)},$$

$$r_{ij} = \deg\varphi_i - \deg\varphi_j - 1, \text{ якщо } \psi_j \not|\, \psi_i,\ i > j \tag{6.24}$$

і

$$k_{ij} \equiv 0, \text{ якщо } \psi_j | \psi_i, \tag{6.25}$$

де $k_{ij}^{(r_{ij})}$ — незалежні змінні, тобто $K(x)$ — матриця над кільцем $\mathbf{F}(k)[x]$, $\mathbf{F}(k)$ — розширення поля $\mathbf{F}$, одержане приєднанням змінних

$$k_{ij}^{(r_{ij})},\quad i,j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j,$$

до поля $\mathbf{F}$.

Тепер розглянемо добуток матриць $W(x)K(x)\Phi(x)$. Правими елементарними перетвореннями зведемо цю матрицю до вигляду (6.18) з умовами (6.19) і (6.20), тобто для деякої матриці $S(x) \in GL(n, \mathbf{F}(k)[x])$ матимемо:

$$T(x) = W(x)K(x)\Phi(x)S(x) = T_0x^m + T_1x^{m-1} + \cdots + T_m, \quad (6.26)$$

$T_i \in M(n, \mathbf{F}(k))$, $i = 0, 1, \ldots, s$ — трикутна матриця з головною діагоналлю $\Phi(x)$, і елементи під головною діагоналлю задовольняють умови (6.19) і (6.20) .

Через $M_T(\Phi)$ позначимо матрицю вигляду (6.3), яка відповідає матричному поліному $T(x)$ трикутного вигляду з головною діагоналлю $\Phi(x)$.

Теорема 6.3. *Нехай канонічна діагональна форма* $D^A(x)$ *матриці* $A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$, $\det A(x) \not\equiv 0$ *зображена у вигляді добутку (6.21). Тоді матриця* $A(x)$ *зображена у вигляді добутку*

$$A(x) = B(x)C(x), \quad (6.27)$$

де $B(x)$ *— унітальна поліноміальна матриця степеня* s, *і факторизація (6.27) матриці* $A(x)$ *паралельна до факторизації (6.21) її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли існують такі*

$$k_{ij}^{(r_{ij})} \in \boldsymbol{F}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \ i > j,$$

що матриця $M_T(\Phi)$, *яка відповідає матричному поліному* $T(x)$ *вигляду (6.26), є неособливою.*

Доведення. Необхідність. На основі теореми 2.2 пара матриць $(A(x), B(x))$ зі співвідношення (6.27) напівскалярно еквівалентна до пари трикутних матриць $(T_1^A(x), T_1^B(x))$ вигляду (2.3), тобто існують такі матриці

$$U_1 \in GL(n, \mathbf{F}), V_1(x), V_2(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x]),$$

що

$$U_1 A(x) V_1(x) = T_1^A(x), \quad U_1 B(x) V_2(x) = T_1^B(x). \tag{6.28}$$

Тоді із рівності (6.27) одержуємо:

$$U_1 A(x) V_1(x) = U_1 B(x) V_2(x) V_2^{-1}(x) C(x) V_1(x),$$

тобто

$$T_1^A(x) = T_1^B(x) C_1(x),$$

де

$$C_1(x) = V_2^{-1}(x) C(x) V_1(x)$$

— нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Ψ. Зважаючи на вигляд матриць $T_1^A(x)$ і $T_1^B(x)$, останню рівність можемо записати так:

$$W_1(x) D^A(x) = W_2(x) \Phi(x) C_1(x), \tag{6.29}$$

де $W_1(x)$ і $W_2(x)$ — нижні унітрикутні матриці. Оскільки матриця $C_1(x)$ трикутна з головною діагоналлю $\Psi(x)$ і еквівалентна до діагональної матриці $\Psi(x)$, то на основі леми 3.4 існують такі нижні унітрикутні матриці

$$G(x) = \|g_{ij}(x)\|_1^n, \; F(x) = \|f_{ij}(x)\|_1^n,$$

що

$$F(x) C_1(x) G(x) = \Psi(x).$$

Тоді із рівності (6.29) матимемо:

$$W_1(x) D^A(x) G(x) = W_2(x) \Phi(x) F^{-1}(x) F(x) C_1(x) G(x). \tag{6.30}$$

Оскільки

$$D^A(x) G(x) = G_1(x) D^A(x),$$

де матриця $G_1(x)$ має вигляд

$$G_1(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2}{\mu_1} g_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\mu_{n-1}}{\mu_1} g_{n-1,1} & \dfrac{\mu_{n-1}}{\mu_2} g_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ \dfrac{\mu_n}{\mu_1} g_{n1} & \dfrac{\mu_n}{\mu_2} g_{n2} & \dots & \dfrac{\mu_n}{\mu_{n-1}} g_{n,n-1} & 1 \end{array} \right\|,$$

то з попередньої рівності одержимо:

$$W_1(x) G_1(x) D^A(x) = W_2(x) \Phi(x) F^{-1}(x) \Psi(x). \tag{6.31}$$

Скорочуючи останню рівність на $\Psi(x)$, матимемо:

$$W_1(x) G_1(x) \Phi(x) = W_2(x) \Phi(x) F^{-1}(x). \tag{6.32}$$

Оскільки матриця $B(x)$ із співвідношення (6.27) є унітальною, то враховуючи рівності (6.31), (6.30), (6.29) і (6.28), одержуємо, що

$$(W_2(x)\Phi(x)F^{-1}(x))(F(x)V_2^{-1}(x)U^{-1} = B_1(x)$$

— унітальна матриця, подібна до матриці $B(x)$. Тому і матриця $W_1(x)G_1(x)\Phi(x)$ зі співвідношення (6.32) правоеквівалентна до унітальної матриці. Матриці $W(x)$ із (6.22) і $W_1(x)$ із (6.29) є лівими перетворювальними матрицями матриці $T^A(x)$ до її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. Тому вони зв'язані співвідношенням $W_1(x) = W(x)H(x)$, де

$$H(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu_{n-1}}{\mu_1} h_{n-1,1} & \frac{\mu_{n-1}}{\mu_2} h_{n-1,2} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ \frac{\mu_n}{\mu_1} h_{n1} & \frac{\mu_n}{\mu_2} h_{n2} & \dots & \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $W_1(x)$ і $W(x)$ — нижні унітрикутні матриці, то такою є і матриця $H(x)$, тобто

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad i < j, \\ 1, & \textit{якщо} \quad i = j. \end{cases}$$

Тому матриця
$$H(x)G_1(x) = D(x)$$
є вигляду (6.23). За допомогою правих елементарних перетворень над стовпцями матриці $D(x)\Phi(x)$ одержимо:

$$D(x)\Phi(x)Q(x) = D_1(x)\Phi(x),$$

де $Q(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, і в матриці $D_1(x)$ елементи $d_{ij}(x)$ дорівнюють нулю, якщо $\psi_j | \psi_i$ і

$$\deg d_{ij} = \deg \varphi_i - \deg \varphi_j - 1,$$

якщо $\psi_j \nmid \psi_i$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i > j$. Отже, матриця $D_1(x)$ є вигляду (6.23) з умовами (6.24) і (6.25). Таким чином, матриця
$$T(x) = W(x)K(x)\Phi(x)S(x)$$

і так само, як і матриця

$$W(x)K(x)\Phi(x),$$

при

$$k_{ij}(x) = d_{ij}(x), \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j$$

регуляризується. Тому на основі леми 6.1 матриця $M_T(\Phi)$ неособлива.

Необхідність теореми доведена.

Достатність. Із того, що матриця $M_T(\Phi)$, яка відповідає матричному поліному $T(x)$ вигляду (6.26), є неособливою, випливає, що матричний поліном $T(x)$ регуляризується справа, тобто

$$L(x) = T(x)V(x) = Ix^s + L_1x^{s-1} + \cdots + L_{s-1}x + L_s$$

для деякої матриці $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$. Коефіцієнти L_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ полінома $L(x)$ знаходять за формулами (6.7). Унітальна матриця $L(x)$ є лівим дільником матриці $T^A(x)$ вигляду (6.18). Тоді унітальна матриця

$$B(x) = U^{-1}L(x)U$$

є лівим дільником матриці $A(x)$, тобто

$$A(x) = B(x)C(x).$$

Матриця $B(x)$ залежить від змінних

$$k_{ij}^{(r_{ij})}, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j.$$

Тому, надаючи їм допустимих значень із поля $\mathbf{F}$ (за яких матриця $M_T(\Phi)$ є неособливою), одержимо множину унітальних дільників $B_i(x)$ з канонічною діагональною формою

$D^{B_i}(x) = \Phi(x)$ і паралельних факторизацій матриці $A(x)$. Теорема доведена.

У факторизації (6.21) канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриці $A(x)$ матриця $\Phi(x)$ є d-матрицею. Припустимо, що і матриця $\Psi(x)$ є такою. Із будови матриці $K(x)$ вигляду (6.23) видно, що якщо $\psi_i | \psi_j$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то $K(x) = I$ — одинична матриця. Тоді із теореми 6.3 одержуємо, як наслідок, критерій розкладності поліноміальної матриці на множники, добуток їх канонічних діагональних форм дорівнює канонічній діагональній формі матриці.

Такі факторизації матричних поліномів над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль описані у працях [53], [49].

Наслідок 6.3. *Нехай канонічна діагональна форма* $D^A(x)$ *матриці* $A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$ *зображена у вигляді добутку (6.21), де* Ψ *є* d*-матрицею, тобто* $\psi_i | \psi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *і*

$$T(x) = W(x)\Phi(x)S(x) = \sum_{i=0}^{m} T_i x^{m-i}$$

— матриця трикутного вигляду (6.18) з умовами (6.19) і (6.20), де $U(x)$ *– будь-яка матриця, що задовольняє співвідношення (6.22) і* $S(x) \in GL(n, \boldsymbol{F}[x])$.

Тоді поліноміальна матриця $A(x)$ *розкладна на множники*

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{6.33}$$

де $B(x)$ *— унітальна матриця і*

$$D^B(x) = \Phi(x), \ D^C(x) = \Psi(x)$$

в тому і тільки тому випадку, коли матриця $M_T(\Phi)$ *неособлива, причому факторизація (6.33) матриці* $A(x)$*, паралельна до факторизації (6.21) її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$*, є єдиною.*

Теорема 6.4. *Нехай* d*-матриця*

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)), \quad \deg\det\Phi = sn$$

є дільником канонічної діагональної форми $D^A(x)$ *матриці* $A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$, $\det A(x) \not\equiv 0$, *тобто*

$$D^A(x) = \Phi(x)\operatorname{diag}(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)) \tag{6.34}$$

і

$$\Big(\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_j(x)},\ (\psi_i(x), \psi_j(x)\Big) = 1, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j. \tag{6.35}$$

Тоді існує лівий унітальний дільник $B(x)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x)$ *матриці* $A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли матриця* $M_T(\Phi)$ *вигляду (6.26), яка відповідає матричному поліному* $T(x)$, *є неособливою за деяких значень змінних* $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ i > j$.

Доведення. На основі теореми 6.2 факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

матриці $A(x)$ з канонічною діагональною формою $D^B(x) = \Phi(x)$ множника $B(x)$, а виконання умови (6.35), є паралельною до факторизації (6.34) канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриці $A(x)$. Далі доведення випливає із теореми 6.3.

Наслідок 6.4. *Нехай матриця* $A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$ *є неособливою і виконується хоча б одна із умов:*

1) $\det A(x) = d_1^{q_1}(x) d_2^{q_2}(x) \cdots d_p^{q_p}(x)$, *де* $d_i^{q_i}(x)$ — *нерозкладні поліноми і* $q_i \leqslant 2$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$;

2) *елементарні дільники* $\left(\varepsilon_i(x)\right)^{s_i}$ *матриці* $A(x)$, *що відповідають* $\varepsilon_i(x)$, *яких більш, ніж один, є простими, тобто* $i = 1$;

3) *матриця* $A(x)$ *є простої структури, тобто її елементарні дільники лінійні.*

Тоді існує лівий унітальний дільник $B(x)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x)$ *матриці* $A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли матриця* $M_T(\Phi)$, *яка відповідає поліному* $T(x)$ *вигляду (6.26), є неособливою за деяких значень змінних*

$$k_{ij}^{(r_{ij})}, \quad i, j = 1, \ 2 \ \ldots, \ m, \quad i > j.$$

Дійсно, на основі наслідку 6.2, за цих умов кожна факторизація матриці $A(x)$ є паралельною до деякої факторизації канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриці $A(x)$, тобто задовольняються умови теореми 6.3.

Розглянемо тепер матричне поліноміальне рівняння

$$Y^m A_m + Y^{m-1} A_{m-1} + \ \cdots \ + Y A_1 + A_0 = 0, \tag{6.36}$$

де $A_i \in M(n, P)$, $i = 0, \ 1, \ \ldots, \ m$. Як відомо, матриця $Y = B$ є розв'язком цього рівняння, якщо її характеристична матриця $B(x) = Ix - B$ є лівим дільником характеристичної матриці

$$A(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ \cdots \ + A_1 x + A_0,$$

$A_i \in M(n, \mathbf{F})$, $i = 0, \ 1, \ \ldots, \ m$ цього рівняння. Тоді із теореми (6.3), як наслідок, одержуємо спосіб знаходження розв'язків таких матричних рівнянь.

Наслідок 6.5. *Нехай* d-*матриця*

$$\Phi(x), \ \deg\det\Phi = n$$

є дільником канонічної діагональної форми $D^A(x)$ *характеристичної матриці* $A(x)$, *матричного рівняння (6.36), тобто*

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x). \tag{6.37}$$

Матричне рівняння (6.36) має розв'язок $Y = B$ *з канонічною діагональною формою* $\Phi(x)$ *його характеристичної матриці*

$$B(x) = Ex - B$$

і факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

матриці $A(x)$ *є паралельною до факторизації (6.37) її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли матриця* $M_T(\Phi)$, *яка відповідає поліному* $T(x)$ *вигляду (6.26), є неособливою за деяких значень змінних*

$$k_{ij}^{(r_{ij})}, \quad i,j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad i > j$$

і

$$B = U^{-1}M_T(\Phi)^{-1}U,$$

де матриця U *задовольняє співвідношення (6.18).*

Приклад 6.2. Нехай $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ — поле дійсних чисел,

$$A(x) = \begin{Vmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{Vmatrix}$$

— 2×2-матриця над полем $\mathbb{R}$.

Використовуючи запропонований у цьому підрозділі метод факторизації поліноміальних матриць, опишемо (Φ, Ψ)-факторизації матриці $A(x)$ і її унітальні дільники $B(x)$ із канонічною діагональною формою $D^B(x) = \Phi(x)$.

Очевидно, що $D^A(x)=\operatorname{diag}(x^2,\ x^2)$. Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x)$ розкладна на множники

$$D^A(x)=\Phi(x)\Psi(x)=\operatorname{diag}(1,\ x^2)\operatorname{diag}(x^2,\ 1). \tag{6.38}$$

На основі теореми 6.2 кожна факторизація

$$A(x)=B(x)C(x)$$

матриці $A(x)$ відповідна до факторизації (6.38) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, тобто така, що $D^B(x)=\Phi(x)$ є (Φ,Ψ)-факторизацією, тобто матриця $C(x)$ еквівалентна до $\Psi(x)$.

Матриця $A(x)$ є у стандартній формі вигляду (6.18). Очевидно, що у співвідношенні (6.22) $W(x)=I$ — одинична матриця. Запишемо матрицю $K(x)$ вигляду (6.23):

$$K(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}k_{21}(x) & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ k_1x+k_0 & 1 \end{Vmatrix},$$

де $\mu_2(x)=\mu_1(x)=x^2$ — інваріантні множники матриці $A(x)$ і $k_1,\ k_0$ — незалежні змінні.

Матриця $T(x)$ вигляду (6.26) є:

$$T(x)=K(x)\Phi(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ k_1x+k_0 & x^2 \end{Vmatrix},$$

або як матричний поліном:

$$T(x)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}x^2+\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{Vmatrix}x+\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ k_0 & 0 \end{Vmatrix}=T_2x^2+T_1x+T_0.$$

Матриця $M_T(\Phi)$, відповідна матричному поліному $T(x)$ є така:

$$M_T(\Phi)=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

На основі теореми 6.1 матричний поліном $T(x)$ регуляризується справа тоді ітільки тоді, коли матриця $M_T(\Phi)$ неособлива, тобто $k_1 \neq 0$. Тоді існує така матриця $V(x) = V_1x + V_0$, де $V_1 = \operatorname{diag}(1,\ 0)$, що

$$L(x) = T(x)V(x) = Ix + L_0$$

— унітальний матричний поліном. Зі співвідношень (6.6)—(6.10) маємо, що

$$L_0 = \begin{Vmatrix} -\dfrac{k_0}{k_1} & \dfrac{1}{k_1} \\ -\dfrac{k_0^2}{k_1} & \dfrac{k_0}{k_1} \end{Vmatrix},$$

де $k_0,\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_1 \neq 0.$

Отже

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{6.39}$$

де

$$B(x) = \begin{Vmatrix} x - \dfrac{k_0}{k_1} & \dfrac{1}{k_1} \\ -\dfrac{k_0^2}{k_1} & x + \dfrac{k_0}{k_1} \end{Vmatrix},\ C(x) = \begin{Vmatrix} x + \dfrac{k_0}{k_1} & -\dfrac{1}{k_1} \\ \dfrac{k_0^2}{k_1} & x - \dfrac{k_0}{k_1} \end{Vmatrix}, \tag{6.40}$$

$k_0,\ k_1 \in \mathbb{R},\ k_1 \neq 0.$

6.3. Опис (Φ,Ψ)-факторизацій матричних поліномів[1]

У попередньому підрозділі наведено метод побудови унітальних дільників із заданою канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ та (Φ,Ψ)-факторизацій матричних поліномів. За допомогою цього методу у прикладі 6.2 побудовані (Φ,Ψ)-факторизації (6.39) та унітальні дільники (6.40) поліноміальної матриці $A(x)$.

Однак матриця $A(x)$ із цього прикладу розкладна на множники

$$A(x) = B_0(x)C_0(x),$$

де

$$B_0(x) = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ t & x \end{Vmatrix}, \; C_0(x) = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ -t & x \end{Vmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \; t \neq 0. \qquad (6.41)$$

Дільники $B_0(x)$ та $C_0(x)$ матриці $A(x)$ не обчислюються із формул (6.40), тобто цим методом не знаходяться всі дільники із заданою канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ та (Φ,Ψ)-факторизації поліноміальних матриць.

Також методом П.С.Казімірського, викладеного у підрозділі 1.4, для поліноміальної матриці $A(x)$ із прикладу 6.2 над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ побудовані факторизації паралельні до факторизації (6.38) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ і дільники із канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ є виглядів (6.39) та (6.40). Отже і цим методом не описуються всі (Φ,Ψ)-факторизації та унітальні дільники матричних поліномів.

[1] Результати цього підрозділу отримано з Н.С.Джалюк.

У цьому підрозділі наводимо формули для побудови всіх унітальних дільників із заданою канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ та (Φ, Ψ)-факторизацій матричних поліномів.

Нехай $A(x) \in M(m, n, \mathbf{F}[x])$, де $m \le n$, $\operatorname{rang} A(x) = m$, і нехай її канонічна діагональна форма

$$D^A(x) = P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}\,(\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)), \qquad (6.42)$$

де $P(x) \in GL(m, \mathbf{F}[x]), Q(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, зображена у вигляді добутку

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) =$$

$$= \operatorname{diag}\,(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))\ \operatorname{diag}\,(\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)), \qquad (6.43)$$

де матриці $\Phi(x)$ і $\Psi(x)$ мають відповідно розміри $m \times m$ та $m \times n$ і $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$,

$$\sum_{i=1}^{m} \deg \varphi_i = sm.$$

Нехай $T^A(x)$ – стандартна форма матриці $A(x)$ вигляду (2.3), тобто

$$T^A(x) = UA(x)V(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} \mu_1(x) & 0 & \cdots & 0 & \\ t_{21}(x)\mu_1(x) & \mu_2(x) & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{m1}(x)\mu_1(x) & t_{m2}(x)\mu_2(x) & \cdots & \mu_m(x) & \end{array} \right\|, \qquad (6.44)$$

де $U \in GL\,(m, \mathbf{F})$, $V\,(x) \in GL\,(n, \mathbf{F}[x])$,

$$\deg t_{ij} < \deg \mu_i - \deg \mu_j, \quad \text{якщо} \quad \deg \mu_i - \deg \mu_j > 0$$

і

$$t_{ij}(x) \equiv 0, \quad \text{якщо} \quad \deg \mu_i - \deg \mu_j = 0,\ i, j = 1, 2, \dots, m,\ i > j.$$

Матрицю $T^A(x)$ вигляду (6.44) можемо зобразити так:

$$T^A(x) = W(x)D^A(x), \tag{6.45}$$

де $W(x) \in GL(m, \mathbf{F}[x])$ – нижня унітрикутна матриця.

Побудуємо нижню унітрикутну матрицю $K(x)$ вигляду (6.23), тобто

$$K(x) = \| \ l_{ij}(x) \ \|_1^m ,$$

де

$$l_{ij}(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{якщо } i < j, \\ 1, & \text{якщо } \ i = j \end{cases}$$

і

$$l_{ij}(x) = \frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)} k_{ij}(x), \quad \text{якщо} \ \ i > j,$$

де

$$k_{ij}(x) = k_{ij}^{(r_{ij})} x^{r_{ij}} + k_{ij}^{(r_{ij}-1)} x^{r_{ij}-1} + \ldots + k_{ij}^{(0)},$$

$$r_{ij} = \deg \varphi_i - \deg \varphi_j - 1,$$

якщо $\psi_j \nmid \psi_i, \ i > j,$ і $k_{ij}(x) \equiv 0,$ якщо $\psi_j | \psi_i,$ де $k_{ij}^{(r_{ij})}$ — незалежні змінні, $i, j = 1, \ 2, \ \ldots, \ m, \ i > j.$

Лема 6.2. *Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x)$ зображена у вигляді добутку (6.43). Тоді кожний лівий унітальний дільник $B(x)$ степеня s матриці $A(x)$, тобто*

$$A(x) = B(x)C(x), \ B(x) = Ix^s + B_1 x^{s-1} + \cdots + B_s, \tag{6.46}$$

де $B_i \in M(m, \boldsymbol{F}), \ i = 1, \ldots, s, \ C(x) \in M(m, n, \boldsymbol{F}[x])$, із канонічною діагональною формою $D^B(x) = \Phi(x)$ такий, що факторизація (6.46) матриці $A(x)$ паралельна до факторизації

(6.43) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, *зображається у вигляді*

$$B(x) = U^{-1}W(x)\widetilde{K}(x)\Phi(x)S(x), \tag{6.47}$$

де U *та* $W(x)$ *— матриці, що задовольняють співвідношення (6.44) та (6.45) відповідно,* $\widetilde{K}(x)$ *одержують із* $K(x)$ *за деяких значень параметрів* $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i > j$, $S(x) \in GL(m, \boldsymbol{F}[x])$.

Доведення. За теоремою 2.2 для пари матриць $A(x)$ та $B(x)$ існують такі верхня унітрикутна матриця U_1 над полем $\mathbf{F}$ та оборотні матриці $V_1(x)$ та $V_2(x)$ над кільцем поліномів $\mathbf{F}[x]$, що справедливі рівності

$$U_1A(x)V_1(x) = T_1^A(x), \quad U_1B(x)V_2(x) = T^B(x), \tag{6.48}$$

де $T_1^A(x)$ та $T^B(x)$ – стандартні форми із головними діагоналями $D^A(x)$ та $\Phi(x)$ матриць $A(x)$ та $B(x)$, відповідно. Тоді із (6.46) маємо:

$$T_1^A(x) = T^B(x)\widetilde{C}(x), \tag{6.49}$$

де $\widetilde{C}(x) = V_2(x)^{-1}C(x)V_1(x)$.

Запишемо співвідношення (6.49) у такому вигляді:

$$W_1(x)D^A(x) = W_2(x)\Phi(x)\widetilde{C}(x), \tag{6.50}$$

де $W_1(x)$ і $W_2(x)$ — нижні унітрикутні матриці. Матриця $\widetilde{C}(x)$ трикутна і еквівалентна до діагональної матриці $\Psi(x)$. Тому на основі леми 3.4 для матриці $\widetilde{C}(x)$ існують такі нижні унітрикутні матриці $G(x)$ та $F(x)$, що

$$F(x)\widetilde{C}(x)G(x) = \Psi(x).$$

Домножимо рівність (6.50) на матрицю $G(x)$ справа, тобто

$$W_1(x)D^A(x)G(x) = W_2(x)\Phi(x)F^{-1}(x)F(x)\widetilde{C}(x)G(x).$$

Звідси маємо:

$$W_1(x)\widetilde{G}(x)D^A(x) = W_2(x)\Phi(x)F^{-1}(x)\Psi(x), \tag{6.51}$$

де матриця $\widetilde{G}(x)$ — нижня унітрикутна, елементи під головною діагоналлю якої мають вигляд

$$\widetilde{g}_{ij} = \frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)}g_{ij}(x),\ i,j = 1,2,\ldots,m,\ i > j.$$

Співвідношення (6.51) скоротимо на $\Psi(x)$ і отримаємо:

$$W_1(x)\widetilde{G}(x)\Phi(x) = W_2(x)\Phi(x)F^{-1}(x).$$

Якщо в матриці $\widetilde{G}(x)$ многочлени $g_{ij}(x)$ не таких степенів як многочлени $k_{ij}(x)$ в матриці $K(x)$ вигляду (6.23), то цього можна досягнути за допомогою елементарних операцій над стовпцями матриці $\widetilde{G}(x)\Phi(x)$.

Оскільки матриця $W_2(x)\Phi(x)F^{-1}(x)$ правоеквівалентна до унітальної матриці

$$\widetilde{B}(x) = U_1B(x)U_1^{-1},$$

то матриця $W_1(x)\widetilde{K}(x)\Phi(x)$ при

$$k_{ij}^{(r_{ij})} = g_{ij}^{(r_{ij})},\ \ i,j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ i > j, \tag{6.52}$$

також правоеквівалентна до $\widetilde{B}(x)$. Отже, матриця $B(x)$ має вигляд

$$B(x) = U_1^{-1}W_1(x)\widetilde{K}(x)\Phi(x)S_1(x),$$

де матриці U_1 та $W_1(x)$ задовольняють співвідношення (6.48) та (6.50), відповідно, $\widetilde{K}(x)$ одержують із $K(x)$ за значень (6.52) параметрів $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i,j = 1,2,\ldots,m,\ i > j,\ S_1(x) \in GL(m,\mathbf{F}[x])$.

Лема доведена.

Позначимо через $\{U\}_A$ множину всіх верхніх унітрикутних матриць U, які задовольняють співвідношення (6.44), а через $\{W(x)\}$ — множину всіх нижніх унітрикутних матриць $W(x)$, які задовольняють рівність (6.45).

Враховуючи лему 6.2, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 6.6. *Нехай*

$$\{U_t^{-1} W_t(x) K_t(x) \Phi(x) S_t(x) U_t\} \tag{6.53}$$

— множина матриць, де U_t *та* $W_t(x)$ *— всі матриці із множин* $\{U\}_A$ *та* $\{W(x)\}$*, відповідно;* $K_t(x)$ *одержують із* $K(x)$ *за всіх значень параметрів*

$$k_{ij}^{(r_{ij})}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \; i > j,$$

із поля $\boldsymbol{F}$; *матриці* $S_t(x) \in GL(m, \boldsymbol{F}[x])$ *такі, що*

$$W_t(x) K_t(x) \Phi(x) S_t(x) = L_t(x)$$

— унітальні поліноміальні матриці. Тоді множина (6.53) є множиною усіх лівих унітальних дільників $B(x)$ *степеня* s *матриці* $A(x)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x)$*, таких, що відповідні їм факторизації (6.46) матриці* $A(x)$ *є паралельними до факторизації (6.43) її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$.

Нехай виконується співвідношення (6.42) і

$$D^A(x) = P_1(x) A(x) Q_1(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \ldots, \mu_m(x)) \tag{6.54}$$

для деяких матриць $P_1(x) \in GL(m, \mathbf{F}[x])$, $Q_1(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$. Відомо [31], що матриця $P(x)$ із рівності (6.42) та матриця $P_1(x)$ із (6.54) зв'язані співвідношенням

$$P(x) = H(x) P_1(x), \tag{6.55}$$

де

$$H(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} h_{11}(x) & h_{12}(x) & \dots & h_{1m}(x) \\ \dfrac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} h_{21}(x) & h_{22}(x) & \dots & h_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\mu_m(x)}{\mu_1(x)} h_{m1}(x) & \dfrac{\mu_m(x)}{\mu_2(x)} h_{m2}(x) & \dots & h_{mm}(x) \end{array} \right\|. \qquad (6.56)$$

У множині лівих перетворювальних матриць матриці $A(x)$ до її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ існує (див. лему 2.5) матриця $\widetilde{P}(x)$ степеня

$$\deg \widetilde{P}(x) \leqslant \deg \mu_m(x) - \deg \mu_1(x). \qquad (6.57)$$

Якщо матриці $\widetilde{P}(x)$ та $\widetilde{P}_1(x)$ є степенів визначених співвідношенням (6.57), то із рівності (6.55) маємо:

$$\widetilde{P}(x) = \widetilde{H}(x)\widetilde{P}_1(x), \qquad (6.58)$$

де

$$\deg \widetilde{H}(x) = q \leqslant m(\deg \mu_m(x) - \deg \mu_1(x)).$$

Отже, матриця $\widetilde{H}(x)$ має вигляд (6.56), де замість $h_{uv}(x)$ маємо поліноми $\widetilde{h}_{uv}(x)$ степенів

$$\deg \widetilde{h}_{uv}(x) = t_{uv} =$$

$$= \begin{cases} q, & \text{якщо } u \le v, \\ q - \deg \mu_u(x) + \deg \mu_v(x) & \text{— в іншому випадку,} \end{cases}$$

$u, v = 1, 2, \dots, m.$

Тому

$$\widetilde{h}_{uv}(x) = \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})} x^{t_{uv}} + \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv}-1)} x^{t_{uv}-1} + \cdots + \widetilde{h}_{uv}^{(0)},$$

де $\widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})}$ — незалежні змінні, тобто $\widetilde{H}(x)$ — матриця над кільцем $\mathbf{F}(\widetilde{h})[x]$, $\mathbf{F}(\widetilde{h})$ — розширення поля $\mathbf{F}$, отримане приєднанням змінних $\widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})}$, $u, v = 1, 2, \ldots, m$, до поля $\mathbf{F}$.

Запишемо далі матрицю

$$T(x) = W(x)\widetilde{H}(x)K(x)\Phi(x), \tag{6.59}$$

де $W(x)$ — із співвідношення (6.45), $\widetilde{H}(x)$ — із (6.58), матриця $K(x)$ вигляду (6.23).

Теорема 6.5. *Нехай канонічну діагональну форму $D^A(x)$ матриці $A(x)$ зображено у вигляді (6.43). Матриця $A(x)$ розкладна на множники вигляду*

$$A(x) = B(x)C(x) \tag{6.60}$$

з унітальною матрицею $B(x)$ степеня s, причому $D^B(x) = \Phi(x)$, і факторизація (6.60) матриці $A(x)$ паралельна до факторизації (6.43) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ тоді і тільки тоді, коли існують такі значення параметрів

$$k_{ij}^{(r_{ij})},\ \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})},\ i, j, u, v = 1, \ldots, m,\ i > j,$$

з поля $\boldsymbol{F}$ у матрицях $K(x)$ та $\widetilde{H}(x)$ відповідно, що матриця $T(x)$ регуляризується справа, тобто відповідна матричному поліному $T(x)$ матриця $M_T(\Phi)$ вигляду (6.3) є неособливою.

Доведення. Необхідність. Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація вигляду (6.60) з унітальною матрицею $B(x)$

степеня s, паралельна до факторизації (6.43) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. За лемою 6.2 дільник

$$B(x) = U_1^{-1} W_1(x) \widetilde{K}(x) \Phi(x) S_1(x), \tag{6.61}$$

де U_1 та $W_1(x)$ задовольняють співвідношення

$$U_1 A(x) V_1(x) = T_1^A(x) = W_1(x) D^A(x), \tag{6.62}$$

а $\widetilde{K}(x)$ одержують із $K(x)$ за деяких значень параметрів $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i > j$, $S_1(x) \in GL(m, P[x])$.

Матриці $W_1(x)$ та $W(x)$ із (6.62) та (6.45), враховуючи (6.58), зв'язані співвідношенням

$$W_1(x) = U_1 U^{-1} W(x) \widetilde{H}(x). \tag{6.63}$$

Тоді

$$B(x) = U^{-1} W(x) \widetilde{H}(x) K(x) \Phi(x) S_1(x),$$

тобто матриця $TF(x)$ вигляду (6.59) правоеквівалентна до унітальної матриці

$$L(x) = U B(x) U^{-1}.$$

Що і треба було довести.

Достатність. Нехай матриця $F(x)$ регуляризується справа, тобто існує така матриця $S(x) \in GL(m, P[x])$, що

$$L(x) = F(x) S(x) = I x^s + L_1(x) x^{s-1} + \cdots + L_s.$$

Тоді $L(x)$ є лівим унітальним дільником матриці $T^A(x)$ вигляду (6.44) і, відповідно,

$$B(x) = U^{-1} L(x) U$$

— лівим унітальним дільником матриці $A(x)$.

Теорема доведена.

Унітальна поліноміальна матриця $L(x) = T(x)S(x)$, визначена в теоремі 6.5, залежить від параметрів

$$k_{ij}^{(r_{ij})},\ \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})},\ i,j,u,v = 1,\ldots,m,\ i > j.$$

Надаючи цим параметрам усіх допустимих значень з поля $\mathbf{F}$ (за яких матриця $T(x)$ регуляризується справа), отримаємо множину $\mathcal{L}$ лівих унітальних дільників стандартної форми $T^A(x)$ матриці $A(x)$. Тоді множина матриць

$$\mathcal{B} = U^{-1}\mathcal{L}(x)U$$

є множиною унітальних дільників матриці $A(x)$.

Теорема 6.6. *Множина матриць*

$$\mathcal{B} = U^{-1}\mathcal{L}(x)U \tag{6.64}$$

— це множина таких всіх унітальних дільників матриці $A(x)$ з канонічною діагональною формою $\Phi(x)$, що відповідні їм факторизації (6.60) матриці $A(x)$ є паралельними до факторизації (6.43) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, тобто є (Φ,Ψ)-факторизаціями.

Доведення. Лівий унітальний дільник

$$B(x) = U^{-1}L(x)U$$

матриці $A(x)$ залежить від параметрів

$$k_{ij}^{(r_{ij})},\ \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})},\ i,j,u,v = 1,\ldots,m,\ i > j.$$

Надаючи цим параметрам допустимих значень з поля $\mathbf{F}$ (за яких матриця $M_T(\Phi)$ вигляду (6.26), яка відповідає матричному поліному $T(x)$, є неособливою), одержимо множину таких лівих унітальних дільників матриці $A(x)$ із канонічною діагональною формою $\Phi(x)$, що відповідні їм факторизації матриці $A(x)$ паралельні до факторизації (6.43) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. Ця множина містить усі такі дільники матриці $A(x)$, бо за лемою 6.2 кожний дільник зображається у вигляді (6.47), від якого, враховуючи співвідношенння (6.63), можна перейти до потрібного вигляду дільника $B(x)$ матриці $A(x)$.

Теорема доведена.

Наслідок 6.7. *Нехай канонічну діагональну форму* $D^A(x)$ *матриці* $A(x)$ *зображено у вигляді добутку (6.43) і*

$$\Big(\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_j(x)},\ (\psi_i(x),\psi_j(x))\Big)=1,\quad i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ i>j.$$

Існує лівий унітальний дільник $B(x)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(x)=\Phi(x)$ *матриці* $A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$T(x)=U^A(x)\widetilde{H}(x)K(x)\Phi(x)$$

регуляризується справа за деяких значень змінних

$$k_{ij}^{(r_{ij})},\ \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})},\ i,j,u,v=1,\ldots,m,\ i>j,$$

з поля $\boldsymbol{F}$ *у матрицях* $K(x)$ *та* $\widetilde{H}(x)$ *відповідно, тобто існує така оборотна матриця* $S(x)$, *що*

$$T(x)S(x)=L(x)$$

— унітальна поліноміальна матриця степеня s.

За набування параметрами

$$k_{ij}^{(r_{ij})},\ \widetilde{h}_{uv}^{(t_{uv})},\ i,j,u,v=1,\ldots,m,\ i>j,$$

всіх допустимих значень з поля $\boldsymbol{F}$*, тобто таких, за яких матриця* $M_T(\Phi)$ *вигляду (6.26), яка відповідає матричному поліному* $T(x)$*, є неособливою, отримуємо множину* $\mathcal{L}$ *унітальних поліноміальних матриць* $L(x)$ *степеня* s*. Тоді множина матриць*

$$\mathcal{B}=U^{-1}\mathcal{L}U$$

є множиною усіх унітальних дільників матриці $A(x)$ *з канонічною діагональною формою* $\Phi(x)$*.*

Зауважимо, що унітальна матриця

$$L\left(x\right)=T\left(x\right)R\left(x\right),$$

до якої правоеквівалентна матриця $T\left(x\right),$ будується за формулою (6.7).

Приклад 6.3. Тепер, використовуючи формули (6.59), (6.64) та теореми 6.5 і 6.6 обчислимо для матриці

$$A(x)=\mathrm{diag}(x^2,\ x^2)$$

з прикладу 6.2 унітальні дільники $B(x)$ з канонічною діагональною формою

$$D^B(x)=\Phi(x)=\mathrm{diag}(1,\ x^2)$$

та (Φ,Ψ)-факторизації

$$A(x)=B(x)C(x),$$

тобто факторизації паралельні до факторизації (6.38) її канонічної діагональної форми

$$D^A(x)=\mathrm{diag}(x^2,\ x^2).$$

Матриця $T(x)$ вигляду (6.59) у цьому випадку є така:

$$T(x) = \widetilde{H}(x)K(x)\Phi(x),$$

оскільки $W(x) = I$ — одинична матриця. Із співвідношення (6.58) маємо, що $\deg \widetilde{H}(x) = 0$, тобто

$$\widetilde{H}(x) = \begin{Vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{Vmatrix}, \quad h_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3,4,$$

і

$$\det \widetilde{H} = h_1h_4 - h_2h_3 \neq 0, \tag{6.65}$$

$$K(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ k_1x + k_0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже

$$T(x) = \begin{Vmatrix} h_2k_1x + (h_1 + h_2k_0) & h_2x^2 \\ h_4k_1x + (h_3 + h_4k_0) & h_4x^2 \end{Vmatrix}.$$

Регуляризувавши матрицю $T(x)$ справа одержимо ліві унітальні дільники $B(x)$ матриці $A(x)$:

$$B(x) = T(x)S(x) = Ix - \frac{1}{\Delta}\times$$

$$\times \begin{Vmatrix} (h_1 + h_2k_0)(h_3 + h_4k_0) & -(h_1 + h_2k_0)^2 \\ (h_3 + h_4k_0)^2 & -(h_1 + h_2k_0)(h_3 + h_4k_0) \end{Vmatrix}, \tag{6.66}$$

де $S(x) \in GL(2, \mathbb{R})$ і

$$\Delta = k_1(h_1(h_1 + h_2k_0) - h_2(h_3 + h_4k_0)) \neq 0. \tag{6.67}$$

(Φ,Ψ)-факторизаціями матриці $A(x)$ є факторизації $A(x)=B(x)C(x)$, де $B(x)$ вигляду (6.66) і

$$C(x)=Ix+\frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix}(h_1+h_2k_0)(h_3+h_4k_0) & -(h_1+h_2k_0)^2\\ (h_3+h_4k_0)^2 & -(h_1+h_2k_0)(h_3+h_4k_0)\end{Vmatrix}.$$

Надаючи змінним

$$k_0,\ k_1,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4$$

допустимих значень із поля $\mathbb{R}$, таких за яких зодовольняються умови (6.65) та (6.67), одержимо унітальні дільники $B_i(x)$ з з канонічною діагональною формою $D^{B_i(x)}=\Phi(x)$ та (Φ,Ψ)-факторизації матриці $A(x)$.

Зауважимо, що при значеннях $k_0=0$ і $h_1=0$ отримуємо дільники

$$B_0(x)=\begin{Vmatrix}x & 0\\ -\frac{h_3}{k_1h_2} & x\end{Vmatrix},\quad k_1,h_2,h_3\neq 0$$

матриці $A(x)$, які є вигляду (6.41).

6.4. Єдиність унітальних дільників та (Φ,Ψ)-факторизацій матричних поліномів

Із теореми 6.3 випливає, що існує множина факторизацій вигляду (6.27) матриці $A(x)$, яка відповідає фіксованій факторизації (6.21) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, та множина унітальних дільників $B_i(x)$ матриці $A(x)$ з канонічною діагональною формою $D^{B_i}(x)=\Phi(x)$. Тому виникає питання про єдиність таких факторизацій та унітальних дільників із заданою канонічною діагональною формою.

У цьому підрозділі вказано критерії єдиності відповідної та паралельної факторизацій поліноміальної матриці $A(x)$ над довільним полем $\mathbf{F}$ та єдиності її унітальних дільників із заданими канонічними діагональними формами.

Нехай
$$A(x) \in M(n, \mathbf{F}[x]), \quad \operatorname{rang} A(x) = r$$
і канонічна діагональна форма
$$D^A(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots, \mu_r(x),\ 0,\ \ldots,\ 0)$$
матриці $A(x)$ зображена у вигляді добутку
$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)) \times$$
$$\times \operatorname{diag}(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_r(x),\ 0,\ \ldots,\ 0), \tag{6.68}$$
де $\varphi_i | \varphi_{i+1},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

Теорема 6.7. *Факторизація*
$$A(x) = B(x)C(x)$$
матриці
$$A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x]), \quad \operatorname{rang} A(x) = r$$
з унітальним множником $B(x)$, паралельна до факторизації (6.68) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, або (Φ, Ψ)-факторизація, тобто така, що $D^B(x) = \Phi(x)$ і матриця $B(x)$ еквівалентна до $\Phi(x)$, є единою тоді і тільки тоді, коли у факторизації (6.68) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриця $\Psi(x)$ є d-матрицею, тобто
$$\psi_i |\ \psi_{i+1}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1$$
і
$$\varphi_{r+1}(x) = \varphi_{r+2}(x) = \ \cdots\ = \varphi_n(x).$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми 6.7 і є дві факторизації матриці $A(x)$

$$A(x) = B_1(x)C_1(x), \quad A(x) = B_2(x)C_2(x), \tag{6.69}$$

паралельні до факторизації (6.68) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ і $\Psi(x)$ — d-матриця. Тоді, згідно з теоремою 3.8, пара матриць $B_1(x), B_2(x)$ діагоналізується, тобто для деяких оборотних матриць $U(x), V_1(x), V_2(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$

$$U(x)B_1(x)V_1(x) = D^{B_1}(x), U(x)B_2(x)V_2(x) = D^{B_2}(x).$$

Тому, на основі теореми 3.10, матриці $B_1(x)$ і $B_2(x)$ правоеквівалентні. Оскільки матриці $B_1(x)$ і $B_2(x)$– унітальні, то не важко показати, що вони рівні.

Якщо не виконується хоч би одна з умов теореми 6.7, то (Φ, Ψ)-факторизація вже неєдина.

Теорема доведена.

Теорема 6.8. *Нехай*

$$A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x]), \quad \operatorname{rang} A(x) = r.$$

Тоді унітальний дільник $B(x)$ *із канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x)$ *матриці* $A(x)$ *є единим тоді і тільки тоді, коли*

$$\varphi_{r+1}(x) = \varphi_{r+2}(x) = \cdots = \varphi_n(x) \tag{6.70}$$

і

$$\big(\mu_i(x),\ \varphi_n(x)\big) = \varphi_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{6.71}$$

Доведення. Припустимо, що дві унітальні матриці $B_1(x)$ і $B_2(x)$ з канонічними діагональними формами

$$D^{B_1}(x) = D^{B_2}(x) = \Phi(x)$$

є дільниками поліноміальної матриці $A(x)$, тобто

$$A(x) = B_1(x)C_1(x), \quad A(x) = B_2(x)C_2(x). \tag{6.72}$$

За виконання умов (6.70) і (6.71) на основі теореми 3.14 маємо, що

$$D^A(x) = D^{B_1}(x)D^{C_1}(x) \text{ і } D^A(x) = D^{B_2}(x)D^{C_2}(x).$$

Тому згідно із теоремою 3.13 матриця $\Psi(x)$ є d-матрицею. Отже, на основі теореми 6.7 факторизації (6.72) матриці $A(x)$ є асоційованими, а отже, і дільники $B_1(x)$ і $B_2(x)$ матриці $A(x)$ є правоасоційованими. Оскільки матриці $B_1(x)$ і $B_2(x)$ є унітальними, то вони рівні.

Теорема доведена.

Наслідок 6.8. *Факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$ *матриці* $A(x)$, *відповідна до факторизації (6.68) її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$, *є единою тоді і тільки тоді, коли*

$$\varphi_{r+1}(x) = \varphi_{r+2}(x) = \cdots = \varphi_n(x)$$

і

$$\big(\mu_i(x),\ \varphi_n(x)\big) = \varphi_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1. \tag{6.73}$$

Результат цього наслідку для випадку, коли основне поле алгебраїчно замкнене характеристики нуль, одержано у праці [32].

Із теореми 6.8 випливає, як наслідок, критерій єдиності унітального дільника із його заданим характеристичним поліномом для поліноміальних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, встановлений у працях [14], [15].

Наслідок 6.9. *Нехай* $A(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$, $\det A(x) \neq 0$ *і*

$$\det A(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \deg\varphi = sn. \tag{6.74}$$

Нехай

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{6.75}$$

де $B(x)$ *—унітальна матриця степеня* s *і* $\det B(x) = \varphi(x)$. *Унітальний дільник* $B(x)$ *з характеристичним поліномом* $\varphi(x)$ *матриці* $A(x)$ *є единим тоді і тільки тоді, коли*

$$\big((\varphi(x), \psi(x)),\ d_{n-1}^{A}(x)\big) = 1, \tag{6.76}$$

де $d_{n-1}^{A}(x)$ *– найбільший спільний дільник мінорів* $n-1$*-го порядку матриці* $A(x)$.

6.5. Спільні дільники матричних поліномів[2]

Нехай $\mathbf{F}[x]$ — кільце поліномів над полем $\mathbf{F}$, $A_1(x)$, $A_2(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$ — неособливі поліноміальні матриці,

$$D^{A_1}(x) = \operatorname{diag}(\mu_1^{(1)}(x),\ ...,\ \mu_n^{(1)}(x)),$$

$$D^{A_2}(x) = \operatorname{diag}(\mu_1^{(2)}(x),\ ...,\ \mu_n^{(2)}(x))$$

— їх канонічні діагональні форми і $T^{A_1}(x)$, $T^{A_2}(x)$ – їх стандартні форми щодо напівскалярної еквівалентності, тобто

$$T^{A_p}(x) = UA_p(x)V_p(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} \mu_1^{(p)}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^{(p)}(x)\mu_1^{(p)}(x) & \mu_2^{(p)}(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}^{(p)}(x)\mu_1^{(p)}(x) & t_{n2}^{(p)}(x)\mu_2^{(p)}(x) & \cdots & \mu_n^{(p)}(x) \end{array} \right\|, \tag{6.77}$$

[2]Результати цього підрозділу отримано з В.Р.Зеліском.

де $U \in GL(n, \mathbf{F})$, $V_p(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$,

$$\deg t_{ij}^{(p)} < \deg \mu_i^{(p)} - \deg \mu_j^{(p)}, \quad \text{якщо} \quad \deg \mu_i^{(p)} - \deg \mu_j^{(p)} > 0$$

і

$$t_{ij}^{(p)}(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad \deg \mu_i^{(p)} - \deg \mu_j^{(p)} = 0,$$

$i, j = 1, 2, \ldots, m,\ i > j;\ p = 1,\ 2.$

Припустимо, що d-матриця

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \qquad \varphi_i(x) | \varphi_{i+1}(x),$$

$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ така, що

$$\det \Phi(x) = \varphi(x),\ \deg \varphi = sn$$

є спільним дільником канонічних діагональних форм $D^{A_1}(x)$ і $D^{A_2}(x)$ матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$, тобто

$$D^{A_p}(x) = \Phi(x)\, \Psi_p(x),$$

$$\Psi_p(x) = \operatorname{diag}\left(\psi_1^{(p)}(x), \ldots, \psi_n^{(p)}(x)\right), \quad p = 1,\ 2. \tag{6.78}$$

Запишемо визначальні матриці $W_{A_1}(\Phi)$ і $W_{A_2}(\Phi)$ для матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$, породжені d-матрицею $\Phi(x)$:

$$W_{A_p}(\Phi) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{\varphi}{(\varphi_1,\ \mu_1^{(p)})} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi k_{21}^{(p)}}{(\varphi_2,\ \mu_1^{(p)})} & \frac{\varphi}{(\varphi_2,\ \mu_2^{(p)})} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi k_{n1}^{(p)}}{(\varphi_n,\ \mu_1^{(p)})} & \frac{\varphi k_{n2}^{(p)}}{(\varphi_n,\ \mu_2^{(p)})} & \cdots & \frac{\varphi k_{n,n-1}^{(p)}}{(\varphi_n,\ \mu_{n-1}^{(p)})} & \frac{\varphi}{(\varphi_n,\ \mu_n^{(p)})} \end{Vmatrix},$$

$p = 1, 2,$ де $(\varphi_i, \mu_j^{(p)})$ – найбільший спільний дільник поліномів $\varphi_i(x)$, і $\mu_j^{(p)}(x)$; $k_{ij}^{(p)} = 0$, якщо $(\varphi_i, \mu_j^{(p)}) = \varphi_j$ і

$$k_{ij}^{(p)(x)} = k_{ij0}^{(p)} + k_{ij1}^{(p)}x + \cdots + k_{ijh_{ij}^{(p)}}^{(p)} x^{h_{ij}^{(p)}}, \quad h_{ij}^{(p)} = \deg \frac{(\varphi_{\rm i}, \mu_{\rm j}^{({\rm p})})}{\varphi_{\rm j}} - 1,$$

якщо

$$(\varphi_i, \mu_j^{(p)}) \neq \varphi_j, \ i = 2, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, n-1, \ i > j,$$

$k_{ijq}^{(p)}$ — попарно різні змінні величини, які приєднуються до поля $\mathbf{F}$, $q = 0, 1, \ldots, h_{ij}^{(p)}$.

Тут і надалі поліноми $\varphi(x)$, $\mu_2^{(p)}(x)$, $k_{ij}^{(p)}(x)$ та інші для спрощення виразів записуватимемо як φ, $\mu_2^{(p)}$, $k_{ij}^{(p)}$ та інші не вказуючи змінну x.

Поняття визначальної матриці введено у праці [49].

Матрицю $W_{A_p}(\Phi)$ зобразимо у вигляді

$$W_{A_p}(\Phi) = \Phi_*(x) V_{Ap}(\Phi),$$

де

$$\Phi_*(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)$$

— взаємна матриця до $\Phi(x)$ і

$$V_{A_p}(\Phi) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\ \mu_1^{(p)})}\, k_{21}^{(p)} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\ \mu_1^{(p)})}\, k_{n1}^{(p)} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\ \mu_2^{(p)})}\, k_{n2}^{(p)} & \cdots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\ \mu_{n-1}^{(p)})}\, k_{n,n-1}^{(p)} & 1 \end{array} \right\|,$$

$p = 1, 2$. Матрицю $V_{A_p}(\Phi)$ називають ядром визначальної матриці $W_{A_p}(\Phi)$.

Рівність (6.77) запишемо у такому вигляді:

$$T^{A_p}(x) = W_p(x)\, D^{A_p}(x)\,, \tag{6.79}$$

де $W_p(x)$, $p = 1, 2$ — нижні унітрикутні матриці.

Тепер складемо матриці

$$F_1(x) = W_1(x)\, V_{A_1}^{-1}(\Phi)\, \Phi(x),$$

$$F_2(x) = W_2(x)\, V_{A_2}^{-1}(\Phi)\, \Phi(x), \tag{6.80}$$

де $W_1(x)$ і $W_2(x)$ — із співвідношень (6.79).

Теорема 6.9. *Для матриць* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *існує спільний лівий унітальний дільник* $B(x)$ *степеня* s *з канонічною діагональною формою*

$$D^B(x) = \Phi(x)$$

тоді і тільки тоді, коли стандартні форми $T^{F_1}(x)$ *і* $T^{F_2}(x)$ *вигляду* (6.77) *матриць* $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ *за деяких значень параметрів*

$$k_{ijq}^{(1)},\ k_{ijq}^{(2)},\quad i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i > j;\ q = 0, 1, \ldots, h_{ij}^{(p)},\ p = 1, 2$$

збігаються

$$T^{F_1}(x) = T^{F_2}(x) = T(x)$$

і матриця $T(x)$ *регуляризується справа, тобто відповідна матричному поліному* $T(x)$ *матриця* $M_T(\Phi)$ *вигляду (6.3) є неособливою.*

Перед доведенням теореми сформулюємо допоміжні твердження.

Лема 6.3. *Нехай поліноміальні матриці* $A_1(x)$, $A_2(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$ *регуляризуються, тобто правоеквівалентні до унітальних матриць* $L_1(x)$ *і* $L_2(x)$*:*

$$A_1(x)S_1(x) = L_1(x),\ A_2(x)S_2(x) = L_2(x),$$

де $S_1(x), S_2(x) \in GL(n, \boldsymbol{F}[x])$. *Поліноміальні матриці* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *правоеквівалентні до однієї і тієї ж унітальної матриці* $L(x)$ *тоді і тільки тоді, коли* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$*) правоеквівалентні.*

Доведення. Достатність. Оскільки поліноміальні матриці $A_1(x)$ і $A_2(x)$ правоеквівалентні, тобто

$$A_1(x)S(x) = A_2(x),\ S(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x]),$$

то з цього співвідношення випливає, що унітальні поліноміальні матриці $L_1(x)$ і $L_2(x)$ правоеквівалентні:

$$L_1(x) = L_2(x)Q(x),\ Q(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x]).$$

Зважаючи на те, що поліноміальні матриці $L_1(x)$ і $L_2(x)$ унітальні, то звідси одержуємо, що $L_1(x) = L_2(x)$.

Необхідність очевидна.

Лема доведена.

Лема 6.4. *Поліноміальні матриці* $A_1(x)$, $A_2(x) \in M(n, \boldsymbol{F}[x])$ *правоеквівалентні до однієї унітальної матриці* $L(x)$ *тоді і тільки тоді, коли їх стандартні форми збігаються*

$$T^{A_1}(x) = T^{A_2}(x) = T(x)$$

і поліноміальна матриця $T(x)$ *регуляризується, тобто відповідна матричному поліному* $T(x)$ *матриця* $M_T(\Phi)$ *вигляду (6.3) є неособливою.*

Доведення леми легко одержуємо із леми 6.3 і теореми 6.1

Доведення теореми. Необхідність. Нехай

$$A_p(x) = B(x)\, C_p(x), \quad p = 1,\ 2, \tag{6.81}$$

де $B(x)$ — унітальна многочленна матриця степеня s, $D^B(x) = \Phi(x)$. На основі теореми 2.2 існують такі матриці

$$U \in GL(n, \mathbf{F}),\ V_p(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x]),\ p = 1, 2, 3,$$

що

$$UA_p(x)\, V_p(x) = T^{A_p}(x) = W_p(x)\, D^{A_p}(x),\ p = 1,\ 2,$$

$$UB(x)\, V_3(x) = T^B(x) = W_3(x)\, D^B(x). \tag{6.82}$$

Тоді із рівності (6.81) одержимо:

$$T^{A_p}(x) = T^B(x)\, \tilde{C}_p(x), \quad p = 1,\ 2, \tag{6.83}$$

де

$$\tilde{C}_p(x) = V_3^{-1}(x)\, C_p(x)\, V_p(x), \quad p = 1,\ 2.$$

Враховуючи співвідношення (6.79), із рівностей (6.82) і (6.83) отримуємо:

$$D^{A_p}(x) = W_p^{-1}(x)\, T^B(x)\, \tilde{C}_p(x), \quad p = 1,\ 2. \tag{6.84}$$

На основі твердження 1 із [49] (стор. 157) існують такі нижні унітрикутні матриці $S_p(x)$, що із рівностей (6.84) матимемо:

$$D^{A_p}(x) = \left(W_p^{-1}(x)\, T^B(x)\, S_p^{-1}(x)\right) \left(S_p(x)\, \tilde{C}_p(x)\right), \tag{6.85}$$

$p = 1,\ 2,$ де матриці $S_p(x)\, \tilde{C}_p(x)$, $p = 1,\ 2$ мають вигляд

$$S_p(x)\, \tilde{C}_p(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} \psi_1^{(p)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\psi_1^{(p)} l_{21}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1^{(p)}\right)} & \psi_2^{(p)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\psi_1^{(p)} l_{n1}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1^{(p)}\right)} & \frac{\psi_2^{(p)} l_{n2}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2^{(p)}\right)} & \cdots & \frac{\psi_{n-1}^{(p)} l_{n,n-1}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}^{(p)}\right)} & \psi_n^{(p)} \end{array} \right\|,$$

де

$$\deg l_{j+i,j}^{(p)} < \deg(\frac{\varphi_{j+i}}{\varphi_j},\ \psi_j^{(p)}).$$

Розділимо обидві частини рівностей (6.85) справа на матриці $\Psi_p(x)$, $p = 1,\ 2,$ відповідно. Помноживши одержані так рівності справа на матрицю $\Phi_*(x)$, одержимо:

$$\operatorname{diag}(\varphi, \ldots, \varphi) = W_p^{-1}(x)\, T^B(x)\, S_p^{-1}(x)\, L_p(\Phi), \qquad (6.86)$$

$p = 1,\ 2.$

З цих рівностей видно, що матриця

$$T_p^B(x) = W_p^{-1} T^B(x)\, S_p^{-1}(x)$$

є взаємною до матриці $L_p(\Phi)$:

$$L_p(\Phi) = \left(T_p^B(x)\right)_*, \quad p = 1,\ 2. \qquad (6.87)$$

Замінюючи в матриці $L_p(\Phi)$ поліноми $l_{ij}^{(p)}$ на поліноми $k_{ij}^{(p)}$, одержимо, що

$$L_p(\Phi) = W_{A_p}(\Phi) = \Phi_* V_{A_p}(\Phi), \; p = 1, 2.$$

Матрицю $T_p^B(x)$ запишемо у такому вигляді:

$$T_p^B(x) = T_p(x)\, \Phi(x), \qquad (6.88)$$

де $T_p(x)$ — нижня унітрикутна матриця, $p = 1, 2$. Тоді зі співвідношень (6.87) і (6.86) маємо, що

$$(T_p(x)\,\Phi)_*(x) = \Phi_*(x) V_p(\Phi)$$

або

$$\Phi_*(x)(T_p(x))_*(x) = \Phi_* V_p(\Phi)\,,$$

тобто

$$(T_p(x))_* = V_p(\Phi),\ \ p = 1, 2.$$

Оскільки $V_{A_p}(\Phi)$ – унітрикутна матриця, то

$$T_p(x) = V_{A_p}^{-1}(\Phi)\,, p = 1, 2. \tag{6.89}$$

Із співвідношень (6.86), (6.85), (6.84), (6.83) і (6.82) одержуємо, що

$$W_p(x)\,T_p^B(x)\,Q_p(x) = \ \ UB(x)\,U^{-1} = B_1(x)\,, \tag{6.90}$$

де

$$Q_p(x) = UV_3(x)S_p^{-1}(x),\ \ p = 1,\ 2,$$

тобто матриці $W_1(x)\,T_1^B(x)$ і $W_2(x)\,T_2^B(x)$ правоеквівалентні до однієї унітальної матриці $B_1(x)$. Тому, враховуючи співвідношення (6.88) і (6.89), бачимо, що матриці

$$W_1(x)\,V_{A_1}^{-1}(\Phi)\,\Phi(x), \quad W_2(x)\,V_{A_2}^{-1}(\Phi)\,\Phi(x)$$

за деяких значень

$$k_{ijq}^{(1)}\ \ i\ \ k_{ijq}^{(2)}, \ \ i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i > j;\ q = 0, 1, \ldots, h_{ij}^{(p)},\ p = 1, 2$$

із поля $\mathbf{F}$ правоеквівалентні до однієї унітальної матриці. Тому, згідно з лемою 6.4, $T^{F_1}(x) = T^{F_2}(x) = T(x)$ і матриця $T(x)$ регуляризується справа.

Достатність. Враховуючи співвідношення (6.77), (6.78), (6.79) і рівність

$$V_{A_i}^{-1}(\Phi)\,\Phi(x) = \Phi(x)\,Y_i^{-1},$$

де Y_p – нижня унітрикутна матриця вигляду

$$Y_p = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{k_{12}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1^{(p)}\right)} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{k_{n1}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1^{(p)}\right)} & \frac{k_{n2}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2^{(p)}\right)} & \cdots & \frac{k_{n,n-1}^{(p)}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}^{(p)}\right)} & 1 \end{array} \right\|,$$

$p = 1, 2$, бачимо, що матриця $T^{F_p}(x)$ із (6.80) є лівим дільником матриці $T^{A_p}(x)$, тобто

$$T^{A_p}(x) = \left(W_p(x)\,\Phi(x)\,Y_p^{-1}\right)\left(Y_p \Psi_p(x)\right),\ p = 1,\ 2.$$

Якщо за деяких значень

$$k_{ijq}^{(1)} \ \ i \ \ k_{ijq}^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i > j;\ q = 0, 1, \ldots, h_{ij}^{(p)},\ p = 1, 2$$

із поля $\mathbf{F}$

$$T^{F_1}(x) = T^{F_2}(x) = T(x)$$

і матриця $T(x)$ регуляризується справа, тобто існує така матриця $R(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$, що $T^F(x)\,R(x) = L(x)$ — унітальна матриця, то $L(x)$ є спільним лівим унітальним дільником матриць $T^{A_1}(x)$ і $T^{A_2}(x)$, а матриця

$$B(x) = U^{-1} L(x)\, U$$

– спільним лівим унітальним дільником матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$.

Теорема доведена.

Унітальну матрицю

$$L(x) = T(x)\, R(x),$$

до якої правоеквівалентна матриця $T(x)$, будуємо за формулою (6.7). Тоді матриця

$$B(x) = U^{-1} L(x)\, U,$$

де U — із співвідношення (6.77), є спільним унітальним дільником матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$. Матриця $B(x)$ залежить від параметрів

$$k_{ijq}^{(p)}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i > j;\ q = 0, 1, \ldots, h_{ij}^{(p)},\ p = 1, 2.$$

Надаючи їм допустимих значень із поля $\mathbf{F}$, одержимо множину спільних унітальних дільників з канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$.

6.6. Розклад матричних поліномів на множники

Задача про факторизацію матричного полінома

$$A(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0, \tag{6.91}$$

де $A_i - n \times n$-матриці над полем $\mathbf{F}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, у загальному полягає в тому, щоб вказати умови його зображення у вигляді добутку

$$A(x) = B_1(x) B_2(x) \cdots B_q(x) \tag{6.92}$$

унітальних множників $B_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, які, взагалі кажучи, вже нерозкладні, зокрема, у добуток лінійних унітальних множників. Маючи критерій і метод виділення із матричного полінома $A(x)$ унітального множника $B_1(x)$, тобто зображення матричного полінома $A(x)$ у вигляді добутку двох множників

$$A(x) = B_1(x)C_1(x),$$

можна було б спробувати застосувати цей метод виділення унітальних множників до матриці $C_1(x)$ і виділити так унітальний множник $B_2(x)$ із матриці $C_1(x)$:

$$C_1(x) = B_2(x)C_2(x),$$

тобто

$$A(x) = B_1(x)B_2(x)C_2(x).$$

Продовжуючи цей процес далі, можемо одержати деякий розклад матричного полінома $A(x)$ на унітальні множники.

Зрозуміло, що це можна, в принципі, зробити лише тоді, коли кількість дільників та розкладів матричного полінома $A(x)$ є скінченним числом.

З іншого боку, навіть за скінченного числа дільників та розкладів матричного полінома хочеться встановити його розкладність на множники, не виконуючи цей алгоритм. Вказати, наприклад, критерій існування розкладу матричного полінома, що відповідає розкладу його характеристичного полінома чи канонічної діагональної форми.

Задача про розкладність матричного полінома $A(x)$ на унітальні множники в такій постановці розв'язана лише в окремих випадках. Виділено окремі класи матричних поліномів, які розкладаються в добуток лінійних унітальних множників, що відмічено в п. 5.1. Якщо $\mathbf{F}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль у працях [41], [39] встановлено критерій розкладності матричного полінома $A(x)$ на лінійні унітальні множники вигляду (6.92), за умови, що вони не мають спільних характеристичних коренів, тобто

$$(\det B_i(x), \det B_j(x)) = 1, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q,\ i \neq j,$$

а в праці [45] — коли

$$(\det B_i(x), \det B_j(x), d_{n-1}^A(x)) = 1, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q,\ i \neq j.$$

В [112] цей результат поширили на випадок, коли $\mathbf{F}$ — довільне поле. У праці [30] вказують умови розкладності на лінійні множники матричного полінома $A(x)$ над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль у випадку, коли канонічна діагональна форма матричного полінома $A(x)$ дорівнює добутку канонічних діагональних форм множників $B_i(x)$:

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} D^{B_i}(x).$$

Наведемо умови розкладності матричного полінома $A(x)$ на довільне число унітальних множників, паралельно фіксованому розкладу його канонічної діагональної форми $D^A(x)$, і запропонуємо метод побудови таких розкладів. Цим охопимо ширші від відомих типи розкладів матричного полінома.

Нехай матричний поліном $A(x)$ зображено у вигляді добутку (6.92). Надалі використовуватимемо такі позначення:

$$C_p(x) = \prod_{i=1}^{p} B_i(x),$$

$$F_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x),\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1.$$

Тоді із розкладу (6.92) матричного полінома $A(x)$ можна записати такі розклади:

$$A(x) = C_p(x)F_{q-p}(x), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1.$$

На основі леми 3.10 канонічна діагональна форма $D^{C_p}(x)$ матриці $C_p(x)$ ділить канонічну діагональну форму $D^A(x)$ матриці $A(x)$ для всіх $p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$. Отже, розкладу (6.92) матричного полінома $A(x)$ відповідає такий розклад

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x) \tag{6.93}$$

його канонічної діагональної форми $D^A(x)$, що кожна матриця

$$\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = \operatorname{diag}(\psi_{p1},\ \psi_{p2},\ \ldots,\ \psi_{pn}(x)),$$

$p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$, є d-матрицею, тобто

$$\psi_{pi}|\psi_{p,i+1}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

і канонічні діагональні форми

$$D^{C_p}(x),\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

матриць

$$C_p(x), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

дорівнюють

$$\Psi_p(x) = \operatorname{diag}(\psi_{p1},\ \psi_{p2},\ \ldots,\ \psi_{pn}(x)), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1.$$

Тоді кажемо, що розклад (6.92) матричного полінома $A(x)$ є відповідним до розкладу (6.93) його канонічної діагональної форми $D^A(x)$.

Зрозуміло, що кожний розклад матричного полінома є відповідним до деякого розкладу його канонічної діагональної форми. Це означає, що всі розклади матричного полінома розбиваються на класи згідно з розкладами його канонічної діагональної форми.

Тому припускаємо, що канонічна діагональна форма

$$D^A(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots,\ \mu_n(x))$$

матричного полінома $A(x)$, $\det A(x) \neq 0$, зображена у вигляді добутку

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x), \tag{6.94}$$

де

$$\Phi_i(x) = \operatorname{diag}(\varphi_{i1}(x),\ \varphi_{i2}(x),\ \ldots,\ \varphi_{in}(x)),$$

причому

$$\deg\det\Phi_i = s_i n, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

і кожна матриця

$$\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = \operatorname{diag}(\psi_{p1}(x),\ \ldots,\ \psi_{pn}(x)),$$

$p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$, є d – матрицею.

Вкажемо умови існування розкладів матричного полінома $A(x)$ на унітальні множники, що відповідають розкладу (6.94) його канонічної діагональної форми $D^A(x)$.

Через $\Lambda_{q-p}(x)$ позначатимемо діагональну матрицю

$$\Lambda_{q-p}(x) =$$

$$= \prod_{i=1}^{q-p} \Phi_{p+i}(x) = \operatorname{diag}(\lambda_{q-p,1}(x),\ \lambda_{q-p,2}(x),\ \ldots,\ \lambda_{q-p,n}(x)),$$

$p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$, а через $K_p(x)$ — матрицю

$$K_p(x) = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2}{\mu_1} k_{21}^{(p)} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\mu_{n-1}}{\mu_1} k_{n-1,1}^{(p)} & \dfrac{\mu_{n-1}}{\mu_2} k_{n-1,2}^{(p)} & \ldots & 1 & 0 \\ \dfrac{\mu_n}{\mu_1} k_{n1}^{(p)} & \dfrac{\mu_n}{\mu_2} k_{n,2}^{(p)} & \ldots & \dfrac{\mu_n}{\mu_{n-1}} k_{n,n-1}^{(p)} & 1 \end{array} \right\|,$$

де

$$k_{ij}^{(p)} = k_{ij}^{(0)} + k_{ij}^{(1)} x + \ldots + k_{ij}^{(r_{ij})} x^{r_{ij}},$$

причому $k_{ij}^{(p)} \equiv 0$, якщо $\psi_{pi} | \psi_{pj}$ і

$$r_{ij} = \deg \psi_{pi} - \deg \psi_{pj} - 1,$$

якщо $\psi_{pi} \not| \psi_{pj}$, $i > j$, $k_{ij}^{(r_{ij})}$ — незалежні змінні, тобто $K_p(x)$ — матриця над кільцем $\mathbf{F}(k)[x]$, де $\mathbf{F}(k)$ — розширення поля $\mathbf{F}$, одержане приєднанням $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i > j,$ до поля $\mathbf{F}$.

Нехай, далі, $T^A(x)$ — трикутна форма вигляду (6.18) з умовами (6.19) і (6.20) матричного полінома $A(x)$, тобто

$$T^A(x) = UA(x)V(x) = \operatorname{triang}(\mu_1(x),\ \mu_2(x), \ldots,\ \mu_n(x)),$$

для деяких матриць $U \in GL(n, \mathbf{F})$, $V(x) \in GL(n, \mathbf{F}[x])$. Її запишемо в такому вигляді:

$$T^A(x) = U(x) \operatorname{diag}(\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots,\ \mu_n(x)), \tag{6.95}$$

де $U(x)$ — нижня унітрикутна матриця із $GL(n, \mathbf{F}[x])$.

Тепер розглянемо добуток матриць $U(x)K_p(x)\Phi_p(x)$. Правими елементарними перетвореннями зведемо цю матрицю до вигляду (6.18) з умовами (6.19) і (6.20), тобто для деякої матриці $S_p(x) \in GL(n, \mathbf{F}(k)[x])$ матимемо:

$$T_p(x) = U(x)K(x)\Phi_p(x)S_p(x) = \operatorname{triang}(\varphi_{p1}, \varphi_{p2}, \ \ldots, \ \varphi_{pn}(x)),$$

$i = 1, \ 2, \ \ldots, \ q-1.$

Теорема 6.10. *Нехай канонічна діагональна форма* $D^A(x)$ *матричного полінома* $A(x)$, $\det A(x) \neq 0$, *зображена у вигляді добутку (6.94) і*

$$\left(\lambda_{q-p,i}(x), \ \frac{\varphi_{p-1,n}(x)}{\varphi_{p-1,i}(x)}\right) = 1 \tag{6.96}$$

або

$$\left(\lambda_{q-p,i}(x), \ \frac{\psi_{pn}(x)}{\psi_{pi}(x)}\right) = 1, \tag{6.97}$$

$i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1, \ \ p = 2, \ 3, \ \ldots, \ q-1.$ *Тоді матричний поліном* $A(x)$ *зображено у вигляді добутку*

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x), \tag{6.98}$$

де

$$B_i(x), \quad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ q-1,$$

— унітальні матричні поліноми степенів s_i, *і матриця*

$$C_p(x) = \prod_{i=1}^{p} B_i(x)$$

еквівалентна до матриці

$$\Phi_p(x), \quad p = 1, \ 2, \ \ldots, \ q-1,$$

а матриця

$$F_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

— до матриці

$$\Lambda_{q-p}(x), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

у тому і тільки у тому випадку, коли кожний матричний поліном

$$T_p(x), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

регуляризується справа над кільцем $P(k)[x]$*, тобто відповідні цим матричним поліномам матриці*

$$M_{T_p}(\Phi_p), \quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

є неособливі.

Доведення теореми проводимо за індукцією.

При $q = 2$ теорема випливає із теореми 6.3 та леми 6.1. Припустимо її справедливість для $q-1$ і доведемо теорему для q.

Нехай матриці $T_{q-2}(x)$ і $T_{q-1}(x)$ регуляризуються справа. Це означає, що

$$A(x) = C_{q-2}(x)F_2(x) \ \ i \ \ A(x) = C_{q-1}(x)F_1(x),$$

де $C_{q-2}(x)$ і $C_{q-1}(x)$ — унітальні поліноми і, очевидно,

$$D^{C_{q-2}}(x) | D^{C_{q-1}}(x).$$

Тоді на основі леми 8.1 матимемо, що, оскільки, добуток матриць $C_{q-1}(x)F_1(x)$ ділиться зліва на $C_{q-2}(x)$, то $C_{q-1}(x)$ ділиться на $C_{q-2}(x)$, тобто

$$C_{q-1}(x) = C_{q-2}(x)B_{q-1}(x).$$

Згідно з припущенням індукції

$$C_{q-2}(x) = B_1(x)B_2(x) \ \cdots \ B_{q-2}(x),$$

тобто

$$A(x) = B_1(x)B_2(x) \ \cdots \ B_{q-2}(x)B_{q-1}(x)F_1(x),$$

де

$$B_i(x), \quad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ q-1,$$

— унітальні матричні поліноми. Теорему доведено.

Зауважимо, що унітальні множники

$$B_i(x), \quad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ q-1,$$

розкладу (6.98) матричного полінома $A(x)$ можна знайти на основі формул (6.7), при цьому надаючи змінним $k_{ij}^{(r_{ij})}$ допустимих значень, одержимо множину розкладів вигляду (6.98) на унітальні множники матричного полінома $A(x)$, відповідних розкладу (6.94) його канонічної діагональної форми $D^A(x)$.

Наступна теорема встановлює умови, за яких відповідні розкладу канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матричного полінома $A(x)$, є паралельними до розкладу його канонічної діагональної форми.

Теорема 6.11. *Нехай канонічна діагональна форма* $D^A(x)$ *матричного полінома* $A(x)$, $\det A(x) \neq 0$, *зображена у вигляді добутку (6.94) і*

$$\Big(\frac{\varphi_{1,k}(x)\varphi_{2,k}(x)\cdots\varphi_{p,k}(x)}{\varphi_{1,r}(x)\varphi_{2,r}(x)\cdots\varphi_{p,r}(x)}, \ (\varphi_{p+1,k}(x), \varphi_{p+1,r}(x))\Big) = 1$$

для всіх $p = 1, 2, \ldots, q-1$ *і* $k, r = 1, 2, \ldots, n$, $k > r$. *Тоді кожний розклад вигляду (6.98) матричного полінома* $A(x)$, *відповідний розкладу (6.94) його канонічної діагональної форми* $D^A(x)$, *є паралельним до цього розкладу його канонічної діагональної форми.*

Доведення. Для $q = 2$ доведення випливає із теореми 6.2. Далі доведення виконуємо за індукцією.

Наслідок 6.10. *Нехай елементарні дільники матричного полінома* $A(x)$ *прості. Матричний поліном* $A(x)$ *зображається у вигляді добутку (6.98), відповідно розкладу (6.94) його канонічної діагональної форми* $D^A(x)$, *тоді і тільки тоді, коли кожний поліном* $T_p(x)$ *регуляризується справа над кільцем* $\mathbf{F}(k)[x]$, *тобто відповідні їм матриці*

$$M_{T_p}(\Phi_p),\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$$

є неособливі, при цьому факторизація (6.98) матричного полінома $A(x)$ *є паралельною до факторизації (6.94) його канонічної діагональної форми* $D^A(x)$.

Тепер розглянемо матрицю $U(x)\Phi_p(x)$, де $U(x)$ — будь-яка нижня унітрикутна матриця, яка задовольняє співвідношення (6.95). Правими елементарними перетвореннями зведемо її до трикутного вигляду (6.18), тобто

$$\tilde{T}_p(x) = H(x)\Phi(x)S(x) = \mathrm{triang}(\psi_{p1}(x),\ \psi_{p2}(x),\ \ldots,\ \psi_{pn}(x)),$$

де $S(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x])$.

Наслідок 6.11. *Нехай канонічна діагональна форма* $D^A(x)$ *матричного полінома* $A(x)$ *зображена у вигляді добутку*

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x),$$

де

$$\Phi_i(x) = \mathrm{diag}(\varphi_{i1}(x),\ \varphi_{i2}(x),\ \ldots,\ \varphi_{in}(x)), \quad \varphi_{ij}|\varphi_{i,j+1},$$

$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$ *і* $\deg\det\Phi_i = s_i n.$ *Тоді*

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x),$$

де

$$B_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$$

— унітальні поліноми степенів s_i *і*

$$D^{B_i}(x) = \Phi_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q,$$

тоді і тільки тоді, коли кожний матричний поліном $T_p(x)$ *регуляризується справа, тобто відповідні їм матриці*

$$M_{T_p}(\Phi_p),\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$$

— неособливі.

Доведення випливає із теореми 6.10, враховуючи, що у цьому випадку $K_p(x)$ — одинична матриця для всіх $p = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1.$

Зауважимо, якщо $A(x)$ — унітальний матричний поліном, то можна сформулювати аналогічні умови його розкладності у добуток

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x),$$

де всі множники

$$B_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q$$

— унітальні, зокрема лінійні унітальні матричні поліноми.

Розділ 7
ФАКТОРИЗАЦІЇ В КІЛЬЦЯХ КЛІТКОВО-ТРИКУТНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

У цьому розділі встановлено умови, за яких факторизації клітково-трикутних та клітково-діагональних матриць є відповідно клітково-трикутними та клітково-діагональними, тобто множники у цих факторизаціях мають відповідні кліткові вигляди.

7.1. Матричне поліноміальне рівняння Сильвестра $A(x)X(x) - Y(x)B(x) = C(x)$

Нехай $\mathbf{F}$ — довільне поле, $\mathbf{F}[x]$ — кільце поліномів над $\mathbf{F}$. Розглянемо матричне рівняння

$$A(x)X(x) - Y(x)B(x) = C(x), \tag{7.1}$$

де

$$A(x) = \sum_{i=0}^{r} A_i x^{r-i}, \quad A_i \in M(n, \mathbf{F}), \quad i = 0, 1, \ldots, r,$$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{s} B_i x^{s-i}, \quad B_i \in M(m, \mathbf{F}), \quad i = 0, 1, \ldots, s,$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{l} C_i x^{l-i}, \quad C_i \in M(n, m, \mathbf{F}), \quad i = 0, 1, \ldots, l,$$

$X(x), Y(x)$ — невідомі матриці із $M(n, m, \mathbf{F}[x])$. Покладемо, що $A(x)$ і $B(x)$ — унітальні матриці, тобто $A_0 = I_n$, $B_0 = I_m$ — одиничні матриці порядків n і m. Відомо [219], [153], [162], що рівняння (7.1) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A(x) & C(x) \\ \mathbf{0} & B(x) \end{matrix} \right\| \quad \text{і} \quad \left\| \begin{matrix} A(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні, тобто мають одні і ті ж самі інваріантні множники. Багато авторів описують розв'язки поліноміальних матричних рівнянь Сильвестра вигляду (7.1) з певними властивостями [152], [172]. У працях [129], [154] вказано умови існування та єдиності так званих "мінімальних" розв'язків цього рівняння, тобто таких розв'язків $X(x), Y(x)$, що

$$\deg X < \deg B, \ \deg Y < \deg A,$$

а в [173], [174] — заданих степенів, зокрема нульового.

Розв'язування таких матричних поліноміальних рівнянь можна також звести до розв'язування поліноміальних діофантових рівнянь [179], [180], [181].

Розглянемо один тип розв'язків матричного поліноміального рівняння (7.1) і вкажемо спосіб їх побудови, які використаємо під час опису клітково-трикутних факторизацій клітковотрикутних поліноміальних матриць.

Лема 7.1. *Якщо рівняння (7.1) має розв'язки, то воно має і такі розв'язки*

$$(X_1(x), Y_1(x)) \quad i \quad (X_2(x), Y_2(x)),$$

що

$$\deg X_1 < \deg B, \ \deg Y_2 < \deg A.$$

Доведення. Нехай $(X_0(x), \ \ Y_0(x))$ — довільний розв'язок рівняння (7.1), тобто

$$A(x)X_0(x) - Y_0(x)B(x) = C(x).$$

Поділимо матрицю $X_0(x)$ справа на $B(x)$, а $Y_0(x)$ зліва — на $A(x)$ і одержимо:

$$X_0(x) = Q(x)B(x) + X_1(x),$$

$$Y_0(x) = A(x)R(x) + Y_2(x),$$

де $Q(x), R(x), X_1(x), Y_2(x) \in M(n, m, \mathbf{F}[x])$ і

$$\deg X_1 < \deg B, \quad \deg Y_2 < \deg A.$$

Тоді

$$(X_1(x) = X_0(x) - Q(x)B(x), \ Y_1(x) = Y_0(x) - A(x)Q(x))$$

і

$$(X_2(x) = X_0(x) - R(x)B(x), \ Y_2(x) = Y_0(x) - A(x)R(x))$$

— розв'язки рівняння (7.1). Це показуємо за допомогою безпосередньої перевірки.

Лема доведена.

Шукатимемо розв'язки рівняння (7.1), про які йдеться в лемі 7.1, тобто

$$X(x) = \sum_{i=0}^{s-1} X_i x^{s-1-i}.$$

Покладемо $l \geqslant r + s - 1$. Тоді

$$Y(x) = \sum_{i=0}^{l-s} Y_i x^{l-s-i}.$$

Запишемо супровідні матриці матричних поліномів $A(x)$ і $B(x)$:

$$W_A = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & & -A_r \\ I_n & \mathbf{0} & \dots & & -A_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I_n & -A_1 \end{Vmatrix},$$

$$W_B = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & I_m & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & I_m \\ -B_s & -B_{s-1} & \dots & -B_1 \end{Vmatrix}.$$

Далі покладемо:

$$R_0 = -C_0, \quad R_p = -C_p - \sum_{i=0}^{p-1} R_i B_{p-i},$$

$$p = 1,\ 2,\ \dots,\ l-(r+s-1),$$

$$S_q = C_{l-q} + \sum_{i+j=l-q} R_i B_j, \quad q = 0,\ 1,\ \dots,\ l, \quad B_0 = I_m.$$

Розглянемо рівняння

$$W_A Z - Z W_B = D, \qquad (7.2)$$

де $D = \|D_{ij}\|_1^{r,s}$, D_{ij} — $n{\times}m$-матриці над $\mathbf{F}$, що задовольняють співвідношення

$$\sum_{i+j=t+2} D_{ij} = S_i, \quad t = 0,\ 1,\ \dots,\ r+s-2; \qquad (7.3)$$

$Z = \|Z_{ij}\|_1^{r,s}$, Z_{ij} — невідомі $n{\times}m$-матриці над $\mathbf{F}$. Безпосередня перевірка засвідчує, що, коли Z — розв'язок рівняння (7.2), то $X(x), Y(x)$ з

$$X_{s-i} = -Z_{ri}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ s,$$

$$Y_u = R_u, \quad u = 0,\ 1,\ \dots,\ l-(r+s),$$

$$Y_{l-(r+s-1)} = -Z_{rs} + R_{l-(r+s-1)},\ Y_{l-(s-1)-j} = -Z_{js},$$

$j = 1,\ 2,\ \dots,\ r-1$ — розв'язок рівняння (7.1). Навпаки, з розв'язку $X(x), Y(x)$ рівняння (7.1) можна утворити розв'язок Z рівняння (7.2).

Якщо $l < r+s-1$, то в (7.3) покладаємо $S_t = 0$ при $t = l+1,\ t = l+2,\ \dots,\ r+s-2$ і

$$X_{s-i} = -Z_{ri},\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ s,\ \ Y_{r-j} = -Z_{js},\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ r.$$

Цей випадок розглянуто в праці [129]. Оскільки

$$\det(I_{rn}x - A) = \det A(x), \quad \det(I_{sm}x - B) = \det B(x)$$

і рівняння (7.2) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\big(\det(I_{rn}x - A), \det(I_{sm}x - B)\big) = 1,$$

то маємо наступну лему.

Лема 7.2. *Рівняння (7.1) має єдиний розв'язок*

$$X(x),\ Y(x),\quad \deg X < \deg B$$

тоді і тільки тоді, коли

$$(\det A(x), \det B(x)) = 1.$$

Зауважимо, що за існування і єдиності розв'язку рівняння (7.2) можна навести і явний вираз для Z (див., наприклад, [124]).

7.2. Мінори блочних матриць та їх блоків

У цьому підрозділі сформулюємо допоміжні леми, які використовуватимемо в подальшому викладі.

Нехай $L(x)$ — $n \times n$-матриця над $\mathbf{F}[x]$, $\det L(x) \not\equiv 0$ і $L(x)$ зображена у вигляді добутку $n \times n$-матриць $N(x)$ і $H(x)$:

$$L(x) = N(x)H(x)$$

або у блочному вигляді

$$\left\| \begin{matrix} L_1(x) \\ L_2(x) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{matrix} \right\| H(x), \tag{7.4}$$

де $L_i(x)$ і $N_i(x)$ — $n_i \times n$-матриці, $i = 1,\ 2$. Надалі $d_k^L(x)$ означатимемо найбільший спільний дільник мінорів порядку k матриці $L(x)$.

Лема 7.3. *Нехай*

$$(\det N(x), \det H(x)) = \mu(x)$$

і

$$(\det N(x), d_{n_i}^{L_i}(x)) = \varphi_i(x),\ \ i = 1, 2.$$

Якщо

$$(\mu(x), d_{n-1}^{L}(x)) = 1,$$

то

$$d_{n_i}^{N_i}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Доведення. Покладемо $i = 1$.

Очевидно, що $d_{n_1}^{N_1}(x)|\varphi_1(x)$. Припустимо, що $d_{n_1}^{N_1}(x) \neq \varphi_1(x)$, тобто

$$\frac{\varphi_1(x)}{d_{n_1}^{N_1}(x)} = \psi_1(x) \ \text{ і } \deg\psi_1 > 0.$$

Матрицю $N_1(x)$ зобразимо у вигляді

$$N_1(x) = G_1(x) N_1^1(x),$$

де $G_1(x)$ — $n_1 \times n_1$-матриця така, що

$$\det G_1(x) = d_{n_1}^{N_1}(x).$$

З рівності

$$L_1(x) = N_1(x) H(x)$$

випливає, що

$$L_1(x) = G_1(x) L_1^1(x).$$

Тоді з рівності (7.4) отримуємо:

$$\left\| \begin{matrix} L_1^1(x) \\ L_2(x) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} N_1^1(x) \\ N_2(x) \end{matrix} \right\| H(x). \tag{7.5}$$

Нехай x_0 — корінь полінома $\psi_1(x)$ (x_0 може належати розширенню $\mathbf{F}_{\psi_1}$ поля $\mathbf{F}$). Нехай

$$(\det N(x), \det H(x)) = \mu(x).$$

Покладемо $\mu(x_0) = 0$. Оскільки рядки матриці $N_1^1(x_0)$ лінійно незалежні, то, додаючи до деякого i-го рядка матриці $N_2(x_0)$ лінійні комбінації решти її рядків і рядків матриці $N_1^1(x_0)$, отримуємо нульовий рядок, тобто рівність (7.5) перетворюється в рівність

$$\left\| \begin{matrix} L_1^1(x_0) \\ L_2^1(x_0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} N_1^1(x_0) \\ N_2^1(x_0) \end{matrix} \right\| H(x_0),$$

де в матрицях $N_2^1(x_0)$ і $L_2^1(x_0)$ i-ті рядки нульові. Звідси випливає, що $\operatorname{rang} L(x_0) \leqslant n-2$, що є неможливо.

Якщо $\mu(x_0) \neq 0$, то з рівності

$$L_1(x_0) = N_1(x_0)H(x_0)$$

маємо, що $\operatorname{rang} L_1(x_0) = n_1$, а це також неможливо. Отже,

$$d_{n_1}^{N_1}(x) = \varphi_1(x).$$

Для $i = 2$ доведення леми виконуємо аналогічно.

Лема 7.4. *Нехай*

$$(d_{n_1}^{L_1}(x), d_{n_2}^{L_2}(x)) = \rho_{12}(x)$$

і

$$(\rho_{12}(x), \mu(x)) = 1.$$

Якщо

$$d_{n_1}^{L_1}(x) d_{n_2}^{L_2}(x) = \det L(x),$$

то

$$d_{n_1}^{N_1}(x) d_{n_2}^{N_2}(x) = \det N(x).$$

Довести цю лему легко, використовуючи міркування, наведені під час доведення леми 7.3.

7.3. Факторизація клітково-трикутних матриць

Розглянемо верхню клітково-трикутну поліноміальну матрицю $T(x) \in M(n, \mathbf{F}[x])$, тобто

$$T(x) = \left\| \begin{array}{cccc} T_{11}(x) & T_{12}(x) & \dots & T_{1k}(x) \\ \mathbf{0} & T_{22}(x) & \dots & T_{2k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & T_{kk}(x) \end{array} \right\|,$$

де $T_{ij}(x) \in M(n_i, n_j, \mathbf{F}[x])$. Нехай матриця $T(x)$ розкладна на множники, тобто

$$T(x) = B(x)C(x), \tag{7.6}$$

де $B(x)$ — унітальна поліноміальна матриця степеня $s \geqslant 1$.

Природно виникає питання: в якому випадку множники $B(x)$ і $C(x)$ у цьому розкладі (7.6) є такого ж клітково-трикутного вигляду, як і матриця $T(x)$?

Встановимо умови, за яких факторизація (7.6) клітково-трикутної матриці $T(x)$ є клітково-трикутною, тобто така, що її множники $B(x)$ і $C(x)$ є такого ж клітково-трикутного вигляду, як і матриця $T(x)$.

Нехай клітково-трикутна матриця $T(x)$ розкладна на множники вигляду (7.6). Матриці $B(x)$ і $C(x)$ запишемо у відповідному до матриці $T(x)$ блочному вигляді, тобто

$$T(x) = \|B_{ij}(x)\|_1^k \cdot \|C_{ij}(x)\|_1^k, \tag{7.7}$$

де $B_{ij}(x), C_{ij}(x) \in M(n_i, n_j, \mathbf{F}[x])$.

Якщо факторизація (7.7) клітково-трикутної матриці $T(x)$ є клітково-трикутною, то, очевидно, що

$$\det B(x) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(x), \tag{7.8}$$

де $\deg \varphi_i = sn_i$ і $\varphi_i(x) | \det T_{ii}(x)$ для всіх $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Отже, умова (7.8) є необхідною для існування клітково-трикутної факторизації клітково-трикутної матриці.

Теорема 7.1. *Нехай клітково-трикутна матриця $T(x)$ і визначник $\det B(x)$ зображені у виглядах (7.7) і (7.8), відповідно. Якщо*

$$\big((\det B(x), \det C(x)),\ d_{n-1}^{T}(x)\big) = 1,$$

то факторизація (7.7) матриці $T(x)$ є клітково-трикутною, тобто

$$B_{ij}(x) = C_{ij}(x) = 0, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ i > j.$$

Доведення. Покладемо $k = 2$, тобто

$$\left\| \begin{matrix} T_{11}(x) & T_{12}(x) \\ \mathbf{0} & T_{22}(x) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{matrix} \right\| C(x). \tag{7.9}$$

Нехай $\delta_2(x)$ — найбільший спільний дільник мінорів порядку n_2 матриці

$$B_2(x) = \| \ B_{21}(x) \quad B_{22}(x)\ \|.$$

Оскільки

$$\varphi_2(x) | \det T_{22}(x) \text{ і } \varphi_2(x) | \det B(x),$$

то на підставі леми 7.3 маємо, що $\varphi_2(x)|\delta_2(x)$. Оскільки $\deg B_2 = s$, то $\deg \delta_2 \leqslant sn_2$. Отже,

$$\deg \delta_2 = sn_2 \text{ і } \delta_2(x) = \varphi_2(x).$$

Оскільки $\deg B_{22} = s$, а $\deg B_{21} < s$, то $B_{21}(x) = 0$. Тоді у рівності (7.9) матриця $C(x)$ має такий же клітково-трикутний вигляд, тобто для $k = 2$ теорема доведена. Для довільного k її легко довести індукцією за k.

Наслідок 7.1. *Нехай виконується хоч би одна з умов:*

1) $(\det B(x), \det C(x)) = 1$;

2) *Матриця* $T(x)$ *має тільки один відмінний від одиниці інваріантний множник.*

Тоді кожна факторизація матриці $T(x)$ *з умовою (7.8) є клітково-трикутною.*

Теорема 7.2. *Нехай*

$$\Big(\det T_{ii}(x), \prod_{j=i+1}^{k} \varphi_j(x)\Big) = \nu_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1.$$

Якщо

$$(\nu_i(x), d_{n-1}(x)) = 1,$$

то факторизація (7.6) матриці $T(x)$ *клітково-трикутна.*

Доведення. Покладаючи $k = 2$, аналогічно, як під час доведення леми 7.3, показуємо, що в (7.9) $\delta_2(x) = \varphi_2(x)$. Далі діємо, як під час доведення теореми 7.1.

Наслідок 7.2. *Нехай*

$$(\det T_{ii}(x), \det T_{jj}(x)) = \rho_{ij}(x), \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k, \quad i \neq j.$$

Якщо

$$(\rho_{ij}(x), d_{n-1}(x)) = 1,$$

то факторизація (7.6) матриці $T(x)$ *клітково-трикутна.*

Нехай діагональні клітки $T_{ii}(x)$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ k$, клітково-трикутньої матриці $T(x)$ розкладені на множники

$$T_{ii}(x) = B_{ii}(x) C_{ii}(x), \tag{7.10}$$

де $B_{ii}(x)$ — унітальні матриці степеня $s \geqslant 1$.

Теорема 7.3. *Матриця* $T(x)$ *розкладена у добуток клітково-трикутних множників, тобто*

$$T(x) = \left\| \begin{array}{cccc} B_{11}(x) & X_{12}(x) & \ldots & X_{1k}(x) \\ \mathbf{0} & B_{22}(x) & \ldots & X_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & B_{kk} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccc} C_{11}(x) & Y_{12}(x) & \ldots & Y_{1k}(x) \\ \mathbf{0} & C_{22}(x) & \ldots & Y_{2k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & C_{kk} \end{array} \right\|, \tag{7.11}$$

де перший множник $B(x)$ *— унітальний степеня* s *тоді і тільки тоді, коли система матричних лінійних рівнянь*

$$B_{ii}(x) Y_{ij}(x) + X_{ij}(x) C_{jj}(x) + \sum_{l=i+1}^{j-1} X_{il}(x) Y_{lj}(x) = T_{ij}(x), \tag{7.12}$$

$1 \leqslant i < j \leqslant k$, *має розв'язки.*

Доведення. Очевидно, що з існування факторизації (7.11) матриці $T(x)$ випливає розв'язність системи рівнянь (7.12).

Розв'язок системи рівнянь (7.12) зводиться до послідовного розв'язування рівнянь типу (7.1). Тому на основі леми 7.1, серед розв'язків системи рівнянь (7.12), існують такі розв'язки

$$X_{ij}(x),\ Y_{ij}(x),\quad i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ j<i,$$

що $\deg X_{ij} < s$, тобто матриця $T(x)$ має факторизацію вигляду (7.11), в якій перший множник унітальний.

Теорема доведена.

Беручи до уваги лему 7.2, отримуємо таке твердження.

Наслідок 7.3. *Нехай виконується принаймні одна з умов:*

1) $(\det B_{ii}(x),\ \det C_{i+j,i+j}(x))=1,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$
$j=1,\ 2,\ldots,k-i;$

2) $\left(\prod\limits_{i=1}^{k}\det B_{ii}(x),\prod\limits_{i=1}^{k}\det C_{ii}(x)\right)=1;$

3) $(\det T_{ii}(x),\ \det T_{jj}(x))=1,\quad i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ i\neq j.$

Тоді матриця $T(x)$ має клітково-трикутну факторизацію вигляду (7.11). При цьому, якщо $T(x)$ — регулярна матриця, то кожній факторизації (7.15) діагональних клітинок $T_{ii}(x)$ відповідає єдина факторизація (7.11) матриці $T(x)$.

7.4. Факторизація клітково-діагональних матриць

Тепер розглянемо клітково-діагональну матрицю

$$D(x)=\operatorname{diag}\{D_1(x),\ D_2(x),\ \ldots,\ D_k(x)\}=$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} D_1(x) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2(x) & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & D_k(x) \end{array} \right\|, \qquad (7.13)$$

де $D_i(x) \in M(n_i, \mathbf{F}[x])$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ і $\det A(x) \not\equiv 0$. Нехай матриця $D(x)$ розкладна на множники, тобто

$$D(x) = B(x)C(x), \qquad (7.14)$$

де $B(x)$ — унітальна матриця степеня $s \geqslant 1$.

Вкажемо умови, за яких факторизація (7.14) клітково-діагональної матриці $D(x)$ є клітково-діагональною, тобто множники $B(x)$ і $C(x)$ є клітково-діагонального вигляду (7.13).

Теорема 7.4. *Нехай*

$$(\det D_i(x),\ \det D_j(x)) = \rho_{ij}(x), \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ i \neq j$$

і

$$(\det B(x),\ \det C(x)) = \mu(x).$$

Якщо

$$(\mu(x),\ \rho_{ij}(x)) = 1, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ i \neq j,$$

то факторизація (7.14) матриці $D(x)$ — клітково-діагональна, тобто множники

$$B(x) = \operatorname{diag}\{B_1(x),\ B_2(x),\ \ldots,\ B_k(x)\},$$

$$C(x) = \operatorname{diag}\{C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots,\ C_k(x)\}$$

є клітково-діагонального вигляду (7.13), де

$$B_i(x), C_i(x) \in M(n_i, P[x]), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Доведення. Покладемо $k = 2$, тобто

$$\left\| \begin{array}{cc} D_1(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2(x) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{array} \right\| C(x). \qquad (7.15)$$

Нехай $\delta_i(x)$ — найбільший спільний дільник мінорів порядку n_i матриці

$$\| \; B_{i1}(x) \; B_{i2}(x) \; \|, \quad i = 1, \; 2.$$

На основі леми 7.4 маємо, що

$$\deg \delta_i = sn_i, \quad i = 1, 2.$$

Тому $B_{12}(x) = 0$ і $B_{21}(x) = 0$. Тоді $C(x)$ має такий самий клітково-діагональний вигляд. Отже, факторизація (7.15) матриці $D(x)$ є клітково-діагональною.

Для довільного k доведення проводимо за індукцією.

Теорема доведена.

Наслідок 7.4. *Якщо виконується принаймні одна із умов*

1) $(\det D_i(x), \det D_j(x)) = 1, \quad i, j = 1, \; 2, \; \ldots, \; k, \; i \neq j;$

2) $(\det B(x), \; \det C(x)) = 1,$

то кожна факторизація клітково-діагональної матриці $D(x)$, *в якій перший множник унітальний, є клітково-діагональною.*

Зауважимо, що для випадку, коли поле $\mathbf{F}$ алгебраїчно замкнtyt характеристики нуль і $s = 1$, тобто множник $B(x)$ лінійний, твердження 2) останнього наслідку сформульовано у працях [59] і [49].

Таким чином, якщо факторизації клітково-діагональної матриці $D(x)$ є клітково-діагональними, то їх факторизація зводиться до факторизації її діагональних кліток.

Розділ 8
СТАНДАРТНА ФОРМА ПАР МАТРИЦЬ ТА ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ

У цьому розділі на основі встановленої стандартної форми пари матриць описано (Φ, Ψ)-факторизації матриць над адекватними кільцями. Встановлено умови, за яких факторизації матриці є (Φ, Ψ)-факторизаціями, та вказано вигляд усіх таких факторизацій. Сформульовано критерії однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць та їх дільників із заданими канонічними діагональними формами.

8.1. Подільність матриць

Нехай R — адекватне кільце, A і B — матриці над кільцем R і матриця B є дільником матриці A. Тоді, як показано у підрозділі 3.6, канонічна діагональна форма D^B матриці B є дільником канонічної діагональної форми D^A матриці A. Обернене твердження хибне. Тому виникає питання: за яких умов із того, що канонічна діагональна форма матриці B є дільником канонічної діагональної форми матриці A, випливає, що матриця B є дільником матриці A?

Ця задача пов'язана із діагоналізовністю пари матриць (A, B) узагальнено еквівалентними перетвореннями.

Дійсно, якщо $D^B | D^A$ і пара матриць (A, B) діагоналізовна, тобто
$$D^A = D^B \Psi \tag{8.1}$$
і
$$UAV_1 = D^A, \; UBV_2 = D^B \tag{8.2}$$
для деяких оборотних над R матриць U, V_1, V_2, то зі співвідношень (8.1) і (8.2) одержуємо, що
$$A = BC, \quad C = V_2 \Psi V_1^{-1}.$$
Зрозуміло, що обернене твердження невірне.

У багатьох випадках ці умови є необхідними і достатніми для подільності матриці A на матрицю B.

Теорема 8.1. *Нехай* $A \in M(m, n, R)$, $B \in M(m, R)$ *і* $d_m^A \neq 0$, $\det B \neq 0$. *Нехай далі* $D^B | D^A$, *тобто*
$$D^A = \operatorname{diag}(\mu_1^B, \; \mu_2^B, \; \ldots, \; \mu_m^B) \operatorname{diag}(\psi_1, \; \psi_2, \; \ldots, \; \psi_m) \tag{8.3}$$
і
$$\left(\frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}, (\psi_i, \psi_j) \right) = 1, \quad i, j = 1, \; 2, \; \ldots, \; m, \; i > j. \tag{8.4}$$
Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) *пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць* (D^A, D^B)*;*

2) *матриця* B *є лівим дільником матриці* A.

Доведення. Якщо пари матриць (A_1, B_1) і (A_2, B_2) є узагальнено еквівалентні і $B_2 | A_2$, то легко бачимо, що і $B_1 | A_1$. Отже, із твердження 1) випливає твердження 2).

Нехай тепер матриця B є лівим дільником матриці A, тобто

$$A = BC. \tag{8.5}$$

Тоді на основі теореми 3.3 пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари (D^A, T^B), де

$$D^A = UAV_1 = \mathrm{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \ldots,\ \mu_m^A),$$

$$T^B = UBV_2 = \left\| \begin{array}{cccc} \mu_1^B & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1}\mu_1^B & b_{m2}\mu_2^B & \ldots & \mu_m^B \end{array} \right\|$$

для деяких матриць $U, V_2 \in GL(m, R),\ V_1 \in GL(n, R)$.

Тоді із рівності (8.5) одержуємо рівність

$$D^A = T^B C_1, \tag{8.6}$$

де $C_1 = V_2^{-1} C V_1$ — нижня трикутна матриця вигляду (3.3) з головною діагоналлю

$$\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m).$$

Із співвідношення (8.6) отримуємо рівності

$$b_{ij}\psi_j\mu_j^B + \sum_{k=j+1}^{i} b_{ik}c_{kj}\mu_k^B = 0, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots, m,\ i > j,$$

або після скорочення на μ_j^B

$$b_{ij}\psi_j + \sum_{k=j+1}^{i} b_{ik}c_{kj}\frac{\mu_k^B}{\mu_j^B} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{8.7}$$

де $b_{ik} = 1$ при $k = i$. Із рівності (8.7), враховуючи умови (8.4), одержуємо, що

$$(\psi_j, \psi_k)|c_{ij}, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots, m,\ i > j$$

для всіх $k = i+1,\ i+2,\ \ldots, m$. На основі леми 3.3 матриця C_1 із рівності (8.6) еквівалентна до матриці Ψ. Очевидно, що і матриця C із (8.5) еквівалентна до матриці

$$\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m)$$

із рівності (8.3). На основі теореми 3.8 пара матриць (A, B) діагоналізовна, тобто із твердження 2) випливає твердження 1).

Теорема доведена.

Наслідок 8.1. *Нехай*

$$A \in M(m, n, R),\ B \in M(m, R), \quad d_m^A \neq 0,\ \det B \neq 0.$$

Нехай $D^A = D^B \Psi$ *для деякої діагональної матриці* $\Psi \in M(m, n, R)$ *і виконується принаймні одна із умов:*

1) $(\det D^B, \det \Psi) = 1$*;*

2) $(\det D^B, \det \Psi, \mu_{m-1}^A) = 1$*;*

3) $(\mu_i^A, \mu_m^B) = \mu_i^B$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$.

Тоді наступні твердження є еквівалентними:

1) *пара матриць* (A, B) *діагоналізовна;*

2) *матриця* B *є лівим дільником матриці* A.

Нехай $B, C, H \in M(n, R)$ і матриця H є лівим дільником добутку BC матриць B і C. Виникає питання: за яких умов матриця H є лівим дільником матриці B? Необхідною умовою для цього є те, що D^H є дільником D^B.

Лема 8.1. *Нехай B, C, H — неособливі матриці із $M(n, R)$, і матриця H є лівим дільником добутку матриць $BC = A$, а її канонічна діагональна форма D^H — дільником канонічної діагональної форми D^B матриці B, тобто $D^B = D^H \Lambda$,*

$$A = BC = HF \tag{8.8}$$

і тоді, відповідно,

$$D^A = D^B \Psi = D^H \Phi, \tag{8.9}$$

де

$$\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n),\ \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n)$$

— деякі діагональні матриці. Нехай далі виконується принаймні одна з умов:

1) *матриця C еквівалентна до матриці Ψ і*

$$\left(\frac{\mu_n^H}{\mu_i^H}, \psi_i\right) = 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \tag{8.10}$$

2) *матриця F еквівалентна до Φ і $D^{BC} = D^B D^C$.*

Тоді матриця H є лівим дільником матриці B, тобто $B = HB_1$.

Доведення. 1). На основі теорем 3.11 і 3.12 трійка матриць (A, B, H) узагальнено еквівалентна до трійки (D^A, D^B, T^H), тобто

$$UAV_1 = D^A,\ UBV_2 = D^B,\ UHV_3 = T^H \tag{8.11}$$

для деяких матриць $U, V_1, V_2, V_3 \in GL(n, R)$. Тоді із рівностей (8.8) і (8.11) одержуємо:

$$D^A = D^B \Psi = T^H F_1, \tag{8.12}$$

де F_1 — нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Φ. Тоді зі співвідношень (8.11) за умов (8.10) отримуємо, що Ψ є правим дільником F_1, тобто $F_1 = F_2 \Psi$. Тому із співвідношень (8.11) матимемо, що $D^B = T^H F_2$ або, враховуючи рівності (8.9), одержимо $B = HG$, де $G = V_3 F_2 V_2^{-1}$.

2) Із того, що $D^{BC} = D^B D^C$, маємо, що матриця C із рівності (8.8) еквівалентна до матриці Ψ із рівності (8.9). Тому, міркуючи, як і у попередньому випадку, із рівності (8.8) одержуємо рівність (8.11), де $\Psi = D^C$. Нижня трикутна матриця F_1 із співвідношень (8.11) еквівалентна до діагональної матриці Φ. Тоді на основі леми 3.2 існують такі нижні унітрикутні матриці S і W, що $SF_1W = \Phi$. Тоді із рівності (8.11) маємо:

$$D^B \Psi W = T^H S^{-1} \Phi$$

або

$$D^B W_1 \Psi = T^H S^{-1} \Phi,$$

де W_1 — нижня унітрикутна матриця. З останньої рівності, після скорочення на Ψ, легко одержуємо, що H є лівим дільником B.

Лема доведена.

Наслідок 8.2. *Нехай для матриць $B, C, H \in M(n, R)$ виконуються умови (8.8) і (8.9) леми 8.1. Якщо*

$$\Bigl(\frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}, (\psi_i, \psi_j)\Bigr) = 1, \ i, j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n, \ i > j \tag{8.13}$$

і

$$\Bigl(\frac{\mu_n^H}{\mu_i^H}, \psi_i\Bigr) = 1, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, n-1,$$

то матриця H є лівим дільником матриці B.

Дійсно, за виконання умови (8.13) матриця C із рівності (8.8) еквівалентна до матриці Ψ із рівності (8.9).

Наслідок 8.3. *Нехай $B, C, H \in M(n, R)$ і матриця H є лівим дільником добутку матриць BC, тобто $BC = HF$. Нехай виконується принаймні одна із умов:*

1) $(\det B, \det C) = 1$;

2) $(\det H, \det C) = 1$;

3) $\big((\det B, \det C), d_{n-1}^{BC}\big) = 1$;

4) $\big((\det H, \det C), d_{n-1}^{BC}\big) = 1$.

Тоді матриця H є лівим дільником матриці B.

8.2. Факторизація матриць

Нехай R – адекватне кільце, $A \in M(m, n, R)$, $\operatorname{rang} A = r$ і матриця A розкладена на множники

$$A = BC, \ B \in M(m, k, R), \ C \in M(k, n, R). \tag{8.14}$$

Тоді, згідно з лемою 3.10, факторизації (8.14) матриці A відповідає така факторизація її канонічної діагональної форми D^A:

$$D^A = D^B \Psi, \tag{8.15}$$

де Ψ — матриця вигляду (3.29). Це означає, що матриці A і B із рівності (8.14) еквівалентні відповідно до матриць D^A

і D^B із співвідношення (8.15). Матриця C із (8.14) може бути еквівалентною до матриці Ψ із (8.15) або ж ні.

Нехай канонічна діагональна форма D^A матриці A зображена у вигляді добутку

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_s,\ 0,\ \ldots,\ 0)\Psi, \tag{8.16}$$

де $\varphi_s \neq 0$ і $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Нагадаємо, що факторизацію (8.14) матриці A називають паралельною до факторизації (8.16) її канонічної діагональної форми D^A або (Φ, Ψ)-факторизацією, якщо матриця B із факторизації (8.14) еквівалентна до матриці Φ, а C еквівалентна до Ψ.

Зауважимо, що не для кожної факторизації поліноміальної матриці $A(x)$ із унітальними множниками існує факторизація її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, до якої факторизація поліноміальної матриці $A(x)$ паралельна (див. приклад 6.1). Так і для матриць над кільцем R не для кожної факторизації матриці $A \in M(m, n, R)$ існує факторизація її канонічної діагональної форми D^A, до якої вона є паралельною, тобто не кожна факторизація матриці A є (Φ, Ψ)-факторизацією.

Приклад 8.1. Нехай $R = \mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел і

$$A = \left\| \begin{matrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{matrix} \right\|$$

— матриця над $\mathbb{Z}$. Матриця A розкладна на множники
$A = BC$, де

$$B = \left\| \begin{matrix} 3 & 0 \\ t & 2 \end{matrix} \right\|, \quad C = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -t & 2 \end{matrix} \right\|, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{8.17}$$

Цій факторизації матриці A відповідає така факторизація її канонічної діагональної форми $D^A = \mathrm{diag}(2, 2^2 \cdot 3)$:

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^2 \cdot 3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\|; \quad D^A = \Phi\Psi. \tag{8.18}$$

При $t = 0$ факторизація (8.17) матриці A є паралельною до факторизації (8.18) її канонічної діагональної форми, а за будь-яких $t \in \mathbb{Z}$, $t \neq 0$ факторизації (8.17) цієї матриці не є паралельними.

Опишемо паралельні факторизації матриць, тобто встановимо умови паралельності факторизацій матриць, вкажемо їх вигляд та дамо критерій однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій.

Теорема 8.2. *Нехай* $A \in M(m, n, R)$, $m \leqslant n$ *і* $d_m^A \neq 0$. *Нехай далі канонічна діагональна форма* D^A *матриці* A *зображена у вигляді добутку*

$$D^A = \Phi\Psi =$$

$$= \mathrm{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m)\,\mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m), \tag{8.19}$$

де

$$\Phi \in M(m, R),\ \Psi \in M(m, n, R)\ \text{і}\ \varphi_i | \varphi_{i+1}, \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ m-1.$$

Якщо

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, (\psi_i, \psi_j)\right) = 1, \quad i, j = 1, \ldots, m,\ i > j, \tag{8.20}$$

то кожна факторизація

$$A = BC,\ B \in M(m, R),\ C \in M(m, n, R), D^B = \Phi \tag{8.21}$$

матриці A *є паралельною до факторизації (8.19) її канонічної діагональної форми.*

Доведення. Як відомо, пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари стандартної форми (D^A, T^B), тобто

$$UAV_1 = D^A, \ UBV_2 = T^B$$

для деяких матриць $U, V_2 \in GL(m, R), \ V_1 \in GL(n, R)$.

Тоді із рівності (8.21) одержуємо рівність

$$D^A = T^B C_1,$$

де $C_1 = V_2^{-1} C V$ – нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Ψ. Звідси, як і під час доведення теореми 8.1, матимемо, що за умови (8.20) матриця C_1 еквівалентна до матриці Ψ із (8.19), а отже, і матриця C із (8.21) еквівалентна до Ψ, тобто факторизація (8.21) матриці A є (Φ, Ψ)-факторизацією.

Теорема доведена.

Наслідок 8.4. *Якщо елементарні дільники* $(\epsilon_i)^{s_i}$ *матриці* $A \in M(m, n, R)$, $d_m^A \neq 0$, *що відповідають елементу* ϵ_i, *яких є більше ніж один, є простими, тобто для них* $s_i = 1$, *то кожна факторизація* $A = BC$ *матриці* A *є паралельною до факторизації* $D^A = D^B \Psi$ *її канонічної діагональної форми* D^A.

Наслідок 8.5. *Нехай* R *— комутативна область головних ідеалів,* $A \in M(m, n, R)$ *і*

$$d_m^A = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k},$$

де p_i *— нерозкладні елементи із кільця* R. *Якщо* $r_i \leqslant 2$, $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ k$, *то кожна факторизація* $A = BC$ *матриці* A *є паралельною до факторизації*

$$D^A = D^B \Psi$$

її канонічної діагональної форми D^A.

Означення 8.1. Факторизації $A = BC$ і $A = B_1C_1$ матриці A називають асоційованими, якщо

$$B_1 = BV,\ C_1 = V^{-1}C$$

для деякої оборотної матриці V.

Через $\{U\}_A$ і ${}_A\{V\}$ позначатимемо множини відповідно лівих і правих перетворювальних матриць матриці A до її канонічної діагональної форми D^A, тобто таких, що

$$U_iAV_i = D^A,\ \ U_i \in \{U\}_A, V_i \in_A \{V\}.$$

Теорема 8.3. *Нехай* $A \in M(m,n,R)$, $\operatorname{rang} A = r$ *і канонічна діагональна форма* D^A *матриці* A *зображена у вигляді*

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_s,\ 0,\ \ldots,\ 0)\times$$

$$\times \operatorname{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_r,\ 0,\ \ldots,\ 0), \tag{8.22}$$

де $\Phi \in M(m,R)$, $\Psi \in M(m,n,R)$ *і* $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$. *Тоді факторизації*

$$A = B_iC_i, \tag{8.23}$$

де $B_i = U_i^{-1}\Phi$, $C_i = \Psi V_i^{-1}$, $U_i \in \{U\}_A$, $V_i \in_A \{V\}$, *є всі з точністю до асоційовності, факторизації матриці* A, *паралельні до факторизації* (8.22) *її канонічної діагональної форми* D^A.

Доведення. Зрозуміло, що кожна факторизація вигляду (8.23) матриці A є паралельною до факторизації (8.22) її канонічної діагональної форми D^A.

Нехай тепер деяка факторизація $A = BC$ матриці A паралельна до факторизації (8.22) її канонічної діагональної форми D^A. Тоді на основі теореми 3.8 пара матриць (A, B) діагоналізується, тобто

$$UAV_1 = D^A, \; UBV_2 = D^B,$$

для деяких матриць $U, V_2 \in GL(m, R)$, $V_1 \in GL(n, R)$.

Із рівності $A = BC$ одержимо:

$$UAV_1 = (UBV_2)(V_2^{-1}CV_1),$$

де $UBV_2 = \Phi$, $V_2^{-1}CV_1 = \Psi$.

Звідси маємо, що

$$B = U^{-1}\Phi V_2^{-1}, \quad C = V_2 \Psi V_1^{-1},$$

де $U \in \{U\}_A$, $V_1 \in \{V\}_A$, тобто множники B і C факторизації матриці A, з точністю до асоційовності, мають вигляд (8.23).

Теорема доведена.

Зауваження 8.1. *Матриці $B_i = U_i^{-1}\Phi$, де U_i – всі матриці із множини $\{U\}_A$ є лівими дільниками матриці A. Оскільки не кожна відповідна факторизація матриці є паралельною до факторизації її канонічної діагональної форми (див. приклад 8.1), то це не всі, з точністю до правої асоційовності, ліві дільники з канонічною діагональною формою $D^{B_i} = \Phi$ матриці A.*

8.3. Однозначність паралельних факторизацій та дільників матриць

Нехай R – адекватне кільце.

Теорема 8.4. *Нехай* $A \in M(m,n,R)$, $\operatorname{rang} A = r$ *і канонічна діагональна форма* D^A *матриці* A *розкладна на множники*

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_r,\ \varphi_{r+1},\ \dots,\ \varphi_m)\times$$
$$\times\operatorname{diag}(\psi_1,\ \dots,\ \psi_r,\ \psi_{r+1},\ \dots,\ \psi_m), \qquad (8.24)$$

де $\Phi \in M(m,R)$, $\Psi \in M(m,n,R)$, Φ *є* d*-матрицею, тобто*

$$\varphi_i|\varphi_{i+1},\quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ s-1,\quad \varphi_s \neq 0,\ \varphi_{s+1} = \dots = \varphi_m = 0,$$

$r \leqslant s \leqslant m$. *Факторизація* $A = BC$ *матриці* A, *паралельна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми* D^A, *є єдиною з точністю до асоційовності тоді і тільки тоді, коли у факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми* D^A *матриця* Ψ *є* d*-матрицею і*

$$\varphi_{r+1} = \varphi_{r+2} = \dots = \varphi_m,\quad \psi_{r+1} = \psi_{r+2} = \dots = \psi_m.$$

Доведення. Припустимо, що виконуються умови теореми 8.4 і є дві факторизації матриці A

$$A = B_1C_1,\quad A = B_2C_2, \qquad (8.25)$$

паралельні до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A і Ψ — d-матриця.

Розглянемо можливі випадки щодо матриць Φ і Ψ.

1) Припустимо, що в (8.24)

$$s = m \quad \text{і}\quad \varphi_{r+1} = \varphi_{r+2} = \ \cdots\ = \varphi_m.$$

Тоді

$$\psi_{r+1} = \psi_{r+2} = \ \cdots\ = \psi_m = 0.$$

Згідно з теоремою 3.7 пара матриць (B_1, B_2) діагоналізовна, а тому на основі теореми 3.10 матриці B_1 і B_2 є право-асоційованими. Отже, і факторизації (8.25) матриці A є асоційованими.

2) Нехай тепер у (8.24)

$$\psi_{r+1} = \psi_{r+2} = \cdots = \psi_m \neq 0.$$

Тоді, очевидно,

$$\varphi_{r+1} = \varphi_{r+2} = \cdots = \varphi_m = 0.$$

Перейшовши до транспонованих матриць у факторизації (8.25) матриці A, одержимо попередній випадок.

3) Тепер припустимо, що

$$\varphi_i = \psi_i = 0, \quad i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ m.$$

Тоді на основі теореми 3.9 трійка матриць (A, B_1, B_2) діагоналізується, тобто

$$UAV = D^A,\ UB_1V_1 = D^{B_1},\ UB_2V_2 = D^{B_2}$$

для деяких матриць $U, V_1, V_2 \in GL(m, R)$, $V \in GL(n, R)$. Тому із факторизацій (8.25) одержимо:

$$UAV = (UB_1V_1)(V_1^{-1}C_1V) = (UB_2V_2)(V_2^{-1}C_2V)$$

або

$$\left\| \begin{matrix} D_r^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Phi_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \Psi_r & \mathbf{0} \\ F_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Phi_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \Psi_r & \mathbf{0} \\ F_2 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$D_r^A = \mathrm{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \ldots,\ \mu_r^A), \quad \Phi_r = \mathrm{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_r),$$

$$\Psi_r = \mathrm{diag}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_r).$$

Оскільки Ψ_r є d-матрицею, то звідси випливає, що факторизації (8.25) матриці A є асоційованими.

Тепер доведемо, що за невиконання хоч би однієї із умов теореми 8.4 факторизація $A = BC$ матриці A, яка паралельна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A, з точністю до асоційовності не є єдиною.

Нехай $A = BC$ — факторизація матриці A, паралельна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A. Тоді на основі теореми 3.8 пара матриць (A, B) діагоналізується, тобто

$$UAV_1 = D^A, \ UBV_2 = D^B = \Phi \tag{8.26}$$

для деяких матриць $U, V_2 \in GL(m, R)$, $V_1 \in GL(n, R)$, тобто

$$UAV_1 = (UBV_2)(V_2^{-1}CV_1) = \Phi\Psi. \tag{8.27}$$

Розглянемо можливі випадки.

1). Припустимо тепер, що Ψ не є d-матрицею, тобто ψ_i не ділить ψ_j для деяких $i, j, i < j$. Без обмеження загальності можна вважати, що $i = 1$, $j = 2$ і $m = n = 2$. Покажемо, що у цьому випадку є факторизація $A = B_1C_1$ матриці A, паралельна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A, яка не є асоційованою до факторизації $A = BC$.

Оскільки $\mu_1^A | \mu_2^A$, тобто $\varphi_1\psi_1 | \varphi_2\psi_2$, а ψ_1 не ділить ψ_2, то не важко бачити, що

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1\right) = \delta \neq 1.$$

Покладемо:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \delta\nu, \quad \psi_1 = \delta\gamma.$$

Тоді можемо записати таку факторизацію канонічної діагональної форми D^A матриці A:

$$\left\| \begin{matrix} \mu_1^A & 0 \\ 0 & \mu_2^A \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1\nu & \varphi_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \psi_1 & 0 \\ -\gamma & \psi_2 \end{matrix} \right\| = B_1C_1.$$

Або

$$A = (U^{-1}B_1)(C_1 V_1^{-1}) = B_2 C_2,$$

де матриці U і V_1 із співвідношень (8.26).

Матриці

$$\Phi = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{array} \right\| \text{ і } B_1 = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1 \nu & \varphi_2 \end{array} \right\|$$

не є правоасоційованими, а отже, і

$$B = U^{-1}\Phi V_2^{-1} \text{ і } B_2 = U^{-1}B_1$$

не є правоасоційованими.

Тому факторизації

$$A = BC \text{ і } A = B_2 C_2$$

матриці A не є асоційованими.

2). Тепер покладемо, що в (8.24) Ψ є d-матрицею. Але $\varphi_{r+1} \neq \varphi_{r+2}$ і без обмеження загальності вважаємо, що $n = r + 2$. Тоді пара матриць (A, B) діагоналізовна, тобто виконується співвідношення (8.26), і, як і в попередньому випадку, покажемо, що є принаймні дві факторизації матриці A, які є асоційованими.

Можливі два випадки:

1) $\varphi_{r+2} \neq 0$, тобто $\varphi_{r+2} = \varphi_{r+1}\gamma$, $\gamma \neq 1$;

2) $\varphi_{r+2} = 0$, $\varphi_{r+1} \neq 0$.

Розглянемо матриці

$$F_1 = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_{r+1} & 0 \\ 0 & \varphi_{r+2} \end{array} \right\|, \quad F_2 = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_{r+1} & 0 \\ b\varphi_{r+1} & \varphi_{r+2} \end{array} \right\|,$$

де

$b \not\equiv 0 \ (\ mod \ \gamma \ )$ у випадку а),

$b \neq 0$ у випадку б).

Тоді матриці F_1 і F_2 не є правоасоційованими, а отже, факторизації

$$D^A = (\Psi_r \oplus F_1)\Psi \text{ і } D^A = (\Phi_r \oplus F_2)\Psi$$

є неасоційованими. Враховуючи співвідношення (8.26) і (8.27), одержимо, що факторизація $A = B_1C_1$, де

$$B_1 = U^{-1}(\Phi_r \oplus F_2), \ C_1 = \Psi V_1^{-1},$$

є неасоційованою до факторизації $A = BC$.

3) Якщо Ψ є d-матрицею, але $\psi_i \neq \psi_j$, $i, j > r$, то міркуємо аналогічно, як і у попередньому випадку.

Доведення теореми завершено.

Наслідок 8.6. *Нехай* $A \in M(m, R)$, $\det A(x) \neq 0$ *і канонічна діагональна форма* D^A *матриці* A *розкладра на множники вигляду (8.24). Тоді факторизація* $A = BC$ *матриці* A, *паралельна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми* D^A, *визначена однозначно з точністю до асоційовності тоді і тільки тоді, коли у факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми* D^A *матриця* Ψ *є* d*-матрицею.*

Такий результат для матриць над кільцем головних ідеалів сформульовано у праці [7].

На основі леми 3.10 кожній факторизації $A = BC$ матриці A відповідає деяка факторизація вигляду (8.24) її канонічної діагональної форми D^A, тобто така, що $D^B = \Phi$. Тоді таку факторизацію матриці A називаємо відповідною до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A. Природно виникає питання: коли факторизація матриці A, що відповідає фіксованій факторизації вигляду (8.24) її канонічної діагональної форми D^A, визначена однозначно з точністю до асоційовності? Із однозначності з точністю до асоційовності факторизації $A = BC$ матриці A, паралельної до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A, не випливає однозначності з точністю до асоційовності відповідної факторизації матриці A до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми D^A, що легко видно із прикладу 8.1.

Теорема 8.5. *Нехай* $A \in M(m, n, R)$, $m \leqslant n$ *і*

$$D^A = \operatorname{diag}(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_r,\ 0, \ldots,\ 0), \quad \mu_r \neq 0$$

– канонічна діагональна форма матриці A. *Лівий дільник* $B \in M(m, R)$ *з канонічною діагональною формою*

$$D^B = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_s,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

матриці A *визначається однозначно з точністю до правої асоційовності, а отже і факторизація* $A = BC$ *матриці* A, *відповідна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми* D^A, *визначаються однозначно з точністю до асоційовності тоді і тільки тоді, коли* $s = m$ *і*

$$(\mu_i, \varphi_m) = \varphi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1, \tag{8.28}$$

або $s = r$ *і*

$$(\mu_i, \varphi_r) = \varphi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1. \tag{8.29}$$

Доведення. Справді, припустимо, що дві матриці B_1 і B_2 з канонічною діагональною формою $D^{B_1} = D^{B_2} = \Phi$ є дільниками матриці A, тобто

$$A = B_1 C_1 \text{ і } A = B_2 C_2. \tag{8.30}$$

За виконання умов (8.28) і (8.29) на основі теореми 3.14 маємо, що

$$D^A = D^{B_1} D^{C_1} \quad i \quad D^A = D^{B_2} D^{C_2}.$$

Тому на основі теореми 8.4 факторизації (8.30) матриці A є асоційованими, а отже, і дільники B_1 і B_2 матриці A є правоасоційованими.

Якщо $(\mu_i, \varphi_s) \neq \varphi_i$ для деякого i, тобто

$$\left(\frac{\varphi_s}{\varphi_i}, \psi_i\right) \neq 1,$$

то, як випливає з доведення теореми 8.4, існує дільник B_1 матриці A з канонічною діагональною формою $D^{B_1} = \Phi$, який не є асоційований до B.

Теорема доведена.

Наслідок 8.7. *Нехай* $A \in M(m, n, R)$, $\operatorname{rang} A = r$ *і канонічна діагональна форма* D^A *матриці* A *розкладена на множники вигляду (8.24), де*

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_s,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Факторизація $A = BC$ *матриці* A, *відповідна до факторизації (8.24) її канонічної діагональної форми* D^A, *тобто така, що* $D^B = \Phi$ *визначена однозначно з точністю до асоційовності, тоді і тільки тоді, коли* $s = m$ *і*

$$(\mu_i, \varphi_m) = \varphi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

або $s = r$ *і*

$$(\mu_i, \varphi_r) = \varphi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1.$$

8.4. Спільні дільники та взаємна простота матриць

Нехай R — адекватне кільце, $A_i \in M(m, n_i, R)$, $m \leq n_i$, $i = 1, 2$. Кажуть, що матриці A_1 і A_2 мають нетривіальний спільний лівий дільник, якщо

$$A_1 = BC_1,\ A_2 = BC_2,\ B \in M(m, R),$$

і B — необоротна матриця над R, тобто $\det B = b \notin U(R)$. Матриці A_1 і A_2 називають ліво взаємно простими, якщо вони не мають нетривіальних лівих спільних дільників. Спільний дільник B матриць A_1 і A_2 називають найбільшим спільним дільником, якщо кожний спільний дільник B_i матриць A_1 і A_2 є дільником B.

Відомий метод побудови найбільшого спільного дільника матриць A_1 і A_2 над кільцем головних ідеалів [194], [226]. Він грунтується на зведенні матриці $\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 \end{matrix} \right\|$ до форми Ерміта. Відомо, що існує така матриця $V \in GL(n_1 + n_2, R)$, що

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 \end{matrix} \right\| V = \left\| \begin{matrix} B & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \quad B \in M(m, R).$$

Тоді матриця B є найбільшим спільним лівим дільником матриць A_1 і A_2. Очевидно, що кожний дільник B_i матриці B є спільним дільником матриць A_1 і A_2.

Встановимо зв'язки між спільними дільниками матриць A_1 і A_2, їх канонічних діагональних форм D^{A_1} і D^{A_2} та спільними дільниками матриць D^{A_1} і T^{A_2}, де (D^{A_1}, T^{A_2}) — стандартна форма пари матриць (A_1, A_2).

Якщо матриця B є дільником матриці A, то канонічна діагональна форма D^B матриці B є дільником канонічної діагональної форми D^A, тобто $D^A = D^B \Psi$. Правильне і обернене твердження: якщо d-матриця Φ є дільником канонічної діагональної форми D^A матриці A, то існує матриця B з канонічною діагональною формою $D^B = \Phi$ і B є дільником матриці A: $A = BC$.

Тепер, якщо B є спільним дільником матриць A_1 і A_2, то $D^B = \Phi$ є спільним дільником канонічних діагональних форм D^{A_1} і D^{A_2} матриць A_1 і A_2, тобто

$$D^{A_1} = \Phi\Psi_1, \quad D^{A_2} = \Phi\Psi_2. \tag{8.31}$$

Але, якщо d-матриця Φ є спільним дільником канонічних діагональних форм D^{A_1} і D^{A_2}, тобто справедливе співвідношення (8.31), то може не існувати матриці B з канонічною діагональною формою $D^B = \Phi$, що B є спільним дільником матриць A_1 і A_2. Вкажемо умови, за яких це справджується.

Теорема 8.6. *Нехай*

$$A_i \in M(m, n_i, R), \quad m \leq n_i, \ \operatorname{rang} A_i = r_i, \ i = 1, 2$$

і покладемо $r_1 \geq r_2$. *Нехай далі*

$$D^{A_1} = \operatorname{diag}(\mu_1^{A_1}, \ \ldots, \ \mu_{r_1}^{A_1}, \ 0, \ \ldots, 0),$$

$$D^{A_2} = \operatorname{diag}(\mu_1^{A_2}, \ \ldots, \ \mu_{r_2}^{A_2}, \ 0, \ \ldots, 0),$$

— канонічні діагональні форми матриць A_1, A_2 *і* $(D^{A_1}, T^{A_2} = TD^{A_2})$ *— стандартна форма пари матриць* (A_1, A_2), *тобто*

$$UA_1V_1 = D^{A_1}, \ UBV_2 = T^{A_2}, \tag{8.32}$$

де $U \in GL(m, R)$, $V_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1, 2$ *і* T *є нижня трикутна матриця. Нехай далі* d*-матриця* $\Phi \in M(m, R)$

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_s, \ 0, \ \ldots, \ 0), \ \ \varphi_i | \varphi_{i+1}, \ \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ s-1$$

є спільним дільником канонічних діагональних форм D^{A_1} *і* D^{A_2} *матриць* A_1 *і* A_2*, тобто*

$$D^{A_1} = \Phi\Psi_1, \quad D^{A_2} = \Phi\Psi_2, \tag{8.33}$$

де Ψ_1 *є* d*-матрицею і* $s = r_1$ *або* $s = m$ *і*

$$\varphi_{r_1+1} = \varphi_{r_1+2} = \cdots = \varphi_m.$$

Існує спільний лівий дільник B *з канонічною діагональною формою* $D^B = \Phi$ *матриць* A_1 *і* A_2*, тобто*

$$A_1 = BC_1, \ A_2 = BC_2, \tag{8.34}$$

де матриця C_1 *еквівалентна до* Ψ_1 *тоді і тільки тоді, коли матриця* Φ *є спільним лівим дільником матриць* D^{A_1} *і* T^{A_2}.

Доведення. Нехай матриця $B \in M(m, R)$ є спільним лівим дільником матриць A_1 і A_2, тобто справедливе співвідношення (8.34). На основі теореми 3.12 пара матриць (A_1, A_2) узагальнено еквівалентна до пари $(D^{A_1}, T_2^{A_2} = \Phi T_2)$, тобто

$$U_1 A_1 \tilde{V}_1 = D^{A_1}, \ U_1 A_2 \tilde{V}_2 = T_2^{A_2} \tag{8.35}$$

для деяких матриць $U_1 \in GL(m, R)$, $\tilde{V}_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1, 2$. Тепер повинні показати, що матриця Φ є лівим дільником матриці $T^{A_2} = UA_2V_2$ із (8.35). Матриці U і U_1, які задовольняють відповідно рівності (8.32) і (8.35) зв'язані співвідношенням $U = HU_1$, де

$$H = \|h_{ij}\|_1^m, \ h_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_i^{A_1}}{\mu_j^{A_1}} h'_{ij}, \text{ якщо } i, j = 1, \ 2, \ \ldots, \ r, \ i > j, \\ 0, \qquad \text{якщо } i = r+1, \ 2, \ \ldots, \ m, \\ \qquad\quad j = 1, \ 2, \ \ldots, \ r. \end{cases}$$

Тоді

$$T^{A_2} = HT_2^{A_2} V_3, \quad V_3 = \tilde{V}_2^{-1} V_2.$$

Оскільки $D^{A_1} = \Phi\Psi_1$, то $H\Phi = \Phi H_1$ для деякої матриці $H_1 \in GL(m, R)$. Таким чином, $T^{A_1} = \Phi T$.

Нехай тепер матриця Φ є спільним лівим дільником матриць D^{A_1} і T^{A_2}, які складають стандартну пару (8.32). Тоді кожна матриця $U^{-1}\Phi = B$, де U задовольняє співвідношення (8.32) є спільним лівим дільником матриць A_1 і A_2.

Теорема доведена.

Зауваження 8.2. *Якщо у факторизаціях (8.33) канонічних діагональних форм D^{A_1} і D^{A_2} матриць A_1 і A_2 матриця Ψ_2 є d-матрицею і $s = r_2$ при $r_2 \geq r_1$ або $s = m$ і*

$$\varphi_{r_2+1} = \varphi_{r_2+2} = \cdots = \varphi_m,$$

то для матриць A_1 і A_2 існує спільний лівий дільник B з канонічною діагональною формою $D^B = \Phi$, тобто виконуються рівності (8.34) і матриця C_2 еквівалентна до Ψ_2 тоді і тільки тоді, коли матриця Φ є спільним лівим дільником матриць T^{A_1} і D^{A_2}, де (D^{A_2}, T^{A_1}) – стандартна форма пари матриць (A_2, A_1).

Це зауваження випливає із доведення теореми 8.8, при цьому розглядаємо пару матриць (A_2, A_1).

Наслідок 8.8. *Нехай $A_i \in M(m, R)$, $i = 1, 2$, $\det A_1 \neq 0$ і пара матриць (A_1, A_2) діагоналізовна, тобто матриці $(\operatorname{adj} A_1)A_2$ і $(\operatorname{adj} D^{A_1})D^{A_2}$ є еквівалентні. Існує спільний лівий дільник B з канонічною діагональною формою $D^B = \Phi$ матриць A_1 і A_2 тоді і тільки , коли матриця Φ є спільним дільником канонічних діагональних форм D^{A_1} і D^{A_2} матриць A_1 і A_2.*

Теорема 8.7. *Нехай $A_i \in M(m, R)$, $i = 1, 2$ і*

$$D^{A_1} = \operatorname{diag}(1, \ \ldots, 1, \ \varphi_m), \quad D^{A_2} = \operatorname{diag}(1, \ \psi_2, \ \ldots, \ \psi_m)$$

— канонічні діагональні форми матриць A_1 *і* A_2*. Матриці* A_1 *і* A_2 *є ліво взаємно простими тоді і тільки тоді, коли стандартною формою пари матриць* (A_1, A_2) *є пара* (D^{A_1}, T^{A_2})*, де*

$$T^{A_2} = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t & 0 & \ldots & 0 & \psi_m \end{array} \right\| \tag{8.36}$$

і

$$t = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } (\varphi_m, \psi_m) = 1, \\ 1, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Нехай матриці A_1 і A_2 є ліво взаємно простими. Тоді на основі теореми 3.2 пара матриць (A_1, A_2) узагальнено еквівалентна до стандартної пари $(D^{A_1}, T_1^{A_2})$, тобто

$$UA_1V_1 = D^{A_1},\ UBV_2 = T_1^{A_2}, \tag{8.37}$$

де $U \in GL(m, R),\ V_i \in GL(n_i, R),\ i = 1, 2$ і

$$T_1^{A_2} = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_{m-1} & 0 \\ t_1 & t_2\psi_2 & \ldots & t_{m-1}\psi_{m-1} & \psi_m \end{array} \right\|.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (8.37), не складно переконатися, що і матриці D^{A_1} і $T_1^{A_2}$ є ліво взаємно простими. Тому

$$(\varphi_m,\ (t_1,\ t_2\psi_2,\ \ldots,\ t_{m-1}\psi_{m-1},\ \psi_m)) = 1.$$

На основі наслідку 3.6 пара матриць $(D^{A_1}, T_1^{A_2})$ узагальнено еквівалентна до пари (D^{A_1}, T^{A_2}), де матриця T^{A_2} має вигляд (8.36).

Тепер нехай пара матриць (A_1, A_2) узагальнено еквівалентна до пари (D^{A_1}, T^{A_2}), де матриця T^{A_2} має вигляд (8.36). Тоді на основі теореми 8.5 про однозначність дільника матриці із заданою канонічною діагональною формою маємо, що спільні ліві дільники B_i матриць D^{A_1} і T^{A_2} з точністю до правої асоційовності мають вигляд

$$B_i = \mathrm{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ \varphi_i),$$

де φ_i — дільники φ_m. Враховуючи вигляд матриці T^{A_2}, робимо висновок, що $\varphi_i = 1$. Таким чином, матриці D^{A_1} і T^{A_2} є ліво взаємно простими, а отже, такими є і матриці (A_1, A_2).

Теорема доведена.

8.5. Стандартна форма пар матриць та стабільний ранг кілець матриць[1]

Стабільний ранг є одним з основних інваріантів K-теорії. Це поняття, введене Х.Бассом [133], використовують в теорії кілець, зокрема в задачах діагональної редукції матриць [243], [244], [245]. Важливо вивчити зв'язки стабільного рангу кільця $M(n, R)$ матриць порядку n над R і стабільного рангу кільця R. У працях [10], [234] встановлено, що стабільний ранг r кільця матриць $M(n, R)$ дорівнює $1 + [\frac{r-1}{n}]$, де $[m]$ означає цілу частину числа m. Тому, якщо стабільний ранг кільця R дорівнює один або два, то стабільний ранг кільця матриць $M(n, R)$ дорівнює відповідно один або два.

[1]Ідея результату цього підрозділу належить Б.В.Забавському.

Серед кілець скінченного стабільного рангу слід виділити клас кілець елементарних дільників, який ввів І.Капланський [175]. Одним із прикладів кілець елементарних дільників, які не є кільцями головних ідеалів, є так звані адекватні кільця. Цей новий клас кілець елементарних дільників ввів О.Хелмер [165]. Відомо [26], що стабільний ранг адекватного кільця не перевищує двох. У багатьох випадках він дорівнює один.

Нехай R — адекватне кільце. Рядок

$$\|a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n\|$$

елементів кільця R називають унімодулярним (примітивним), якщо

$$a_1R \; + \; a_2R \; + \; \cdots \; + \; a_nR = R.$$

Стабільним рангом кільця R називають таке найменше натуральне число m, що для довільного унімодулярного рядка

$$\|a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_m \quad a_{m+1}\|$$

над кільцем R існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_m \in R$, що рядок

$$\|a_1 + a_{m+1}b_1 \quad a_2 + a_{m+1}b_2 \quad \ldots \quad a_m + a_{m+1}b_m\|$$

є унімодулярним. Якщо такого натурального числа не існує, то вважають, що стабільний ранг кільця дорівнює нескінченності [10], [243].

Набір матриць

$$(A_1, \; A_2, \; \ldots, \; A_k), \; A_i \in M(n, R), \; i = 1, \; 2, \; \ldots, \; k$$

називаємо простим (примітивним), якщо

$$A_1V_1 \; + \; A_2V_2 \; + \; \cdots \; + \; A_kV_k = I$$

для деяких матриць

$$V_i \in M(n,R),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

I — одинична матриця.

Як відомо, кожна матриця $A \in M(n,R)$ над адекватним кільцем R еквівалентна до канонічної діагональної форми D^A, тобто існують такі оборотні матриці $U, V \in GL(n,R)$, що

$$UAV = D^A = \operatorname{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \ldots,\ \mu_r^A,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

де $\mu_r^A \neq 0$ і $\mu_i^A | \mu_{i+1}^A,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1.$

У розділі 3 відносно введеної узагальненої еквівалентності встановлено стандартну форму $(D^A, T^B = TD^B)$ пари матриць (A,B), $A,B \in M(n,R)$. На основі цієї форми у кільці $M(n,R)$ матриць порядку n над адекватним кільцем R виділено клас матриць стабільного рангу один, коли кільце R може бути стабільного рангу більш ніж один.

Через $M'(2,R)$ позначатимемо клас таких матриць $\|a_{ij}\|_1^2$ другого порядку, що

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = 1.$$

Лема 8.2. *Нехай пара матриць* (A,B), $A,B \in M'(2,R)$ *є простою. Тоді пара матриць* (A,B) *узагальнено еквівалентна до стандартної пари* (D^A, T^B) *одного із таких виглядів:*

$$\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{matrix} \right\| \right),\ \textit{якщо}\ \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2, \qquad (8.38)$$

$$\textit{де}\ \ t = \begin{cases} 0, & \textit{якщо}\ (\varphi,\psi) = 1, \\ 1, & \textit{якщо}\ (\varphi,\psi) \neq 1; \end{cases}$$

$$\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{matrix} \right\|\right), \ \textit{якщо} \ \operatorname{rang} A = 1, \ \operatorname{rang} B = 2, \quad (8.39)$$

де $t = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \psi \in U(R), \\ 1, & (1)\ \psi \notin U(R), \end{cases}$

$U(R)$ — *група одиниць кільця* R;

$$\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|\right), \ \textit{якщо} \ \operatorname{rang} A = 1, \ \operatorname{rang} B = 1. \quad (8.40)$$

Доведення. Нехай (A, B) — проста пара і

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2.$$

Тоді на основі теореми 3.2 пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари (D^A, T^B) вигляду

$$\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{matrix} \right\|\right).$$

Спільні ліві дільники матриць D^A і T^B з точністю до правої асоційовності є вигляду $D_i = \operatorname{diag}(1, d_i)$, де $d_i | \varphi$ і $d_i | (t, \psi)$, тому, що в цьому випадку згідно із теоремою 8.5 дільники із заданою канонічною діагональною формою матриць D^A і T^B з точністю до правої асоційовності визначаються однозначно. Із того, що пара матриць (A, B) проста, випливає, що і її відповідна стандартна пара (D^A, T^B) проста. Це означає, що ліві спільні дільники матриць D^A і T^B є тривіальні. Тому $d_i = 1$ і $(\varphi, (t, \psi)) = 1$. Тоді на основі теореми 3.2 стандартна форма пари матриць (A, B) є вигляду (8.38).

У випадках, коли пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пар матриць виглядів (8.39) або (8.40) під час доведення леми міркуємо аналогічно.

Лема доведена.

Зауважимо, що у випадку, коли $\operatorname{rang} A = 0$, тобто $A = 0$ — нульова матриця і пара матриць (A, B) є простою, то, очевидно, що B — оборотна матриця і стандартною парою для (A, B) є пара $(\mathbf{0}, I)$.

Теорема 8.8. *Нехай пара матриць* (A, B), $A, B \in M'(2, R)$ *є простою, тобто*

$$AU + BV = I,\ U, V \in M(2, R). \tag{8.41}$$

Тоді існує така матриця $P \in M(2, R)$, *що*

$$AP + B = Q, \tag{8.42}$$

де Q *— оборотна матриця із* $GL(2, R)$.

Доведення. Зрозуміло, що кожна пара матриць (A_1, B_1), яка узагальнено еквівалентна до простої пари (A, B), є простою, тобто для неї справджується співвідношення вигляду (8.41). Тому достатньо показати, що із співвідношення (8.41) випливає (8.42) для пари матриць (D^A, T^B) у стандартній формі.

Нехай пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари вигляду (8.38). Тоді із співвідношення (8.42) матимемо:

$$D^A P + T^B = Q$$

або

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{matrix} \right\|, \tag{8.43}$$

де
$$q_1q_4 - q_2q_3 = 1. \tag{8.44}$$
Із співвідношення (8.43) одержуємо рівності
$$q_1 = p_1 + 1,\ q_2 = p_2,\ q_3 = \varphi p_3 + t,\ q_4 = \varphi p_4 + \psi. \tag{8.45}$$

Тоді із рівностей (8.44) і (8.45) отримаємо:
$$(p_1 + 1)(\varphi p_4 + \psi) - p_2(\varphi p_3 + t) = 1$$
або
$$\varphi(p_1p_4 + p_4 - p_2p_3) + \psi(p_1 + 1) - tp_2 = 1. \tag{8.46}$$

Нехай у стандартній парі матриць (8.38) $t = 0$. Тоді $(\varphi, \psi) = 1$ і діофантове рівняння
$$\varphi(p_1p_4 + p_4 - p_2p_3) + \psi(p_1 + 1) = 1$$
відносно $p_i,\ i = 1,\ \ldots,\ 4$ має розв'язки над R.

Нехай тепер $t = 1$. Тоді $(\varphi, \psi) \neq 1$. Покладемо у (8.46) $p_2 = -1$. Тоді із цього співвідношення одержимо рівняння
$$\varphi(p_1p_4 + p_4 + p_3) + \psi(p_1 + 1) = 0,$$
яке має розв'язки $p_i,\ i = 1,\ \ldots,\ 4$ над R.

Отже, існує така матриця P, що
$$D^AP + T^B = Q$$
— оборотна матриця.

У випадках, коли пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари матриць вигляду (8.39) або (8.40), теорему доводимо аналогічно.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Алиев Ф.А. *Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем.* – Баку: Элм, 1989. – 320 с.

[2] Алиев Ф.А., Ларин В.Б. *Особые случаи в задачах оптимизации стационарных линейных систем, функционирующих по принципу обратной связи* // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С. 3–26.

[3] Бабиков Г.В. *О факторизации матриц над телами и кольцами* // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 1. – С. 31–38.

[4] Бабиков Г.В. *О разложении матриц над некоторыми универсальными алгебрами* // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 5. – С. 1033–1035.

[5] Беллман Р. *Введение в теорию матриц:* Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

[6] Бондаренко В.М. *Зображення гельфандових графів.* – К.: Ін-т математики НАН України, 2005. – 228 с.

[7] Боревич З. И. *О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов* // Тез. докл. III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.

[8] Боревич З. И., Шафаревич И.Р. *Теория чисел.* – М.: Наука, 1985. – 504 с.

[9] Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра.* – М.: Наука, 1976. – 648 с.

[10] Васерштейн Л.Н. *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств* // Функц. анализ и его приложения. – 1971. – **5**, вып. 2. – С. 17 – 27.

[11] Веселов А.П. *Интегрируемые Лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочлнов* // Функц. анализ и его приложения. – 1991. – **25**, вып. 2. – С. 38–49.

[12] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[13] Гельфанд И.М., Пономарев В.А. *Неразложимые представления группы Лоренца* // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, № 2. – С. 3–60.

[14] Грига Б. С., Казімірський П. С. *До питання единості виділення унітального множника з матричного многочлена* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 4. – С. 293–295.

[15] Грига Б. С., Казимирский П. С. *К вопросу единственности выделения унитального множителя из матричного многочлена* // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 15–18.

[16] Гудивок П.М. *Об эквивалентности матриц над коммутативными кольцами* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 431–437.

[17] Джалюк Н. С. *Опис паралельних факторизацій многочленних матриць* // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. і інформ. – Ужгород: УжНУ, 2009. – Вип. 19. – С. 31–37.

[18] Джалюк Н.С., Петричкович В. М. *Про спільні унітальні дільники многочленних матриць із заданою канонічною діагональною формою* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 7–13.

[19] Джалюк Н. С., Петричкович В. М. *Про розв'язки матричних многочленних рівнянь і подібність матриць* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2005. – Вип. **48**, №4. – С. 14–19.

[20] Дрозд Ю.А. *Представления коммутативных алгебр* // Функ. анализ и его приложения. – 1972. – **6**, вып. 4. – С. 41–43.

[21] Дрозд Ю.А. *Ручные и дикие матричные задачи* // Представления и квадратичные формы. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 39–74.

[22] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. *Конечномерные алгебры.* – К.: Вищ. шк., 1980. – 192 с.

[23] Дубровин Н.И. *О кольцах с элементарными делителями* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 14–20.

[24] Забавський Б. В. *Узагальнено адекватні кільця* // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 554–557.

[25] Забавский Б. В., Казимирский П. С. *Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних*

преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 256–258.

[26] Забавський Б.В., Комарницький М.Я. *Теорема коенового типу для адекватності та кільця елементарних дільників* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – **49**, № 4. – С. 94 – 98.

[27] Забавський Б.В., Романів О.М. *Некомутативні області з елементарною редукцією матриць* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 133–137.

[28] Забавський Б.В., Романів О.М. *Кільця з елементарною редукцією матриць* // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1641–1649.

[29] Заторський Р.А. *Числення трикутних матриць та його застосування.* – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.

[30] Зелиско В.Р. *О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей* // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 807–810.

[31] Зелиско В.Р. *О строении одного класса обратимых матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – **12**. – С. 14–21.

[32] Зеліско В.Р. *Єдиність унітальних дільників матричного многочлена* //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – **30**. – С. 36–38.

[33] Зеліско В.Р. *Допустимі факторизації регулярних симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією* // Алгебра і топологія. – Львів: Львів. держ. ун-т, – 1996. – С. 94–103.

[34] Зеліско В.Р. *Симетричні матриці та їх прямі добутки над кільцями з інволюціями* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2005. – вип. 3 – С. 7–12.

[35] Зеліско В.Р., Кучма М.І. *Спільні дільники та спільні факторизації матричних многочленів* // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 111–118.

[36] Зеліско В.Р., Петричкович В. М. *Про спільні дільники многочленних матриць* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 56–60.

[37] Икрамов Х.Д. *Численное решение матричных уравнений.* – М.: Наука, 1984. – 192 с.

[38] Казімірський П. С. *До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники* // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 446–448.

[39] Казимирский П. С. *К разложению квадратной полиномиальной матрицы в произведение линейных множителей* // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 115–119.

[40] Казімірський П. С. *Про розклад поліноміальної матриці на множники* // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 7. – С. 847–849.

[41] Казімірський П. С. *Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники* // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1965. – № 3 – С. 53–60.

[42] Казімірський П. С. *Про одну необхідну умову розкладності поліноміальної матриці в добуток лінійних множників* // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1967. – № 16. – С. 93–95.

[43] Казімірський П. С. *Про виділення регулярного множника з матричного многочлена* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 8. – С. 686–687.

[44] Казимирский П. С. *Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры* // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 29–40.

[45] Казімірський П. С. *Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники* // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 5. – С. 653–658.

[46] Казімірський П. С. *Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів* // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 29–52.

[47] Казімірський П. С. *Розв'язання проблеми виділення регулярного множника з матричного многочлена* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1075–1078.

[48] Казимирский П. С. *Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена* // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.

[49] Казімірський П. С. *Розклад матричних многочленів на множники.* – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.

[50] Казимирский П.С. *Теорема об элементарных делителях в коммутативной области Безу* // XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тез. сообщ., ч. **II**. Минск, 14–17 сентября 1983. – С. 81.

[51] Казимирский П. С., Билонога Д. М. *Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с взаимно простыми элементарными делителями* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 4. – С. 8–9.

[52] Казімірський П. С., Зеліско В. Р. *Про виділення лінійного множника з матричного многочлена* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 11. – С. 968–970.

[53] Казімірський П. С., Зеліско В. Р. *Про виділення із поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта* // Теор. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 52–61.

[54] Казимирский П. С., Зелиско В.Р. *К выделению линейного множителя из матричного многочлена* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – **8**. – С. 10–16.

[55] Казімірський П.С., Луник Ф.П. *Дослідження з теорії елементарних дільників* // Доп. АН УРСР. – 1970. – № 1. – С. 7–9.

[56] Казимирский П. С., Мельник О. М. *Решение вопроса полускалярной эквивалентности многочленных матриц с попарно различными характеристическими корнями* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 9–12.

[57] Казимирский П. С., Мельник О. М. *Подобие и строение унитальных матричных квадратных трехчленов с попарно различными характеристическими корнями* // Зап. науч. сем. Ленинград. отделенияния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова: Кольца и модули. – 1989. – **175**. – С. 63–68.

[58] Казимирский П. С., Петричкович В. М. *Одно достаточное условие разложимости матричного квадратного трехчлена на линейные множители* // II Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Резюме сообщ., Кишинев, 21–25 авг. 1974 г. – Кишинев: Штиинца, 1974. – С. 29–30.

[59] Казімірський П. С., Петричкович В. М. *Зведення матричного квадратного тричлена з комутуючими коефіцієнтами до квазідіагонального виду і його розкладність на лінійні множники* // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1975. – № 106. – С. 97–102.

[60] Казімірський П. С., Петричкович В. М. *Про еквівалентність поліноміальних матриць* // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.

[61] Казимирский П. С.,Петричкович В. М. *Разложимость полиномиальной матрицы на линейные ножители* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – **8**. – С. 3–9.

[62] Казімірський П. С., Уханська Д. В. *Критерій існування кореня m-го степеня для довільної матриці* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 8. – С. 711–712.

[63] Казімірський П. С., *Урбанович М. М. Про розклад матричного двочлена на множники* // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 4. – С. 451–461.

[64] Казимирский П. С., Щедрик В. П. *О решениях матричных многочленных односторонних уравнений* // Докл. АН СССР. – 1989. – **304**, № 2. – С. 271–274.

[65] Келдыш М.В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 1. – С. 11–14.

[66] Келдыш М.В. *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов* // Успехи мат. наук. – 1971. – **27**, № 4. – С. 15–47.

[67] Комарницкий Н.Я. *Коммутативные адекватные области Безу и кольца элементарных делителей* // Алгебраические исследования. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 97–113.

[68] Комарницький М.Я. *Про кільця з майже інваріантними елементарними дільниками* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 21–29.

[69] Комарницкий Н.Я., Забавский Б.В. *О дистрибутивных кольцах элементарных делителей* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 7. – С. 1002–1004.

[70] Кравчук М.П. *Про квадратичні форми та лінійні перетворення* // Тр. фіз.-мат. відділу УАН. – 1924. – 1, вип. 3. – С. 1–91.

[71] Кравчук М.П., Гольдбаум Я.С. *Об эквивалентности особенных пучков матриц* // Тр. Киевс. авиац. ин-та. – 1928. – № 6. – С. 5–27.

[72] Кравчук М. *Вибрані математичні праці.* – Київ—Нью-Йорк: Ін-т математики НАН України, 2002. – 792 с.

[73] Крейн М.Г., Лангер Г. *К теории квадратических пучков самосопряженных операторов* // Докл. АН СССР. – 1964. – **154**, № 6. – С. 1258 – 1261.

[74] Крейн М.Г., Лангер Г. *О некоторых математических принципах теории демпфированных колебаний континуумов* // Труды междунар. симп. по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды. – М: Наука, 1965. – **2**. – С. 283–322.

[75] Крупник И. Н. *О разложении матричного пучка на линейные множители* // Мат. заметки. – 1991. – **49**, № 2. – С. 95–101.

[76] Ланкастер П. *Теория матриц:* Пер. с англ.– М.: Наука, 1978. – 280 с.

[77] Лопатинский Я.Б. *Разложение полиномиальной матрицы на множители*// Науч. записки Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – **38**, № 2. – С. 3–7.

[78] Лопатинский Я.Б. *О некоторых свойствах полиномиальных матриц* // Краевые задачи мат. физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 108–116.

[79] Малышев А.Н. *Факторизация матричных полиномов* // Сиб. мат. журнал. – 1982. – **23** , № 3. – С. 136–146.

[80] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры.* – М.: Наука, 1970. – 400 с.

[81] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*– Кишинев: Штиинца, – 1986. – 260 с.

[82] Маркус А.С., Мереуца И.В. *О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному пучку* // Изв. АН СССР. – Сер. мат. – 1973. – **37**, № 5. – С. 1108–1131.

[83] Маркус А.С., Мереуца И.В. *О некоторых свойствах простых λ-матриц* // Мат. исследования. – 1975. – **10**, № 3. – С. 207–214.

[84] Матвеев О.В. *Аппроксимация корней матричных уравнений степенными рядами* // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 4. – С. 613–621.

[85] Петков М. *Вьерху две квадратни матрични уравнения* // Физ.-мат. списание. – 1975.– **18**, № 3. – С. 126–127.

[86] Петричкович В. М., Шуляр М.А. *Об абсолютной разложимости матричного квадратного трехчлена* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – **1**. – С. 188–190.

[87] Петричкович В.М. *Розкладність матричного квадратного тричлена на лінійні множники і його звідність до блочних видів* // Матеріали II конф. молодих вчених Західного наук. центру АН УРСР. Уж. ун-т. Ужгород, 1975. – С. 60–64. – Деп. в ВИНИТИ 18 травня 1976 р., № 1734–76.

[88] Петричкович В. М. *Абсолютная разложимость матричных многочленов* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – **9**. – С. 37–41.

[89] Петричкович В. М. *О числе решений матричного уравнения* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – **12**. – С. 56–58.

[90] Петричкович В. М. *О линейных делителях и приводимости многочленных матриц* // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 195–200.

[91] Петричкович В.М. *Розкладність на множники кліткового-трикутних та кліткового-діагональних много-*

членних матриць // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 38–40.

[92] Петричкович В.М. *Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц* // Мат. заметки. – 1985. – **37**, вып. 6. – С. 789–796.

[93] Петричкович В. М. *О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – **26**. – С. 13–16.

[94] Петричкович В.М. *Про паралельні факторизації многочленних матриць* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 9. – С. 18–21.

[95] Петричкович В. М. *Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.

[96] Петричкович В. М. *Разложение многочленных матриц на множители с заданными каноническими диагональными формами* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – **26**. – С. 17–19.

[97] Петричкович В.М. *Паралельні факторизації многочленних матриць* // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.

[98] Петричкович В.М. *Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників* // Алгебра і топологія. – Львів: Львів. держ. ун-т. – 1996. – С. 112–124.

[99] Петричкович В.М. *Про подільність матриць і їх одночасну звідність до канонічних діагональних форм* // Доп. АН УРСР. – 1996. – № 1. – С. 5–6.

[100] Петричкович В. М. *Критерій діагоналізовності пари матриць над кільцем головних ідеалів спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями* // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 860–862.

[101] Петричкович В. М. *Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 96–100.

[102] Петричкович В. М. *Про узагальнену еквівалентність пар матриць* // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. Прикл. математика. – 1998. – № 346. – С. 57–59.

[103] Петричкович В. М. *Про діагоналізовність наборів матриць та єдиність їх факторизацій* // Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 177–180.

[104] Петричкович В. М. *Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних та діагональних форм і їх застосування* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 2. – С. 15–22.

[105] Петричкович В. М. *Про напівскалярну еквівалентність многочленних матриць* // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 115–118.

[106] Петричкович В. М. *Про подільність та факторизацію матриць* // Мат. студії. – 2004. – **22,** № 2. – С. 115–120.

[107] Петричкович В. М. *Про кратності характеристичних коренів, степені елементарних дільників та факторизацію многочленних матриць* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 7–17.

[108] Петричкович В.М. *Про розв'язки матричних многочленних рівнянь та їх число* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2009. – Вип. 7. – С. 52–56.

[109] Петричкович В. М., Прокип В.М. *О факторизации многочленных матриц над произвольным полем* // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478–483.

[110] Петричкович В. М., Прокіп В.М., Прухницький Ф.А. *Про спільні унітальні дільники із заданою канонічною діагональною формою матричних многочленів* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – **37**. – С. 28–32.

[111] Прокип В.М. *О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц* // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.

[112] Прокіп В.М. *Про розклад матричного многочлена на множники із заданими характеристичними многочленами* // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 3. – С. 5–6.

[113] Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ.* – М.: Иностр. лит., 1963. – 228 с.

[114] Сахнович Л.А. *О факторизации передаточных оператор-функций* // Докл. АН СССР. –1996. – **226**, № 4. – С. 781–784.

[115] Сергейчук В.В., Галинский Д.В. *Классификация пар линейных операторов в четырехмерном векторном пространстве* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 413–430.

[116] Стренг Г. *Линейная алгебра и ее применения:* Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 454 с.

[117] Супруненко Д.А, *Группы матриц.* – М.: Наука, 1972. – 352 с.

[118] Супруненко Д.А, Тышкевич Р.И. *Перестановочные матрицы* . Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 104 с.

[119] Туганбаев А.А. *Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца* // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, вып. 6. – С. 219–220.

[120] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ:* Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 654 с.

[121] Шаваровський Б.З. *Канонічна форма многочленної матриці з одним елементарним дільником відносно напівскалярно еквівалентних перетворень* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 10. – С. 33–36.

[122] Шаваровский Б.З. *Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований* // Мат. заметки. – 1998. – **64**, № 5. – С. 769–782.

[123] Шаваровский Б.З. *О разложимых многочленных матрицах* // Мат. заметки. – 2000. – **68**, №4. – С. 593–607.

[124] Шестопал В.Е. *Решение матричного уравнения* $AX - XB = C$ // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 449–451.

[125] Щедрик В.П. *Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Мат. студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 115–120.

[126] Щедрик В.П. *Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 1. – С. 23–28.

[127] Щедрик В.П. *О разложении матричных многочленов на множители.* – Препринт. Ин-т прикл. проблем механики и математики АН УССР, Львов. – 1990. – 22 с.

[128] Baratchart L. *Un theoreme de factorization et son application a la representation des systemes cycliques causaux* // C. R. Acad. Sci. Paris. Serie I. – 1982. – **295**, № 3. – P. 223–226.

[129] Barnett S. *Regular polynomial matrices having relatively prime determinants*// Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1969. – **65**, № 3. – P. 585–590.

[130] Barnett S. *Matrices in control theory with applications to linear programming.* – London: Van Nostrand Reingold Company, 1971. – 222 p.

[131] Barnett S. *Regular greatest common divisor of two polynomial matrices*// Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – **72**. – P. 161–165.

[132] Barnett S. *Introduction to mathematical control theory.* – London: Clarendon Press; Oxford University Press, 1975. – 264 p.

[133] Bass H. *K-theory and stable algebra* // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5–60.

[134] Belitskii G.R., Sergeichuk V.V. *Complexity of matrix problems* // Linear Algebra Appl. – 2003. – **361**. – P. 203–222.

[135] Belitskii G., Bondarenko V.M., Lipyanski R., Plachotnik V.V., Sergeichuk V.V. *The problems of classifying pairs of forms and local algebras with zero cube radical are wild* // Linear Algebra Appl. – 2005. – **402**. – P. 135–142.

[136] Bell J.H. *Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrices equation* // Amer. J. Math. – 1949. – **71**. – P. 249–257.

[137] Bell J.H. *Families of solutions of the unilateral matrix equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – **1**. – P. 151–159.

[138] Bougaut B. *Anneaux quasi-Euclidiens* // These de docteur troisime cycle. – 1976. – 67 p.

[139] Brierley S.D.,Lee E.B. *Solution to an equation and its application* // Int. J. Contr. – 1984. – **b40**, No 6. – P. 1065–1075.

[140] Brown W. C. *Matrices over commutative rings.* – New York: Marcel Dekker, Inc., 1993. – 282 p.

[141] Carlson D. *Inequalities relating the degrees of elementary divisors within a matrix* // Simon Stevin, Wis–en Natuurkunding Tijdschrift. – 1970. – **44**. – P. 3–10.

[142] Carlson D. *Inequalities for the degrees of elementary divisors of modules* // Linear Algebra Appl. – 1972. – **5**. – P. 293–298.

[143] Cayley A. *A memoire on the theory of matrices* // London Phil. Trans. – 1858. – **148**. – P. 17–37.

[144] Dennis J.S., Traub J.F., Weber R.P. *The algebraic theory of matrix polynomials* // SIAM J. Numer. Annal. – 1976. – **13**, № 6. – 831–845.

[145] Dias da Silva J.A., Laffey T.J. *On simultaneous similarity of matrices and related guestions* // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**. – P. 167–184.

[146] Dickson L.E. *Algebras and Their Arithmetics* – Chicago: University of Chicago Press, 1923. – 214 p.

[147] Dickson L.E. *Modern Algebraic Theories* – Chicago. – 1923. – 120 p.

[148] Dieudonne J. *Sur la reduction canonique des couples de matrices* // Bulletin de la S.M.F. – 1946. – **74**. – 130–146.

[149] Dlab V., Ringel C.M. *Canonical forms of pairs of complex matrices* // Linear Algebra Appl. – 1991. – **147**. – P. 387–410.

[150] Drozd Yu.A. *Tame and wild matrix problems* // Lect. Notes Math. – 1980. – **832**. – P. 242–258.

[151] Drozd Yu.A. *Derived tame and derived wild algebras* // Algebra Discrete Math. – 2004. – № 1. – P. 57–74.

[152] Emre E., Silverman L.M. *The equation $XR + QY = \Phi$: a characterization of solutions* // SIAM J. Control and Optimmization. – 1981. – **19**, № 1. – P. 33–38.

[153] Feinberg R.B. *Equivalence of partioned matrices* // J. Res. bur. Stand. Sect. – 1976. — **80**, № 1. – P. 89–97.

[154] Feinstein J., Bar-Ness J. *On the unidueness of the minimal solution the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$* // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**, № 2. – P. 131–134.

[155] Friedland S. *Simultaneous similarity of matrices* // Adv. in Math. – 1983 – **50**. – P. 189–265.

[156] Frobenius F.G.L. *Uber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* // Sitz.-Berl. Acad. Wiss. Phys.-Math. Klasse, Berlin. – 1896. – S. 7–16.

[157] Gaiduk T.N., Sergeichuk V.V. *Generic canonical form of pairs of matrices with zeros* // Linear Algebra Appl. – 2004. – **380**. – P. 241–251.

[158] Gerstein L.J. *A local approach to matrix equivalence* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **16**. – P. 221–232.

[159] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Spectral Analysis of Matrix Polynomials-I. Canonical Forms and Divisors*// Linear Algebra Appl. – 1978. – **20**. – P. 1–44.

[160] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Matrix polynomials.* – New York: Academic Press, 1982. – 409 p.

[161] Guralnick R.M., Lewy L.S., Odental Ch. *Elementary divisor theorem for noncommutative PIDs.* // Proc. Amer. Soc. – 1988. – **103**, № 4. – P. 1003–1011.

[162] Gustafson W.H. *Roth's theorem over commutative rings* // Linear Algebra Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251.

[163] Gustafson W.H., Zelmanowitz J.M. *On matrix equivalence and matrix equations rings* // Linear Algebra Appl. – 1979. – **27**. – P. 219–224.

[164] Hartwig R.E. *Roth's eguivalence problem in unit regular rings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **59**. – P. 39–44.

[165] Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225–236.

[166] Huang L., Liu J. *The extension of Roth's theorem for matrix eguation over a ring* // Linear Algebra Appl. – 1997. – **259**. – P. 229–235.

[167] Ingraham M.N. *On the rational solution of the matrix equation* $P(X) = A$ // J. Math. Phys. – 1934. – **13**. – P. 46–50.

[168] Ingraham M.N. *Rational method in matrix equation* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.

[169] Jacobson N. *Pseudo-linear transformation* // Ann. of Math. – 1937. – **38**, № 3. – P. 484–507.

[170] Johnson C.R., Newman M. *A condition for the diagonalizability of a partitioned matrix* // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1975. – **79B**. – P. 45–48.

[171] Kaczorek T. *Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory.* – Communications and Control Engineering, Dortrecht: Springer, 2007. – 503 p.

[172] Kaczorek T. *Realizable solutions to matrix polynomial equations* $X(z_1)A(z_2)+B(z_1)Y(z_2) = C(z_1, z_2)$ // Bulletin of the Polish Academy of sciences, technical sciences. – 1988. – **36**, № 5–6. – P. 351–356.

[173] Kaczorek T. *Zero–degre solutions to* $AX + BY = C$ *and invariant factors assigment problem* // Bulletin of the Polish Academy of sciences, technical sciences. – 1986. – **34**, № 9–10. – P. 553–558.

[174] Kaczorek T. *Solvability conditions for matrix polynomial equations* $A(z_1)X(z_2)+Y(z_1)B(z_2) = C(z_1, z_2)$ // Bulletin of the Polish Academy of sciences, technical sciences. – 1989. – **37**, № 1–2. – P. 7–19.

[175] Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.

[176] Kronecker L. *Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen* //Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phyz.-math. Klasse, Berlin. – 1890. – P. 763–76.

[177] Krupnik I. *Decomposition of a monic matrix polynomial into a product of linear factors* // Linear Algebra Appl. – 1992. – **167**. – P. 239–242.

[178] Krupnik I., Lancaster P. *Linearization, Realization, and scalar Products for regular Matrix Polynomials* // Linear Algebra Appl. – 1998. – **272**. – P. 45–57.

[179] Kučera V. *Algebraic theory of discrete optimal control for single – variable systems.I – Preliminaries* // Kybernetika. – 1973. – **9**, № 2. – P. 94–107.

[180] Kučera V. *Algebraic approach to discrete stochastic control* // Kybernetika. – 1975. – **11**, № 2. – P. 114–149.

[181] Kučera V. *Algebraic method in discrete linear estimation* // Kybernetika. – 1976. – **12**, № 3. – P. 171–191.

[182] Lancaster P., Weber R. *Jordan chains for lambda-matrices* // Linear Algebra Appl. – 1968. –**1**. – P. 325–330.

[183] Lancaster P. *Jordan chains for lambda-matrices, II* // Equations Math. – 1970. – **5**. – P. 290–293.

[184] Lancaster P., Wimmer H.K. *Zur Theorie der λ-Matrizen* // Math. Nachrichten. – 1975. – **68**. – P. 325–330.

[185] Lancaster P. *A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. I. Ordinary differential equations with constant coefficients* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**. – P. 189–211.

[186] Lancaster P. *A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. II. Ordinary differential equations with constant coefficients* // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**. – P. 213–222.

[187] Lancaster P. *Lambda-matrices and vibrating systems.* – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 196 p.

[188] Lancaster P. *Lambda-matrices and vibrating systems.* Reprint of the 1966 original [Pergamon Press, New York]. Dover Publications, nc., Mineola, NY, 2002. – 194 p.

[189] Lancaster P., Rodman L. *Algebraic Riccati Equations.* – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 492 p.

[190] Lancaster P., Tismenetsky M. *The theory of matrices with Applications.* 2d ed. – New York: Academic Press, 1985. – 570 p.

[191] Langer H. *Uber Lancasters Zerlegung von Matrizen Scharen* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – **29**, № 1. – S. 75–80.

[192] Langer H. *Factorization of operator pencils* // Acta Sci. Math. – 1976. – **38**. – S. 83–96.

[193] Levy L.S. *Invariant factor theorem for Prufer domains of finite character* // J. Algebra. – 1987 – **106**, № 2. – P. 259–264.

[194] MacDuffee C.C. *The theory of matrices.* – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1933. – 110 p.

[195] Marcus M., Underwood E.E. *A note the multiplicative property of the Smith normal form* // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1973 . – **76B**, No 3–4. – P. 205–206.

[196] Marques de Sa E. *On the invariant factors of sums integral matrices* // Port. Math. – 1989. – **46**, № 1. – P. 87–95.

[197] Marques de Sa E., Zhang Yu Lin. *On the number of invariant factors of matrix products* // Linear Algebra Appl. – 2005. – **401**. – P. 393–399.

[198] Maroulas J. *A theorem of the factorization of matrix polynomials* // Linear Algebra Appl. – 1986. – **84**. – P. 311–322.

[199] Narang Asha, Nanda V.C. *Smith normal form for matrices over Dedekind domains* // J. Indian Math. Soc. – 1978. – **42**. – P. 173–178.

[200] Narang Asha, Nanda V.C. *Factorization of matrices over Dedekind domains* // J. Indian Math. Soc. – 1979. – **43**. – P. 31–33.

[201] Narang Asha. *Smith normal form invariants of matrices* AB, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *and* A^{-1} *over Dedekind domains* // J. Indian Math. Soc. – 1981. – **45**. – P. 155–161.

[202] Newman M. *On the Smith normal form* // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1971. – **75B**. – P. 81–84.

[203] Newman M. *Integral matrices.* – New York: Academic Press, 1972. – 224 p.

[204] Newman M. *The Smith normal form of a partitioned matrix* // J. Res. Bur.Stand. Sect. – 1974. – **78B**, № 1. – P. 3–6.

[205] Newman M. *A property of equivalence* // J. Res. Bur.Stand. Sect. – 1974. – **78B**, № 2. – P. 71–72.

[206] Newman M. *A result about determinantal divisors* // Linear and Multilinear Algebra. – 1982. – **11**. – P. 363–366.

[207] Newman M. *The Smith normal form* // Linear Algebra Appl. – 1997. – **254**. – P. 367–381.

[208] Newman M., Thompson R.S. *Matrices over rings of algebraic integers* // Linear Algebra Appl. – 1991. – **145**. – P. 1–20.

[209] Pereira E. *On solvents of matrix polynomials* // Appl. Numer. Math. – 2003. – **47**, № 2. – P. 197–208.

[210] Petrychkovych V. *Generalized equivalence of pairs of matrices* // Matematychni Studii. – 1997. – **8**, № 2. – P. 147–152.

[211] Petrychkovych V. *Generalized eguivalence of pairs of matrices* // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, № 2. – P. 179–188.

[212] Petrychkovych V.M. *Standard form of pairs of matrices with respect to generalized eguivalence* // Visnyk Lviv. Univ. – 2003. – **61**. – P. 153–160.

[213] Prest M. *Elementary equivalence of* Σ*-injective modules* // Proc. London Math. Soc. – 1982. – **45**, № 1. – P. 71–88.

[214] Potter J.E. *Matrix quadratic solutions* //J. SIAM Appl.Math. – 1966. – **14**, No 3. – P. 496–501.

[215] Roth W.E. *A solution of the matrix equation* $P(X) = A$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**. – P. 579–596.

[216] Roth W.E. *On the unilateral equation in matrices* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1930. – **32**. – P. 61–80.

[217] Roth W.E. *On the equation* $P(A, X) = 0$ *in matrices* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – **35**. – P. 689–708.

[218] Roth W.E. *On the matrix equation* $X^2+XB+CX+D=0$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – **1**. – P. 586–589.

[219] Roth W.E. *The equations* $AX-YB=C$ *and* $AX-XB=C$ *in matrices* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – № 3. – P. 392–396.

[220] Sergeichuk V.V. *Canonical matrices for linear matrix problems* // Linear Algebra Appl. – 2000. – **317**. – P. 53–102.

[221] Sergeichuk V.V. *Canonical matrices and related questions* // Праці Ін-ту математики НАН України. – **57**. – К.: Ін-т математики НАН України, 2006. – 326 с.

[222] Silva F.C. *On the ivariant factors of the matrix* $XAY+B$ // Linear Algebra Appl. – 1987. – **36**. – P. 1–16.

[223] Sylvester M. *Sur les racines des matrices unitares* // Comptes Rendus. – 1882. – **94**. – P. 396–399.

[224] Sylvester M. *Sur la solutio on explicite de eguation quadratigue de Hamilton en quaternions ou en matrizen du second ordre* // Comptes Rendus. – 1884. – **99**. – P. 621–631 .

[225] Smith H.J.S. *On systems of linear indeterminate equation and congruences* // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1861. – **151**, № 2. – P. 293–326.

[226] Stewart B.M. *A note on least common and left multiples* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949.– **55**. – P. 587–591.

[227] Teichmuller O. *Der Elementarteilsatz fur nichtkommutative Ringe* // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys. – Math. Kl. – 1937. – P. 169–177.

[228] Terwilliger P. *Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other* // Linear Algebra Appl. – 2001. – **330**. – P. 149–203.

[229] Thompson R.C. *Invariant factors of complementary minors of integral matrices* // Houston J. Math. – 1979. – **5**, № 3. – P. 421–426.

[230] Thompson R.C. *Invariant factors under rank one perturbations* // Can. J. Math. – 1980. – **32**, № 1. – P. 240–245.

[231] Thompson R.C. *Smith invariants of a product of integral matrices* // Contemp. Math. – 1985. – **47**. – P. 401–435.

[232] Thompson R.C. *The Smith invariants of a matrix sum* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **78**, № 2. – P. 162–164.

[233] Treuenfels P. *On the solutions of the matrix equation* $X^2 - 2AX + B = 0$ // Amer. Math. Montly. – 1959. – **66**. – P. 145–148.

[234] Vaserstein L.N. *Bass's first stable range condition* // J. Pure and Appl. Algebra. – 1984. – **34**. – P. 319 – 330.

[235] Wedderburn J.H.M. *Non-commutative domain of integrity* // J. Reine Andrew. Math. – 1932. – **167**, № 1. – P. 129–141.

[236] Weierstrass K. *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* // Monatsh. Akad. Wiss., Berlin. – 1867. – S. 310–338.

[237] Wimmer H.K. *Jordan-Ketten und Reallslerungen rationaler Matrizen.* // Linear Algebra Appl. – 1978. – **20**. – P. 101–110.

[238] Woude van der J.W. *The generic canonical form of a regular structured matrix pencil.* // Linear Algebra Appl. – 2002. – **353**. – P. 267–288.

[239] Zaballa I. *Matrices with prescribed elements* // Linear Algebra Appl. – 1984. – **54**. – P. 131–134.

[240] Zaballa I. *Matrices with prescribed rows and invariant factors.* // Linear Algebra Appl. – 1987. – **87**. – P. 113–146.

[241] Zaballa I. *Matrices with prescribed invariant factors and off-diagonal submatrices.* // Linear and Multilinear Algebra. – 1989. – **25**, № 1. – P. 39–54.

[242] Zabavsky B.V. *Elementary reduction of matrices over adequate domain* // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 2. – С. 115–116.

[243] Zabavsky B. *Diagonalization of matrices over ring with finite stable range* // Visnyk Lviv. Univ., Ser. Mech-Math. – 2003. – **61**. – P. 206 – 211.

[244] Zabavsky B.V. *Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range* // Algebra Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 152–165.

[245] Zabavsky B. *Diagonal reduction of matrices over rings* // Mathematical Studies: Monograph Series, Vol. XVI. – VNTL Publishers, 2012. – 250 p.

Н а у к о в е   в и д а н н я

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

Василь Михайлович Петричкович

УЗАГАЛЬНЕНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ І ЇХ НАБОРІВ ТА ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ

Монографія

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Редактор *Д. С. Бриняк*
Комп'ютерна верстка *О. М. Романів*